Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

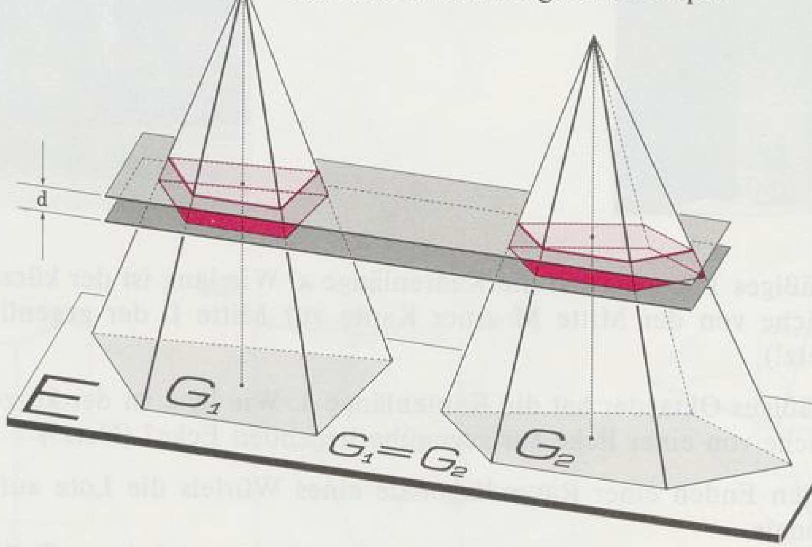
7.5 Das Volumen der Pyramide

7.5 Das Volumen der Pyramide

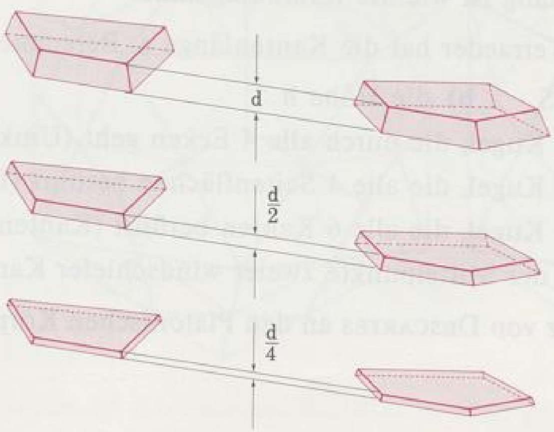
Die Volumenformel fürs Prisma V = Gh. Wir haben sie gefunden, indem wir das Prisma mit einem geeigneten Quader verglichen haben. Bei der Pyramide ist die Volumenbestimmung schwieriger. Wir benutzen ein Verfahren, das der italienische Mathematiker BONAVENTURA CAVALIERI (1598? bis 1647) entwickelt hat. Seine Überlegung: Körper müßten gleiches Volumen haben, wenn sie in jeder Höhe gleich große Querschnittsflächen haben. Diese Idee hat er 1635 in einem Geometriebuch veröffentlicht, sie ist heute unter dem Namen **Cavalierisches Prinzip** bekannt:

Stehen zwei Körper auf derselben Ebene E und erzeugt jede zu E parallele Ebene bei beiden Körpern gleich große Schnittflächen, dann haben beide Körper dasselbe Volumen.

CAVALIERI: volumengleiche Körper



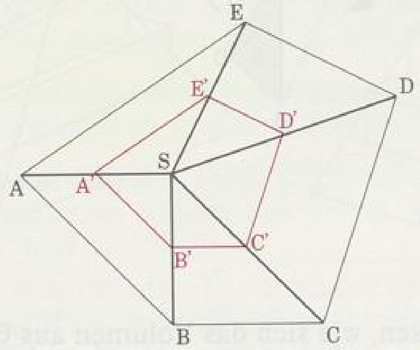
Zum exakten Beweis muß man die höhere Mathematik bemühen. Deshalb können wir dieses Prinzip hier nur anschaulich verständlich machen. Wir stellen uns vor, daß zwei Körper mit gleich großen Grundflächen und Höhen auf einer Ebene E stehen. Durch Ebenen, die parallel sind zu E, schneiden wir sie in Scheiben der Dicke d. Die Scheiben sind näherungsweise Prismen mit paarweise gleich großen Grundflächen und Höhen. Die Näherung ist um

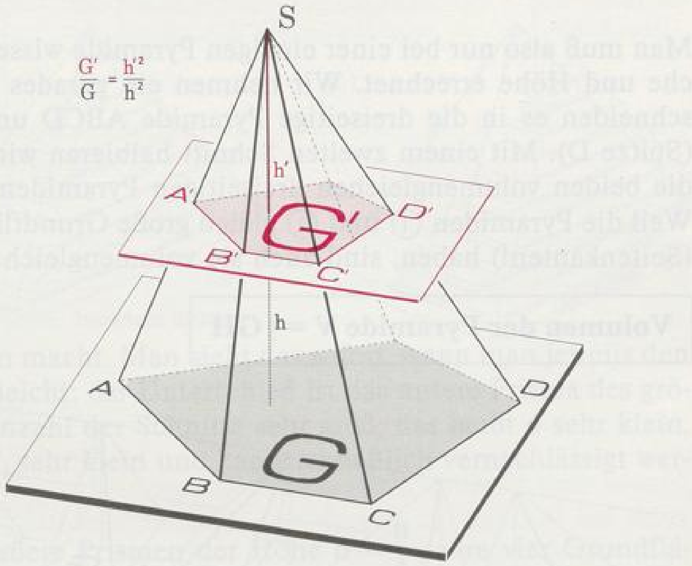


so besser, je dünner die Scheiben sind. Sehr dünne Scheiben in gleicher Höhe haben ungefähr dasselbe Volumen. Wenn zwei Körper aus paarweise volumengleichen Scheiben bestehen, dann haben sie dasselbe Volumen.
Mit dem Satz von CAVALIERI bestimmen wir jetzt das Volumen von Pyramiden. Wir untersuchen die Schnittflächen, die entstehen, wenn man eine Pyramide parallel zur Grundfläche schneidet. Für sie gilt:

Die Inhalte paralleler Schnittflächen einer Pyramide verhalten sich wie die Quadrate der Abstände der Flächen von der Spitze.

ABCDE ~ A'B'C'D'E'



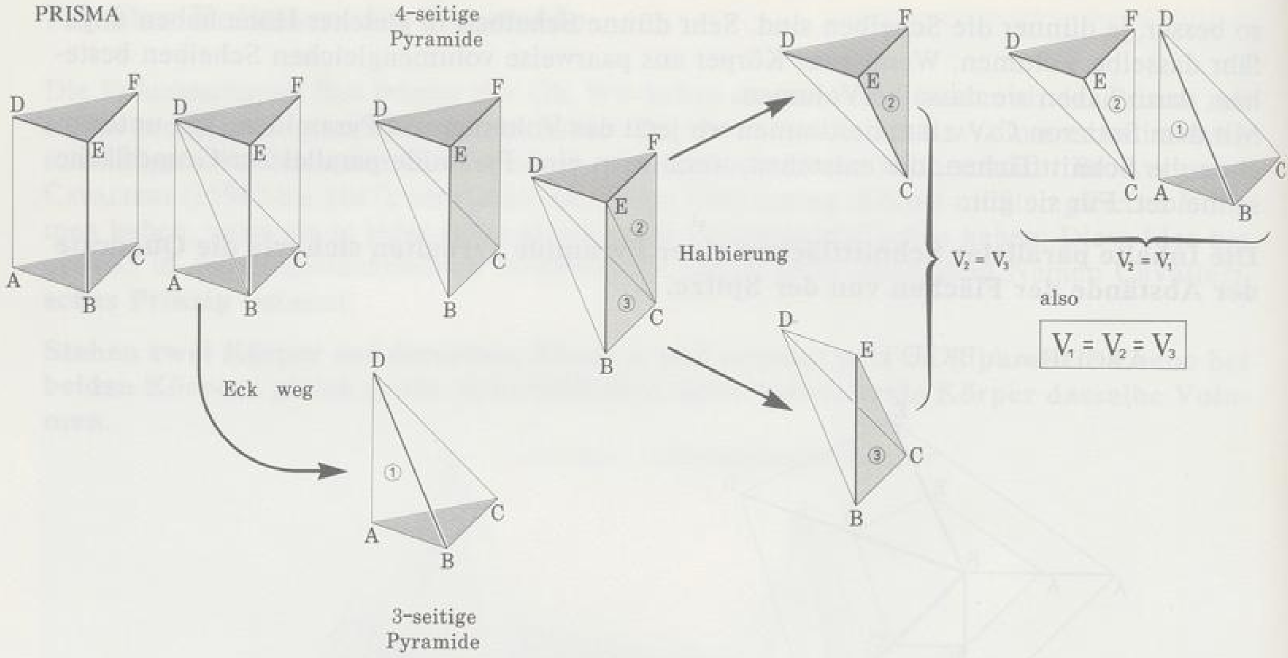


Beweis: G′ entsteht aus G bei zentrischer Streckung mit dem Zentrum S und dem Streckfaktor $m = \frac{h'}{h}$, also gilt

$$G' = m^2 G \quad \text{oder} \quad \frac{G'}{G} = m^2 = \frac{h'^2}{h^2}.$$

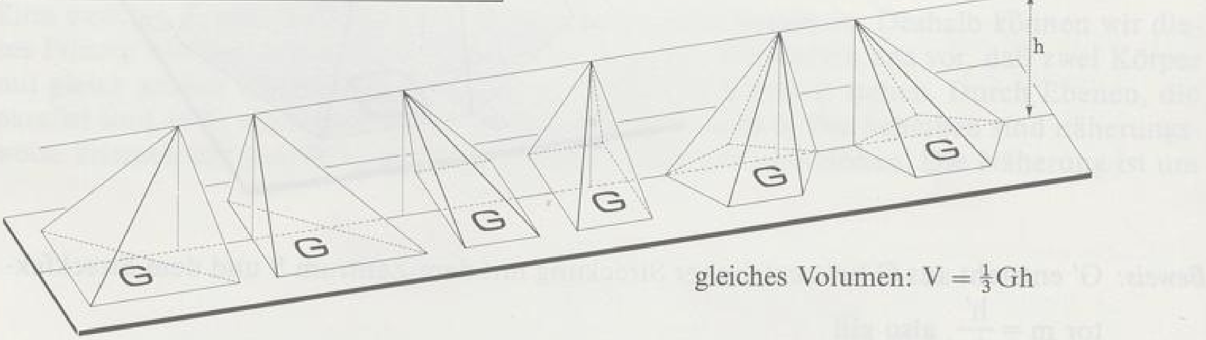
Deshalb haben zwei Pyramiden mit gleich großen Grundflächen und gleichen Höhen in jeder Höhe gleich große Schnittflächen. Mit CAVALIERI können wir dann sagen:

Pyramiden mit gleich großen Grundflächen und gleichen Höhen haben dasselbe Volumen.



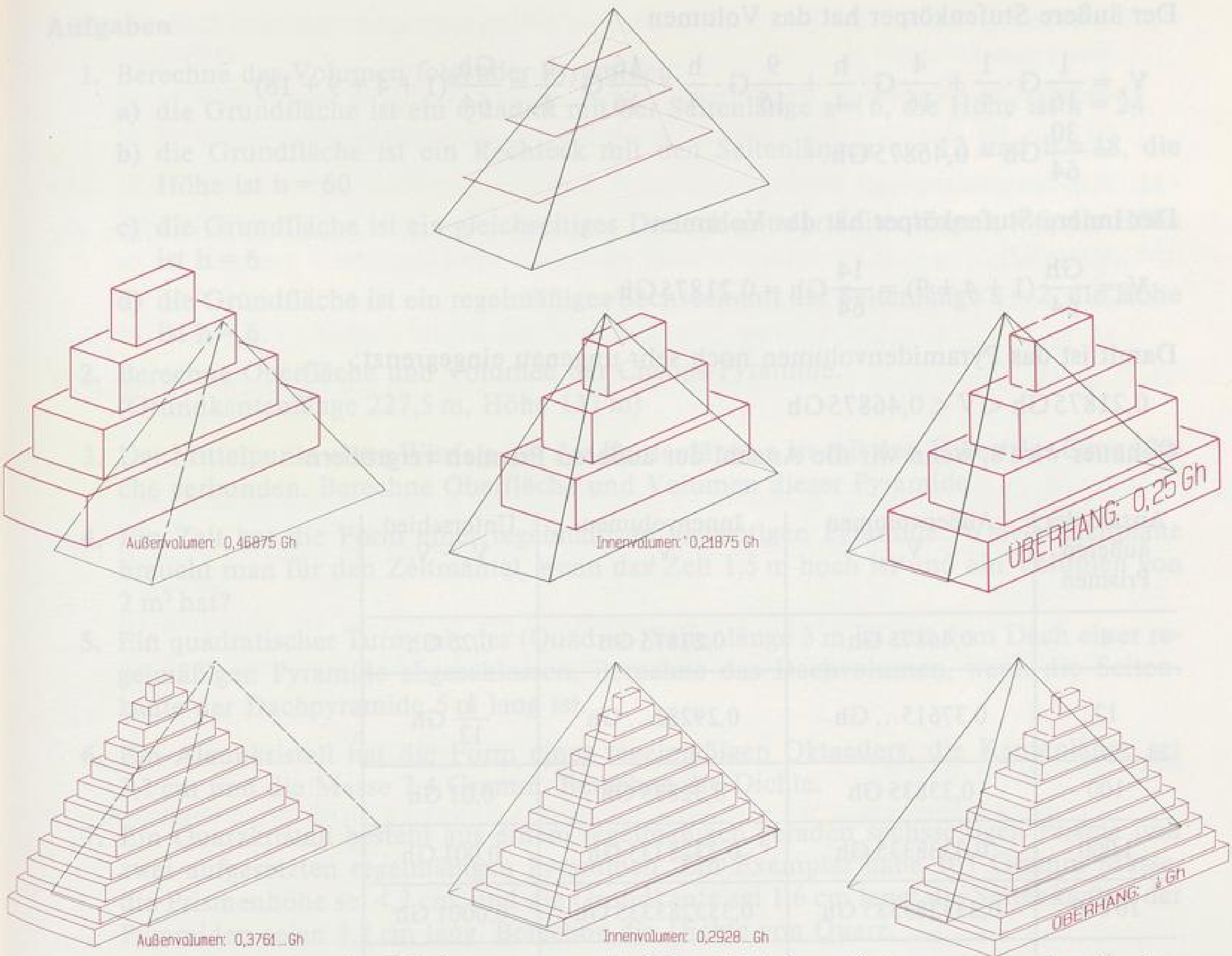
Man muß also nur bei einer einzigen Pyramide wissen, wie sich das Volumen aus Grundfläche und Höhe errechnet. Wir nehmen ein gerades dreiseitiges Prisma ABCDEF und zerschneiden es in die dreiseitige Pyramide ABCD und in die vierseitige Pyramide BCDEF (Spitze D). Mit einem zweiten Schnitt halbieren wir die vierseitige Pyramide; es entstehen die beiden volumengleichen dreiseitigen Pyramiden BCDE und CDEF, das heißt $V_2 = V_3$. Weil die Pyramiden ① und ② gleich große Grundflächen (Kongruenz!) und gleiche Höhen (Seitenkanten!) haben, sind auch sie volumengleich: $V_1 = V_2$. Also gilt für jede Pyramide:

$$\boxed{\textbf{Volumen der Pyramide } V = \tfrac{1}{3} GH}$$



gleiches Volumen: $V = \frac{1}{3} Gh$

Die Formel läßt sich auch noch anders herleiten. Dazu brauchen wir passende Stufenkörper. Wir schneiden die Pyramide parallel zur Grundfläche in gleichen Abständen durch. Auf die Grundfläche und auf jede Schnittfläche stellen wir ein Prisma der Höhe d. Alle Prismen bilden zusammen einen Stufenkörper. Sein Volumen V_a ist größer als das Volumen V der Pyramide. Dienen die Schnittflächen als Deckflächen von Prismen der Höhe d, so entsteht ein anderer Stufenkörper. Sein Volumen V_i ist kleiner als das Pyramidenvolumen V. Unabhängig von der Anzahl der Schnitte gilt $V_i < V < V_a$. Das Pyramidenvolumen wird um so ge-



nauer eingegrenzt, je mehr Schnitte man macht. Man sieht das sofort, wenn man jeweils den äußeren und inneren Stufenkörper vergleicht: der Unterschied ist das untere Prisma des größeren Stufenkörpers. Macht man die Anzahl der Schnitte sehr groß, das heißt d sehr klein, dann wird auch der Unterschied $V_a - V_i$ sehr klein und kann schließlich vernachlässigt werden: dann ist $V_i \approx V \approx V_a$.

Bei drei Schnitten ergeben sich vier äußere Prismen der Höhe $d = \frac{h}{4}$, ihre vier Grundflächen sind

$$G_1 = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 G = \left(\frac{1}{4}\right)^2 G = \frac{1}{16} B$$

$$G_2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 G = \frac{4}{16} G$$

$$G_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 G = \frac{9}{16} G$$

$$G_4 = G = \frac{16}{16} G$$

Der äußere Stufenkörper hat das Volumen

$$V_a = \frac{1}{16}G \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{16}G \cdot \frac{h}{4} + \frac{9}{16}G \cdot \frac{h}{4} + \frac{16}{16}G \cdot \frac{h}{4} = \frac{Gh}{64}(1+4+9+16)$$
$$= \frac{30}{64}Gh = 0{,}46875\,Gh.$$

Der innere Stufenkörper hat das Volumen

$$V_i = \frac{Gh}{64}(1+4+9) = \frac{14}{64}Gh = 0{,}21875\,Gh.$$

Damit ist das Pyramidenvolumen noch sehr ungenau eingegrenzt:

$$0{,}21875\,Gh < V < 0{,}46875\,Gh$$

Genauer wird's, wenn wir die Anzahl der äußeren Prismen vergrößern:

Anzahl der äußeren Prismen	Außenvolumen V_a	Innenvolumen V_i	Unterschied $V_a - V_i$
4	0,46875 Gh	0,21875 Gh	0,25 Gh
12	0,37615… Gh	0,29282… Gh	$\frac{1}{12}$ Gh
100	0,33835 Gh	0,32835 Gh	0,01 Gh
1 000	0,3338335 Gh	0,3328335 Gh	0,001 Gh
10 000	0,333383335 Gh	0,333283335 Gh	0,0001 Gh
n	$\frac{1}{3}Gh\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$	$\frac{1}{3}Gh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$	$\frac{1}{n}$ Gh

Macht man n immer größer, dann unterscheidet sich der Faktor hinter $\frac{1}{3}$Gh sowohl bei V_a als auch bei V_i beliebig wenig von 1. Wieder ergibt sich

Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3}Gh$.

Aufgaben

1. Berechne das Volumen folgender Pyramiden:
   a) die Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 6$, die Höhe ist $h = 24$
   b) die Grundfläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 12$ und $b = 18$, die Höhe ist $h = 60$
   c) die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 6$, die Höhe ist $h = 6$
   d) die Grundfläche ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $a = 2$, die Höhe ist $h = 6$.
2. Berechne Oberfläche und Volumen der Cheops-Pyramide. (Grundkantenlänge 227,5 m, Höhe 137 m)
3. Der Mittelpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge a ist mit den Ecken der Grundfläche verbunden. Berechne Oberfläche und Volumen dieser Pyramide.
4. Ein Zelt hat die Form einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide. Wieviel Zeltplane braucht man für den Zeltmantel, wenn das Zelt 1,5 m hoch ist und ein Volumen von 2 m^3 hat?
5. Ein quadratischer Turm mit der (Quadrat-)Seitenlänge 3 m ist mit dem Dach einer regelmäßigen Pyramide abgeschlossen. Berechne das Dachvolumen, wenn die Seitenkante der Dachpyramide 5 m lang ist.
6. Ein Alaunkristall hat die Form eines regelmäßigen Oktaeders, die Kantenlänge sei 2,1 cm und die Masse 7,4 Gramm. Berechne die Dichte.
7. Ein Quarzkristall besteht aus einem regelmäßigen geraden sechsseitigen Prisma und zwei aufgesetzten regelmäßigen Pyramiden. Ein Exemplar habe 107 Gramm Masse, die Prismenhöhe sei 4,2 cm, und die Grundkante sei 1,6 cm lang; die Seitenkanten der Pyramiden seien 3,2 cm lang. Berechne die Dichte von Quarz.
8. Berechne das Volumen eines
   a) regelmäßigen Tetraeders der Kantenlänge a
   b) regelmäßigen Oktaeders der Kantenlänge a.

   In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina?
9. Verbindet man die Endpunkte zweier windschiefer Flächendiagonalen in gegenüberliegenden Würfelflächen, so entsteht ein regelmäßiges Tetraeder.
   a) Zeichne den Würfel mit dem einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeder. Wieviel solcher Tetraeder gibt es in einem Würfel?
   b) Berechne das Volumen des einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeders in Abhängigkeit von der Würfelkante a. Welchen Bruchteil des Würfelvolumens nimmt er ein?
10. Die beiden Tetraeder von Aufgabe **9.** bilden zusammen einen Sternkörper, die »Stella Octangula«.
    a) Zeichne einen Würfel und den einbeschriebenen Sternkörper.
    b) Berechne das Volumen der Stella Octangula in Abhängigkeit von der Würfelkante a. Welchen Bruchteil des Würfelvolumens nimmt die Stella ein?

•**11.** Die Cheops-Pyramide war ursprünglich etwa 147 m hoch und hatte eine Grundkantenlänge von etwa 230 m.

a) Wieviel Prozent der Steine waren bis zur halben Höhe verbaut?

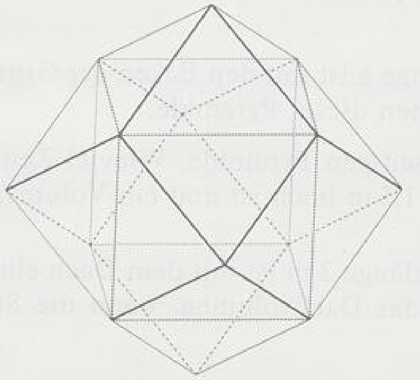
b) Gib die Höhe in Meter und in Prozent der Pyramidenhöhe an.

•**12.** RAUTENZWÖLFFLACH

Auf den Flächen eines Würfels der Kantenlänge a sitzen regelmäßige Pyramiden der Höhe a/2.

a) Zeige: 12 Rauten begrenzen den Körper.

b) Berechne Volumen und Oberfläche.



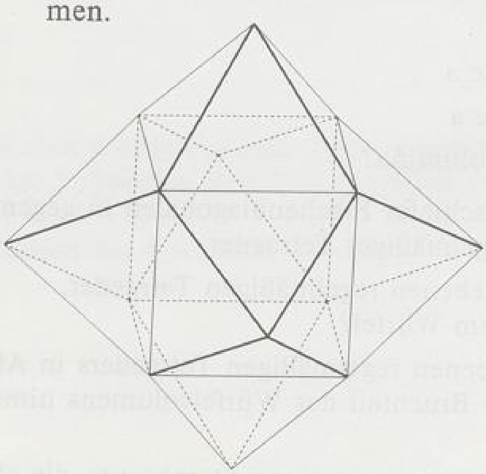
•**13.** GEDACHTER WÜRFEL

Auf den Flächen eines Würfels der Kantenlänge a sitzen gleichkantige Pyramiden.

a) Zeichne den Körper.

b) Berechne Volumen und Oberfläche.

c) Von welchem Körper sind die Pyramidenspitzen die Ecken? Berechne sein Volumen.



•**14.** Die Flächenmitten eines Würfels sind die Ecken eines regelmäßigen Oktaeders.

a) Zeichne einen Würfel und das einbeschriebene Oktaeder.

b) Berechne das Volumen des Oktaeders in Abhängigkeit von der Würfelkante a. Welchen Bruchteil des Würfelvolumens nimmt das Oktaeder ein?

•15. Die Kantenmitten eines regelmäßigen Tetraeders sind die Ecken eines regelmäßigen Oktaeders.

a) In welchem Verhältnis steht das Oktaedervolumen zum Tetraedervolumen?

b) In welchem Verhältnis stehen die beiden Oberflächeninhalte?

•16. Die Flächenmitten eines regelmäßigen Tetraeders sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders.

a) In welchem Verhältnis steht das kleine Tetraedervolumen zum großen Tetraedervolumen?

b) Welches Verhältnis bilden die beiden Oberflächeninhalte?

•17. a) Von welchem Körper sind die Ecken die Kantenmitten eines regelmäßigen Oktaeders?

b) Berechne das Verhältnis von Oktaeder- und Körpervolumen.

c) Berechne das Verhältnis der Inhalte von Oktaeder- und Körperoberfläche.

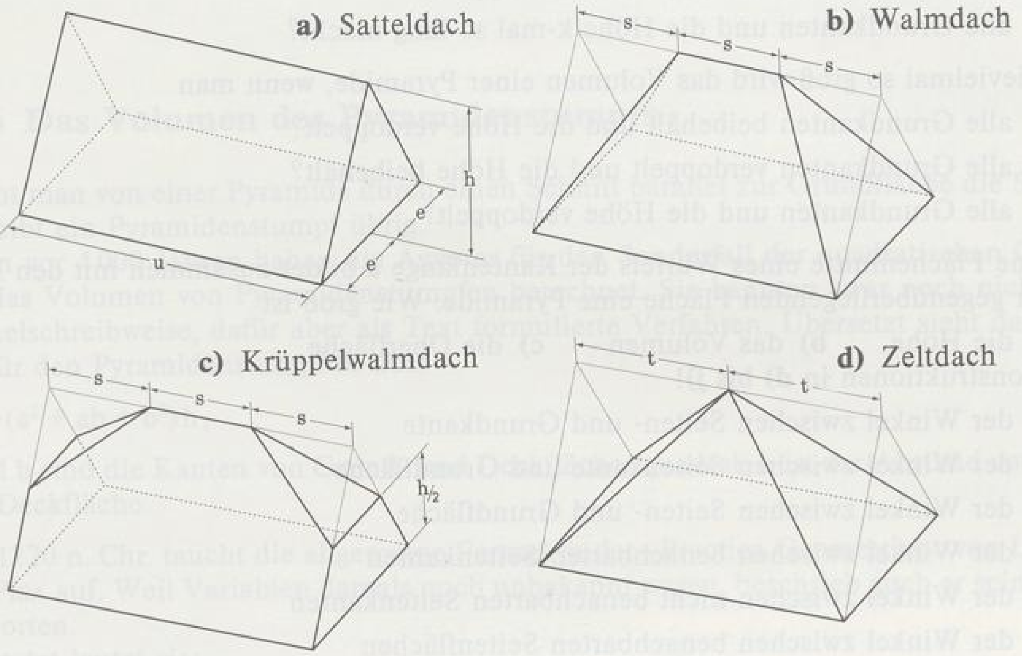
•18. a) Von welchem Körper sind die Ecken die Flächenmitten eines regelmäßigen Oktaeders?

b) Berechne das Verhältnis von Oktaedervolumen und Körpervolumen.

c) Berechne das Verhältnis der Inhalte von Oktaeder- und Körperoberfläche.

19. DACHVOLUMEN

Berechne die Rauminhalte von



Länge u. Breite 2e und Höhe h sind immer gleich:

$h = 6$ m

$e = 4$ m

$u = 12$ ~~mm~~ m

•20. WÜRFELFACETTIERUNG

Schneidet man die Ecken eines Würfels der Kantenlänge a so ab, daß Stümpfe mit regelmäßigen Vielecken als Grundflächen entstehen, so ergeben sich zwei Archimedische Körper:
Würfelstumpf 2 hat 6 Achtecke und 8 Dreiecke,
Würfelstumpf 1 hat 6 Quadrate und 8 Dreiecke.

a) Berechne die Kantenlängen der Würfelstümpfe.

b) Berechne die Oberflächen.

c) Berechne die Abstände paralleler Dreieckflächen.

d) Berechne die Rauminhalte.

21. Wievielmal so groß wird die Oberfläche einer Pyramide, wenn man

a) alle Grundkanten und die Höhe verdoppelt?

b) alle Grundkanten und die Höhe k-mal so lang macht?

22. Wievielmal so groß wird das Volumen einer Pyramide, wenn man

a) alle Grundkanten beibehält und die Höhe verdoppelt?

b) alle Grundkanten verdoppelt und die Höhe beibehält?

c) alle Grundkanten und die Höhe verdoppelt?

•23. Eine Flächenmitte eines Würfels der Kantenlänge a bildet zusammen mit den Ecken der gegenüberliegenden Fläche eine Pyramide. Wie groß ist

a) die Höhe **b)** das Volumen **c)** die Oberfläche
(Konstruktionen in **d)** bis **j)**)!

d) der Winkel zwischen Seiten- und Grundkante

e) der Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche

f) der Winkel zwischen Seiten- und Grundfläche

g) der Winkel zwischen benachbarten Seitenkanten

h) der Winkel zwischen nicht benachbarten Seitenkanten

i) der Winkel zwischen benachbarten Seitenflächen

j) der Winkel zwischen nicht benachbarten Seitenflächen?

:24. OKTAEDERWÜRFEL

Ein Würfel der Kantenlänge a und ein Oktaeder durchdringen sich so, daß sie Kantenmitten gemeinsam haben. (Abb. 156/7**e**)

a) Berechne Oberfläche und Volumen des Körpers.

b) In welchem Verhältnis steht das Oktaedervolumen zum Würfelvolumen?

c) In welchem Verhältnis steht der Oberflächeninhalt des Oktaeders zu dem des Würfels?

d) Der Oktaederwürfel hat 14 Spitzen. Von welchem Körper sind die 14 Spitzen die Ecken?

:25. Ein Würfel, ein regelmäßiges Tetraeder und ein regelmäßiges Oktaeder haben gleich große Oberflächen. In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte?

•26. Eine regelmäßige quadratische Pyramide hat die Grundkante a und die Höhe h. Auf ihrer Grundfläche steht ein Würfel der Kantenlänge x so, daß seine vier oberen Ecken auf den Höhen der Seitenflächen liegen.
Berechne x in Abhängigkeit von a und h.

27. Was für Vielfache erkennst du im Bild von LUCA PACIOLI auf Seite

* 7.6 Das Volumen des Pyramidenstumpfs

Trennt man von einer Pyramide durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche die Spitze ab, so bleibt ein Pyramidenstumpf übrig.
Schon vor 4000 Jahren haben die Ägypter für den Sonderfall der quadratischen Grundfläche das Volumen von Pyramidenstümpfen berechnet. Sie kannten zwar noch nicht unsere Formelschreibweise, dafür aber als Text formulierte Verfahren. Übersetzt sieht das Verfahren für den Pyramidenstumpf so aus:

$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$,

a und b sind die Kanten von Grund- und Deckflächenquadrat, h ist der Abstand von Grund- und Deckfläche

Erst 1220 n. Chr. taucht die allgemeine Formel in der »Practica Geometriae« von LEONARDO VON PISA auf. Weil Variablen damals noch unbekannt waren, beschrieb auch er seine Formel in Worten.
Übersetzt lautet sie:

$V = \frac{1}{3}(G + \sqrt{GD} + D)h$,

G und D sind die Inhalte von Grund- und Deckfläche, h ist der Abstand von Grund- und Deckfläche