Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

7.6 Das Volumen des Pyramidenstumpfs

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

⁝24. Oktaederwürfel

Ein Würfel der Kantenlänge a und ein Oktaeder durchdringen sich so, daß sie Kantenmitten gemeinsam haben. (Abb. 156/7**e**)

a) Berechne Oberfläche und Volumen des Körpers.

b) In welchem Verhältnis steht das Oktaedervolumen zum Würfelvolumen?

c) In welchem Verhältnis steht der Oberflächeninhalt des Oktaeders zu dem des Würfels?

d) Der Oktaederwürfel hat 14 Spitzen. Von welchem Körper sind die 14 Spitzen die Ecken?

⁝25. Ein Würfel, ein regelmäßiges Tetraeder und ein regelmäßiges Oktaeder haben gleich große Oberflächen. In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte?

•26. Eine regelmäßige quadratische Pyramide hat die Grundkante a und die Höhe h. Auf ihrer Grundfläche steht ein Würfel der Kantenlänge x so, daß seine vier oberen Ecken auf den Höhen der Seitenflächen liegen.
Berechne x in Abhängigkeit von a und h.

27. Was für Vielfache erkennst du im Bild von Luca Pacioli auf Seite

* 7.6 Das Volumen des Pyramidenstumpfs

Trennt man von einer Pyramide durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche die Spitze ab, so bleibt ein Pyramidenstumpf übrig.
Schon vor 4000 Jahren haben die Ägypter für den Sonderfall der quadratischen Grundfläche das Volumen von Pyramidenstümpfen berechnet. Sie kannten zwar noch nicht unsere Formelschreibweise, dafür aber als Text formulierte Verfahren. Übersetzt sieht das Verfahren für den Pyramidenstumpf so aus:

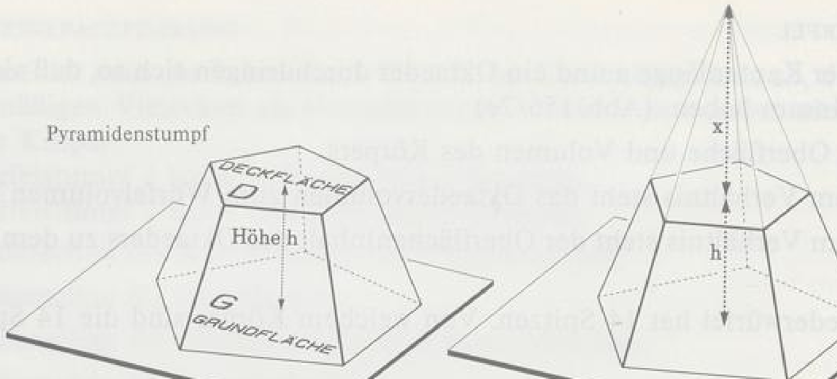
$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h,$

a und b sind die Kanten von Grund- und Deckflächenquadrat, h ist der Abstand von Grund- und Deckfläche

Erst 1220 n. Chr. taucht die allgemeine Formel in der »Practica Geometriae« von Leonardo von Pisa auf. Weil Variablen damals noch unbekannt waren, beschrieb auch er seine Formel in Worten.
Übersetzt lautet sie:

$V = \frac{1}{3}(G + \sqrt{GD} + D)h,$

G und D sind die Inhalte von Grund- und Deckfläche, h ist der Abstand von Grund- und Deckfläche



Mit der Formel fürs Pyramidenvolumen leiten wir die letzte Formel her:
Der Stumpf entsteht durch Abschneiden einer Pyramide:

$$
\begin{aligned}
V &= V_{\text{große Pyramide}} - V_{\text{kleine Pyramide}} \\
&= \tfrac{1}{3}G(h+x) - \tfrac{1}{3}Dx \\
&= \tfrac{1}{3}(Gh + Gx - Dx) = \tfrac{1}{3}[Gh + (G-D)x].
\end{aligned}
$$

Weil x im Stumpf nicht vorkommt, eliminieren wir es; aus **7.5** wissen wir

$$\frac{D}{G} = \frac{x^2}{(x+h)^2} \quad \| \quad \text{Wurzel ziehen}$$

$$\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{G}} = \frac{x}{x+h} \quad \| \quad \text{kreuzweise multiplizieren}$$

$$x\sqrt{D} + h\sqrt{D} = x\sqrt{G}$$

$$h\sqrt{D} = x\left(\sqrt{G} - \sqrt{D}\right)$$

$$x = \frac{h\sqrt{D}}{\sqrt{G} - \sqrt{D}} \quad \| \quad \text{Wurzeln im Nenner beseitigen}$$

$$\frac{h\sqrt{D}}{\sqrt{G} - \sqrt{D}} = \frac{h\sqrt{D}\left(\sqrt{G} + \sqrt{D}\right)}{\left(\sqrt{G} - \sqrt{D}\right)\left(\sqrt{G} + \sqrt{D}\right)} = \frac{\sqrt{DG} + D}{G - D} \cdot h.$$

Den letzten Bruch setzen wir fürs x oben ein

$$V = \frac{1}{3}\left[Gh + (G-D)\frac{\sqrt{DG} + D}{G - D}h\right],$$

nach Kürzen mit (G − D) ergibt sich fürs

$$\boxed{\textbf{Volumen des Pyramidenstumpfs} \quad V = \tfrac{1}{3}\left(G + \sqrt{GD} + D\right)h}$$

Sind speziell Grund- und Deckfläche Quadrate mit den Seitenlängen a und b, so geht die Formel über in

$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h,$ also in die Formel der Ägypter.

Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Stücke eines Pyramidenstumpfs:

	G	D	h	V
a)	22,5	2,5	24	
b)	16		6	74
c)	12	3		49
d)	D + 24		10	130

2. Ein Papierkorb hat die Form eines Pyramidenstumpfs mit quadratischer Grundfläche. Die Grundfläche hat eine Kantenlänge von 30 cm, die Deckfläche von 25 cm. Welches Volumen hat der 50 cm hohe Papierkorb? Welche Abmessungen haben die Seitenflächen?

3. Obelisk

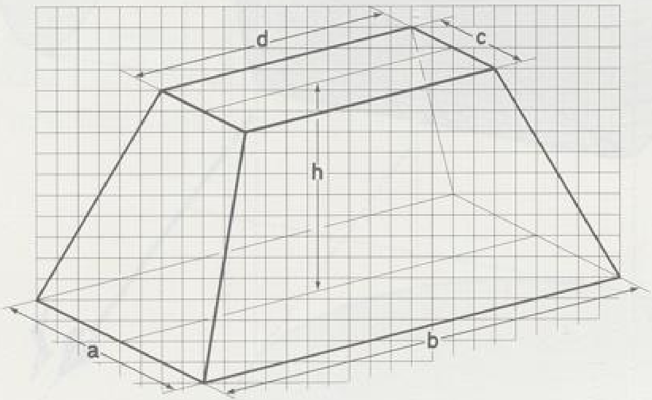
In der Mathematik nennt man ein Vielflach einen Obelisken, wenn Grund- und Deckfläche parallele Rechtecke und außerdem die Seitenflächen Trapeze sind. Ein solcher mathematischer Obelisk hat das Volumen

$V = \frac{1}{6}(2ab + 2cd + ad + bc) \cdot h.$

a) Zeige: Die Formel gilt auch dann, wenn der Obelisk zum Prisma, zur Pyramide oder zum Pyramidenstumpf entartet.

b) Walm- und Satteldach sind ebenfalls Sonderformen des Obelisken. Man bezeichnet sie auch als Keile. Bestimme die Volumenformel für den Keil aus der Obeliskenformel.

c) Leite die Obeliskenformel her.



4. Auf der Place de la Concorde in Paris steht ein ägyptischer Obelisk aus Luxor aus Granit.
Seine Form: Auf einem quadratischen Pyramidenstumpf steht eine Pyramide, deren Grundfläche die Deckfläche des Stumpfs ist.
Berechne Volumen und Masse aus den Daten:

Grundkante	2,42 m
Deckkante	1,45 m
Stumpfhöhe	21,6 m
Gesamthöhe	23 m
Dichte	2,68 g/cm³.

5. Als einfache Näherungsformel fürs Volumen des Pyramidenstumpfs verwendet man gelegentlich

$V' = \frac{1}{2}(G + D) \cdot h.$

a) Vergleiche V′ und V für einen Pyramidenstumpf mit $G = 18$, $D = 8$ und $h = 10$.

b) In welchem Verhältnis müssen G und D stehen, damit die Näherungsformel den richtigen Wert ergibt?