



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

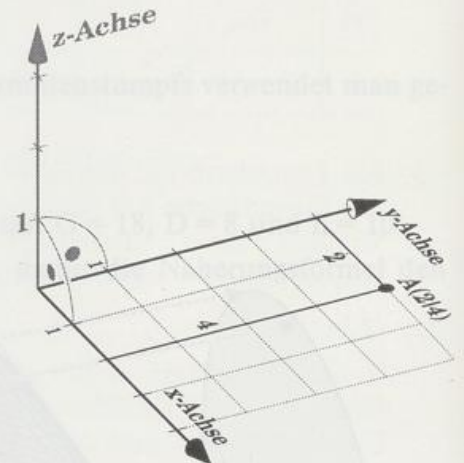
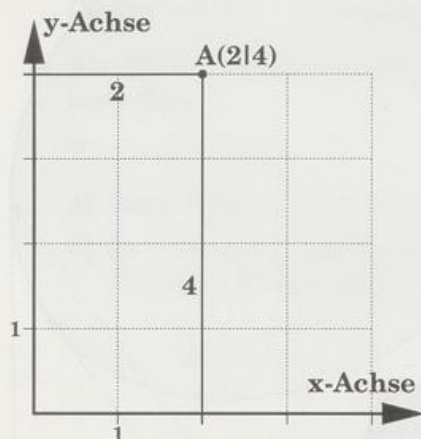
8.1 Grund- und Aufrißdarstellungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83924](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83924)

8.1 Grund- und Aufrißdarstellungen

8.1.1 Darstellung von Punkten; Normalrisse

Will man die Lage eines Punkts in der Ebene festlegen, so führt man gewöhnlich ein Koordinatensystem ein und gibt die Koordinaten des Punkts an. Man kommt zum Beispiel zum Punkt $A(2|4)$, indem man 2 Einheiten in x-Richtung und 4 Einheiten in y-Richtung geht. Meistens stehen x- und y-Achse aufeinander senkrecht, meistens sind die Maßeinheiten auf beiden Achsen gleich (Kartesisches Koordinatensystem).



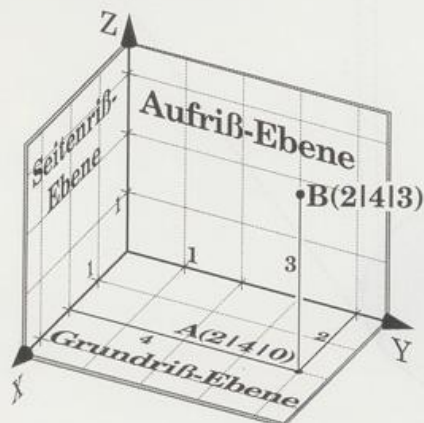
Etwas schwieriger wirds im Raum. Hier braucht man ein dreidimensionales Koordinatensystem. Es entsteht, wenn man das ebene x-y-System erweitert um eine z-Achse; diese steht normalerweise senkrecht auf der x- und y-Achse und hat dieselbe Maßeinheit.

Zum Punkt $B(2|4|3)$ findet man, indem man 2 Einheiten in x-Richtung, 4 Einheiten in y-Richtung und 3 Einheiten in z-Richtung geht. Auch im x-y-z-System heißen die Zahlen 2, 4 und 3 Koordinaten:

2 ist die x-Koordinate oder der x-Wert, 4 ist die y-Koordinate oder der y-Wert, 3 ist die z-Koordinate oder der z-Wert, von Punkt B.

Den Punkt $A(2|4)$ im x-y-System schreibt man im x-y-z-System jetzt $A(2|4|0)$.

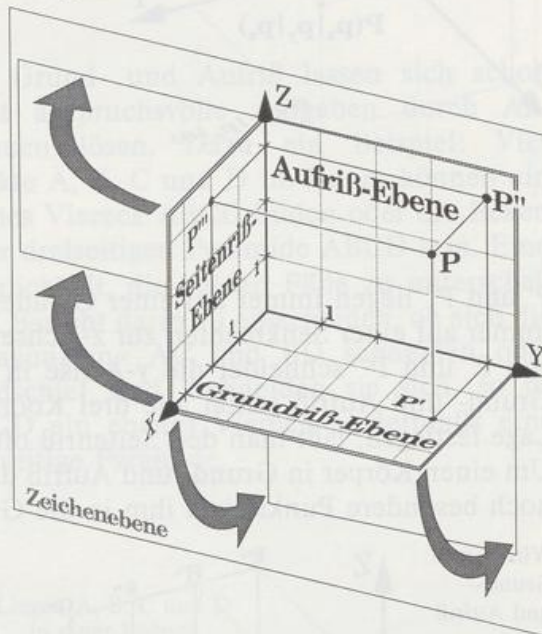
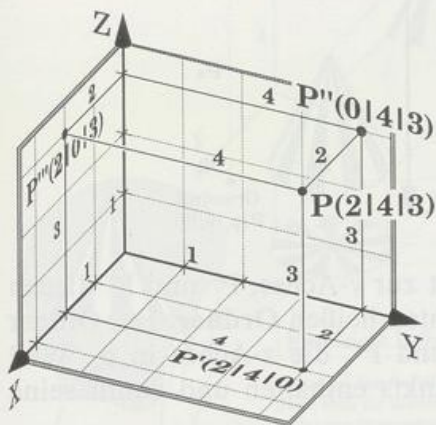
Zwei Koordinatenachsen spannen eine Koordinatenebene auf. Die x-y-Ebene heißt **Grundriß-Ebene**, alle ihre Punkte haben den z-Wert 0. Die y-z-Ebene heißt **Aufriß-Ebene**, alle ihre Punkte haben den x-Wert 0. Die x-z-Ebene heißt **Seitenriß-Ebene**, alle ihre Punkte haben den y-Wert 0.



Die eigenartige Bezeichnung *Riß* rührt her von dem alten Wort *ritzen* für Zeichnen oder Schreiben. Diese Bedeutung lebt noch in Wörtern wie *Umriß*, *Abriß*, *Verriß*, *Reißzeug* und *Reißbrett* sowie im Englischen *to write*.

Die 3 (positiven) Koordinaten lassen sich auch deuten als Abstände von den Riß-Ebenen. So liegt Punkt $B(2|4|3)$ 2 Einheiten vor der Aufriß-Ebene, 4 Einheiten vor der Seitenriß-Ebene, 3 Einheiten über der Grundriß-Ebene.

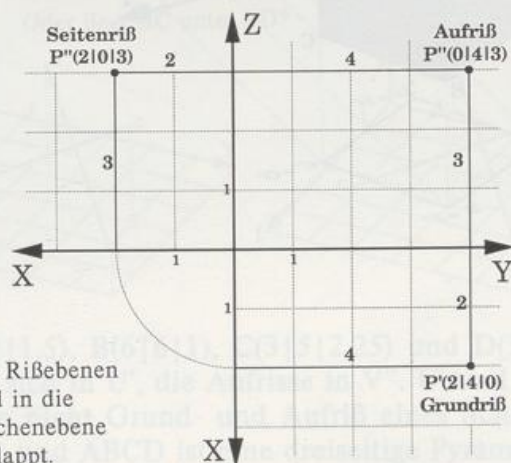
Beleuchtet man den Punkt P mit Licht, das parallel zu einer Rißachse einfllt, also senkrecht auf eine Riß-Ebene trifft, so entsteht in der Riebene ein Schatten von P ; er heißt **Normalriß** des Punkts. Der Normalriß in der Grundrißebene heißt **Grundriß**, wir kennzeichnen ihn mit einem hochgestellten Strich. Punkt $P(2|4|3)$ hat also den Grundriß $P'(2|4|0)$ und entsprechend den **Aufriß** $P''(0|4|3)$ und den **Seitenriß** $P'''(2|0|3)$. In der Fachsprache heißen Risse auch **senkrechte Projektionen**.



In dem rechts oben abgebildeten räumlichen Koordinatensystem sieht man die Koordinaten nicht in wahrer Größe: die x-Einheit erscheint kleiner als die beiden andern Einheiten. Ein mastreues Bild der Rißebenen entsteht, wenn man sie um die Riachsen in die Zeichenebene klappt.

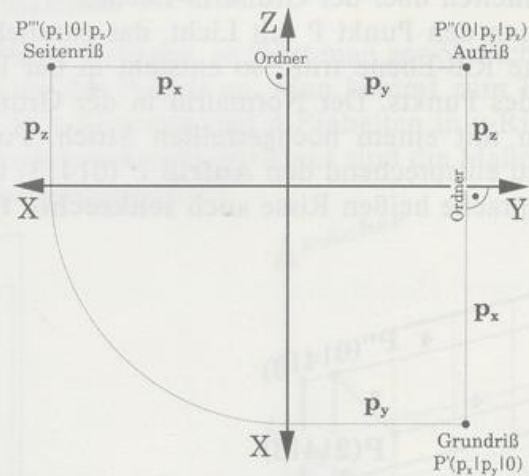
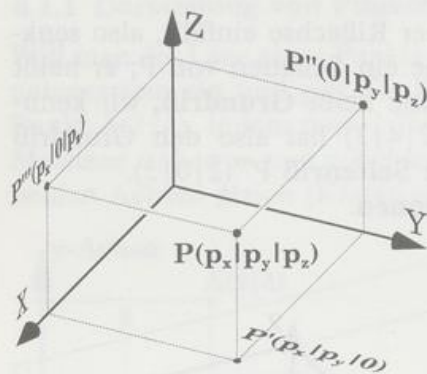
Die Aufrißebene stellen wir uns schon in der Zeichenebene vor. Die Grundrißebene klappen wir um die y-Achse nach unten und die Seitenrißebene um die z-Achse nach links.

Die drei Risse des Punkts $P(2|4|3)$



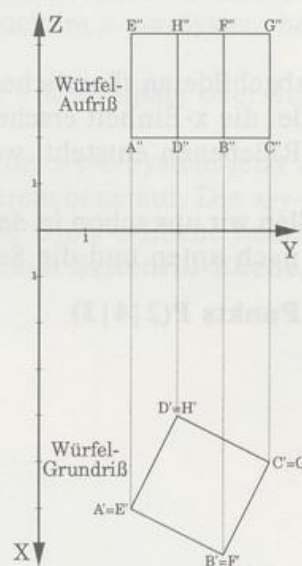
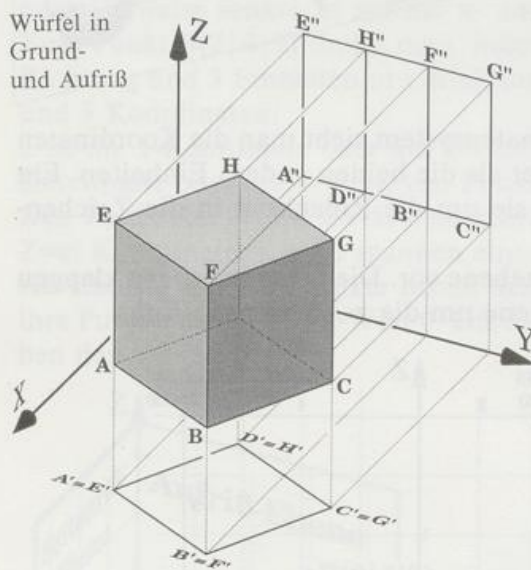
Die Rißebenen sind in die Zeichenebene geklappt.

Die nächsten beiden Bilder zeigen allgemein den Zusammenhang zwischen den Koordinaten p_x , p_y und p_z eines Punkts und seinen Rissen P' , P'' und P''' .



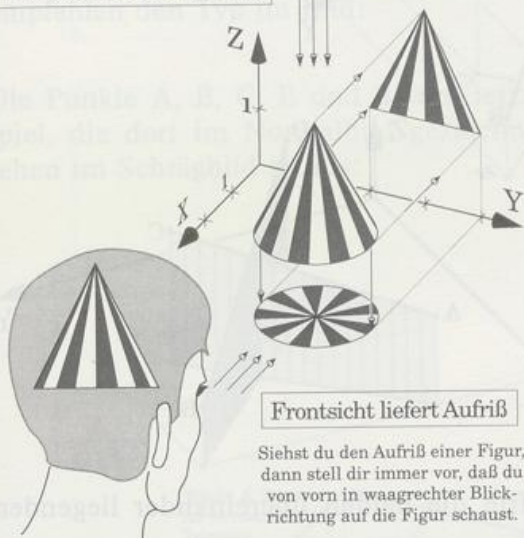
P' und P'' liegen immer auf einer Geraden, die senkrecht ist zur y -Achse, P'' und P''' liegen immer auf einer Senkrechten zur z -Achse. Solche Senkrechten heißen **Ordner**. Der Ordner von P' und P'' schneidet die y -Achse in p_y , der von P'' und P''' die z -Achse in p_z . Weil Grund- und Aufriß schon alle drei Koordinaten eines Punkts enthalten und damit seine Lage festlegen, läßt man den Seitenriß oft weg.

Um einen Körper in Grund- und Aufriß darzustellen, projiziert man seine Ecken oder sonst noch besondere Punkte von ihm in die Grund- und Aufrißebene.



Siehst du den Grundriß einer Figur, dann stell dir immer vor, daß du von oben senkrecht auf die Figur runterschaust.

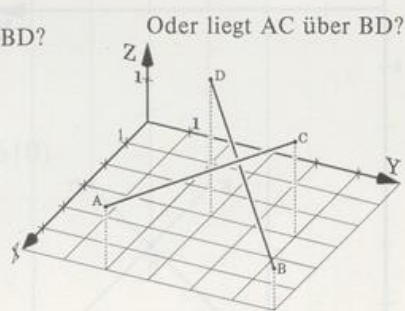
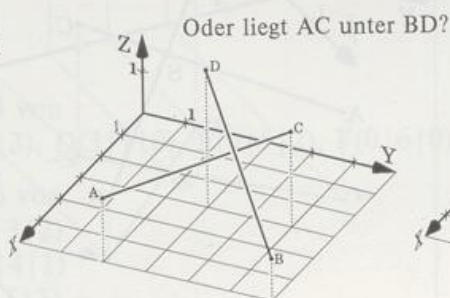
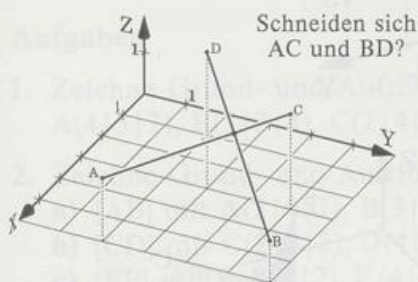
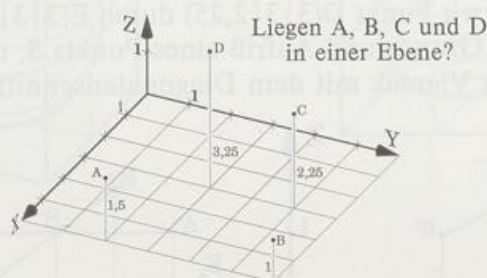
Draufsicht liefert Grundriß



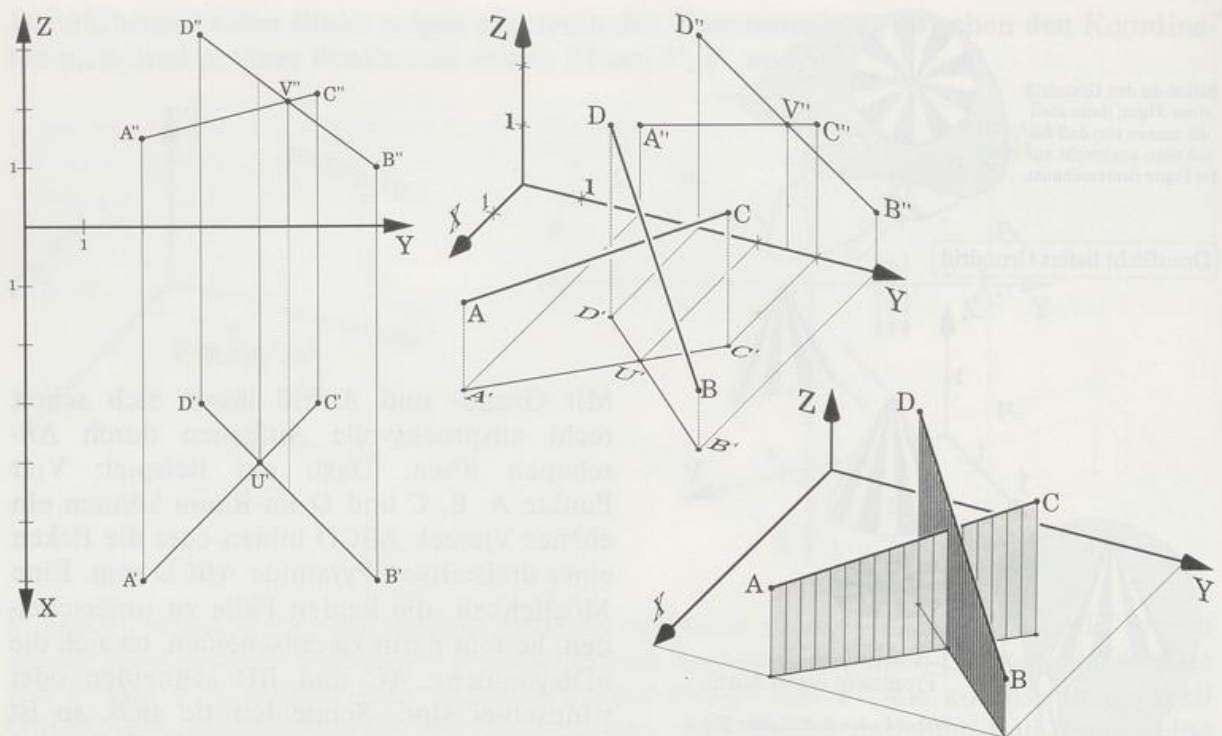
Frontsicht liefert Aufriß

Siehst du den Aufriß einer Figur, dann stell dir immer vor, daß du von vorn in waagrechter Blickrichtung auf die Figur schaust.

Mit Grund- und Aufriß lassen sich schon recht anspruchsvolle Aufgaben durch Anschauen lösen. Dazu ein Beispiel: Vier Punkte A, B, C und D im Raum können ein ebenes Viereck ABCD bilden oder die Ecken einer dreiseitigen Pyramide ABCD sein. Eine Möglichkeit, die beiden Fälle zu unterscheiden, besteht darin zu entscheiden, ob sich die »Diagonalen« AC und BD schneiden oder windschief sind. Schneiden sie sich, so ist ABCD ein ebenes Viereck, andernfalls eine dreiseitige Pyramide.



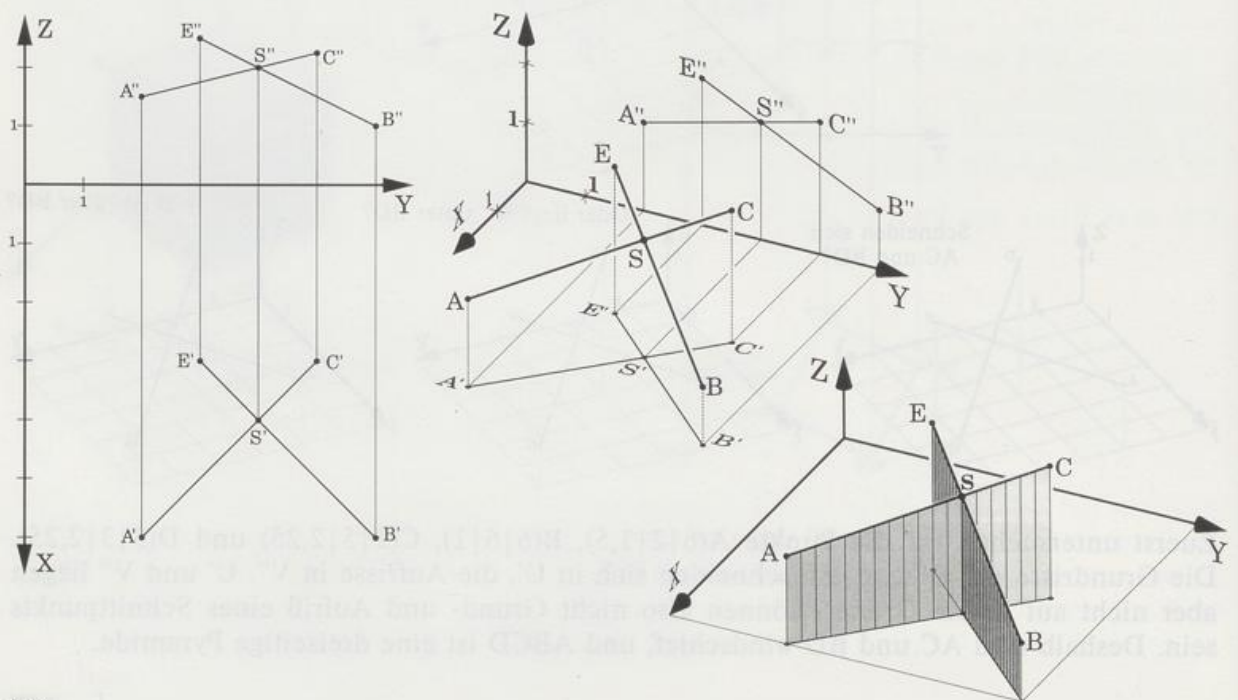
Zuerst untersuchen wir die Punkte $A(6|2|1,5)$, $B(6|6|1)$, $C(3|5|2,25)$ und $D(3|3|2,25)$. Die Grundrisse der Diagonalen schneiden sich in U' , die Aufrisse in V'' . U' und V'' liegen aber nicht auf einem Ordner, können also nicht Grund- und Aufriß eines Schnittpunkts sein. Deshalb sind AC und BD windschief, und ABCD ist eine dreiseitige Pyramide.



Ein Blick auf den Ordner durch U' zeigt im Aufriß die beiden übereinander liegenden Punkte auf AC und BD: BD liegt **über** AC.

Ein Blick auf den Ordner durch V'' zeigt im Grundriß die beiden zugehörigen Punkte auf AC und BD: BD liegt **vor** AC.

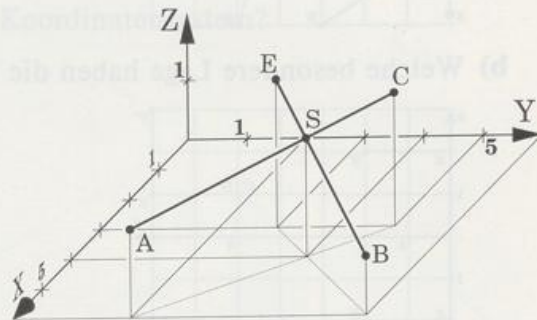
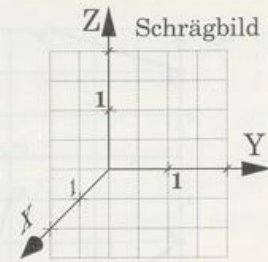
Im zweiten Fall ersetzen wir Punkt $D(3|3|2,25)$ durch $E(3|3|2,5)$. Jetzt liegen S' und S'' auf einem Ordner, sind also Grund- und Aufriß eines Punkts S , dem Schnittpunkt von AC und BD. ABCE ist ein ebenes Viereck mit dem Diagonalschnittpunkt $S(4|4|2)$.



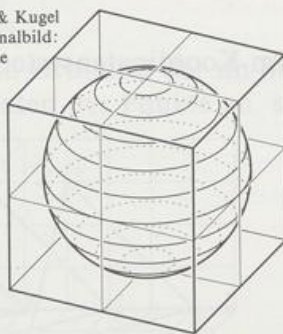
Veranschaulichung in Koordinatensystemen

Grund- und Aufriß allein sind oft wenig anschaulich. Einen besseren Raumeindruck von einer Figur liefern Normal- und Schrägbilder. Fürs Heft eignet sich besonders ein Koordinatensystem im Schrägbild; es ist leicht zu zeichnen, die Karolinien sind praktische Hilfslinien. Wir empfehlen den Typ im Bild:

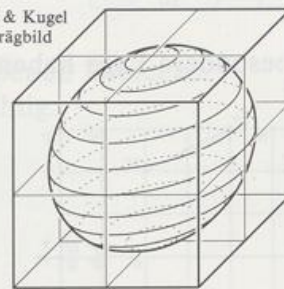
Die Punkte A, B, C, E und S vom letzten Beispiel, die dort im Normalbild gezeichnet sind, sehen im Schrägbild so aus:



Würfel & Kugel
im Normalbild:
Trimetrie



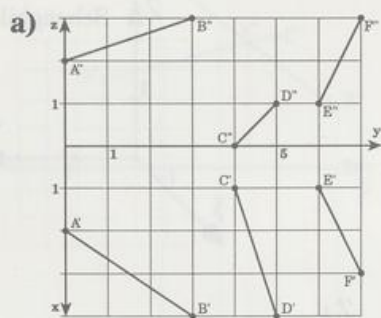
Würfel & Kugel
im Schrägbild



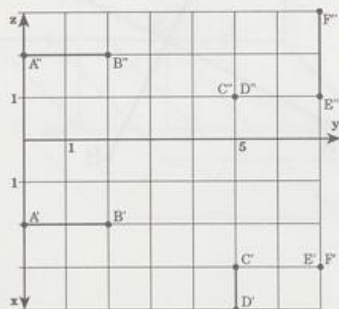
Aufgaben

1. Zeichne Grund- und Aufriß von
 $A(4|3|2)$, $B(3|2|4)$, $C(2|4|3)$, $D(3|1|0)$, $E(0|5|2)$, $F(0|6|0)$
2. Zeichne Grund- und Aufriß von
 - a) $[AB]$ mit $A(2|0|1)$, $B(3|3|2)$
 - b) $[CD]$ mit $C(2|4|3)$, $D(4|4|1)$
 - c) $[EF]$ mit $E(0|7|2)$, $F(4|5|3)$
3. Zeichne Grund- und Aufriß des Dreiecks
 - a) ABC mit $A(1|1|11)$, $B(4|2|3)$, $C(2|4|2)$
 - b) DEF mit $D(3|7|3)$, $E(0|5|3)$, $F(4|6|0)$
 - c) GHI mit $G(1|7|0)$, $H(4|9|3)$, $I(1|9|0)$

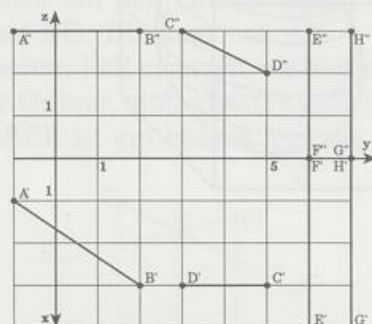
4. Ermittle die Koordinaten der Punkte und zeichne die Strecken im Schrägbild.



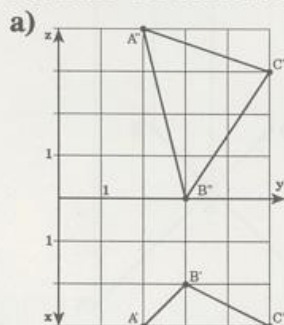
b) Welche besondere Lage haben die Strecken im Koordinatensystem?



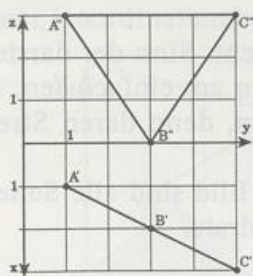
c) Welche besondere Lage haben die Strecken im Koordinatensystem?



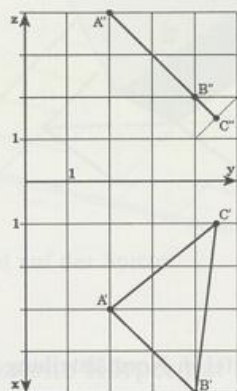
5. Ermittle die Koordinaten der Punkte und zeichne die Dreiecke im Schrägbild.



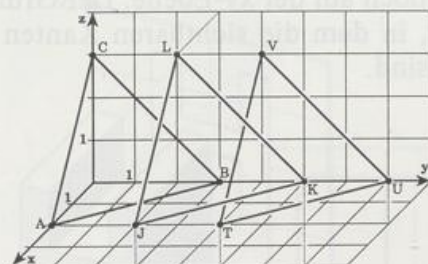
b) Welche besondere Lage hat das Dreieck im Koordinatensystem?



c) Welche besondere Lage hat das Dreieck im Koordinatensystem?

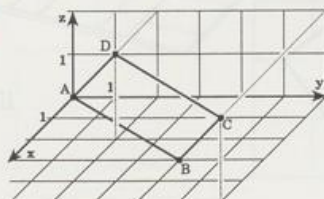


6. Zeichne Auf- und Grundriß der im Schrägbild gegebenen Dreiecke. Gib die Koordinaten der Punkte an, sie sind ganzzahlig.

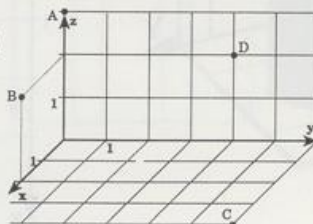


7. Untersuche, ob das Viereck ABCD eben ist, und lies gegebenenfalls den Schnittpunkt S der Diagonalen ab.

a)



b)



- c) $A(1|-1|0)$, $B(3|0|2)$, $C(2,5|3,5|3)$, $D(0|3|0)$
 d) $A(3,5|1|2)$, $B(1,5|2,5|0)$, $C(0,5|5|0)$, $D(3,5|4,5|4)$

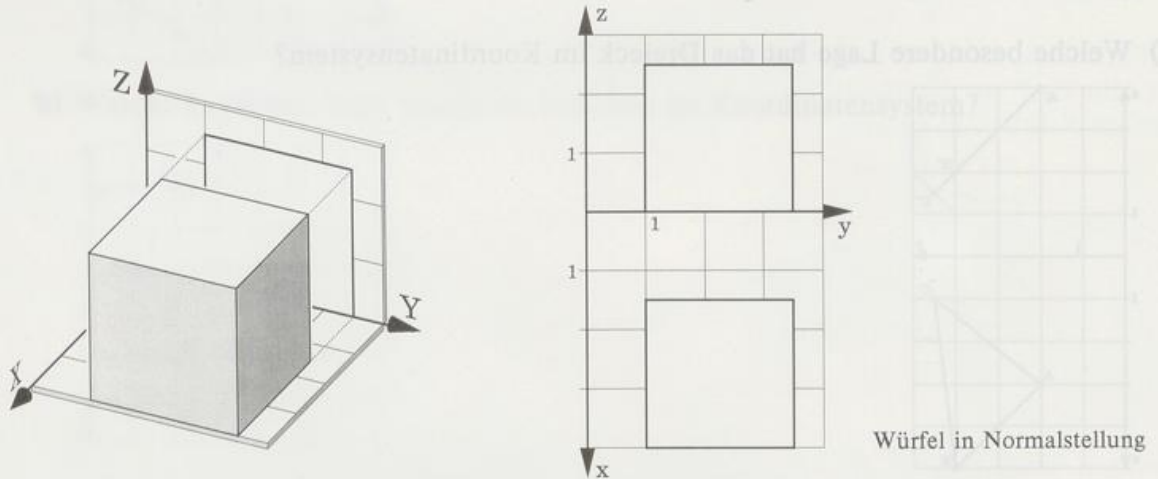
8. Bestimme die fehlende Koordinate so, daß das Viereck ABCD eben ist:

- a) $A(2|0|1)$, $B(0|3,5|0)$, $C(2|4,5|4)$, $D(3,5|0|?)$
 b) $A(0|0|0)$, $B(1,5|2|2)$, $C(3|1,5|3)$, $D(0|?|2)$

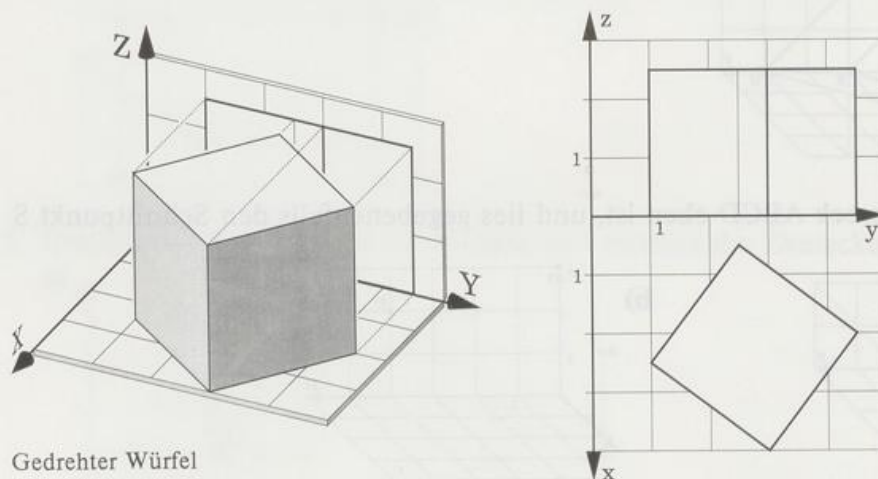
8.1.2 Grund- und Aufriß einfacher Körper

Bisher haben wir nur ebene Figuren in Grund- und Aufriß untersucht. Sinn der darstellenden Geometrie ist es, Körper maßtreu abzubilden. Die Risse werden am einfachsten, wenn möglichst viele Seitenflächen parallel zu Koordinatenebenen liegen, denn deren Strecken und Winkel sieht man maßtreu.

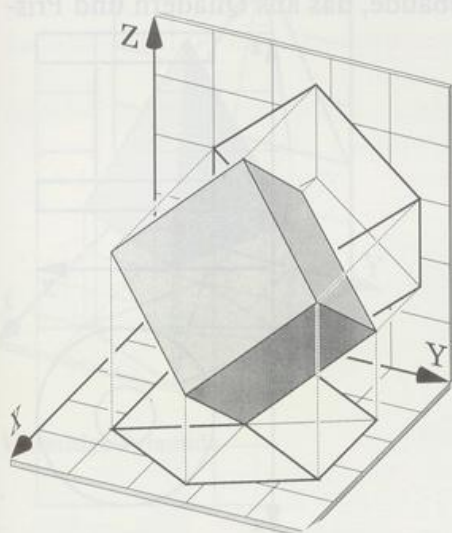
Wir beginnen mit dem einfachsten Körper, dem Würfel. Im ersten Bild sind alle Seitenflächen parallel zu Koordinatenebenen: Grund- und Aufriß sind Quadrate.



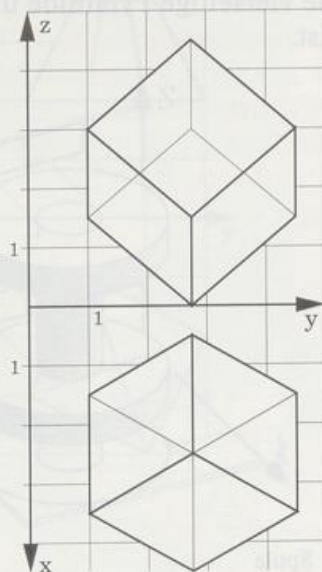
Im zweiten Bild ist derselbe Würfel gedreht, steht aber noch auf der xy-Ebene. Der Grundriß ist das gedrehte Quadrat, der Aufriß ist ein Rechteck, in dem die sichtbaren Kanten dick und die hintere (verdeckte) Kante dünner gezeichnet sind.



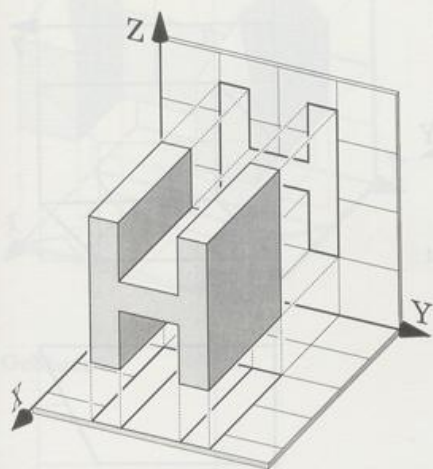
Im dritten Bild steht dieser Würfel auf einer Ecke. Jetzt ist keine Seitenfläche mehr parallel zu einer Koordinatenebene: Grund- und Aufriß sind Sechsecke.



Würfel auf der Spitze



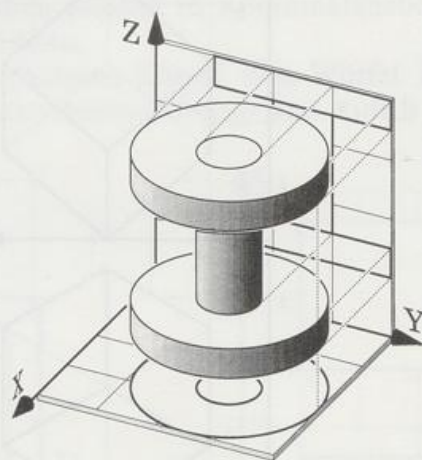
Der zweite Körper hat ein H-Profil. Er ist zwar etwas komplizierter, aber seine Seitenflächen sind alle parallel zu Koordinatenebenen.



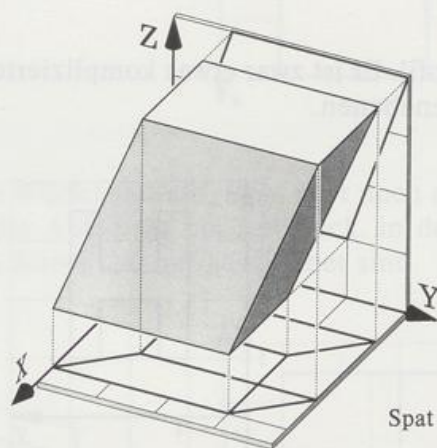
H-Profil



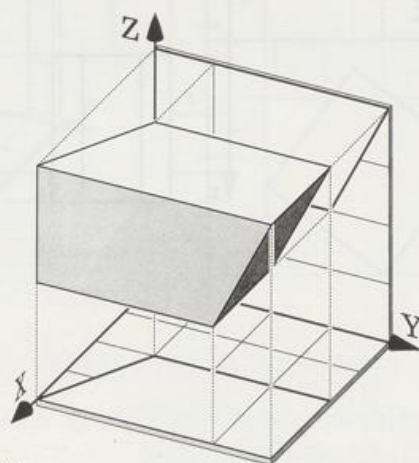
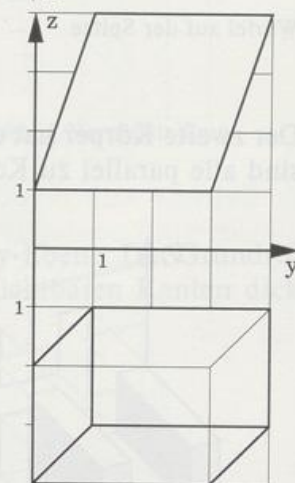
Die nächsten Bilder zeigen Körper mit Seitenflächen, die keine rechten Winkel mehr bilden, aber immer noch eine Seitenfläche parallel zur Grundrißebene haben: eine Spule, ein Spat, ein Sechseck, eine vierseitige Pyramide und ein Gebäude, das aus Quadern und Prismen zusammengesetzt ist.



Spule

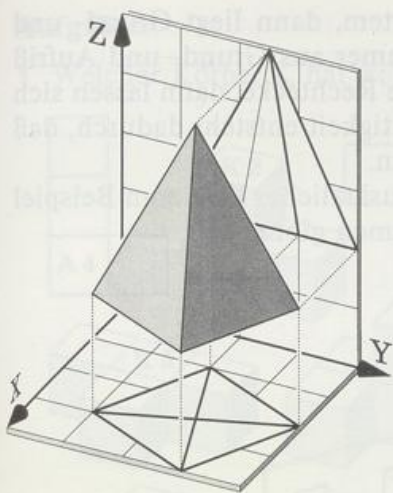


Spat

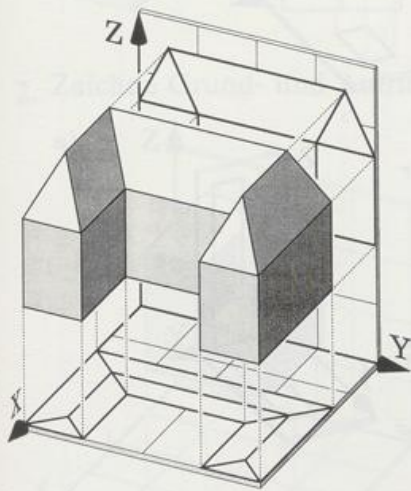
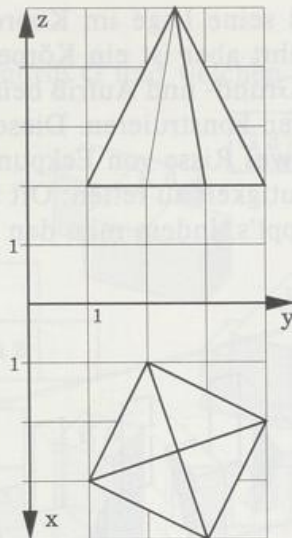


Sechseck
verschnittener Quader

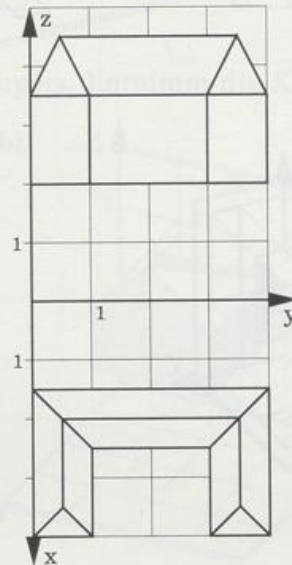




Vierseitige Pyramide



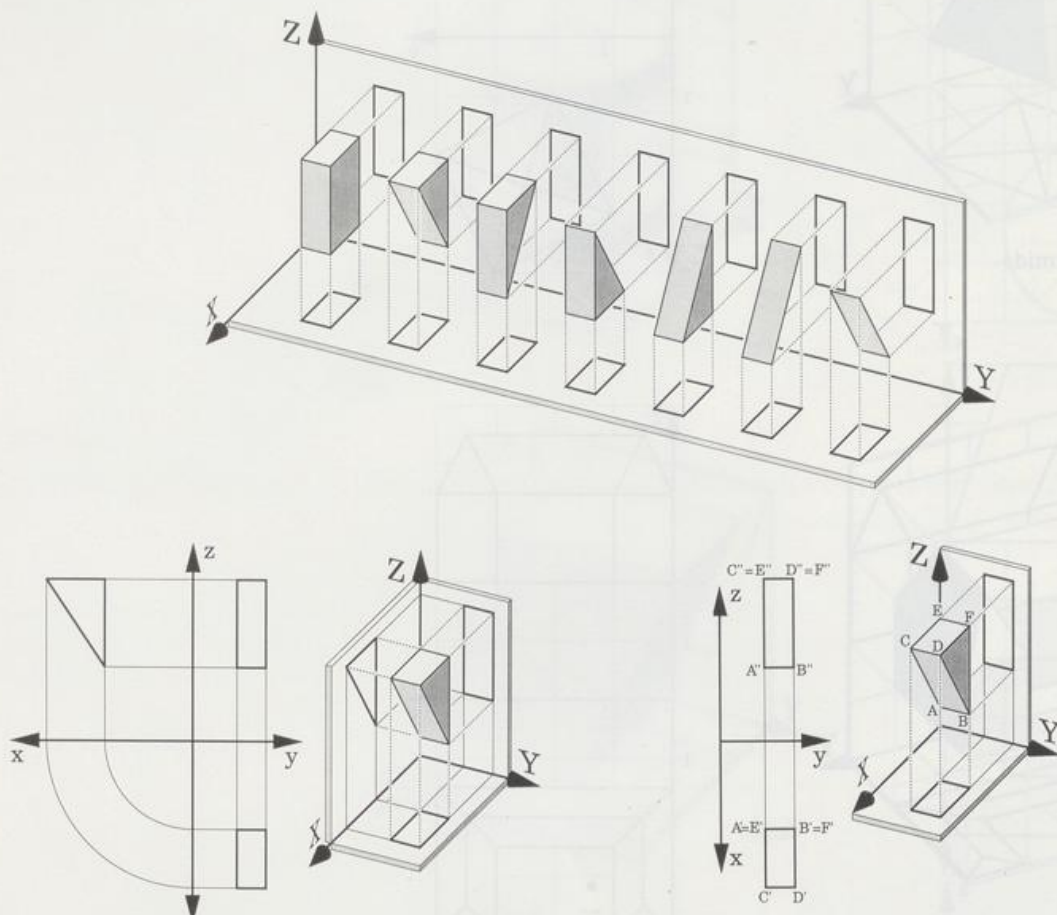
Gebäude



3. Zeichne Grund- und Aufsicht des beschriebenen Körpers in die Koordinaten (nicht vergrößern):
- Eine Kugel mit Radius 3, die alle Koordinatenachsen berührt.
 - Einen Würfel auf der xy-Ebene mit dem Punkt $P(0|1|0)$ und $Q(1|5|0)$.
 - Eine gerade vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche steht auf der xy-Ebene, sie hat die Höhe 5 und die Eckpunkte $P(2|2|0)$ und $Q(3|7|0)$.

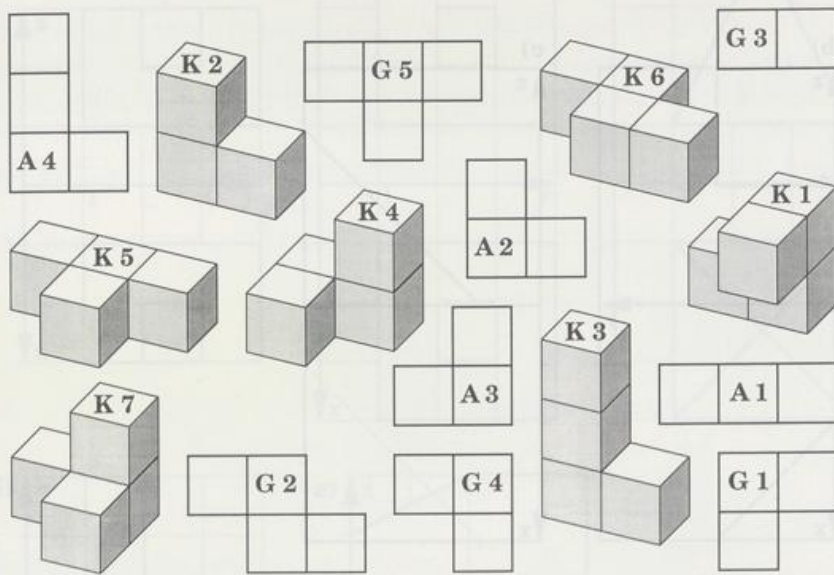
Kennt man einen Körper und seine Lage im Koordinatensystem, dann liegt Grund- und Aufriß eindeutig fest. Umgekehrt aber ist ein Körper nicht immer aus Grund- und Aufriß eindeutig konstruierbar: Sind Grund- und Aufriß beispielsweise Rechtecke, dann lassen sich daraus sieben räumliche Figuren konstruieren. Diese Mehrdeutigkeit entsteht dadurch, daß auf **einem** Ordner **mehr als zwei** Risse von Eckpunkten liegen.

Doch es gibt Mittel, die Eindeutigkeit zu retten: Oft tut's ein zusätzlicher Riß, zum Beispiel der Seitenriß. Immer aber klappt's, indem man den Ecken Namen gibt.

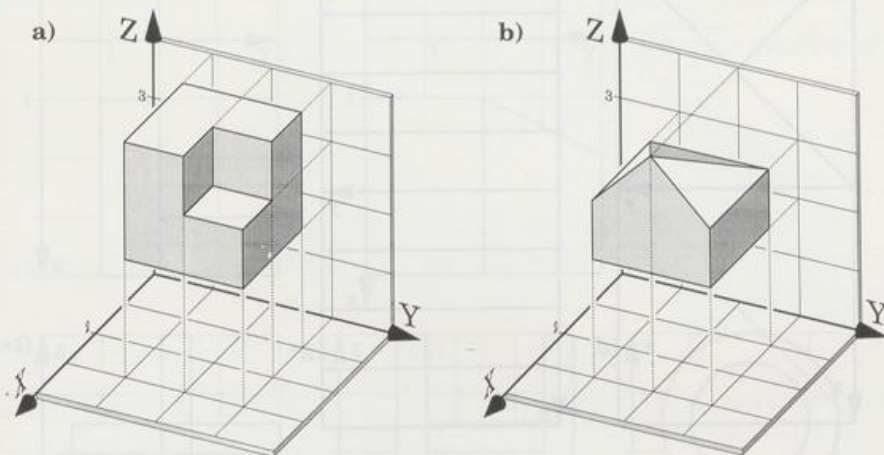


Aufgaben

1. Welcher Körper K hat welchen Grundriß G und welchen Aufriß A?



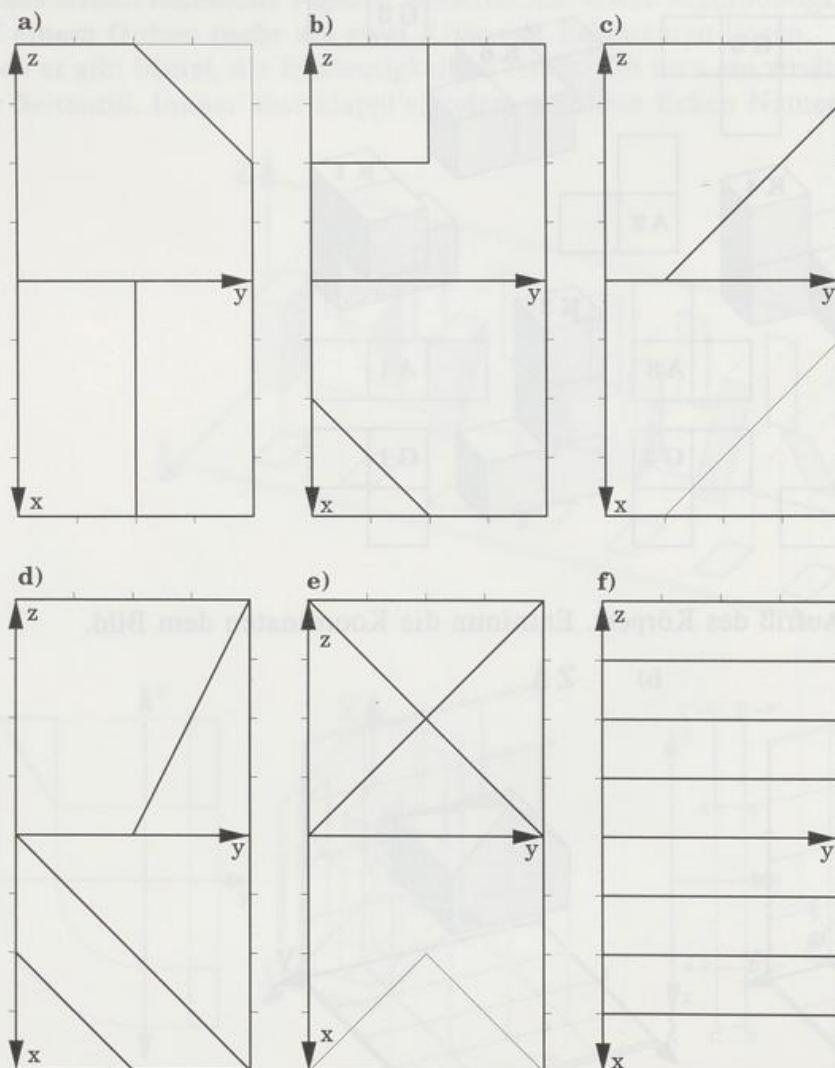
2. Zeichne Grund- und Aufriß des Körpers. Entnimm die Koordinaten dem Bild.



3. Zeichne Grund- und Aufriß des beschriebenen Körpers (Alle Koordinaten sind nicht negativ!):

- Eine Kugel mit Radius 3, die alle Koordinatenebenen berührt.
- Einen Würfel auf der xy-Ebene mit den benachbarten Ecken $(4|1|0)$ und $(1|5|0)$.
- Eine gerade vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche steht auf der xy-Ebene, sie hat die Höhe 5 und die benachbarten Ecken $(2|2|0)$ und $(3|7|0)$.

4. Von einem Würfel der Kantenlänge 4 ist ein Stück ab- und herausgeschnitten; Grund- und Aufriß zeigen den Restkörper. Zeichne ein möglichst einfaches Schrägbild des Restkörpers.

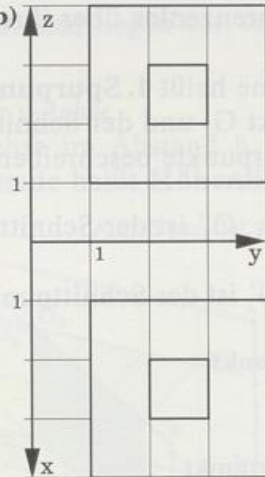


5. Zeichne ein möglichst einfaches Schrägbild von:

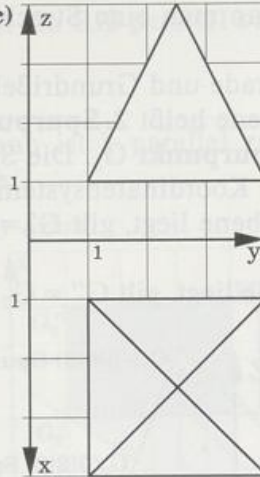
a)



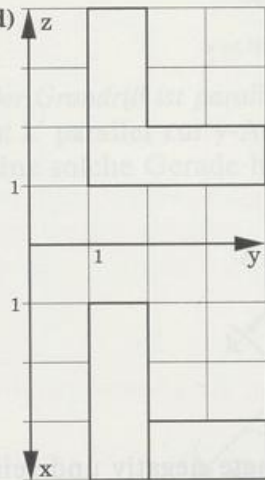
b)



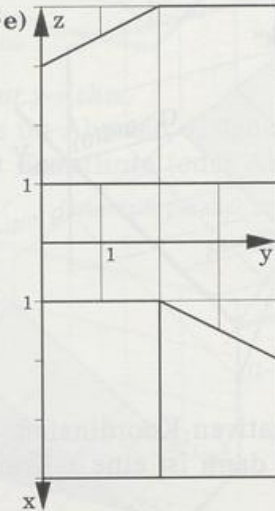
c)



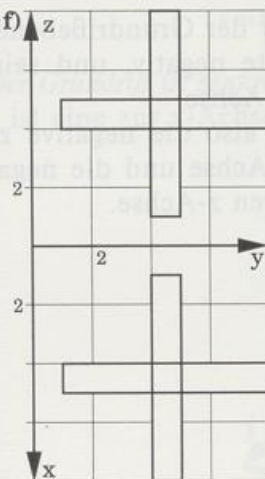
•d)



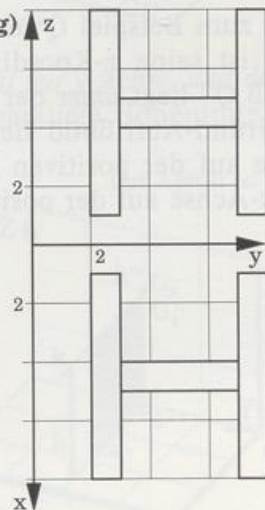
•e)



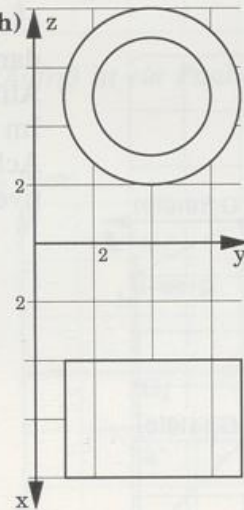
•f)



•g)



h)



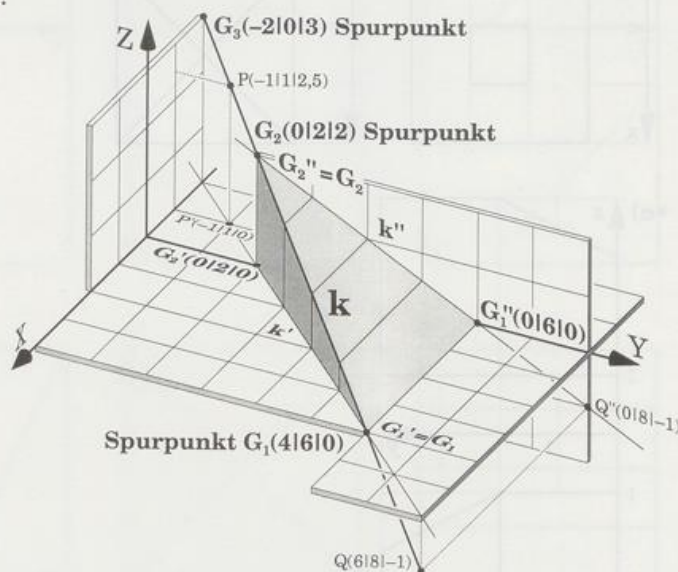
8.1.3 Darstellung von Geraden

Eine Gerade entsteht, wenn man eine Strecke grenzenlos über ihre Endpunkte hinaus verlängert.

Der Schnittpunkt von Gerade und Grundrißebene heißt **1. Spurpunkt** G_1 , der Schnittpunkt von Gerade und Aufrißebene heißt **2. Spurpunkt** G_2 und der Schnittpunkt von Gerade und Seitenrißebene heißt **3. Spurpunkt** G_3 . Die Spurpunkte beschreiben besonders anschaulich die Lage einer Gerade im Koordinatensystem.

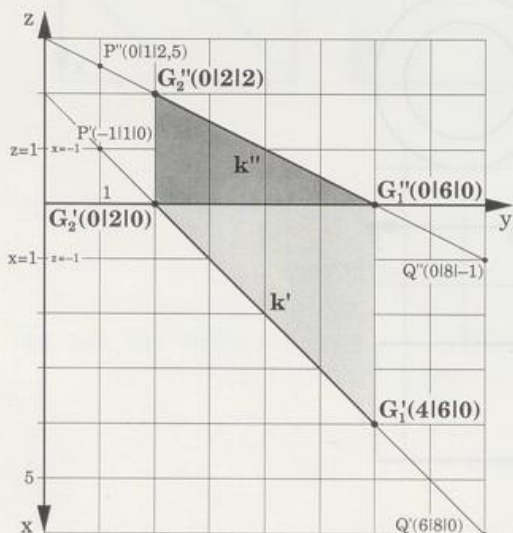
Weil G_1 in der Grundrißebene liegt, gilt $G'_1 = G_1$; G''_1 ist der Schnittpunkt von y-Achse und Geradenaufriß k'' .

Weil G_2 in der Aufrißebene liegt, gilt $G''_2 = G_2$; G'_2 ist der Schnittpunkt von y-Achse und Geraden Grundriß k' .



Auf einer Gerade liegen auch Punkte mit negativen Koordinaten.

Liegt zum Beispiel P hinter der Aufrißebene, dann ist eine x-Koordinate negativ und sein Grundriß P' liegt über der y-Achse.



Liegt zum Beispiel Q unter der Grundrißebene, dann ist seine z-Koordinate negativ, und sein Aufriß Q'' liegt unter der y-Achse.

Im Grund-Aufrißbild liegt also die negative z-Achse auf der positiven x-Achse und die negative x-Achse auf der positiven z-Achse.

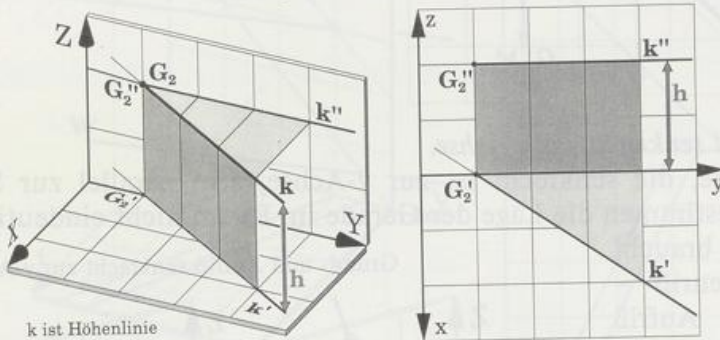
Sonderfälle

Besondere Lagen von Geraden liegen vor, wenn ein Riß parallel oder senkrecht zur y -Achse ist.

Der Aufriß ist parallel zur y -Achse.

Ist k'' parallel zur y -Achse im Abstand h , dann ist k parallel zur Grundrißebene in der Höhe h . Eine solche Gerade heißt **Höhenlinie**.

Aufriß parallel zur y -Achse

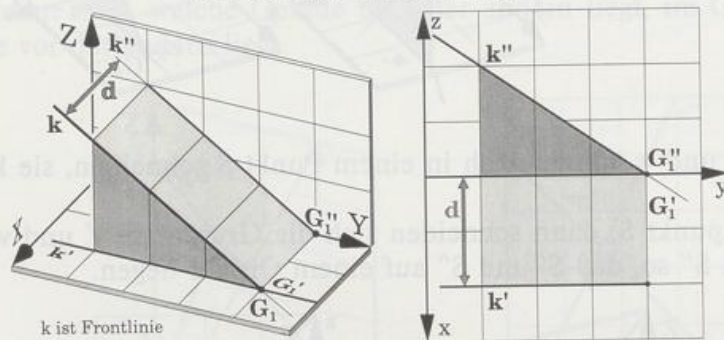


k ist Höhenlinie

Der Grundriß ist parallel zur y -Achse.

Ist k' parallel zur y -Achse im Abstand d , dann ist k parallel zur Aufrißebene im Abstand d . Eine solche Gerade heißt **Frontlinie** (oder Abstandlinie).

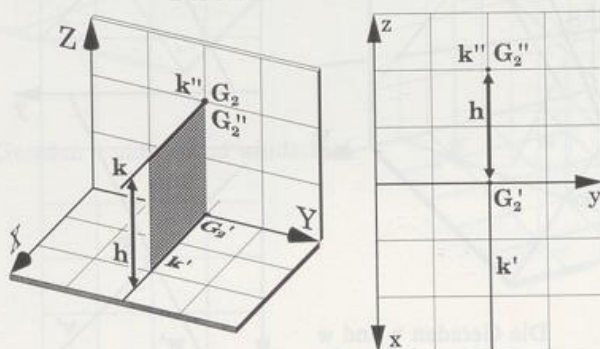
Grundriß parallel zur y -Achse



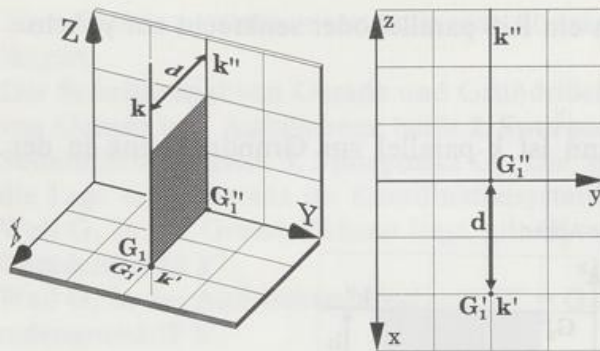
k ist Frontlinie

Der Grundriß ist senkrecht zur y -Achse, und der Aufriß ist ein Punkt.
 k ist eine zur x -Achse parallele Höhenlinie.

Der Aufriß ist ein Punkt



Der Grundriß ist ein Punkt



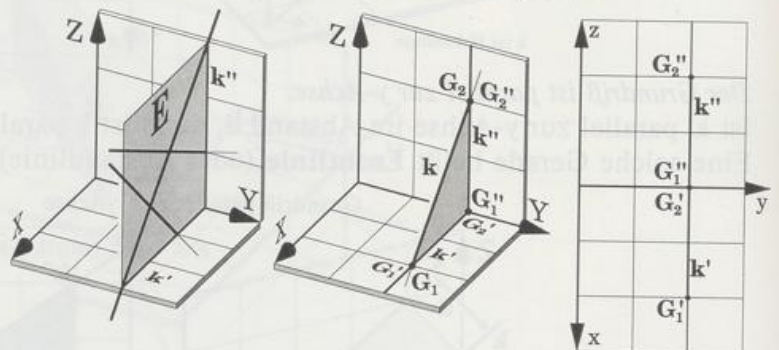
Der Aufriß ist senkrecht zur y-Achse, und der Grundriß ist ein Punkt.

k ist eine senkrechte Frontlinie, also parallel zur z-Achse.

Grund- und Aufriß sind senkrecht zur y-Achse.

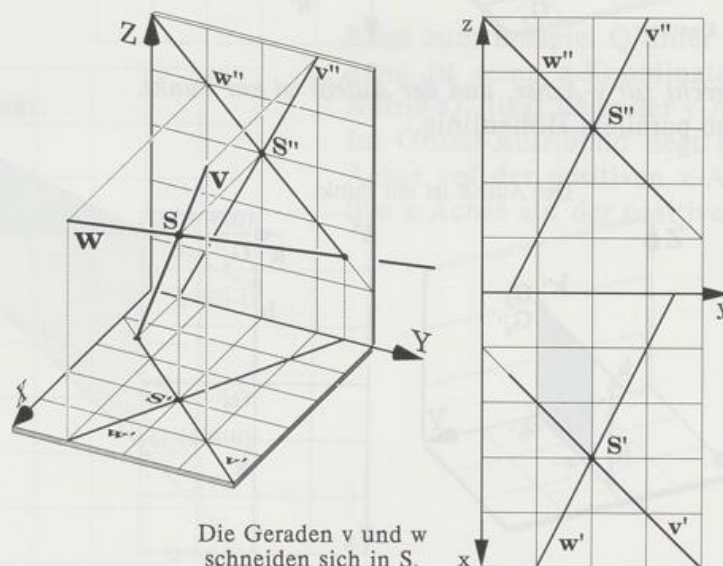
k liegt in einer Ebene, die senkrecht ist zur y-Achse, also parallel zur Seitenrißebene. Grund- und Aufriß bestimmen die Lage der Gerade im Raum nicht eindeutig. Um die Eindeutigkeit zu retten, braucht man noch den Seitenriß – oder Grund- und Aufriß zweier Geradenpunkte, für die sich am besten die Spurpunkte eignen (wenn sie nicht auf der y-Achse zusammenfallen).

Grund- und Aufriß senkrecht zur y-Achse



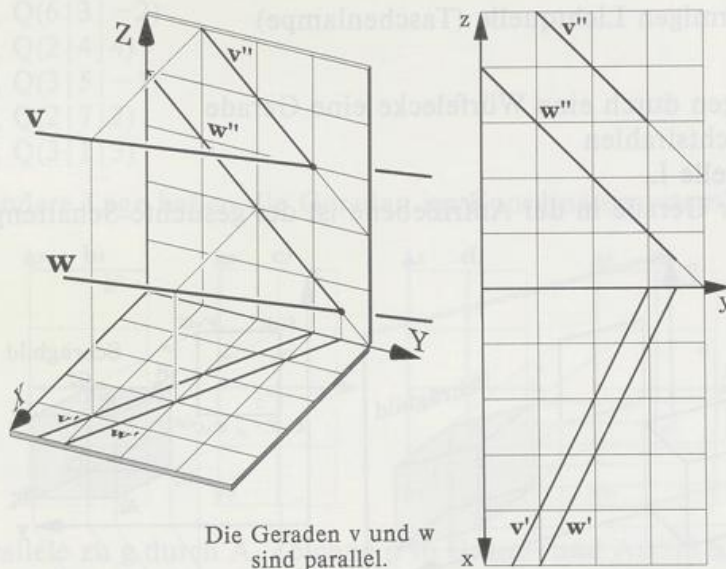
Zwei Raumgeraden v und w können sich in einem Punkt S schneiden, sie können parallel oder windschief sein.

Gibt es einen Schnittpunkt S, dann schneiden sich die Grundrisse v' und w' in s' und die Aufrisse v'' und w'' in S'' so, daß S' und S'' auf einem Ordner liegen.

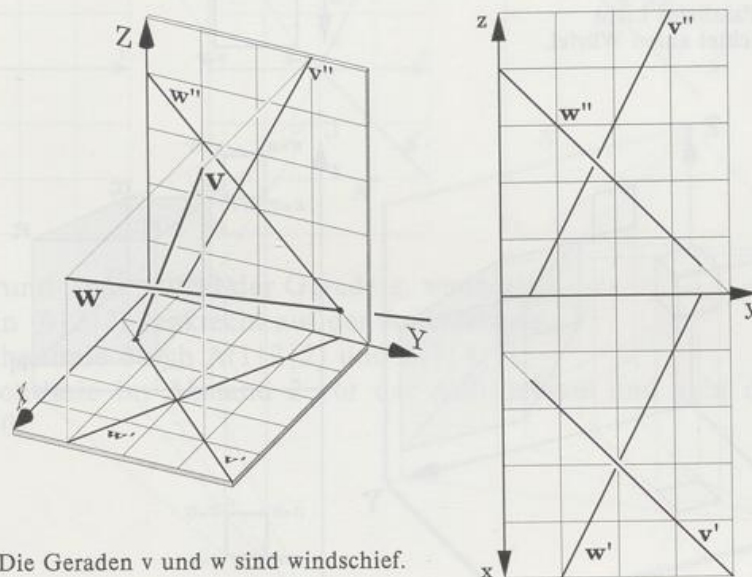


Die Geraden v und w schneiden sich in S.

Umgekehrt erkennt man die Existenz eines Schnittpunkts daran, daß sich die Grundrisse und die Aufrisse jeweils schneiden und ihre Schnittpunkte auf einem Ordner liegen. Sind v und w parallel, dann gilt das auch für die Risse. Umgekehrt folgt aus der paarweisen Parallelität der Risse die Parallelität der Raumgeraden v und w .



In allen andern Fällen liegen die Geraden windschief. Im Aufriß erkennt man, welche Gerade über der andern liegt, im Grundriß erkennt man, welche Gerade vor der andern liegt.



Schattenwurf

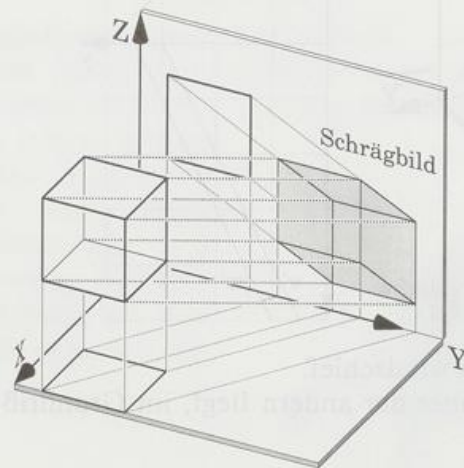
Mit den Spurpunkten finden wir leicht den Schatten eines Körpers in einer der Rißebenen. Wir konstruieren den Schatten, den ein Würfel in der Aufrißebene hat, wenn der Würfel

- von parallelem Licht (Sonne)
 - von einer punktförmigen Lichtquelle (Taschenlampe)
- beleuchtet ist.

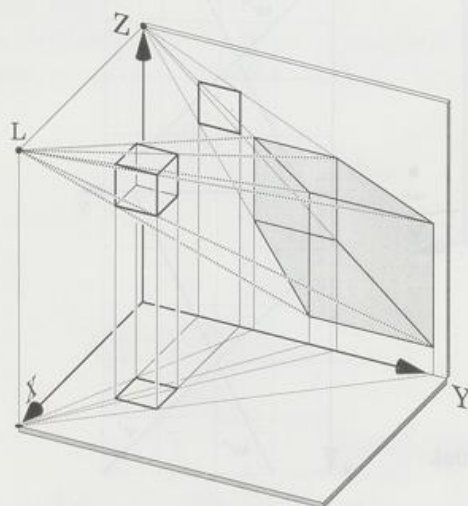
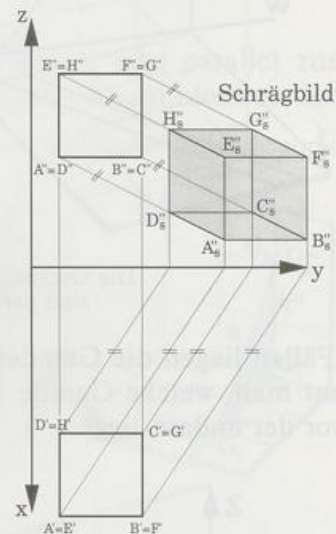
Konstruktion: Wir legen durch eine Würfecke eine Gerade

- parallel zu den Lichtstrahlen
- durch die Lichtquelle L.

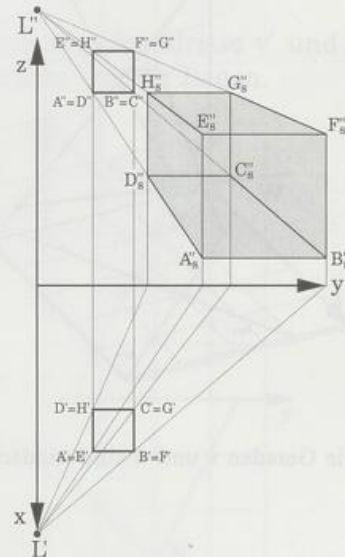
Der Spurpunkt dieser Gerade in der Aufrißebene ist der gesuchte Schattenpunkt.



Paralleles Licht
beleuchtet einen Würfel.



Eine punktförmige Lichtquelle L
beleuchtet einen Würfel.

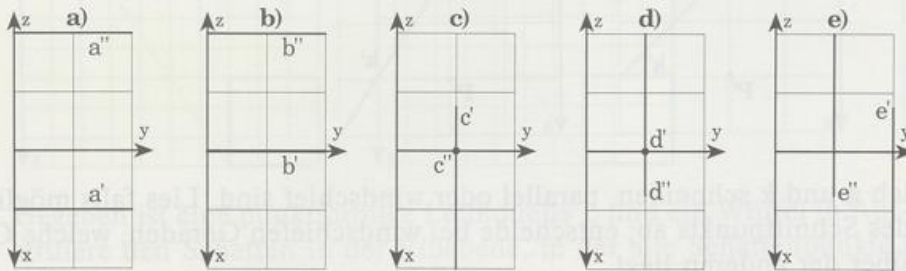


Aufgaben

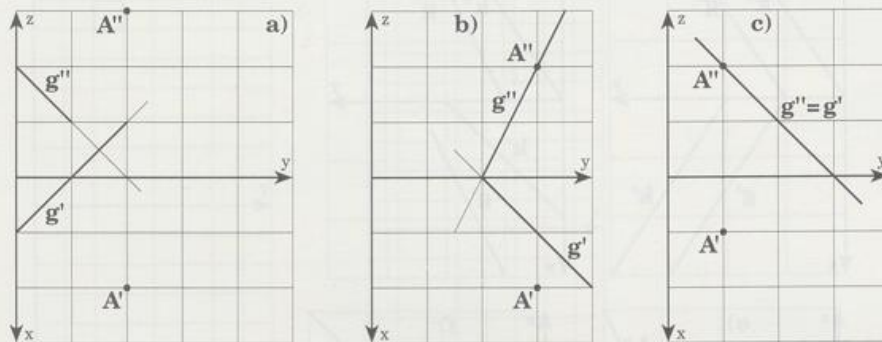
1. Zeichne Grund- und Aufriß der Gerade PQ und lies aus der Zeichnung die Koordinaten der Spurpunkte G_1 und G_2 ab.

- a) $P(3|2|2)$, $Q(-3|5|-1)$
- b) $P(2|5|2)$, $Q(6|3|-2)$
- c) $P(2|4|1)$, $Q(2|4|4)$
- d) $P(1|3|1)$, $Q(3|5|-1)$
- e) $P(1|5|2)$, $Q(2|7|2)$
- f) $P(1|3|1)$, $Q(3|1|3)$

2. Welche besondere Lage haben die Geraden im Koordinatensystem?



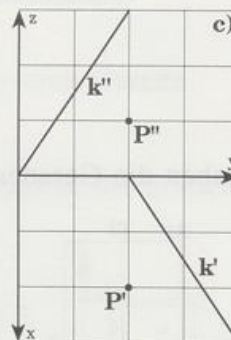
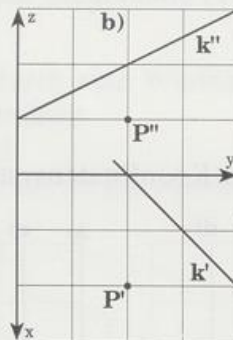
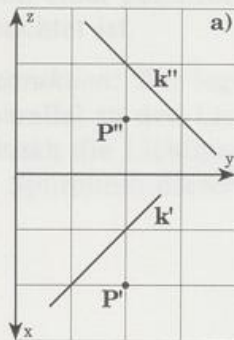
3. p sei die Parallele zu g durch A . Zeichne p in Grund- und Aufriß und lies die Koordinaten der Spurpunkte ab.



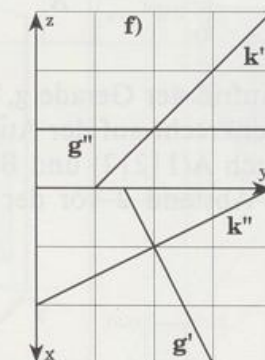
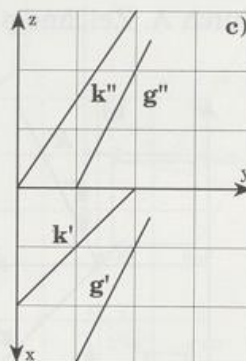
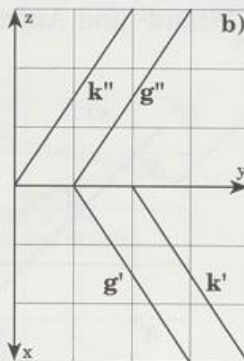
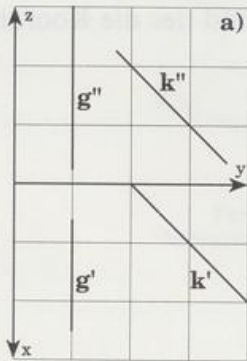
4. Zeichne Grund- und Aufriß der Gerade g , wenn gilt:

- a) g steht in $(0|2|3)$ senkrecht auf der Aufrißebene.
- b) g ist Höhenlinie durch $A(1|2|2)$ und $B(3|4|?)$.
- c) g ist Frontlinie im Abstand 2 vor der Aufrißebene und geht durch $B(2|1|?)$ und $G_1(0|0|0)$.

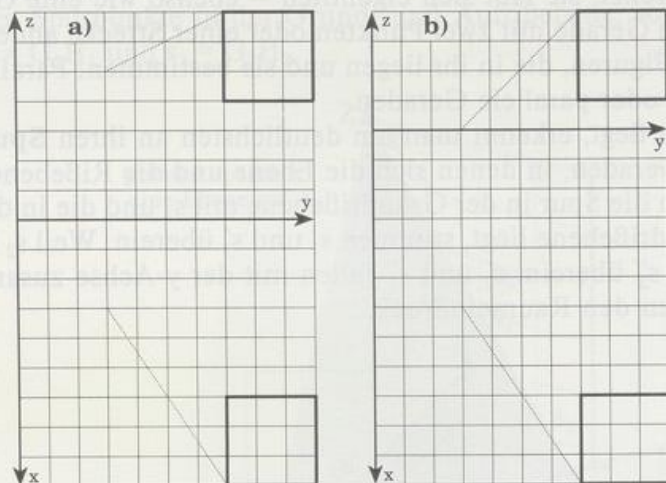
5. Gegeben sind P und k in Grund- und Aufriß. Zeichne Grund- und Aufriß einer Gerade g durch P , die k schneidet und parallel ist zur
- Aufrißebene
 - Grundrißebene
 - Seitenrißebene



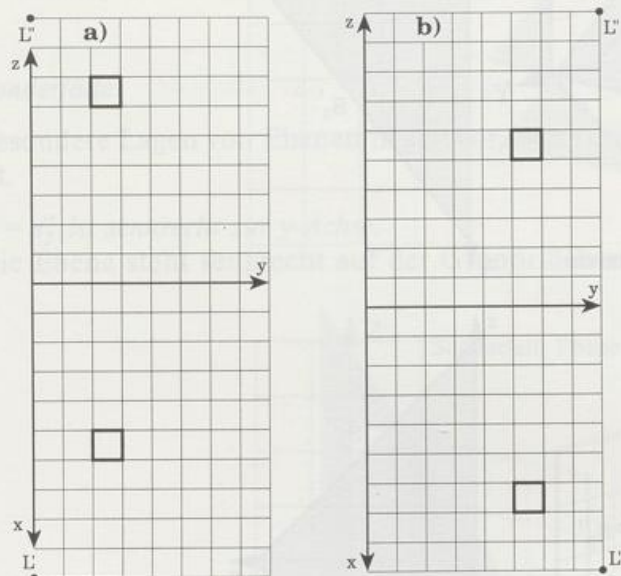
6. Untersuche, ob sich g und k schneiden, parallel oder windschief sind. Lies falls möglich die Koordinaten des Schnittpunkts ab; entscheide bei windschiefen Geraden, welche Gerade vor, welche über der anderen liegt.



7. Gegeben ist ein parallel beleuchteter Würfel in Auf- und Grundriß. Konstruiere seinen Schatten in der Rißebe, in der alle Schattenpunkte positive Koordinaten haben.



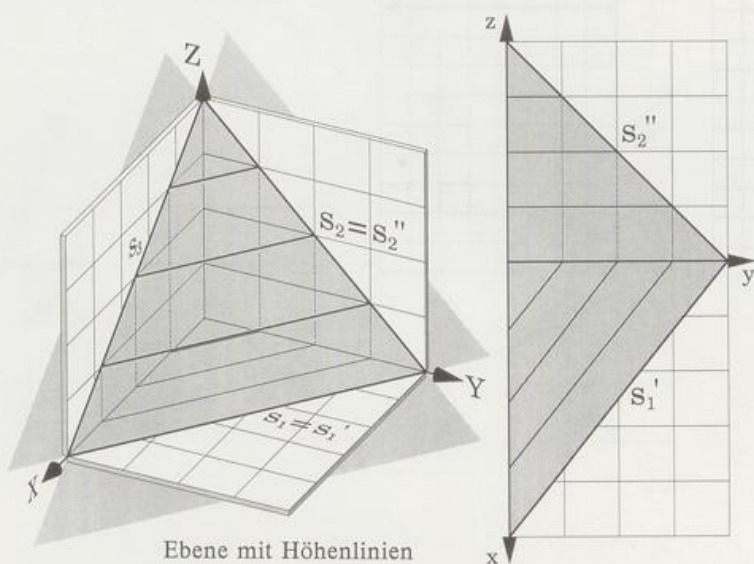
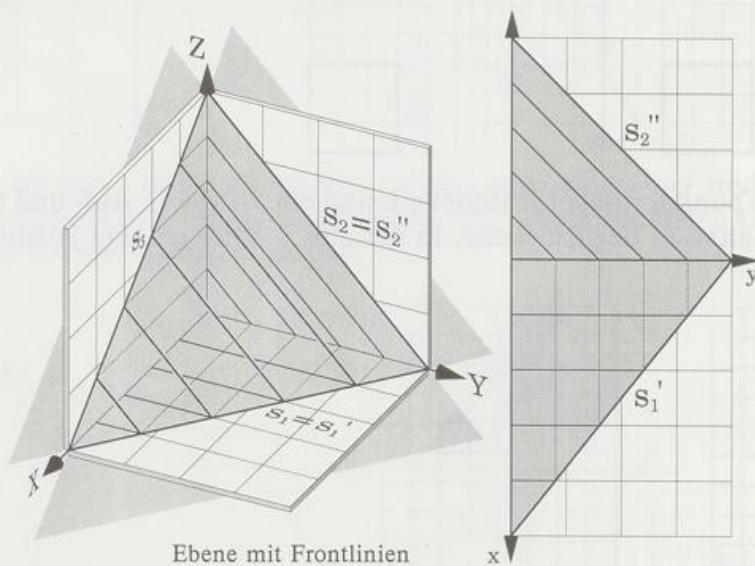
8. Gegeben ist eine punktförmige Lichtquelle L und ein Würfel in Auf- und Grundriß. Konstruiere den Schatten in der Rißebe, in der alle Schattenpunkte positive Koordinaten haben.



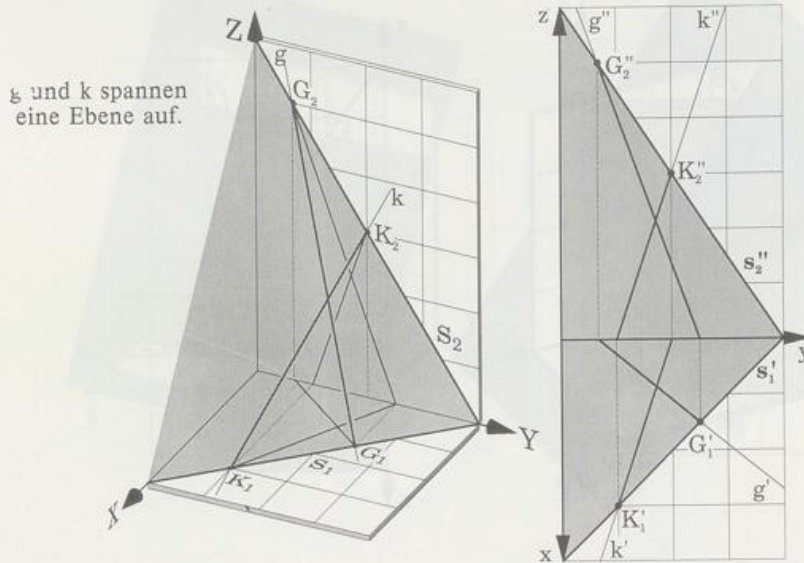
8.1.4 Darstellung von Ebenen

Eine Ebene ist in keiner Richtung begrenzt, sie läßt sich eigentlich – ebenso wie eine Gerade – nicht zeichnen. So wie man eine Gerade mit zwei Punkten oder einer Strecke andeutet, so verwendet man bei einer Ebene Figuren, die in ihr liegen und sie bestimmen: Parallelogramme, Dreiecke, sich schneidende oder parallele Geraden.

Wie eine Ebene im Koordinatensystem liegt, erkennt man am deutlichsten an ihren **Spurgeraden**, kurz Spuren – das sind die Geraden, in denen sich die Ebene und die Rißebenen schneiden. Gewöhnlich bezeichnet man die Spur in der Grundrißebene mit s_1 und die in der Aufrißebene mit s_2 . Weil s_1 in der Grundrißebene liegt, stimmen s_1 und s_1' überein. Weil s_2 in der Aufrißebene liegt, stimmen s_2 und s_2'' überein. s_2' und s_1'' fallen mit der y-Achse zusammen. Höhen- und Frontlinien verstärken den Raumeindruck.



Ist die Ebene nicht durch ihre Spuren, sondern durch andere Bestimmungsstücke gegeben, dann kennt man auf jeden Fall zwei Geraden g und h , die in ihr liegen. Haben diese Geraden Spurpunkte in der Grund- und Aufrißebene, so hat man damit die Spuren der Ebene: $s_1 = G_1H_1$ und $s_2 = G_2H_2$.

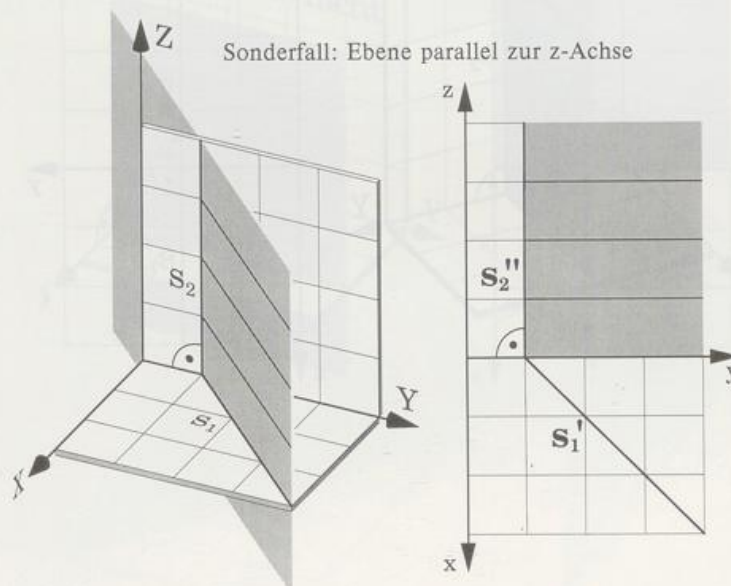


Sonderfälle

Besondere Lagen von Ebenen liegen vor, wenn eine Spur senkrecht oder parallel zur y -Achse ist.

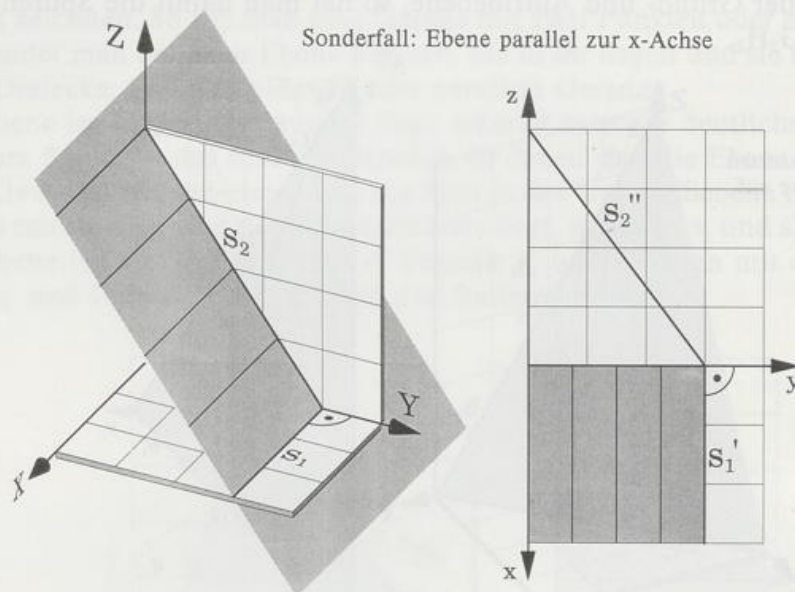
$s_2 = s_2''$ ist senkrecht zur y -Achse.

Die Ebene steht senkrecht auf der Grundrißebene, sie ist parallel zur z -Achse.



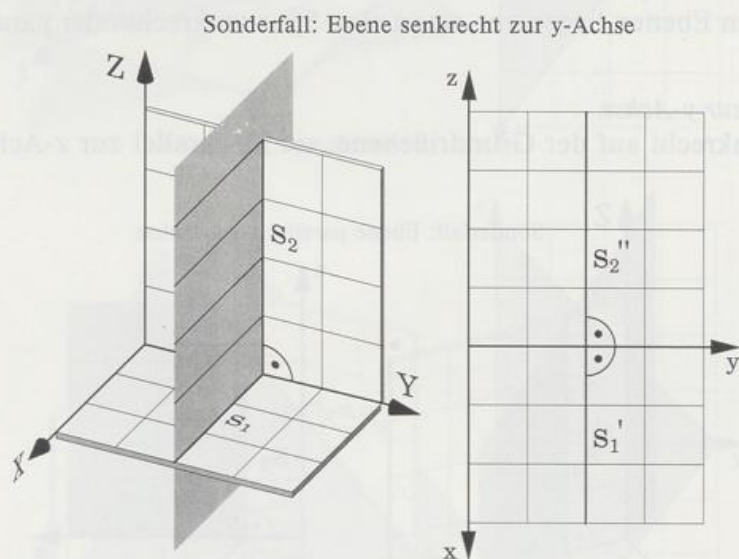
$s_1 = s'_1$ ist senkrecht zur y-Achse.

Die Ebene steht senkrecht auf der Aufrißebene, sie ist parallel zur x-Achse.

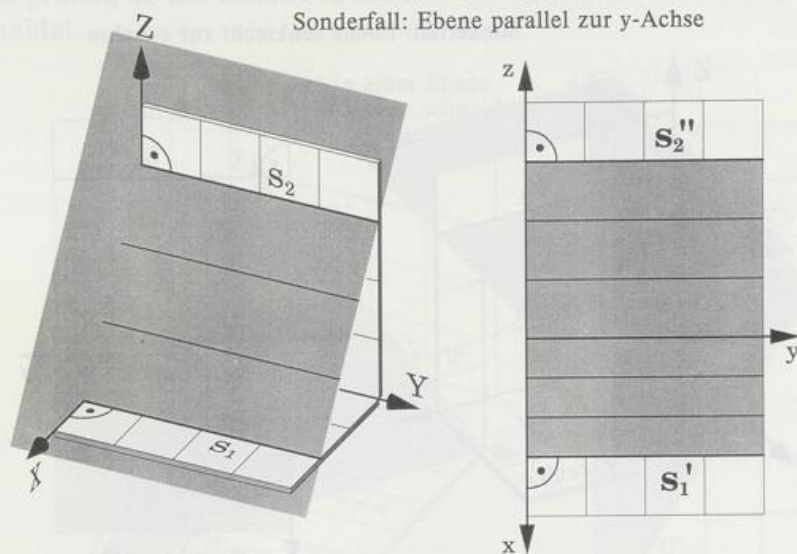


s'_1 und s'_2 sind senkrecht zur y-Achse.

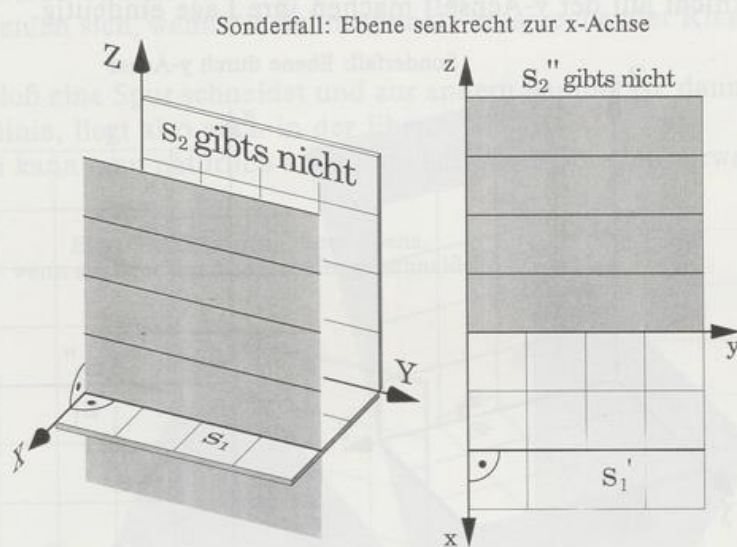
Die Ebene steht senkrecht auf der y-Achse, sie ist parallel zur Seitenrißebene.



s'_1 und s'_2 sind parallel zur y-Achse.
Die Ebene ist parallel zur y-Achse.

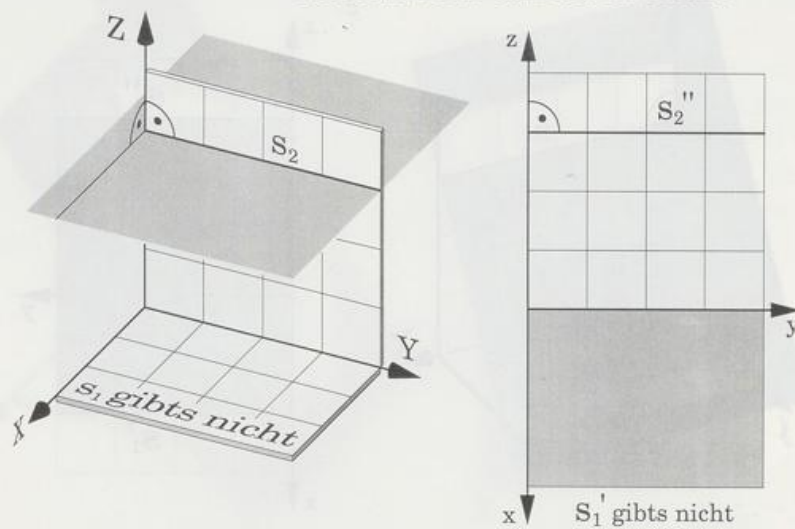


s'_1 ist parallel zur y-Achse, und s'_2 existiert nicht.
Die Ebene ist parallel zur Aufrißebene.



s_2'' ist parallel zur y-Achse, und s_1' existiert nicht.
Die Ebene ist parallel zur Grundrißebene.

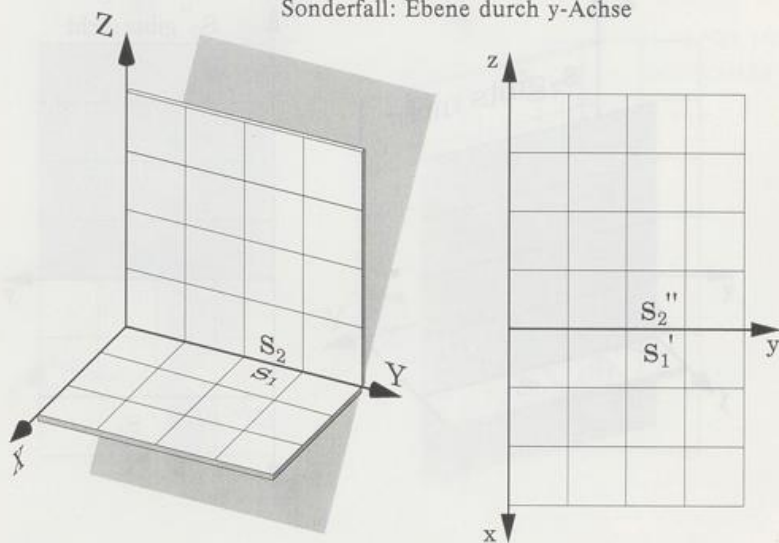
Sonderfall: Ebene senkrecht zur z-Achse



s_1' und s_2'' fallen mit der y-Achse zusammen.

Die Ebene enthält die y-Achse. Damit liegt die Ebene noch nicht fest. Erst der Seitenriß oder ein Punkt (nicht auf der y-Achse!) machen ihre Lage eindeutig.

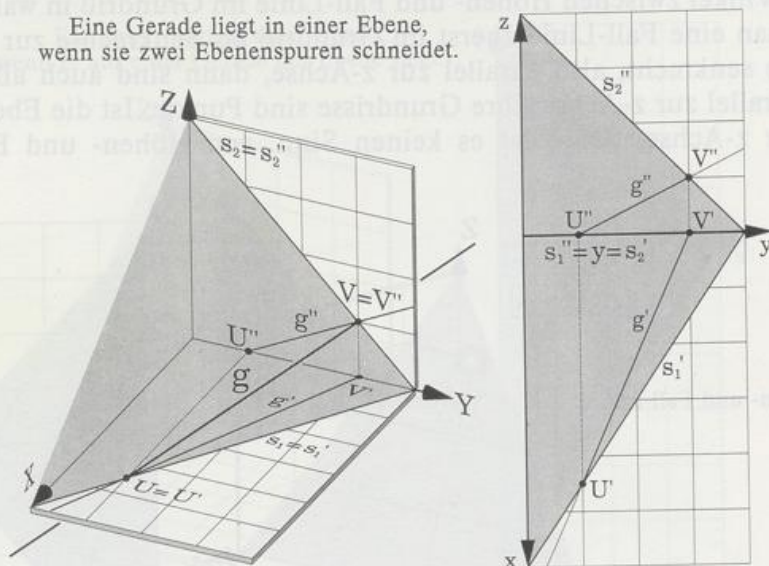
Sonderfall: Ebene durch y-Achse



Gerade in der Ebene

Gegeben ist eine Gerade g durch ihre Risse g' und g'' sowie eine Ebene E durch ihre Spuren s_1 und s_2 . Um zu prüfen, ob die Gerade in der Ebene liegt, untersucht man, ob sie die Spuren der Ebene schneidet.

Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn sie zwei Ebenenspuren schneidet.

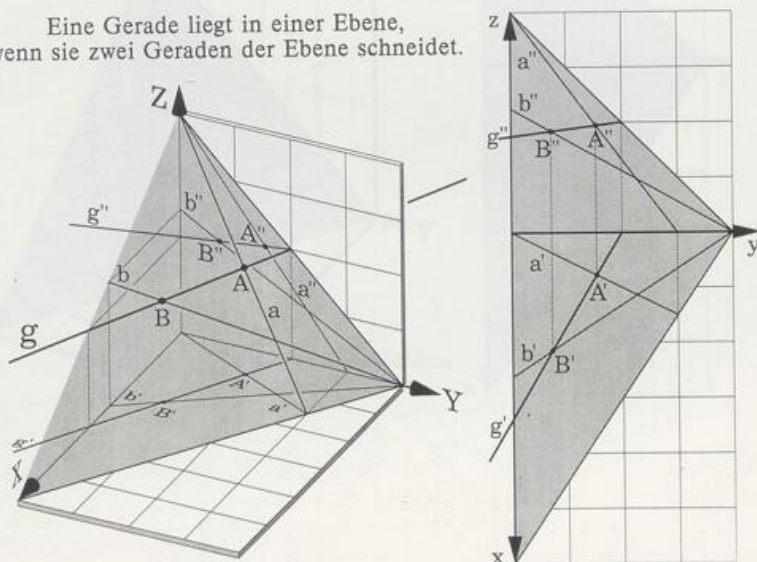


Wenn die Gerade beide Spuren schneidet, dann liegt sie in der Ebene. Zur Erinnerung: Zwei Geraden schneiden sich, wenn die Schnittpunkte entsprechender Risse auf *einem* Ordner liegen.

Wenn die Gerade bloß eine Spur schneidet und zur andern parallel ist, dann ist sie entweder Höhen- oder Frontlinie, liegt also auch in der Ebene.

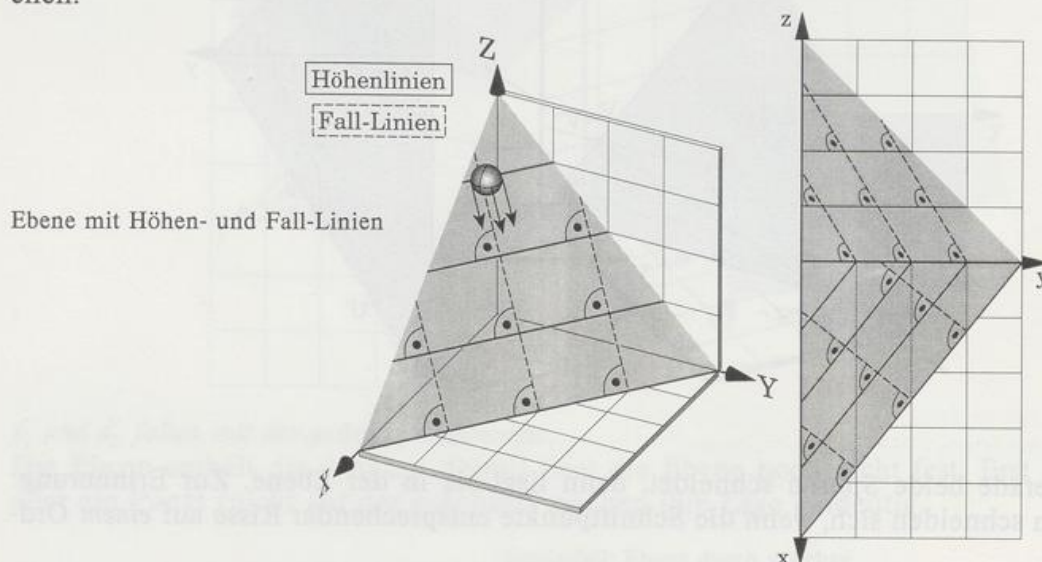
Anstelle der Spuren kann man natürlich auch zwei beliebige Geraden verwenden, die in der Ebene liegen.

Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn sie zwei Geraden der Ebene schneidet.



Zu den besonderen Geraden einer Ebene gehören die Fall-Linien. Sie stehen senkrecht auf den Höhenlinien und damit auch auf der Grundrißspur s_1 . Der Name rührt daher, daß eine Kugel auf einer Fall-Linie hinunterrollt, wenn die Schwerkraft (wie üblich) senkrecht nach unten gerichtet ist. Weil die Höhenlinien parallel zur Grundrißebene verlaufen, sieht man den rechten Winkel zwischen Höhen- und Fall-Linie im Grundriß in wahrer Größe. Deshalb konstruiert man eine Fall-Linie zuerst im Grundriß als Senkrechte zur Spur s'_1 .

Ist die Ebene senkrecht, also parallel zur z -Achse, dann sind auch alle Fall-Linien senkrecht, also parallel zur z -Achse; ihre Grundrisse sind Punkte. Ist die Ebene waagrecht, also senkrecht zur z -Achse, dann hat es keinen Sinn, von Höhen- und Fall-Linien zu sprechen.

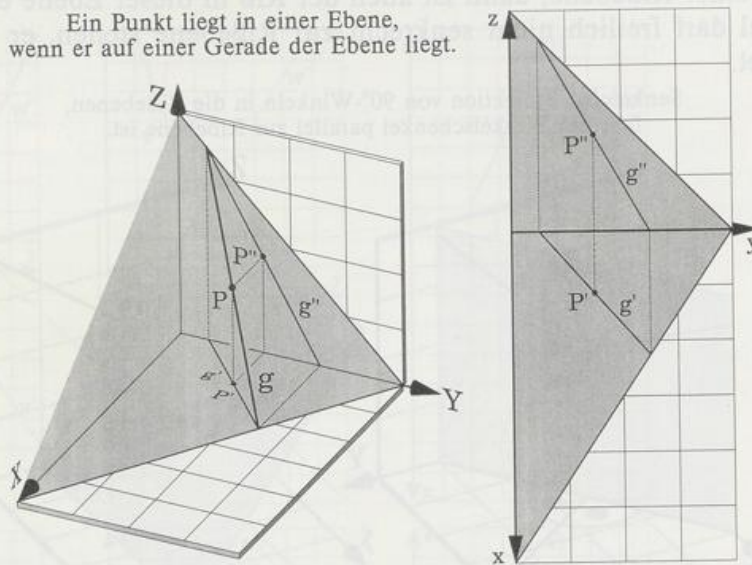


Ebene mit Höhen- und Fall-Linien

Punkt und Ebene

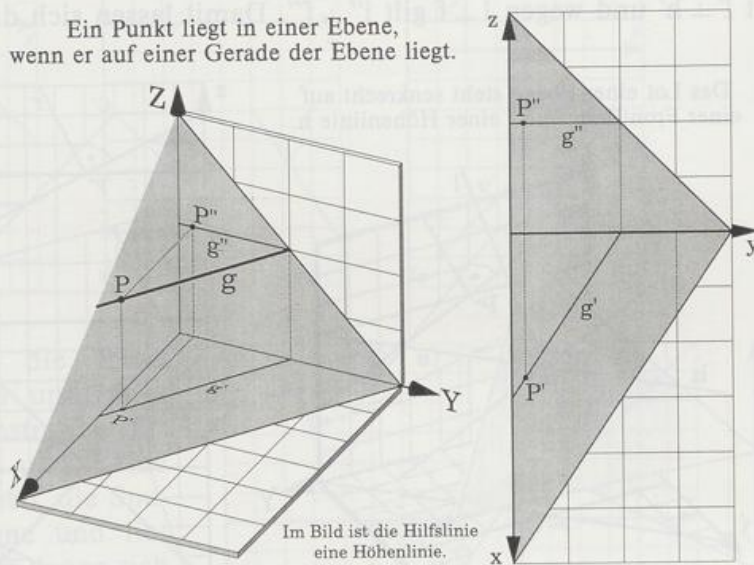
Ist eine Ebene E durch ihre Spuren gegeben, so läßt sich schnell entscheiden, ob ein Punkt P in ihr liegt: Man zeichnet eine Hilfsgerade g , die so in E liegt, daß einer ihrer Risse durch den entsprechenden Punktriß geht:

Ein Punkt liegt in einer Ebene,
wenn er auf einer Gerade der Ebene liegt.



g' durch P' im Grundriß oder g'' durch P'' im Aufriß. Liegt dann der andere Punktriß auf dem andern Geradenriß, so liegt der Punkt auf der Hilfsgerade und damit in der Ebene. Als Hilfsgerade verwendet man gern eine Höhen- oder Frontlinie.

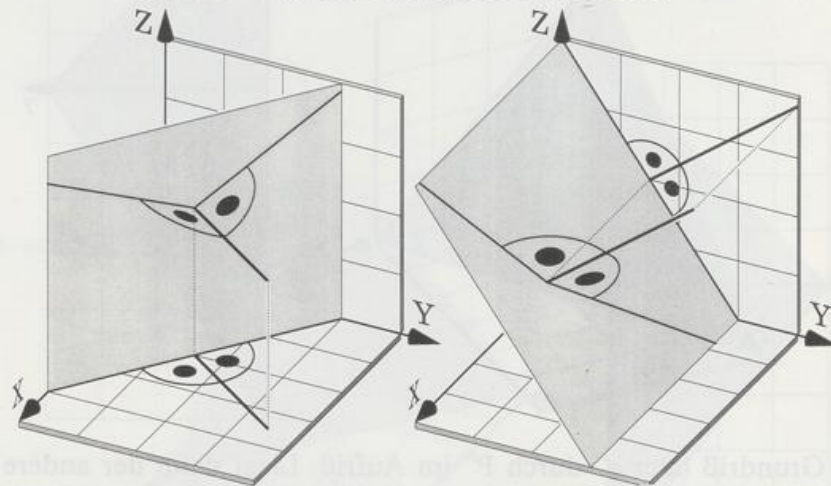
Ein Punkt liegt in einer Ebene,
wenn er auf einer Gerade der Ebene liegt.



Loterrichten

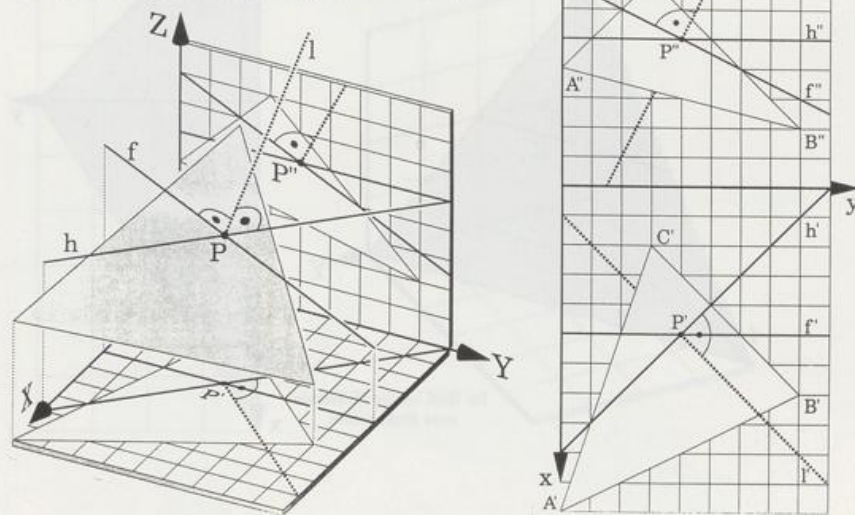
Eine Gerade, die senkrecht auf einer Ebene steht, heißt Lot dieser Ebene. Ein Lot l durch den Ebenenpunkt P steht senkrecht auf jeder Gerade der Ebene, die durch P geht, also auch auf der Höhenlinie h und der Frontlinie f durch P . Es gilt: Ist ein Schenkel eines 90° -Winkels parallel zu einer Rißebeine, dann ist auch der Riß in dieser Ebene ein 90° -Winkel; der andere Schenkel darf freilich nicht senkrecht zur Rißebeine stehen, er würde ja sonst als Punkt abgebildet.

Senkrechte Projektion von 90° -Winkeln in die Rißebeinen, falls ein Winkelschenkel parallel zur Rißebeine ist.



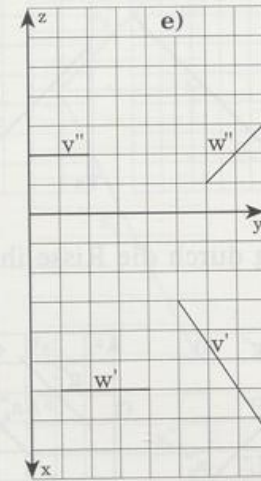
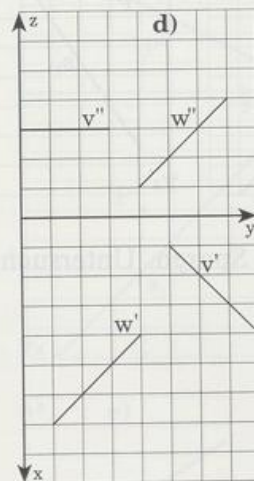
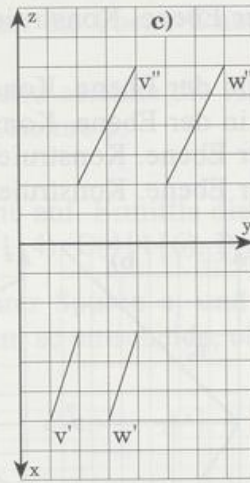
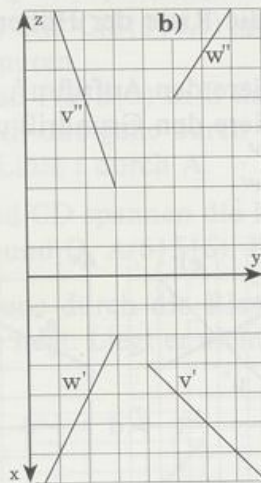
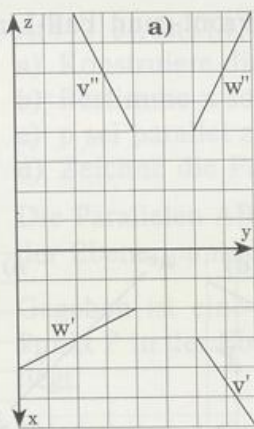
Wegen $l \perp h$ gilt $l' \perp h'$ und wegen $l \perp f$ gilt $l'' \perp f''$. Damit lassen sich die Risse des Lots l konstruieren.

Das Lot einer Ebene steht senkrecht auf einer Frontlinie f und einer Höhenlinie h .

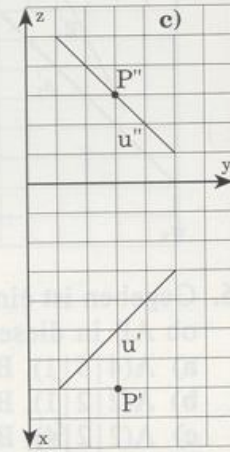
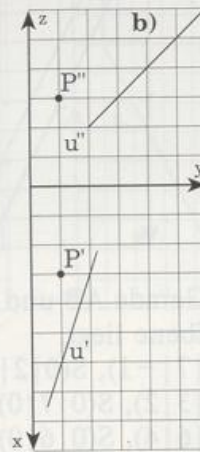
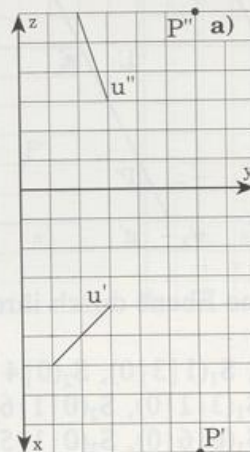


Aufgaben

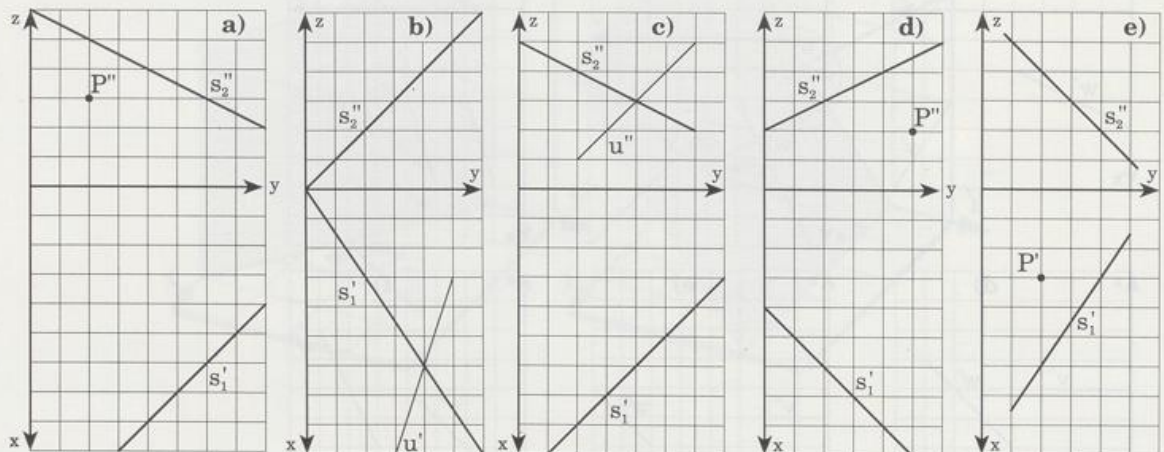
1. Gegeben sind die Risse zweier Geraden v und w . Konstruiere für den Fall, daß u und v eine Ebene aufspannen, die Spuren dieser Ebene und lies die Punkte ab, in denen sich diese Ebene und die Koordinatenachsen schneiden.



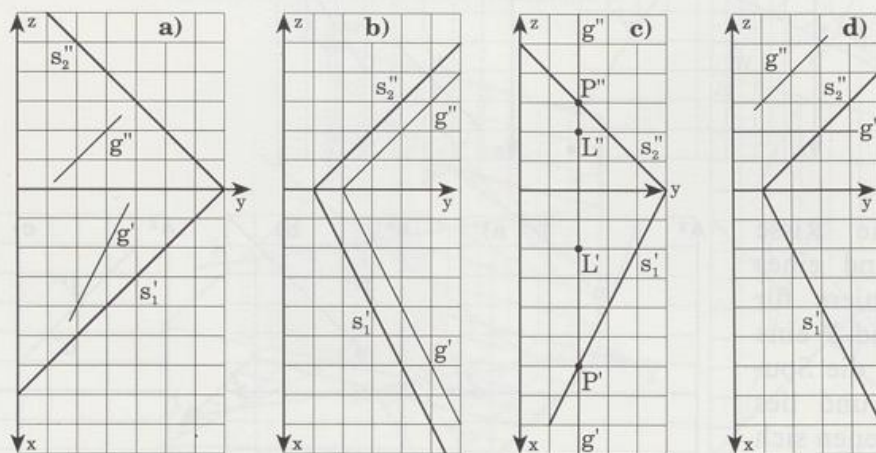
2. Gegeben sind die Risse einer Gerade u und eines Punktes P . Konstruiere für den Fall, daß u und P eine Ebene aufspannen, die Spuren dieser Ebene und lies die Punkte ab, in denen sich diese Ebene und die Koordinatenachsen schneiden.



3. A, B und C spannen eine Ebene auf. Konstruiere die Spuren dieser Ebene.
- $A(3|2|6)$, $B(2|6|4)$, $C(1|4|8)$
 - $A(6|4|0,5)$, $B(1,5|2,5|2)$, $C(3|2|1)$
 - $A(2,5|1|1,5)$, $B(7,5|4|0,5)$, $C(1,5|2|2,5)$
4. Gegeben ist eine Ebene durch die Risse ihrer Spuren s_1 und s_2 .
- P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere die Risse der Höhen-, Front- und Fall-Linie durch P.
 - u ist eine Gerade in der Ebene. Konstruiere den Aufriß u'' .
 - u ist eine Gerade in der Ebene. Konstruiere den Grundriß u' .
 - P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere P' .
 - P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere P'' .

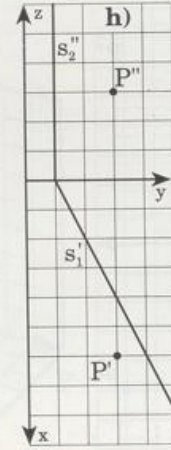
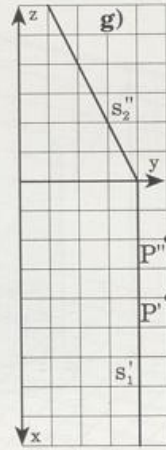
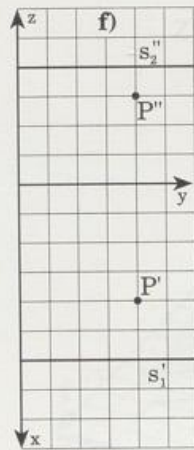
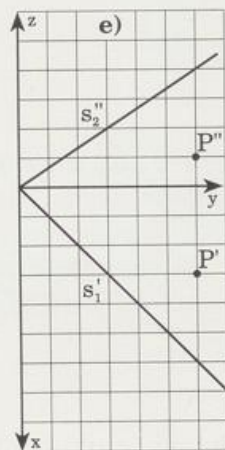
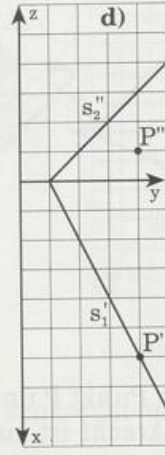
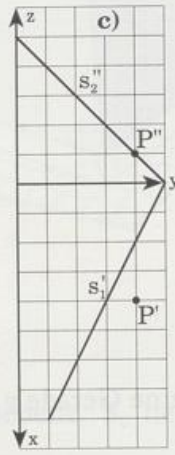
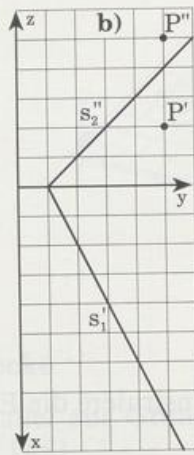
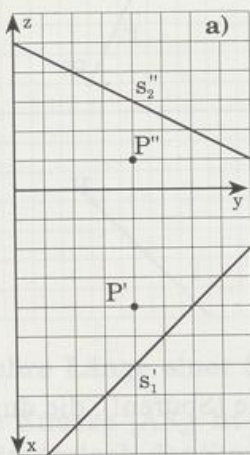


5. Gegeben sind eine Ebene und eine Gerade g durch die Risse ihrer Spuren. Untersuche, ob die Gerade in der Ebene liegt.



6. Gegeben ist eine Gerade AB und eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2 . Entscheide, ob AB in dieser Ebene liegt.
- $A(4|5|1)$, $B(0|7|-1)$, $S(0|2|0)$, $S_1(1|3|0)$, $S_2(0|4|1)$
 - $A(2|2|1)$, $B(1|3|2)$, $S(0|7|0)$, $S_1(3|1|0)$, $S_2(0|1|6)$
 - $A(2|2|4)$, $B(2|6|4)$, $S(0|6|0)$, $S_1(6|6|0)$, $S_2(0|1|5)$

7. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2 sowie einer ihrer Punkte P . Konstruiere die Höhenlinie h , die Frontlinie f und die Fall-Linie t , die durch P geht.
- a) $P(3|5|?)$, $S(0|4|0)$, $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|6|1)$
b) $P(?|4|2)$, $S(0|8|0)$, $S_1(5|3|0)$, $S_2(0|2|3)$
c) $P(?|4|2)$, $S(0|6|0)$, $S_1(5|1|0)$, $S_2(0|6|6)$
8. $A(4|2|3)$, $B(3|4|1,5)$ und $C(2|3|4,5)$ spannen die Ebene E auf.
a) Konstruiere die Spuren.
b) Bestimme x so, daß $P(x|5|3)$ in E liegt, und zeichne die Höhenlinie h durch P .
c) p sei parallel zu AB und gehe durch C . Zeichne p .
d) Zeichne die Fall-Linie t durch A .
9. Die Parallelen AB und CD spannen die Ebene auf. Ermittle die fehlenden Koordinaten der Ebenenpunkte P und Q . $A(6|5|6)$, $B(2|1|4)$, $C(4|1|6)$, $P(p|-1|4)$, $Q(2|3|q)$
10. Gegeben ist eine Ebene durch die Risse ihrer Spuren s_1 und s_2 . Untersuche, ob der Punkt P in der Ebene liegt. Liegt er nicht drin, so entscheide, ob er drunter oder drüber liegt.



11. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2 sowie ein Punkt P in ihr. Prüfe, ob die Gerade AB und KL parallel zur Ebene sind, indem du durch P eine Parallele zu AB und KL legst.

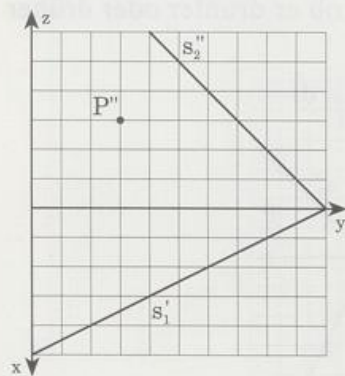
$S(0|0|0)$, $S_1(9|6|0)$, $S_2(0|6|6)$, $P(1,5|5|4)$,

$A(6|0|0)$, $B(3|2|4)$, $K(0|3|0)$, $L(3|5|2)$

12. Gegeben ist eine Ebene durch die Punkte A , B und C sowie ein Punkt P in ihr: $A(9|1|4)$, $B(7|8|1,5)$, $C(1|5|6)$, $P(5|4|?)$.

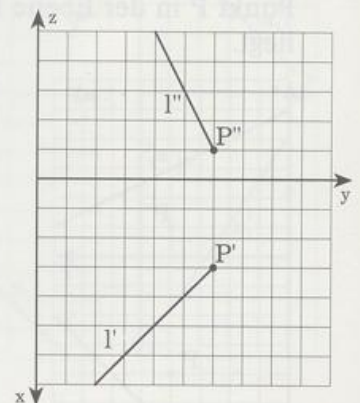
Konstruiere das Lot von E durch P ; in welchem Punkt Q trifft es die Aufrißebene?

13. Gegeben sind die Spuren einer Ebene sowie ein Ebenenpunkt P . Konstruiere das Lot von E durch P . In welchem Punkt Q trifft es die Aufrißebene, in welchem Punkt R die Grundrißebene?



Zu 13.

Zu 14.



15. Gegeben ist ein Punkt P und eine Gerade g . Konstruiere die Ebene (Spuren!), die durch P geht und senkrecht ist zu g .

