Lehrbuch der Experimentalphysik

Lommel, Eugen von

Leipzig, 1908

22. Bewegung und Gleichgewicht auf schiefer Ebene

das vertikal nach abwärts ziehende mittlere Gewicht im Gleichgewicht gehalten wird. Hängt man z. B. links 3 Hektogramm (hg), rechts 4 und in der Mitte 5 hg an, so findet man durch Zeichnung eines Parallelogramms, dessen Seiten 3 und 4 und dessen Diagonale 5 ist, daß die Seiten desselben einen rechten Winkel bilden müssen, und man sieht in der Tat, daß die Schnurhälften in a unter einem rechten Winkel zusammenstoßen. Für andere Gewichtsverhältnisse (Fig. 8) ergeben sich andere Winkel, welche jedesmal mit den durch die Konstruktion gefundenen übereinstimmen, wovon man sich überzeugt, wenn man die entsprechende auf einem Karton ausgeführte Zeichnung mit vertikaler Diagonale hinter der Schnur aufstellt.

Der Ort eines Punktes kann übrigens immer durch die Konstruktion des Parallelogramms gefunden werden, auch wenn ungleichartige Bewegungen, z. B. eine gleichförmige und eine gleichförmig beschleunigte, zusammenwirken; nur wird er dann nicht die geradlinige Diagonale, sondern eine krummlinige Bahn von der Anfangslage bis zur Endlage durchlaufen, wie z. B. bei der Wurfbewegung. Gerade an der Wurfbewegung wurde das Unabhängigkeitsprinzip zuerst erkannt.

22. **Bewegung und Gleichgewicht auf schiefer Ebene.** Als Beispiel für die Anwendung des Satzes vom Kräfteparallelogramm betrachten wir zunächst das Verhalten eines schweren Körpers auf einer zum Horizont geneigten Ebene. Nehmen wir die Zeichnungsfläche senkrecht zu der Kante, welche die schiefe Ebene mit der Horizontalebene bildet, so stellt sich erstere als eine Gerade AB dar, welche mit der Horizontalen AC den Neigungswinkel α einschließt. Eine von irgendeinem Punkte B der schiefen Ebene auf

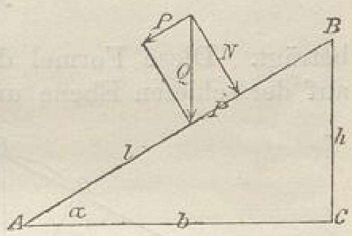

Fig. 9.
Schiefe Ebene.

die Horizontale herabgelassene Senkrechte BC, in dem rechtwinkligen Dreieck ABC die dem Winkel α gegenüberliegende Kathete, heißt die Höhe (h) der schiefen Ebene, die Hypotenuse AB ihre Länge (l) und die dem Neigungswinkel anliegende horizontale Kathete AC ihre Grundlinie oder Basis (b). Da Bewegung nur parallel zur schiefen Ebene eintreten kann, nicht aber senkrecht zu ihr, so zerlegen wir die in einem Punkte (dem Schwerpunkte) des Körpers vertikal abwärts wirkende Kraft Q, nämlich dessen Gewicht, in zwei zueinander senkrechte Seitenkräfte, von denen die eine, die Parallelkraft (P), zur Länge der schiefen Ebene parallel, die andere, die Normalkraft (N), senkrecht (oder normal) zu ihr steht. Jedes der beiden rechtwinkligen Dreiecke, in welche das Parallelogramm NP durch seine Diagonale Q zerschnitten wird, ist aber dem Dreieck ABC oder lhb ähnlich, und wir erhalten:

$$P : Q = h : l \quad \text{und} \quad N : Q = b : l,$$

d. h. die Parallelkraft verhält sich zum Gewichte des Körpers wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge, die Normalkraft verhält sich zum Gewichte, wie die Basis zur Länge. Die beiden Seitenkräfte ergeben sich aus diesen Proportionen wie folgt:

$$P = Q \cdot \frac{h}{l} = Q \sin \alpha, \qquad N = Q \cdot \frac{b}{l} = Q \cos \alpha,$$

jede von ihnen ist kleiner als das Gewicht des Körpers, weil in einem rechtwinkligen Dreieck jede Kathete kleiner ist als die Hypotenuse. Das Verhältnis der Höhe zur Länge heißt die Steigung und wird gewöhnlich in Prozenten ausgedrückt.

Die Normalkraft N drückt den schweren Körper gegen die schiefe Ebene und wird durch deren Gegendruck aufgehoben; sie übt daher, falls man von der Reibung absieht, indem man die Ebene sowohl als den Körper vollkommen glatt voraussetzt, auf die Bewegung keinen Einfluß. Die Parallelkraft P dagegen veranlaßt den Körper mit gleichförmig beschleunigter Bewegung längs der schiefen Ebene herabzugleiten, mit einer Beschleunigung g', welche sich zu derjenigen des freien Falles g verhält wie P zu Q, also auch wie h zu l, und demnach

$$g' = g \cdot \frac{h}{l} = g \sin \alpha$$

beträgt. Diese Formel drückt die Verlangsamung der Fallbewegung auf der schiefen Ebene und die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Neigung aus, von der wir oben bei den Versuchen mit der Fallrinne (7) Gebrauch gemacht haben. Die Fallräume, welche während der Zeit t längs der schiefen Ebene und im freien Fall durchlaufen werden, verhalten sich hiernach wie g' zu g, oder wie h zu l. Fällt man von C (Fig. 10) die Senkrechte CD auf AB, so wird BD in derselben Zeit durchfallen, wie BC (weil $BD : BC = h : l$). Beschreibt man über BC als Durchmesser einen Kreis, so schneidet dieser AB in D, und man erkennt, daß die Sehne BD, und dann auch die mit ihr parallele und gleiche Sehne CD', in derselben Zeit durchlaufen wird, wie der Durchmesser BC; der vertikale Durchmesser eines Kreises wird also in derselben Zeit durchfallen, wie die von seinem oberen oder unteren Endpunkt auslaufenden Sehnen. Die Geschwindigkeit, welche der Körper erreicht, nachdem er durch die ganze Länge der schiefen Ebene herabgefallen ist, bestimmt sich aus der Gleichung $v^2 = 2\,g'\,l = 2\,g \frac{h}{l}\,l = 2\,g\,h$, ist also dieselbe, als wenn der Körper von der Höhe h vertikal (mit der Beschleunigung g) herabgefallen wäre; denn die letztere Geschwindigkeit ergibt sich aus

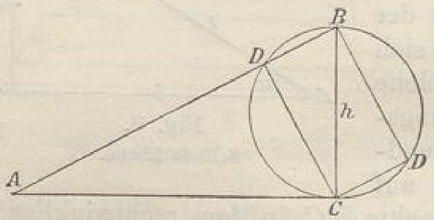

Fig. 10.
Fall durch die Sehne.

der nämlichen Gleichung $v^2 = 2gh$. Beim Herabfallen auf einer beliebigen schiefen Ebene erlangt ein Körper dieselbe Geschwindigkeit und demnach auch dieselbe Wucht, als wenn er bis zu derselben Tiefe vertikal herabgefallen wäre. Er muß deshalb auch, wenn man seine Geschwindigkeit umkehrt, bis zu derselben vertikalen Höhe oder bis zu demselben Niveau steigen, gleichviel ob er vertikal oder längs einer beliebigen schiefen Ebene emporsteigt. Da die Zu- oder Abnahme an Wucht, welche ein fallender oder steigender Körper erlangt, nur von der durchlaufenen vertikalen Höhe abhängt, so gelten diese Sätze auch noch für das Fallen und Steigen auf beliebiger krummliniger Bahn.

Um das Herabgleiten des Gewichtes oder der Last Q zu verhindern, braucht man nur eine Kraft parallel der schiefen Ebene nach aufwärts wirken zu lassen, welche der Parallelkraft P gleich ist. Man kann auf diese Weise an einem verstellbaren Modell einer schiefen Ebene, welches Länge, Höhe, Basis und Neigungswinkel abzulesen gestattet, das Gesetz $P : Q = h : l$ durch Versuche bestätigen, indem man eine an der Last Q befestigte Schnur parallel zur schiefen Ebene über eine an deren oberem Ende angebrachte Rolle gehen läßt; die Last wird dann im Gleichgewicht sein, wenn ein an das andere Ende der Schnur gehängtes Gewicht zu der Last in demselben Verhältnis steht, wie die Höhe zur Länge. Wird diese aufwärts wirkende Parallelkraft nur um weniges vergrößert, so bewegt sich die Last nach aufwärts und wird demnach gehoben durch eine Kraft, die nur ein Bruchteil ist von derjenigen, welche zum senkrechten Emporheben erforderlich wäre. Man benutzt daher die schiefe Ebene zum Emporschaffen oder Herablassen von Lasten, zu deren senkrechter Hebung oder Hemmung nicht genügende Kraft zu Gebote steht, z. B. beim Beladen und Abladen von Wagen, als Laufbrücke bei Bauten und dgl. Bergstraßen und -eisenbahnen sind nichts anderes, als schiefe Ebenen. Dabei kann aber an Arbeit nichts erspart werden; denn die Arbeit längs der schiefen Ebene (Pl) ist vermöge der obigen Proportion der Arbeit beim senkrechten Emporheben (Qh) stets gleich.

23. **Schraube.** Man kann ferner fragen, eine wie große Kraft H (Fig. 11) parallel zur Basis einer schiefen Ebene notwendig ist, um einen Körper vom Gewichte Q am Abwärtsgleiten zu verhindern. Wir zerlegen in diesem Falle die vertikale Kraft Q in zwei Seitenkräfte, deren eine H horizontal, die andere senkrecht zur schiefen Ebene gerichtet ist und durch deren Gegenwirkung aufgehoben wird. In dem hierzu gezeichneten Parallelogramm ist das rechtwinklige Dreieck HQ demjenigen ähnlich, welches die schiefe Ebene darstellt, und wir finden:

$$H : Q = h : b,$$

d. h. die Horizontalkraft verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis, und daraus:

$$H = Q \cdot \frac{h}{b} = Q \operatorname{tang} \alpha .$$