Lehrbuch der Experimentalphysik

Lommel, Eugen von

Leipzig, 1908

24. Mathematisches Pendel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83789

greifen. Die am Umfang der Spindel wirkende Kraft übt auf den Umfang des Rades einen tangential gerichteten Druck aus, der sich zu jener Kraft verhält, wie der Umfang der Spindel zur Höhe des Schraubengangs.

24. **Mathematisches Pendel.** Während der Fall auf der schiefen Ebene nur eine verlangsamte Form des freien Falles ist, erhält man eine Bewegung ganz anderer Art, wenn man einen Körper auf einem Kreisbogen fallen läßt. Man erreicht dies am einfachsten, indem man einen kleinen, schweren Körper an einem möglichst dünnen Faden aufhängt. Eine solche Vorrichtung nennt man ein einfaches oder Fadenpendel. Denkt man sich den Faden gewichtslos und den Körper als ein einziges Massenteilchen, so nennt man das Pendel ein mathematisches. Entfernt man das Pendel aus seiner lotrechten Gleichgewichtslage (OA, Fig. 12) und überläßt es dann sich selbst, so kehrt es unter der Einwirkung der Schwerkraft dahin zurück, indem es längs des Kreisbogens (BA) mit zunehmender Geschwindigkeit herabsinkt; in der Gleichgewichtslage angekommen, geht es infolge der Trägheit weiter und steigt mit abnehmender Geschwindigkeit einen gleich großen Bogen (AB') hinan, in dessen höchstem Punkte (B') seine Geschwindigkeit durch die entgegenwirkende Schwerkraft erschöpft ist. Von B' läuft es denselben Weg über A nach B in derselben Weise zurück. Das Pendel beschreibt also eine schwingende Bewegung, von ähnlicher Art, wie wir sie oben (20) an der mit Masse beschwerten Feder bereits kennen gelernt haben. Die Schwingungsweite ist der Bogen AB.

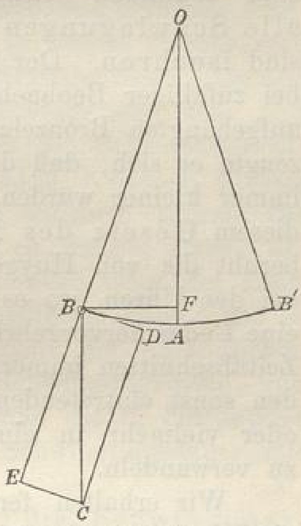

Fig. 12.
Pendel.

Die Kraft, welche das Pendel in seine Gleichgewichtslage zurückzukehren nötigt, ist eine Komponente der Schwerkraft. Stellt nämlich in der Figur $BC = G$ den lotrecht abwärts wirkenden Zug des Pendelgewichtes vor, so kann man sich diese Kraft nach dem Parallelogramm der Kräfte in zwei zueinander senkrechte Seitenkräfte BE und BD zerlegt denken, von welchen erstere in die Richtung des Fadens, letztere in die Berührungslinie des Kreisbogens, also in die Richtung der Bewegung fällt, welche der Pendelkörper im Punkte B besitzt; nur diese letztere kann Ursache der Bewegung sein, während jene keinen weiteren Erfolg hat, als den Faden gespannt zu erhalten. Zieht man nun BF senkrecht zu OA, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCD und BOF, daß sich die bewegende Kraft BD zur ganzen Schwerkraft BC verhält wie die Entfernung $BF = y$ zur Pendellänge $OB = l$, oder daß

$$BD = \frac{G}{l} \cdot y$$

für ein und dasselbe Pendel der jeweiligen Entfernung des Pendelkörpers von der Gleichgewichtslage des Fadens proportional ist. Wenn die Schwingungsweiten nur klein sind, d. h. 2—3^0 nicht überschreiten, so ist der bogenförmige Weg BA, den der Pendelkörper von irgendeinem Punkte seiner Bahn aus bis zur Gleichgewichtslage zurückzulegen hat, von der geradlinigen Strecke BF nicht merklich verschieden. Unter diesen Umständen ist die Kraft der Entfernung von der Ruhelage einfach proportional zu setzen. Ist dies aber der Fall, so befolgen die Schwingungen des Pendels genau die gleichen Gesetze, die wir oben (20) für die Schwingungen einer Masse an einer Feder aufgestellt haben. Vor allem gilt der Satz, daß das Pendel bis zur Gleichgewichtslage dieselbe Zeit braucht, gleichviel ob seine Schwingungsweite 3^0 oder 2^0 oder nur wenige Bogenminuten oder -sekunden beträgt. Bei kleinen Schwingungsweiten sind also alle Schwingungen des Pendels von gleicher Dauer oder sie sind isochron. Der 20 jährige Galilei entdeckte (1583) dieses Gesetz bei zufälliger Beobachtung einer im Dome zu Pisa an langer Kette aufgehängten Bronzelampe; durch Zählung seiner Pulsschläge überzeugte er sich, daß die Schwingungen, obgleich sie nach und nach immer kleiner wurden, doch immer die nämliche Dauer hatten. Auf diesem Gesetz des Isochronismus der Pendelschwingungen beruht die von Huygens (1657) eingeführte Anwendung des Pendels bei den Uhren, wo es die Aufgabe hat, die durch ein Gewicht oder eine Feder hervorgebrachte Bewegung des Räderwerkes nach gleichen Zeitabschnitten immer auf einen Augenblick zu hemmen und dadurch den sonst eintretenden ungleichförmigen Gang in einen gleichmäßigen, oder vielmehr in einen nach gleichen Zeitabschnitten gehemmten, zu verwandeln.

Wir erhalten ferner aus der in (20) aufgestellten Formel für die Schwingungsdauer unmittelbar die Schwingungsdauer eines Pendels, wenn wir für p den entsprechenden Ausdruck einsetzen. Nun ist die treibende Kraft P im Falle des Pendels

$$P = BD = \frac{G}{l} y,$$

oder da das Gewicht G der Pendelmasse m gleich mg ist,

$$P = \frac{mg}{l} y.$$

Im Abstande $y = 1$ wäre also $P = \frac{mg}{l}$ und dieser Ausdruck entspräche dem p in der Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{p}}.$$

Also ist die Schwingungsdauer eines Pendels

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Es ist aber bei Pendelschwingungen üblich, als Schwingungsdauer die Zeit eines einfachen Hin- oder Herganges zu bezeichnen. Brauchen wir für diese Rechnung der Schwingungsdauer den Buchstaben t, so ist die Schwingungsdauer t des Pendels (für hinreichend kleine Amplituden) demnach ausgedrückt durch:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

In dieser Gleichung sind alle Gesetze der Pendelschwingungen enthalten. Das Gesetz des Isochronismus spricht sich schon dadurch aus, daß die Formel für t die Schwingungsweite gar nicht enthält. Auch von der Masse (oder dem Gewicht) des Pendelkörpers ist die Schwingungsdauer unabhängig, da auch m aus der Rechnung hinausfiel. In der Tat fand Newton, daß die Schwingungsdauer eines Pendels, dessen Pendelkörper, damit er immer den gleichen Luftwiderstand erfahre, aus einer Büchse bestand, in welche verschiedene Substanzen gebracht wurden, stets genau die nämliche blieb. Daraus folgt, daß alle Körper, welches auch ihr Gewicht sein mag und aus welchem Stoffe sie bestehen mögen, durch die Schwerkraft die gleiche Beschleunigung erfahren, oder daß alle Körper gleich schnell fallen. Der mittels des Pendels geführte Beweis für diesen Satz ist weit genauer als die früher zu diesem Zweck angeführten Versuche (vgl. 10). Denn da ein Pendel trotz des Luftwiderstandes einige tausend Schwingungen ausführen kann, ehe es zur Ruhe kommt, und alle diese Schwingungen, die anfänglichen von größerer wie die späteren von kleinerer Schwingungsweite, von gleicher Dauer sind, so kann man, indem man die in bestimmter Zeit stattfindenden Schwingungen zählt, die Schwingungsdauer mit großer Genauigkeit ermitteln.

Unsere Formel sagt uns weiter, daß 1) die Schwingungsdauer proportional der Quadratwurzel aus der Pendellänge und 2) umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Beschleunigung der Schwere ist. Ersteres Gesetz wurde bereits von Galilei durch Beobachtungen an ungleich langen Fadenpendeln gefunden. Drei Pendel, deren Längen sich wie $1:4:9$ verhalten, haben Schwingungsdauern, die sich wie $1:2:3$ verhalten. Das letztere Gesetz kann man nachweisen durch ein starres Stangenpendel, das man in einer zur Vertikalebene unter dem Winkel α geneigten Ebene um eine zu letzterer senkrechte Achse schwingen läßt (Mach). Es schwingt jetzt langsamer, als bei vertikaler Lage der Schwingungsebene, weil statt der Beschleunigung g nur noch die Komponente $g \cos \alpha$ wirkt, und seine Schwingungsdauer erweist sich im Verhältnis von $1 : \sqrt{\cos \alpha}$ vergrößert.

Unter Schwingungszahl (n) eines Pendels versteht man die Anzahl der in 1 sec erfolgenden Schwingungen; sie ist $n = 1/t$ oder $n = \sqrt{g} / \pi \sqrt{l}$. Läßt man ein und dasselbe Pendel unter der Einwirkung zweier verschiedener Beschleunigungen g und g' schwingen, so verhalten sich hiernach die Schwingungszahlen n und n' wie die Quadratwurzeln aus den Beschleunigungen, oder die Beschleunigungen verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszahlen:

$$g : g' = n^2 : n'^2.$$

25. **Sekundenpendel. Bestimmung von g.** Ein Pendel, dessen Schwingungsdauer eine Sekunde beträgt, heißt Sekundenpendel. Bezeichnet man die Länge des mathematischen Sekundenpendels mit l_1, so ergibt sich vermöge obiger Formel, da jetzt $t = 1$ ist:

$$1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}, \quad \text{oder} \quad 1 = \pi^2 \frac{l_1}{g}$$

und daraus

$$g = \pi^2 l_1 .$$

Man findet also die Beschleunigung der Schwere, wenn man die Länge des Sekundenpendels mit dem Quadrate der Zahl π multipliziert. Da die Länge des Sekundenpendels sehr genau gemessen werden kann, so ist dieses Verfahren das genaueste zur Ermittelung von g. Borda fand für die Länge des Sekundenpendels in Paris 99,392 cm; daraus ergibt sich die Fallbeschleunigung $g = 980{,}95$ cm sec^{-2}.

Als 1672 der französische Astronom Richer in Cayenne, fünf Breitengrade nördlich vom Äquator, Beobachtungen anstellte, bemerkte er, daß seine von Paris mitgebrachte Pendeluhr um $2^1/_2$ Minuten täglich nachging; damit die Uhr wieder richtig ging, mußte er das Sekundenpendel um einige Millimeter verkürzen; nach Paris zurückgebracht, ging sie nun $2^1/_2$ Minuten vor. Wenn aber ein und dasselbe Pendel in Cayenne langsamer schwingt als in Paris, so kann dies keine andere Ursache haben, als daß die Schwerkraft dort schwächer wirkt als hier, so daß dort auch ein frei fallender Körper eine kleinere Beschleunigung erfährt als hier.

Man hat nun, indem man die Länge des Sekundenpendels an den verschiedensten Orten der Erdoberfläche bestimmte, gefunden, daß diese Länge von dem Äquator nach den Polen hin zunimmt; am Äquator nämlich ist das Sekundenpendel 99,092 cm, unter 45° Breite 99,355 cm, in Berlin 99,424 cm lang, und am Pol würde es, wie man aus den übrigen Beobachtungen schließen muß, 99,613 cm lang sein. Daraus folgt, daß in gleichem Maß auch die Beschleunigung der Schwere vom Äquator nach den Polen hin zunimmt. Nach der Formel $g = \pi^2 l_1$ findet man die Beschleunigung der Schwere am Äquator 978,00, unter 45° Breite 980,60, in Paris 980,95, in Berlin 981,28, am Pol 983,19 (cm sec^{-2}).

26. **Gleichgewicht von Kräften an einem starren Körper.** In den bisher betrachteten Fällen handelte es sich um die Bewegung eines Massenpunktes unter der Einwirkung einer Kraft oder um das Gleichgewicht von Kräften, die an einem und demselben Punkte angreifen. Wir können uns nun denken, daß eine Kraft an einem