Lehrbuch der Experimentalphysik

Lommel, Eugen von

Leipzig, 1908

31. Mittelkraft und Mittelpunkt paralleler Kräfte

urn:nbn:de:hbz:466:1-83789

gleich, d. h. es ist $P\delta = Q\delta'$, wenn man mit δ und δ' die Verschiebungen bezeichnet, welche die Angriffspunkte der Kräfte P und Q bei eintretender Bewegung gleichzeitig in der Richtung der Kräfte erleiden. Man hat diesen allgemein gültigen Satz auch in folgender Form als „goldene Regel der Mechanik" ausgesprochen: Was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren.

Statt $P\delta = Q\delta'$ kann man auch schreiben $P\delta - Q\delta' = 0$, oder $P\delta + Q\delta' = 0$, wenn man eine Verschiebung des Angriffspunktes im Sinne der wirkenden Kraft positiv, eine Verschiebung im entgegengesetzten Sinne negativ rechnet. Befindet sich also eine Maschine im Gleichgewicht, und es tritt eine kleine für die Konstruktion der Maschine mögliche (virtuelle) Verschiebung der Angriffspunkte ein, so ist die Summe der bewegenden (positiven) Arbeit und der widerstehenden (negativen) Arbeit gleich Null. Es gilt dies aber nicht bloß für die einfachen Maschinen und für nur zwei Kräfte, sondern auch für beliebig viele Kräfte, die an irgendwie miteinander verbundenen Punkten (an einer beliebigen Maschine) angreifen. Wir gelangen also zu dem folgenden allgemein gültigen Prinzip der virtuellen Arbeiten (Prinzip der virtuellen Momente oder der virtuellen Geschwindigkeiten): Befindet sich eine Verbindung materieller Punkte, an welchen Kräfte angreifen, im Gleichgewicht, so ist die Summe der virtuellen Arbeiten dieser Kräfte gleich Null für alle kleinen bei der vorhandenen Verbindung möglichen (virtuellen) Verschiebungen der Angriffspunkte, oder es ist, wenn $P, P', P'' \ldots$ die Kräfte, $\delta, \delta', \delta'' \ldots$ die nach den Richtungen der zugehörigen Kräfte gemessenen Verschiebungen darstellen:

$$P\delta + P'\delta' + P''\delta'' + \ldots = 0.$$

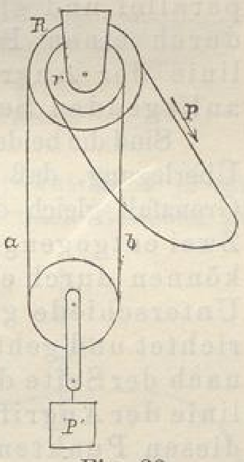

Fig. 23.
Differentialflaschenzug.

Als Beispiel betrachten wir den Differentialflaschenzug (Fig. 23). Um zwei auf derselben Achse miteinander fest verbundene Rollen mit den wenig verschiedenen Radien R und r und eine lose Rolle, an der die Last P' hängt, sei eine in sich zurücklaufende Schnur oder Kette, gegen Gleitung gesichert, in der durch Fig. 23 angedeuteten Weise geschlungen. Zieht man die Schnur in der Richtung des Pfeils mit der Kraft P um das Stückchen δ fort, so wird der Schnurteil a um das Stückchen δ auf die Rolle R aufgewickelt, der Schnurteil b um $\delta . r/R$ abgewickelt, und die Last P' steigt um $\delta' = {}^1/_2\delta\left(1 - \frac{r}{R}\right)$. Damit Gleichgewicht bestehe, muß $P\delta - P'\delta' = 0$, also, da die willkürliche Verschiebung δ sich weghebt,

$$P = {}^1/_2 P'\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

sein.

31. Mittelkraft und Mittelpunkt paralleler Kräfte. Wir haben oben (28) den Momentensatz abgeleitet unter der Bedingung, daß der Körper, an dem die Kräfte P und Q angreifen, um eine feste Achse drehbar sei. Das Gleichgewicht war dann (vgl. Fig. 13) durch die Bedingung gegeben, daß die Resultante R durch die feste Achse ginge. Sie bewirkt in diesem Falle keine Drehung des Körpers, aber sie übt offenbar einen Druck auf die Achse aus, und man muß, wenn man sich die Achse entfernt und den Körper frei beweglich denkt, in der Richtung der Resultante eine ihr gleiche Gegenkraft anbringen, um zu verhindern, daß der Körper durch die beiden Kräfte P und Q fortbewegt wird. Sind die beiden Kräfte P und Q einander parallel, wie in Fig. 17 und 18, so ist die angegebene Konstruktion der Resultante nicht mehr ohne weiteres ausführbar. Denkt man sich aber die beiden Kräfte P und Q in Fig. 13 in ihrer Ebene bei gleichbleibendem a und b allmählich so gedreht, daß ihre Richtungen mehr und mehr parallel werden, so ist leicht ersichtlich, daß dabei der Winkel an der Spitze C des Parallelogramms kleiner und kleiner wird. Entsprechend unterscheidet sich die Länge der Diagonale immer weniger von der Summe der Längen der beiden Seiten, und im Grenzfall, wenn die Kräfte parallel sind und der Winkel Null wird, ist sie dieser Summe gleich, während die Bedingung, daß die Richtung der Diagonale durch den Punkt M geht, dabei andauernd erhalten bleibt. Wir können also sagen: Die Mittelkraft zweier gleichgerichteter paralleler Kräfte, welche an zwei fest verbundenen Punkten eines Körpers wirken, ist mit ihnen parallel und gleichgerichtet, ihrer Summe gleich, und geht durch einen Punkt hindurch, welcher die Verbindungslinie der Angriffspunkte im umgekehrten Verhältnis der anliegenden Seitenkräfte teilt.

Sind die beiden Kräfte entgegengerichtet, so lehrt eine entsprechende Überlegung, daß die Länge der Diagonale des Parallelogramms im Grenzfall gleich der Differenz der Seiten wird. Es ergibt sich also: Zwei entgegengesetzt parallele (antiparallele) ungleiche Kräfte können durch eine Mittelkraft ersetzt werden, welche ihrem Unterschiede gleich ist; sie ist mit der größeren gleichgerichtet und geht durch einen Punkt hindurch, welcher auf der nach der Seite der größeren Kraft verlängerten Verbindungslinie der Angriffspunkte so liegt, daß sich seine Abstände von diesen Punkten umgekehrt verhalten wie die Seitenkräfte.

Diese Resultanten stellen die Drucke dar, die die an einem Hebel angreifenden parallelen Kräfte auf die Achse des Hebels ausüben. Die Richtigkeit dieser Überlegungen beweist man dadurch, daß man die Gegenkraft bestimmt, die der auf die Achse wirkenden Druckkraft das Gleichgewicht hält. Wir heben die Stange, deren wir uns oben zum Beweis des Hebelgesetzes bedient haben (Fig. 19 und 20), von dem festen Achsenlager ab und legen sie mit der Achse in eine Doppelöse, die an einem Faden hängt, der seinerseits über eine feste Rolle läuft und am anderen Ende eine Wagschale trägt (Fig. 24). In diese werden zunächst so viel Gewichte gelegt, wie erforderlich sind, um die Stange mit der Doppelöse frei schwebend im Gleichgewicht zu halten. Werden nun, wie im Versuch Fig. 19 zwei Gewichte in 4 und 4 Gewichte in 2′ angehängt, so dreht sich der Stab zwar nicht, aber er sinkt nach unten, und es müssen 6 Gewichtstücke in die Wagschale gelegt werden, um das Gleichgewicht wiederherzustellen. Lassen wir aber die zwei Gewichte statt in 4 nach unten, in 4′ nach oben ziehen, wie in Fig. 17, so genügt es, zwei Gewichte in die Wagschale zu legen, um vollständiges Gleichgewicht zu erhalten.

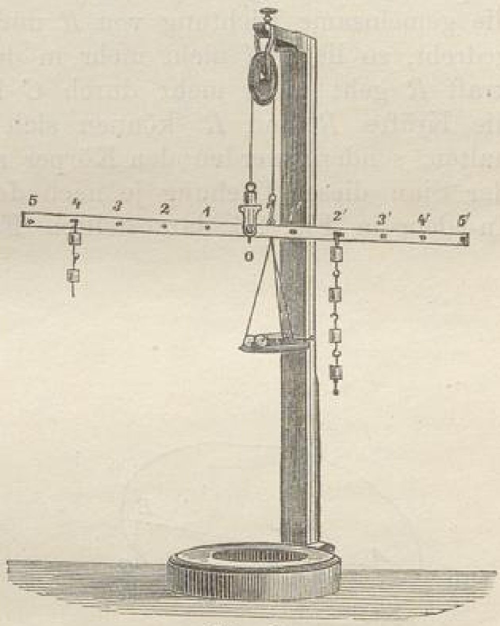

Fig. 24.
Parallele Kräfte.

Diese Versuche zeigen, unter welchen Bedingungen drei parallele Kräfte, die an verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifen, im Gleichgewicht sind, keine Fortbewegung und keine Drehung des Körpers bewirken. Jede der drei Kräfte kann man als Gegenkraft gegen die Resultante der beiden anderen ansehen. Dabei ist es nun, falls der starre Körper eine größere Ausdehnung hat, für das Bestehen des Gleichgewichtes ganz gleichgültig, an welchem Punkte derjenigen Geraden, in die die Mittelkraft zweier Kräfte hineinfällt, wir die dritte Kraft angreifen lassen. In der Tat kann ja an dem starren Körper der Angriffspunkt einer Kraft nach Belieben in Richtung der Kraft verschoben gedacht werden. Denkt man sich aber den Körper aus seiner ursprünglichen Lage ein wenig herausgedreht, so findet man, daß die Wirkung der Kräfte, je nach der Lage des Angriffspunktes der dritten Kraft, ganz verschieden ausfällt.

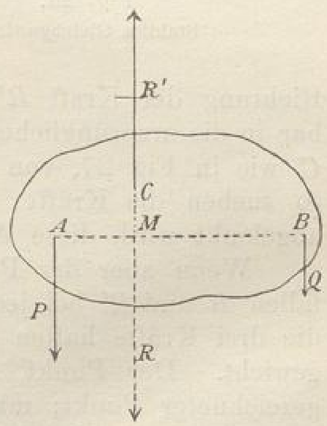

Fig. 25.
Gleichgewicht paralleler Kräfte.

Wir nehmen an, daß sich drei in einer Ebene liegende parallele Kräfte P, Q und R', die an den Punkten A, B und C eines starren Körpers angreifen, das Gleichgewicht halten, d. h. daß die Mittelkraft R der beiden Kräfte P und Q ebenfalls durch C hindurchgeht und der Kraft R' gleich und entgegengerichtet sei (Fig. 25). Nun denken wir uns den Körper um einen kleinen Betrag aus dieser Lage herausgedreht unter der Voraussetzung, daß die Kräfte ihre Angriffspunkte und ihre Richtungen behalten, wie es bei den durch angehängte Gewichte ausgeübten Kräften in den obigen Versuchen der Fall sein würde. Da die Mittelkraft R die gerade Verbindungslinie der Angriffspunkte A und B stets im umgekehrten Verhältnis der anliegenden Kräfte teilen muß, so geht sie immer, auch in der neuen Lage, durch den Punkt M hindurch, der dieser Bedingung entspricht. In der ursprünglichen Lage liegen die Punkte M und C in der Geraden, die die gemeinsame Richtung von R und R' ist. Wird der Körper aber gedreht, so liegt M nicht mehr in der Richtung von R'; die Mittelkraft R geht nicht mehr durch C hindurch, sondern daran vorbei; die Kräfte R und R' können sich daher nicht das Gleichgewicht halten, sondern werden den Körper zu drehen suchen, und zwar wird der Sinn dieser Drehung je nach der Lage von C verschieden sein. In dem in Fig. 26 dargestellten Falle, in dem C von M aus in

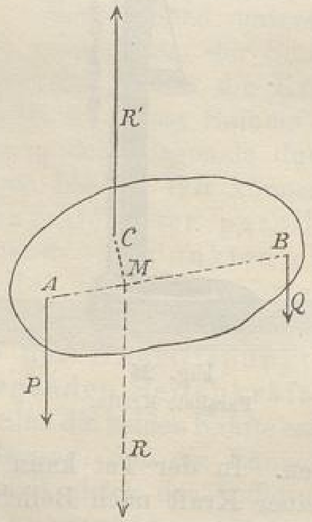

Fig. 26.
Stabiles Gleichgewicht.

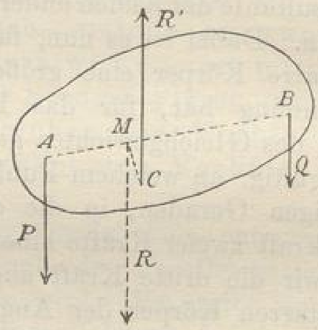

Fig. 27.
Labiles Gleichgewicht.

Richtung der Kraft R' liegt, suchen die Kräfte den Körper offenbar in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückzudrehen; liegt aber C, wie in Fig. 27, von M aus entgegengesetzt der Richtung von R', so suchen die Kräfte, wenn der Körper aus der Gleichgewichtslage abgelenkt wird, diese Ablenkung zu vergrößern.

Wenn aber der Punkt C mit dem Punkt M zusammenfällt, so fallen R und R' bei jeder Lage des Körpers in dieselbe Gerade, und die drei Kräfte halten sich bei jeder Lage des Körpers das Gleichgewicht. Der Punkt M ist also ein besonders wichtiger und ausgezeichneter Punkt; man nennt ihn den Mittelpunkt der beiden parallelen Kräfte P und Q. Er ist bestimmt als derjenige Punkt auf der geraden Verbindungslinie der Angriffspunkte A und B der beiden Kräfte, der die Strecke AB im umgekehrten Verhältnis der anliegenden Kräfte teilt.

Greift die dritte Kraft im Mittelpunkt der beiden anderen Kräfte an, so ist das Gleichgewicht der drei Kräfte ganz unabhängig von der Lage des Körpers. Man sagt dann, der Körper sei in indifferentem Gleichgewicht. Greift die dritte Kraft an einem anderen Punkte an, so besteht das Gleichgewicht der drei Kräfte nur für eine bestimmte Lage des Körpers, nämlich nur dann, wenn der Mittelpunkt der beiden anderen Kräfte in der Richtung der dritten Kraft liegt. Dieses an die bestimmte Lage des Körpers gebundene Gleichgewicht bezeichnet man als ein stabiles, wenn bei einer Drehung des Körpers die Kräfte den Körper in die Gleichgewichtslage zurückzudrehen suchen, wie in Fig. 26 der Fall ist, dagegen als labiles, wenn die Kräfte die Drehung des Körpers zu vergrößern suchen, wie in Fig. 27.

Wie sich nach den obigen Ausführungen zwei parallele Kräfte zu einer Mittelkraft zusammenfassen lassen, so läßt sich auch umgekehrt jede gegebene Kraft in zwei mit ihr parallele oder entgegengesetzt parallele Komponenten zerlegen, deren Summe oder Differenz ihr gleich ist, und deren Lage entsprechend den obigen Sätzen zu bestimmen ist.

32. **Schwerpunkt.** Durch wiederholte Anwendung der obigen Sätze von der Zusammensetzung paralleler Kräfte lassen sich beliebig viele parallele Kräfte von gleicher Richtung zu einer einzigen Mittelkraft zusammenfassen, indem man die Mittelkraft der beiden ersten Kräfte mit der dritten, die neue Mittelkraft mit der vierten usw. vereinigt; man findet so schließlich eine Gesamtmittelkraft, welche gleich der Summe aller gegebenen Kräfte ist und an einem bestimmten Punkte, dem Mittelpunkt (Zentrum) der parallelen Kräfte, angreift, dessen Lage von der Richtung der Kräfte unabhängig ist. Den Angriffspunkt der Mittelkraft aus allen an den verschiedenen Teilchen eines schweren Körpers angreifenden Schwerkräften nennt man den Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) des Körpers. Da diese Kräfte lotrecht gerichtet und sonach unter sich parallel sind, so ist ihre Mittelkraft gleich ihrer Summe, d. h. gleich dem Gesamtgewicht des Körpers und der Schwerpunkt ist der Mittelpunkt der parallelen Schwerkräfte, in welchem das ganze Gewicht eines Körpers vereinigt gedacht werden kann, und welcher unterstützt sein muß, wenn der Körper der Schwere gegenüber sein Gleichgewicht behaupten soll. Ein aufgehängter Körper z. B. befindet sich im Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt lotrecht unter dem Aufhängungspunkte liegt. Darauf gründet sich ein Verfahren, den Schwerpunkt des Körpers durch Versuche zu finden. Hängt man nämlich einen Körper mittels eines an einem Punkt a seines Umfanges befestigten Fadens auf (Fig. 28), so muß die Verlängerung ac des Fadens durch den Schwerpunkt gehen und stellt somit eine Schwerlinie (so nennt man jede durch den Schwerpunkt gezogene gerade Linie) des Körpers dar; hängt man ferner den Körper an einem zweiten seiner Punkte b (Fig. 29) auf, so muß der Schwerpunkt abermals in der Verlängerung des Fadens, nämlich auf der Schwerlinie bd liegen; er liegt sonach im