Lehrbuch der Experimentalphysik

Lommel, Eugen von

Leipzig, 1908

40. Zentripetalkraft

ist dann gleich dem Abstand der beiden Aufhängungsschneiden. Durch dieses Verfahren sind die oben angeführten genauen Werte der Länge des Sekundenpendels bestimmt worden (Kater 1818, Bessel 1828).

Ein physisches Pendel, welches mit der Winkelgeschwindigkeit ω in seiner Gleichgewichtslage anlangt, besitzt daselbst die Wucht $\frac{1}{2}\omega^2 \Sigma m r^2$, wo $\Sigma m r^2$ das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Drehungsachse bedeutet. Bezeichnet h die vertikale Senkung des in der Entfernung 1 von der Drehungsachse gelegenen Punktes und s die Entfernung des Schwerpunktes von dieser Achse, so ist $h s$ die Falltiefe des Schwerpunktes, und $h s g \Sigma m$ die Fallarbeit, welche das im Schwerpunkt angreifende Gesamtgewicht $g \Sigma m$ des Körpers leisten mußte, um jene Wucht zu erzeugen. Man hat daher

$$h s g \Sigma m = \tfrac{1}{2}\omega^2 \Sigma m r^2 .$$

Für ein einfaches Pendel von derselben Schwingungsdauer und Amplitude, dessen Länge l und dessen Masse μ ist, welches, nachdem sich dessen einziger Massenpunkt μ um $h l$ gesenkt hat, mit der Geschwindigkeit $l\omega$ in der Gleichgewichtslage anlangt, gilt aber dieselbe Beziehung (Fallarbeit gleich Wucht) nämlich

$$h l g \mu = \tfrac{1}{2}\omega^2 \mu l^2 \text{ oder } h g = \tfrac{1}{2}\omega^2 l .$$

Setzt man diesen Wert von $h g$ in die obige Gleichung ein, so ergibt sich die reduzierte Pendellänge

$$l = \frac{\Sigma m r^2}{s \Sigma m},$$

oder, weil (für eine gerade Stange) $s \Sigma m = \Sigma m r$ ist (28)

$$l = \frac{\Sigma m r^2}{\Sigma m r}.$$

Nehmen wir z. B. an, wir hätten an einer gewichtslosen Stange zwei Massen, m_1 und m_2, m_1 in dem festen Abstand r_1 unterhalb des Aufhängungspunktes, m_2 aber oberhalb des Aufhängungspunktes an der nach oben verlängerten Stange verschiebbar. Ihr Abstand vom Aufhängungspunkte ist r_2 und muß gegen r_1 negativ genommen werden. Dann ist die reduzierte Pendellänge des Systems:

$$l = \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{m_1 r_1 - m_2 r_2}.$$

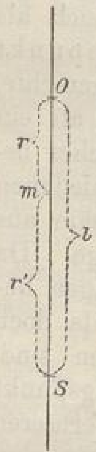

Fig. 39. Reversionspendel.

Ist r_2 sehr klein, d. h. befindet sich m_2 dicht am Aufhängungspunkt, so ist $l = r_1$. Schiebt man m_2 in die Höhe, so wird der Nenner immer kleiner und l immer größer. Je höher m_2 hinaufgeschoben wird, um so größer ist die Schwingungsdauer des Systems. Darauf beruht das Metronom.

Kehrt man das Pendel um und macht den Schwingungspunkt S (Fig. 39) zum Aufhängepunkt, so ist die neue Pendellänge l', da nun $r' = l - r$ statt r zu setzen ist:

$$l' = \frac{\Sigma m (l-r)^2}{\Sigma m (l-r)} = \frac{l^2 \Sigma m - 2l \Sigma m r + \Sigma m r^2}{l \Sigma m - \Sigma m r}$$

oder, da $\Sigma m r^2 = l \Sigma m r$ ist

$$l' = \frac{l^2 \Sigma m - l \Sigma m r}{l \Sigma m - \Sigma m r} = \frac{l(l \Sigma m - \Sigma m r)}{l \Sigma m - \Sigma m r} = l,$$

d. h. die reduzierte Pendellänge und damit die Schwingungsdauer ist bei der neuen Aufhängung die nämliche.

40. **Zentripetalkraft.** Bei jeder krummlinigen Bewegung äußert sich die Trägheit der bewegten Massen nicht bloß in dem Widerstand, den sie der Beschleunigung in Richtung ihrer Bewegung entgegensetzen, sondern auch in einem Widerstande gegen die Änderung der Bewegungsrichtung. Um diese Erscheinungen kennen zu lernen,

betrachten wir eine Bewegung, bei der keine beschleunigenden, sondern nur ablenkende Wirkungen vorhanden sind. Das ist der Fall, wenn sich ein Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreise bewegt, eine Bewegung, die z. B. immer verwirklicht ist, so oft sich ein schwerer Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Achse dreht. Es fragt sich, wie beschaffen muß die Kraft sein, die einen Massenpunkt A, der die Geschwindigkeit v besitzt, zwingt, auf einem Kreise vom Radius r herumzulaufen. Da die Geschwindigkeit konstant sein soll, darf keine Komponente der Kraft in die Richtung der Bewegung fallen; die Kraft muß also an jeder Stelle die Richtung des Radius haben, und da sie den Körper aus der geradlinigen Bahn in die Kreisbahn hinein ablenkt, so muß sie überall nach dem Mittelpunkt des Kreises hin gerichtet sein. Eine solche stets nach einem Punkte gerichtete Kraft nennt man eine Zentral- oder Zentripetalkraft. Über die erforderliche Größe dieser Kraft gibt folgende Betrachtung Aufschluß.

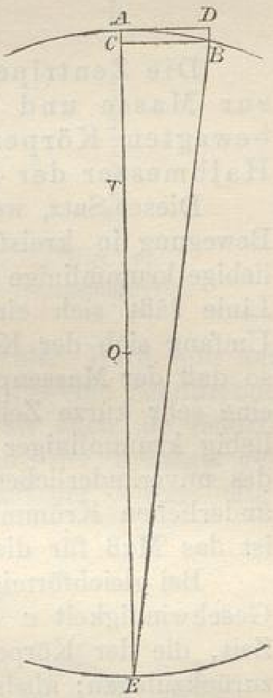

Fig. 40.
Zentripetalkraft.

Ist AB der Weg, den der Massenpunkt während einer sehr kleinen Zeit τ längs der Kreisbahn zurücklegt und fällt man von B (Fig. 40) die Senkrechte BC auf den von A durch den Mittelpunkt O des Kreises gezogenen Durchmesser AE, so ist AC die kleine Strecke, um welche der Punkt während derselben Zeit τ durch die Zentripetalkraft von der Tangente AD weg, längs welcher zu gehen er vermöge der Trägheit bestrebt ist, gegen den Mittelpunkt O hingezogen wird. Nun ist das rechtwinklige Dreieckchen, dessen Hypotenuse die Sehne AB ist, ähnlich dem Dreieck AEB, das den Durchmesser $AE = 2r$ zur Hypotenuse hat. Es ist daher

$$AC : AB = AB : AE.$$

Je kleiner man das Zeitteilchen τ und sonach AB annimmt, um so genauer wird der Bogen $AB = v\tau$ der Sehne AB gleich; für ein hinreichend kleines Zeitteilchen ergibt sich also

$$AC : v\tau = v\tau : 2r$$

und daraus:

$$AC = \frac{v^2 \tau^2}{2r}.$$

Während eines genügend kleinen Zeitteilchens aber kann man die nach O hin wirkende Kraft als unveränderlich und demnach die von ihr erzeugte Bewegung als eine gleichförmig beschleunigte ansehen.

Bezeichnen wir mit c die zugehörige Beschleunigung, so ist der während der Zeit τ zurückgelegte Weg:

$$A\,C = {}^1\!/_2\, c\, \tau^2.$$

Es ergibt sich also durch Gleichsetzung des Wertes mit dem vorigen die Zentripetalbeschleunigung:

$$c = \frac{v^2}{r}.$$

Die Zentripetalkraft C selbst wird erhalten, wenn man die Beschleunigung c mit der Masse m des bewegten Punktes multipliziert; es ist also:

$$C = \frac{m\,v^2}{r}.$$

Die Zentripetalkraft steht also im geraden Verhältnis zur Masse und zum Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers und im umgekehrten Verhältnis zum Halbmesser der Bahn.

Dieser Satz, welcher sich aus der Betrachtung der gleichförmigen Bewegung in kreisförmiger Bahn ergab, gilt übrigens für jede beliebige krummlinige Bewegung. Denn für jeden Punkt einer krummen Linie läßt sich ein Kreis (der Krümmungskreis) angeben, dessen Umfang sich der Kurve in diesem Punkte aufs innigste anschmiegt, so daß der Massenpunkt, indem er diese Stelle seiner Bahn passiert, eine sehr kurze Zeit lang auf diesem Kreise sich bewegt. Bei beliebig krummliniger Bahn hat man daher in obigem Ausdruck statt des unveränderlichen Halbmessers r den von Punkt zu Punkt veränderlichen Krümmungshalbmesser ϱ zu setzen. Der Quotient $1/\varrho$ ist das Maß für die Krümmung der Kurve.

Bei gleichförmiger Kreisbewegung gibt man gewöhnlich statt der Geschwindigkeit v die Umlaufszeit T (in Sekunden) an, d. h. die Zeit, die der Körper gebraucht, um den ganzen Kreisumfang $2\pi r$ zurückzulegen; alsdann ist $v = 2\pi r/T$. Setzt man diesen Wert in den Ausdruck C ein, so ergibt sich:

$$C = \frac{4\pi^2 m\, r}{T^2}.$$

man kann daher auch sagen: Die Zentripetalkraft, die eine gleichförmige Kreisbewegung unterhält, ist der Masse unp dem Halbmesser direkt, dem Quadrate der Umlaufszeit umgekehrt proportional.

41. **Zentrifugalkraft.** Bei der betrachteten Kreisbewegung leistet die Zentripetalkraft keinerlei Arbeit, da sich ja die bewegte Masse niemals in Richtung dieser Kraft bewegt. Die Zentripetalkraft dient vielmehr nur dazu, dem Widerstand der Masse gegen die dauernde Ablenkung aus der geradlinigen Bahn das Gleichgewicht zu halten. Dieser Trägheitswiderstand erscheint als eine Kraft, die der Zentripetalkraft gleich und entgegengerichtet ist. Man nennt