Lehrbuch der Experimentalphysik

Lommel, Eugen von

Leipzig, 1908

54. Elastizität

urn:nbn:de:hbz:466:1-83789

bloßes Zusammenpressen wieder zu einem Ganzen vereinigen: so werden zwei glühende Eisenstücke durch Zusammenschweißen miteinander zu einem Stück verbunden. Diese Eigenschaften sind weniger durch die stoffliche Beschaffenheit der Teilchen als vielmehr durch ihre gegenseitige Anordnung bedingt. Der Kohlenstoff z. B. ist als Diamant (regulär kristallisiert) der härteste aller Körper, als Graphit (hexagonal kristallisiert) dagegen sehr weich. Durch geringe Beimengungen anderer Stoffe, sowie durch Temperaturwechsel werden die Kohäsionsverhältnisse oft beträchtlich geändert. Am bekanntesten ist in dieser Beziehung das Eisen, welches durch eine geringe Vermehrung seines Kohlenstoffgehaltes zu Stahl wird. Der erhitzte Stahl wird durch rasches Abkühlen gehärtet; dabei wird zuerst die Oberfläche kalt und starr, während das Innere noch heiß und ausgedehnt bleibt; erkaltet nachher auch der Kern, so findet er in der wie ein Gewölbe widerstehenden Hülle ein Hindernis gegen die natürliche Zusammenziehung. So geraten die äußeren Teilchen in einen Zustand gewaltsamer Pressung, die inneren in einen Zustand gewaltsamer Spannung, der sich in der Härte und Sprödigkeit offenbart. Durch Erwärmen („Anlassen“) wird dem gehärteten Stahl ein Teil seiner Sprödigkeit, aber freilich auch seiner Härte, wieder genommen. Auch das Glas wird durch rasches Abkühlen gehärtet (Hartglas). Die Glasträuen (batavische Tropfen) werden als sehr harte, in eine lange Spitze auslaufende Tropfen erhalten, wenn man geschmolzenes Glas in kaltes Wasser tropfen und dadurch plötzlich erstarren läßt; bricht man die Spitze ab, so zerspringen sie mit großer Gewalt und zerfallen zu Staub, wie ein Gewölbe zusammenbricht, wenn man den Schlußstein herausreißt. Die Bologneser Fläschchen, in der Luft rasch gekühlte Glasfläschchen mit sehr dickem Boden, zerspringen, wenn man einen Feuersteinsplitter hineinwirft, welcher die Oberfläche ritzt und dadurch den Widerstand aufhebt, den die Oberfläche im unverletzten Zustande der inneren Spannung der Teilchen entgegensetzte.

54. **Elastizität.** Sind die Kräfte, die an einem festen Körper angreifen, nicht groß genug, um eine völlige Trennung der Teilchen herbeizuführen, so bewirken sie Änderungen in der gegenseitigen Lage der Teilchen. Diese Änderungen bezeichnet man als elastische, wenn sie wieder verschwinden, sobald die Kräfte aufhören zu wirken. Das ist der Fall, solange die Änderungen nicht über eine gewisse Grenze, die Elastizitätsgrenze, hinausgehen. Wird diese überschritten, so bleiben nach Aufhören der wirkenden Kräfte dauernde Änderungen zurück.

Wird ein Silberdraht von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt an einem Ende aufgehängt und am unteren Ende mit einem Gewichte von 1 kg beschwert, so verlängert er sich um 0,14 mm; das doppelte Gewicht bringt die doppelte, das dreifache Gewicht eine dreimal so große Verlängerung hervor usw.; wir finden also, daß die Verlängerung in demselben Verhältnis wie die ziehende

Kraft zunimmt (Hooke, 1675). Nehmen wir den Draht 2 m lang, so ergibt sich schon bei Belastung mit 1 kg eine Verlängerung von 0,28 mm; da nämlich jedes Meter sich um 0,14 mm ausdehnt, so muß die gesamte Verlängerung jetzt doppelt so groß ausfallen wie vorhin, oder die Verlängerung ist der Länge des Drahtes proportional. Ein Silberdraht von 1 m Länge und 2 qm Querschnitt wird durch 1 kg nur um 0,07 mm verlängert; der Draht von 2 qmm Querschnitt kann nämlich wie eine Vereinigung zweier Drähte von je 1 qmm Querschnitt angesehen werden, die ziehende Kraft verteilt sich alsdann zu gleichen Hälften gleichsam auf zwei Drähte, deren jeder nun bei 1 qmm Querschnitt nur von $^1/_2$ kg gezogen wird und sich daher nur um die Hälfte von 0,14 mm, d. h. um 0,07 mm, verlängert. Wir sehen also, daß die durch die nämliche Kraft hervorgebrachte Verlängerung zum Querschnitt im umgekehrten Verhältnis steht. Diese Gesetze gelten übrigens nur innerhalb der Elastizitätsgrenze; für unseren Silberdraht (1 m, 1 qmm) z. B. wird diese Grenze erreicht bei einer Verlängerung von 1,4 mm, welche durch eine Belastung mit etwa 10 kg hervorgebracht wird; stärker darf der Draht nicht angestrengt werden, wenn keine merkliche Verlängerung zurückbleiben soll; diese Kraft kann als Maß für die Elastizitätsgrenze der Substanz gelten. Vermöge der obigen Gesetze ist die Längenänderung eines Körpers durch eine Kraft vollständig bekannt, sobald man weiß, um welchen Bruchteil seiner Länge ein Draht oder Stab von 1 qmm Querschnitt durch eine Zugkraft von 1 kg verlängert wird; man nennt diesen Bruchteil Elastizitätskoeffizient. Gebräuchlicher ist es, das elastische Verhalten der Körper bei der Dehnung durch den reziproken Wert des Elastizitätskoeffizienten zu charakterisieren. Man nennt diese Größe Elastizitätsmodul oder, in neuerer und besserer Bezeichnungsweise, elastischen Widerstand. Er bedeutet das Verhältnis der auf die Querschnittseinheit ausgeübten Zugkraft zu der von ihr bewirkten relativen Verlängerung, oder die Kraft, die auf die Querschnittseinheit wirken muß, um die relative Verlängerung 1, d. h. eine Verdoppelung der Länge des Drahtes zu bewirken, wenn eine solche innerhalb der Elastizitätsgrenze und ohne wesentliche Änderung des Querschnitts denkbar wäre.

Bezeichnet man mit L die Länge des Drahtes (in m), mit q seinen Querschnitt (in qmm), mit l (in m) die von der Belastung P (in kg) hervorgebrachte Verlängerung, mit ε den Elastizitätskoeffizienten und mit $E = 1/\varepsilon$ den Elastizitätsmodul, so lassen sich die obigen Gesetze zusammenfassen in der Gleichung:

$$l = \varepsilon . P \frac{L}{q} \quad \text{oder} \quad P = E . \frac{l}{L} \cdot q .$$

Ausgedrückt in kg auf den qmm hat der Elastizitätskoeffizient des Silbers den Wert 0,000137 oder $^1/_{7300}$, der Elastizitätsmodul also den Wert 7300; entsprechend für Gold 8000, Platin 17000, Kupfer 12000, Eisen 19000, Stahl 21000, Messing 9000, Neusilber 12000, Blei 1800, Glas 6500.

Läßt man auf einen Stab in der Richtung seiner Länge einen Druck wirken, so wird er um ebensoviel verkürzt, wie er durch eine Zugkraft von derselben Größe verlängert wird. Die elastische Ausdehnung (Verkürzung) nach der Länge ist stets von einer Zusammenziehung (Anschwellung) nach der Quere begleitet. Wenn bei der Verlängerung l der ganzen Drahtlänge L der Durchmesser d des Drahtes sich um δ vermindert, so ist $\frac{\delta}{d} : \frac{l}{L}$ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation oder die sogenannte „Elastizitätszahl μ". Sie ist ebenso wie der Elastizitätsmodul eine dem Material eigentümliche Größe, deren Betrag gleich $^1/_2$ sein würde, wenn bei der Dehnung keine Volumänderung eintreten würde. Bei Kautschuk und gequollenem Leim ist dies der Fall. Bei der Mehrzahl der Körper aber liegt der Betrag der Elastizitätszahl zwischen $^1/_3$ und $^1/_5$.

Auffallender als die Längenänderung bei Dehnung oder Zusammendrückung sind die Gestaltsänderungen der Biegung. Wird ein rechtwinkliger Stab in horizontaler Lage mit seinem einen Ende fest eingeklemmt, und läßt man auf das freie Ende eine Kraft, etwa ein Gewicht, vertikal nach unten wirken, so biegt sich der Stab und das freie Ende senkt sich um einen Betrag, der, entsprechend dem Hookeschen Gesetze, der biegenden Kraft proportional ist. Bei diesem Vorgange werden die oberen Teile des Stabes (auf der konvexen Seite der Biegungskurve) gedehnt, die unteren Teile (auf der konkaven Seite) werden zusammengedrückt. Die mittelste Schicht des Stabes erfährt keine elastische Beanspruchung (neutrale Schicht). Auch aus der Senkung des freien Endes bei der Biegung eines Stabes läßt sich der Elastizitätsmodul des Materials des Stabes berechnen. Ist l die freie Länge des Stabes, a seine Höhe, b seine Breite, alles in mm gemessen, und wirkt am freien Ende eine Kraft von P kg, so beträgt die Senkung in mm

$$s = \frac{4\,l^3}{E\,a^3 \,.\, b}\,P.$$

Zu den Biegungserscheinungen gehören auch die Längenänderungen von schraubenförmig gewundenen Metalldrähten, sogenannten Schrauben- oder Spiralfedern, an denen man das Gesetz der Proportionalität zwischen elastischer Formänderung und einwirkender Kraft besonders auffallend wahrnehmen kann, da hier schon verhältnismäßig kleine Kräfte durch Auseinanderziehen oder Zusammenschieben der Windungen bedeutende Längenänderungen bewirken, ohne daß die Elastizitätsgrenze erreicht wird. Man kann daher solche Schraubenfedern geradezu als Federwagen zu Gewichtsbestimmungen benutzen (Jollys Federwage, Küchenwagen mit kreisförmigem Zifferblatt).

Durch Hebelwagen vergleicht man Massen, durch Federwagen Kräfte. Eine Hebelwage liefert an allen Stellen der Erdoberfläche dieselben Angaben. Eine Federwage dagegen würde, wenn sie bei uns graduiert ist, am Äquator beim Anhängen eines Kilogrammgewichtsstückes weniger als ein Kilogramm zeigen. Federwagen, welche zur Messung größerer Kräfte bestimmt sind, nennt man Dynamometer oder Kraftmesser; sie bestehen gewöhnlich aus einem starken gebogenen Stahlstreifen (Feder), welcher durch seine Formänderung einen Zeiger in Bewegung setzt; schaltet man z. B. ein solches Dynamometer zwischen einem Pflug und dem vorgespannten Pferd ein, so kann man an der Skala in Kilogrammen die Kraft ablesen, welche das Pferd zum Fortziehen des Pfluges aufwenden muß (6).

Bei Dehnung und Biegung erfährt jedes Element des Körpers gleichzeitig Volumen- und Gestaltsänderungen. Diese beiden Arten elastischer Änderungen lassen sich auch einzeln, jede für sich, hervorrufen, und man unterscheidet, ihnen entsprechend, zwischen Volumen- und Gestaltselastizität. Denkt man sich etwa einen Würfel aus fester Substanz von allen Seiten durch gleiche, über seine Oberfläche gleichmäßig verteilte, auf den Flächen senkrecht stehende Kräfte zusammengedrückt, so bleibt seine Gestalt die eines Würfels, aber seine Kantenlänge nimmt ab und sein Volumen verkleinert sich. Besteht der Würfel z. B. aus Stahl und beträgt seine Kantenlänge 1 cm, so würde das Volumen um $0{,}7 \times 10^{-6}\,\mathrm{cm}^3$ verkleinert, die Kantenlänge um $0{,}23 \times 10^{-6}$ cm verkürzt, wenn auf jede Fläche eine Gesamtkraft wirkte, die gleich dem Gewicht eines Kilogramms wäre. Allgemein ist die Volumenänderung v um so größer, je größer das Volumen V des zusammengedrückten Körpers und je größer die wirkende Kraft P ist. Man mißt diese letztere durch die Zahl der Kilogramme, der die auf den Quadratzentimeter der Oberfläche wirkende Kraft gleich ist. Setzt man dementsprechend $v = k\,V\,P$, so bedeutet k eine für jedes Material charakteristische Konstante, die man die Kompressibilitätskonstante nennt; den umgekehrten Wert $^1/_k$, der ein Maß des Widerstandes gegen die allseitige Zusammendrückung ist, bezeichnet man als Volummodul.

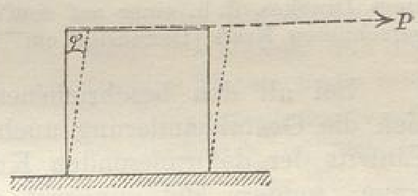

Fig. 59.
Scheerung.

Man kann andererseits die Gestalt des Würfels ändern und sein Volumen ungeändert lassen. Denkt man sich die Unterfläche des Würfels befestigt und an der oberen Fläche eine Kraft P (Fig. 59) in tangentialer Richtung angreifen, so wird der Würfel die durch die punktierten Linien angedeutete schiefwinklige Gestalt annehmen; eine solche elastische Veränderung nennt man eine Scheerung oder Schiebung. Die Größe der elastischen Veränderung wird in diesem Falle durch den Winkel φ gemessen, um den die Seitenflächen des Würfels gegen ihre ursprüngliche Lage gedreht sind. Dieser Winkel ist ebenfalls wieder der wirkenden Kraft proportional, und wenn man unter P den auf die Flächeneinheit entfallenden Teil der Kraft versteht, so ist das Verhältnis P/φ eine für jedes Material charakteristische Konstante T, die den Widerstand gegen eine Scheerung mißt und die man als Gestalts- oder Starrheitsmodul, oder auch als Torsionsmodul bezeichnet.

Eine dritte vielfach vorkommende Art der elastischen Veränderung ist die Drillung oder Torsion, die in einem (zylindrischen)

Stab oder gespannten Draht hervorgerufen wird, wenn man ihn an seinem oberen Ende festklemmt und vermittelst eines Kräftepaares, das an einem, am unteren Ende angebrachten wagerechten Hebelarme angreift, dreht oder drillt. Die Größe des Winkels, um den der untere Querschnitt des Drahtes gegen den oberen gedreht wird, ist dem wirkenden Drehungsmoment proportional. Auf diesem Gesetz beruht die Drehwage, eine Vorrichtung, vermittelst welcher man kleine Kräfte dadurch mißt, daß man ihnen durch die Drillung eines Drahtes das Gleichgewicht hält.

Das Drehungsmoment D, mit welchem der Draht der Drillung widerstrebt, ist durch die Formel gegeben:

$$D = \frac{\pi r^4}{2l} T \alpha = \frac{(\pi r^2)^2}{l} T \nu ,$$

wo r den Radius, l die Länge des Drahtes, T seinen Torsionsmodul und α den Winkel im Bogenmaß bzw. ν die Zahl der ganzen Umfänge bedeutet, um welche gedreht wurde. Der Torsionsmodul stellt somit das Moment vor, welches einen Draht von der Länge 1 (m) und dem Querschnitt 1 (qmm) um 360° drillen würde.

Um das elastische Verhalten eines isotropen Körpers zu charakterisieren, genügen stets zwei von den im obigen definierten Konstanten, z. B. E und μ, oder k und T. Zwischen den letzteren und den ersteren bestehen bestimmte Beziehungen. So ist $T = E/2(\mu + 1)$ und da μ zwischen O und $\frac{1}{2}$ liegt, so liegt T zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ E. Elastizitäts- und Torsionsmodul haben beide die Natur eines Druckes, d. h. einer auf eine Fläche wirkenden und auf die Flächeneinheit gerechneten Kraft (Dimension $cm^{-1} g\, sec^{-2}$).

Bei all den beschriebenen elastischen Veränderungen vollzieht sich die Gestaltsänderung auch innerhalb der Elastizitätsgrenze beim Eintritt der deformierenden Kraft nicht sofort in ihrem vollen Betrage, sondern die zunächst eintretende größere Deformation setzt sich noch eine Zeitlang in geringem, allmählich verschwindendem Maße fort. Ebenso nimmt ein Körper, wenn die deformierende Kraft aufhört, auf ihn zu wirken, nicht sofort seine ursprüngliche Gestalt an, sondern es bleibt zunächst eine kleine, erst allmählich verschwindende Deformation zurück. Man nennt diese Erscheinung elastische Nachwirkung.

Die Elastizität findet vielfache Anwendung im praktischen Leben. In den Taschen- und Stutzuhren dient sie als Triebkraft; ein im Federgehäuse befindlicher spiralförmiger Stahlstreifen (Spiralfeder) wird nämlich beim Aufziehen zusammengewunden und dadurch gespannt (vgl. 19) und setzt, indem er sich vermöge seiner Elastizität allmählich wieder aufwindet, das Uhrwerk in Bewegung. Die gespannte Sehne des Bogens oder der Armbrust schleudert, plötzlich losgeschnellt, den Pfeil fort. Die Ballisten, die Belagerungsgeschütze der Alten, beruhten ebenfalls auf dieser Anwendung der Elastizität. Auch zur Entkräftung und Unschädlichmachung heftiger Stöße ist die Elastizität von großem Nutzen; die Federn, welche die Wagenkasten tragen, ferner die starken Schraubenfedern, mit welchen die Puffer der Eisenbahnwagen ausgerüstet sind, dienen diesem Zweck.

Hört die formändernde Kraft plötzlich auf zu wirken, so wird jedes Teilchen der angegriffenen Körper durch die elastische Kraft, welche jener gleich und entgegengesetzt ist, in seine ursprüngliche Lage zurückgetrieben, kommt aber in dieser wegen seiner Trägheit nicht plötzlich zur Ruhe, sondern geht jenseits darüber hinaus, wodurch eine entgegengesetzte Formänderung (z. B. Verkürzung statt Verlängerung) entsteht, kehrt dann unter dem Einfluß der wachgerufenen entgegengesetzten elastischen Kraft wieder zurück usf., und kommt erst nach einer Reihe solcher Schwingungen (Oszillationen, Vibrationen) endlich in der ursprünglichen (Gleichgewichts-) Lage zur Ruhe. Da hierbei die treibende Kraft stets der Entfernung von der Gleichgewichtslage oder dem bis dahin noch zu durchlaufenden Weg proportional ist, so sind diese elastischen Schwingungen alle von gleicher Dauer oder isochron, wie diejenigen eines Pendels von kleiner Schwingungsweite. Wir haben den Vorgang einer solchen Schwingung an dem Beispiel einer an einer Spiralfeder hängenden schweren Masse bereits in der Mechanik (20) kennen gelernt. Die Berechnung der Schwingungsdauer war in diesem Falle besonders einfach, weil gegenüber der großen Masse des angehängten Gewichts die Masse der Feder vernachlässigt werden konnte, so daß die Feder nur die Kraft lieferte, die die Masse bewegte. In anderen Fällen, z. B. bei einem schwingenden Stabe, ist die Berechnung der Schwingungsdauer sehr viel schwieriger, weil hier die Masse und die elastischen Kräfte über den ganzen Stab verteilt sind. Aber das Gesetz, daß die elastischen Schwingungen isochron sind, gilt auch in diesem Falle und gilt immer, solange die Deformationen den Kräften proportional sind.

Von der unverändert gleichen Dauer der elastischen Schwingungen macht man eine wichtige Anwendung zur Regulierung der Taschenuhren (Hooke, 1658); indem sich nämlich die an der Unruhe befestigte zarte Spiralfeder in gleichdauernden Schwingungen abwechselnd auseinander und wieder zusammenwindet, bewirkt sie, daß die Hemmung des Steigrades durch die Unruhe in genau gleichen Zeitabschnitten erfolgt und der Sekundenzeiger demnach beim Fortrücken zu jedem seiner Sprünge genau die gleiche Zeit braucht.

55. **Stoß.** Ein Stoß findet statt beim Zusammentreffen eines bewegten Körpers mit einem anderen in Ruhe oder ebenfalls in Bewegung befindlichen Körper. Es stoße z. B. ein in Bewegung befindlicher Eisenbahnwagen auf einen anderen, welcher ruhig auf den Schienen steht. Sobald die Puffer miteinander in Berührung kommen, übt jener Wagen auf diesen einen Druck aus und erleidet von ihm einen gleich großen Gegendruck; dadurch wird der gestoßene Wagen in Bewegung gesetzt und beschleunigt, die Bewegung des stoßenden dagegen verzögert. Dieser Druck kann jedoch nur so lange dauern, bis beide Wagen die gleiche Geschwindigkeit besitzen; in dem Augenblick, in welchem dies erreicht wird, ist der erste Teil der Stoßwirkung vollendet. Nun sind aber die Puffer der Eisenbahnwagen bekanntlich mit schraubenförmig gewundenen stählernen Federn ver-