



Darstellende Geometrie

Diesener, Heinrich

Halle a. S., 1898

16. Konstruktion der Durchschnitsfiguren von Ebenen mit Körpern und
Abwicklung der Körper

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84041](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84041)

Die erste Projektion giebt im Umriss ein reguläres Zehneck, welches man durch zwei symmetrisch zu einander gestellte, mit der Seite s konstruirte reguläre Fünfecke erhält. Um die zweite Projektion zu erhalten, ist zunächst die Höhenlage der Eckpunkte durch Herabschlagen zweier Dreiecke in die erste Projektionsebene zu bestimmen, dann ergibt sich dieselbe sehr leicht.

h. Die Projektionen eines Ikosaeders zu zeichnen, wenn von zwei parallelen Flächen die eine auf der ersten Projektionsebene liegt und die Seite s gegeben ist. Fig. 116.

Der Umriss der ersten Projektion ist ein regelmäßiges Sechseck, welches wie folgt erhalten wird. Man konstruirt zunächst die beiden parallel zur ersten Projektionsebene liegenden regulären Dreiecke mit der Seite s , symmetrisch zu einander gestellt, und konstruirt an einer Seite dieser Dreiecke ein reguläres Fünfeck. Wird dieses Fünfeck um die Axe xy zurückgeschlagen, so beschreiben die Punkte (i) und (h) Kreisbögen, die sich als Senkrechte zur Axe xy projectiren und die Mittellinie $h'f'$ schneiden. Die Punkte h' und f' sind Eckpunkte des äußeren Sechsecks und ergibt sich nun die erste Projektion sehr leicht.

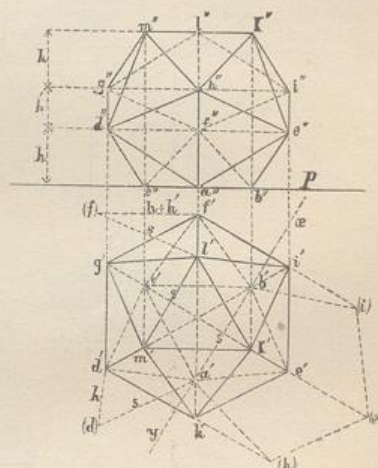


Fig. 116.

Um die zweite Projektion zeichnen zu können, sind die Höhen der Eckpunkte durch Herabschlagen zweier Dreiecke in die erste Projektionsebene zu bestimmen, woraus sich dann leicht das Uebrige ergibt.

16. Konstruktion der Durchschniffsfiguren von Ebenen mit Körpern und Abwicklung der Körper.

a. Ebene Körper.

Die Durchschniffsfigur, welche entsteht, wenn ein ebener Körper von einer Ebene geschnitten wird, erhält man, indem man die Punkte konstruirt, in welchen die Ebene von den Kanten des Körpers geschnitten wird, und diese Punkte miteinander verbindet.

Soll die Oberfläche eines Körpers in eine Ebene ausgebreitet werden, so sagt man, der Körper soll abgewickelt oder es soll sein Netz bestimmt werden. Bei ebenen Körpern hat diese Abwicklung keine Schwierigkeiten, da man nur die wirkliche Größe der begrenzenden Flächen zu bestimmen und diese in eine Ebene nebeneinander zu legen hat.

1. Aufgabe. Fig. 117. Ein senkrecht fünfsseitiges Prisma wird von einer Ebene geschnitten, welche senkrecht auf der Vertikalebene steht und mit der Horizontalebene einen gegebenen Winkel bildet. Es sind beide Projektionen

Dieser I.

zu zeichnen, die Durchschnitsfigur ist in die Vertikalebene herabzuschlagen und das abgeschnittene Prisma abzuwickeln.

Auflösung. Die erste Projektion ist gleich dem normalen Querschnitt des Prismas. Die Seitenkanten stehen in der zweiten Projektion senkrecht auf der Axe. Die Durchschnitsfigur ergibt sich leicht durch Herabschlagen in die zweite Projektionsebene und zwar mit der Ebene E.

Um das Netz zu erhalten, trage man die fünf Seiten der Grundebene

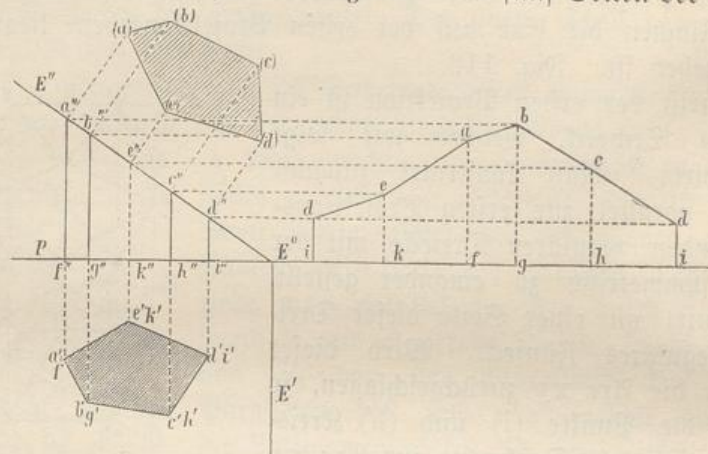


Fig. 117.

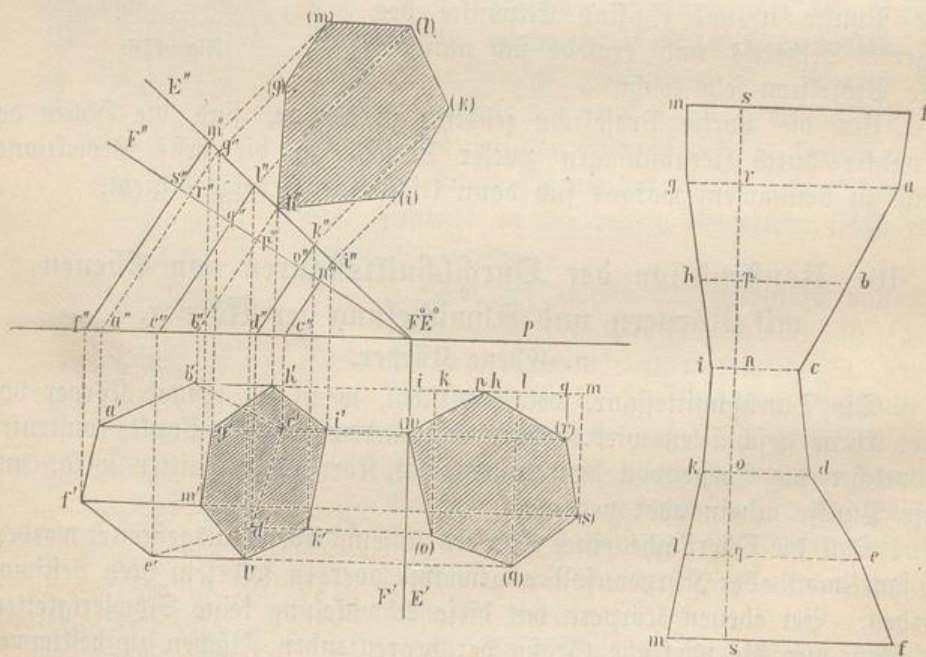


Fig. 118.

auf einer geraden Linie nebeneinander ab, ziehe senkrecht zu dieser Linie die Kantenlinien und mache diese gleich ihrer Vertikalprojektion. Verbindet man die Endpunkte der Kanten durch gerade Linien, so ist die Abwicklung fertig.

2. Aufgabe. Fig. 118. Ein schiefes sechsseitiges Prisma, von dem der Normal-Querschnitt gegeben ist, wird von einer Ebene geschnitten, welche senkrecht auf der zweiten Projektionsebene steht und mit der ersten einen gegebenen Winkel bildet. Es sind beide Projektionen, die Durchschnitsfigur und das Netz zu zeichnen.

Auflösung. Die Durchschnitsfigur ist in die zweite Projektionsebene herabzuschlagen. Um das Netz zu erhalten, ist der zu den Seiten rechtwinklige Querschnitt, der Normal-Querschnitt, abzuwickeln, und lothrecht zu dieser Linie sind die Längen der Kanten ähnlich wie vor aufzutragen.

3. Aufgabe. Ein senkrecht vierseitiges Prisma wird von einer Ebene E geschnitten, welche geneigt zu beiden Projektionsebenen ist. Es sind beide Projektionen zu zeichnen, und die Durchschnitsfigur ist in die erste Projektionsebene herabzuschlagen. Fig. 119.

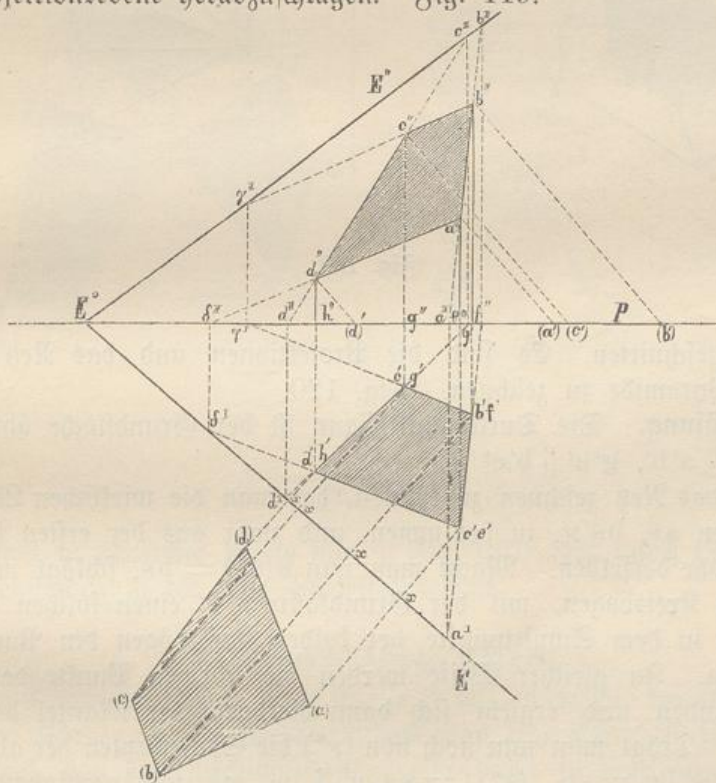


Fig. 119.

Auflösung. Es sind die Schnitte E' und E'' der Ebene E gegeben. Die erste Projektion ist gleich der Grundebene des Prisma. Die zweite Projektion erhält man, indem man die Punkte konstruirt, in denen die Seitenkanten des Prisma die Ebene E schneiden.

Um die Durchschnitsfigur herabzuschlagen, schlägt man die Punkte a , b , c und d mit der Ebene E in die erste Projektionsebene herab.

4. Aufgabe. Eine auf der ersten Projektionsebene stehende fünfseitige Pyramide wird von einer parallel zur ersten Projektionsebene laufenden

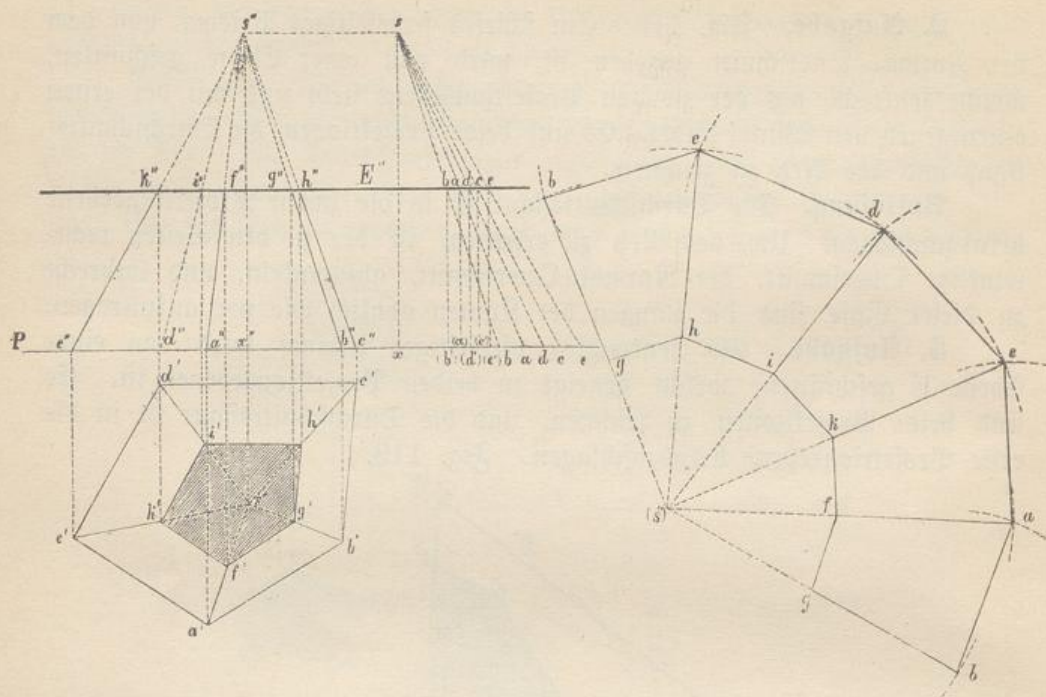


Fig. 120.

Ebene E geschnitten. Es sind die Projektionen und das Netz der abgekürzten Pyramide zu zeichnen. Fig. 120.

Auflösung. Die Durchschnitzfigur ist der Grundfläche ähnlich und daher $f'g' \parallel a'b'$, $g'h' \parallel b'c'$ zc.

Um das Netz zeichnen zu können, hat man die wirklichen Längen der Seitenkanten as , bs zc. zu bestimmen, und zwar aus der ersten Projektion und der Höhe derselben. Macht man nun $b(s'') = bs$, schlägt mit as um (s'') einen Kreisbogen, mit der Grundkante $a'b'$ einen solchen um b , so findet man in dem Schnittpunkte der beiden Kreisbögen den Punkt a der Abwicklung. In gleicher Weise werden die übrigen Punkte der Grundebene gefunden und ergibt sich dann hierdurch der Mantel der ganzen Pyramide. Trägt man nun noch von (s'') die Seitenkanten der abgekürzten Pyramide $(s'')g = sb$, $(s'')f = sa$ u. s. w. ab und verbindet g mit f , f mit k u. s. f., so erhält man das Netz der abgekürzten Pyramide.

5. Aufgabe. Eine sechsseitige Pyramide wird von einer Ebene geschnitten, welche senkrecht auf der Vertikalebene steht und mit der Horizontalebene einen gegebenen Winkel bildet. Es sind beide Projektionen und das Netz der abgeschnittenen Pyramide zu zeichnen und die Durchschnitzfigur in die zweite Projektionsebene herabzuschlagen. Fig. 121.

Auflösung. Man zeichne zunächst beide Projektionen der ganzen Pyramide und dann die der abgeschnittenen; demnächst schlage man die Durchschnitzfigur in die zweite Projektionsebene herab, $g''(g) = g'g^0$ zc., und zeichne

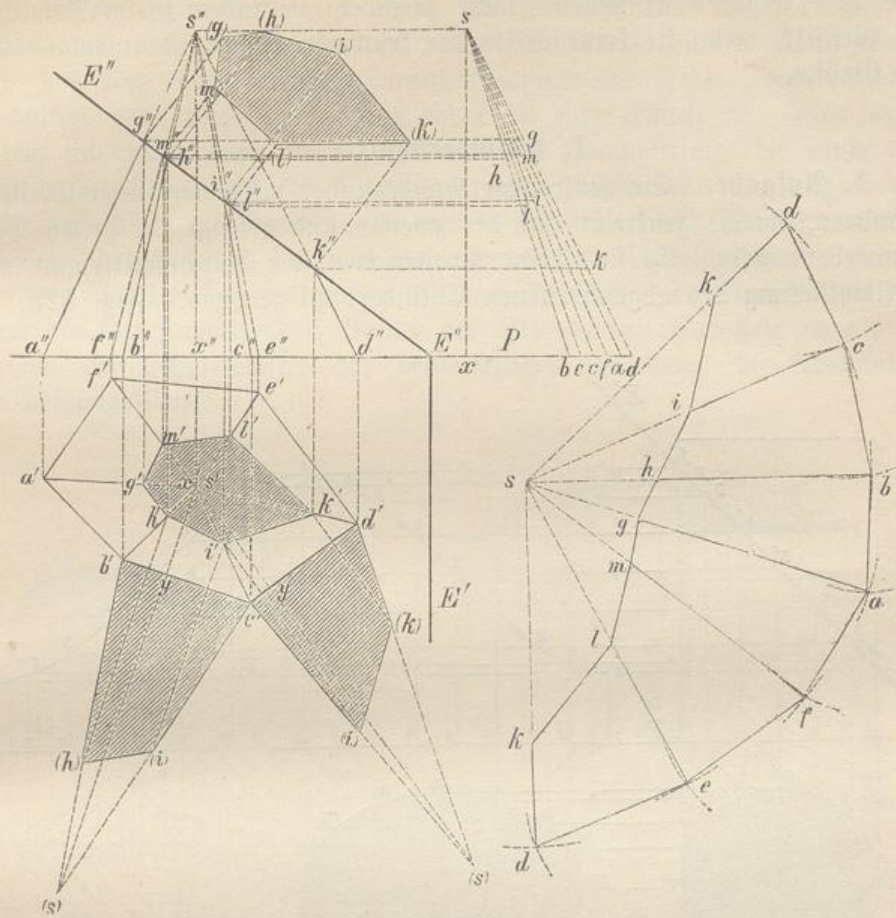


Fig. 121.

den Mantel in ähnlicher Weise wie in Fig. 120, oder durch Herabschlagen der Seitenflächen in die erste Projektionsebene.

b. Krümmflächige Körper.

Die Durchschnittsfigur einer Ebene E mit einem von krummen Flächen begrenzten Körper wird gefunden, indem man eine Ebene F so durch den Körper legt, daß die Durchschnittsfigur eine leicht zu konstruierende krumme Linie giebt. Die Ebenen E und F schneiden sich dann in einer geraden Linie, deren Schnittpunkte mit der durch F und den Körper gebildeten Durchschnittsfigur Punkte der durch E und den Körper gebildeten Durchschnittsfigur sind.

Ist der Körper von Seiten begrenzt, wie Cylinder und Kegel, so konstruiert man die Durchschnittpunkte einer Anzahl von Seiten mit der Ebene und ergeben diese dann Punkte der Durchschnittsfigur.

Eine krumme Fläche, welche Seiten hat, ist abwickelbar, d. h. sie kann in eine Ebene ausgebreitet werden. Eine Linie, welche sich in

einer abwickelbaren krummen Fläche befindet, verändert beim Abwickeln ihre **Gestalt**, wenn sie **keine** Seite der krummen Fläche ist, niemals aber ihre **Größe**.

1. Cylinder Schnitte.

1. Aufgabe. Ein senkrechter Kreiscylinder wird von einer Ebene E geschnitten, welche senkrecht auf der zweiten und geneigt zur ersten Projektionsebene steht. Es sind beide Projektionen, die Durchschnittsfigur und die Abwicklung des abgeschnittenen Cylinders zu zeichnen. Fig. 122.

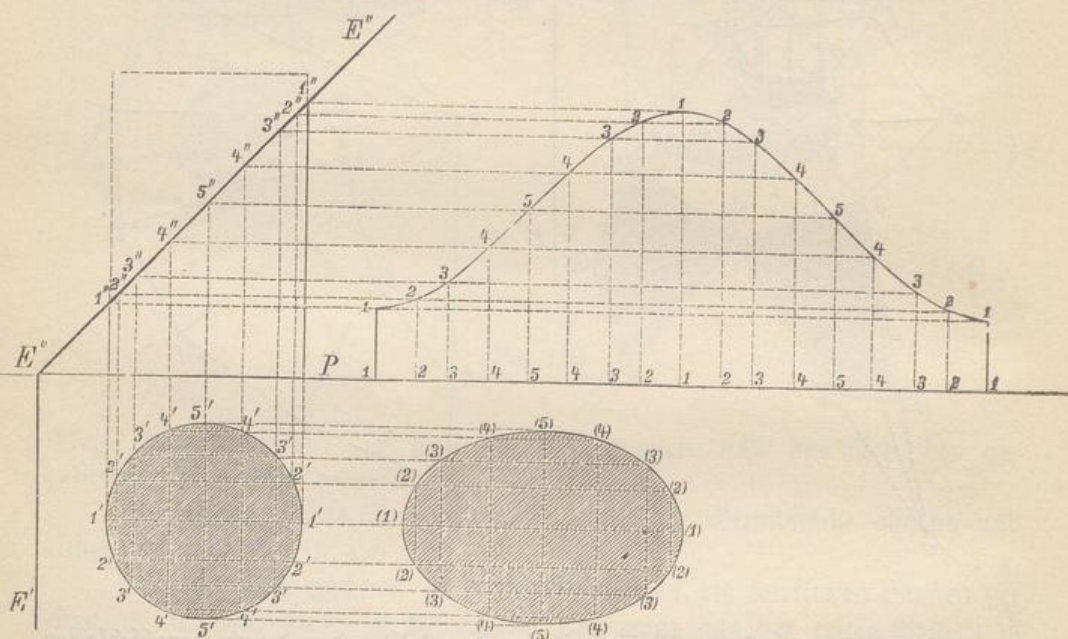


Fig. 122.

Auflösung. Die erste Projektion ist ein Kreis gleich dem Grundkreise des Cylinders; die zweite Projektion ergiebt sich durch E'' . Die Durchschnittsfigur ist eine Ellipse, deren kleine Axe gleich dem Durchmesser des Grundkreises und deren große Axe gleich der zweiten Projektion der Durchschnittsfigur ist. Das Zeichnen der Durchschnittsfigur geschieht am einfachsten durch Herabschlagen in eine der Projektionsebenen, hier z. B. in die erste. Um das Netz zu zeichnen, wickle man den Umfang des Grundkreises auf einer geraden Linie ab, errichte auf dieser eine Anzahl Lothe und mache dieselben gleich den korrespondirenden Seiten des Cylinders.

2. Aufgabe. Die Abwicklung der Leibungsfläche eines schiefen Gewölbes zu zeichnen, dessen Stirnflächen Segmentbögen, wenn die beiden Projektionen gegeben sind. Fig. 123.

Auflösung. Man lege durch das Gewölbe eine Anzahl senkrechter Ebenen und projicire dieselben in beide Projektionsebenen. Dann zeichne man das Netz des Gewölbes, welches letztere die Form eines Cylinderabschnittes hat, dessen Querschnitt ein Stück einer Ellipse ist. Dies letztere ergibt sich, wenn man von a' , senkrecht zur Kämpferlinie, die Linie $a'e'$ zieht und über dieser die Querschnittslinie konstruirt. Verlängert man nun $a'e'$ über e' hinaus und wickelt auf dieser den Querschnittsbogen ab, legt dann durch die auf der abgewickelten Querschnittslinie sich ergebenden Punkte der senkrechten Ebenen Parallele zur Kämpferlinie und durch die korrespondirenden Punkte der Stirnflächen Parallele zu $a'e'$, so ergeben die Schnittpunkte der beiderseitigen Parallelen die Abwicklung der Leibungsfläche.

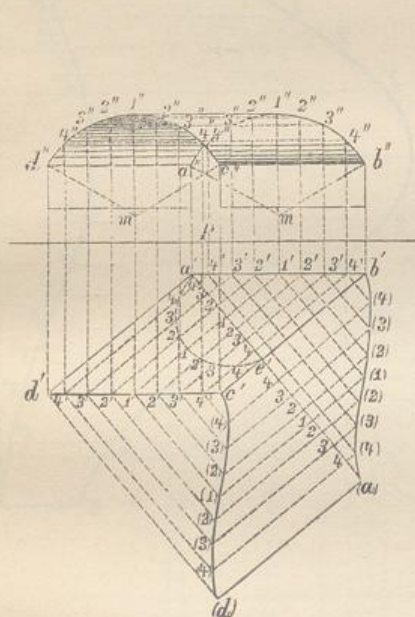


Fig. 123.

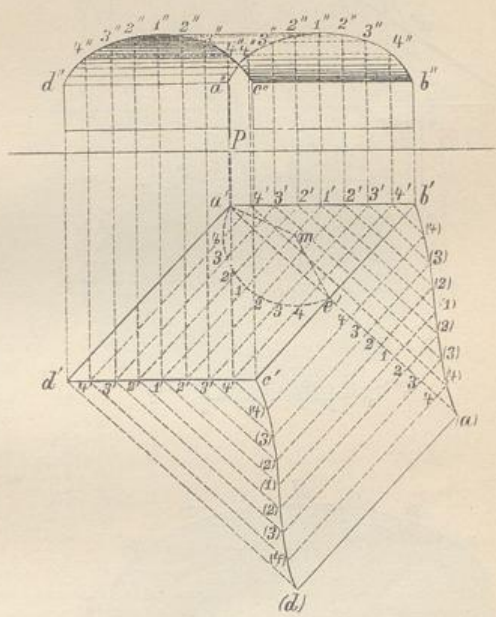


Fig. 124.

3. Aufgabe. Die Abwicklung der Leibungsfläche eines schiefen Gewölbes zu zeichnen, dessen senkrecht zu den Kämpferlinien stehender Querschnitt einen Segmentbogen mit einer Pfeilhöhe von 1:3 bildet, wenn die erste Projektion gegeben ist. Fig. 124.

Auflösung. Senkrecht zur Kämpferlinie ist zunächst der Bogen des Querschnittes zu konstruiren und hieraus die zweite Projektion zu entwickeln. Demnächst ist die Abwicklung des Querschnittsbogens auszuführen und die Konstruktion analog der in der vorigen Aufgabe zu vollenden.

4. Aufgabe. Ein schiefer elliptischer Cylinder, dessen Grundflächen Kreise sind, wird von einer auf der zweiten Projektionsebene senkrecht stehenden Ebene E geschnitten; es sind beide Projektionen, die Schnitt-

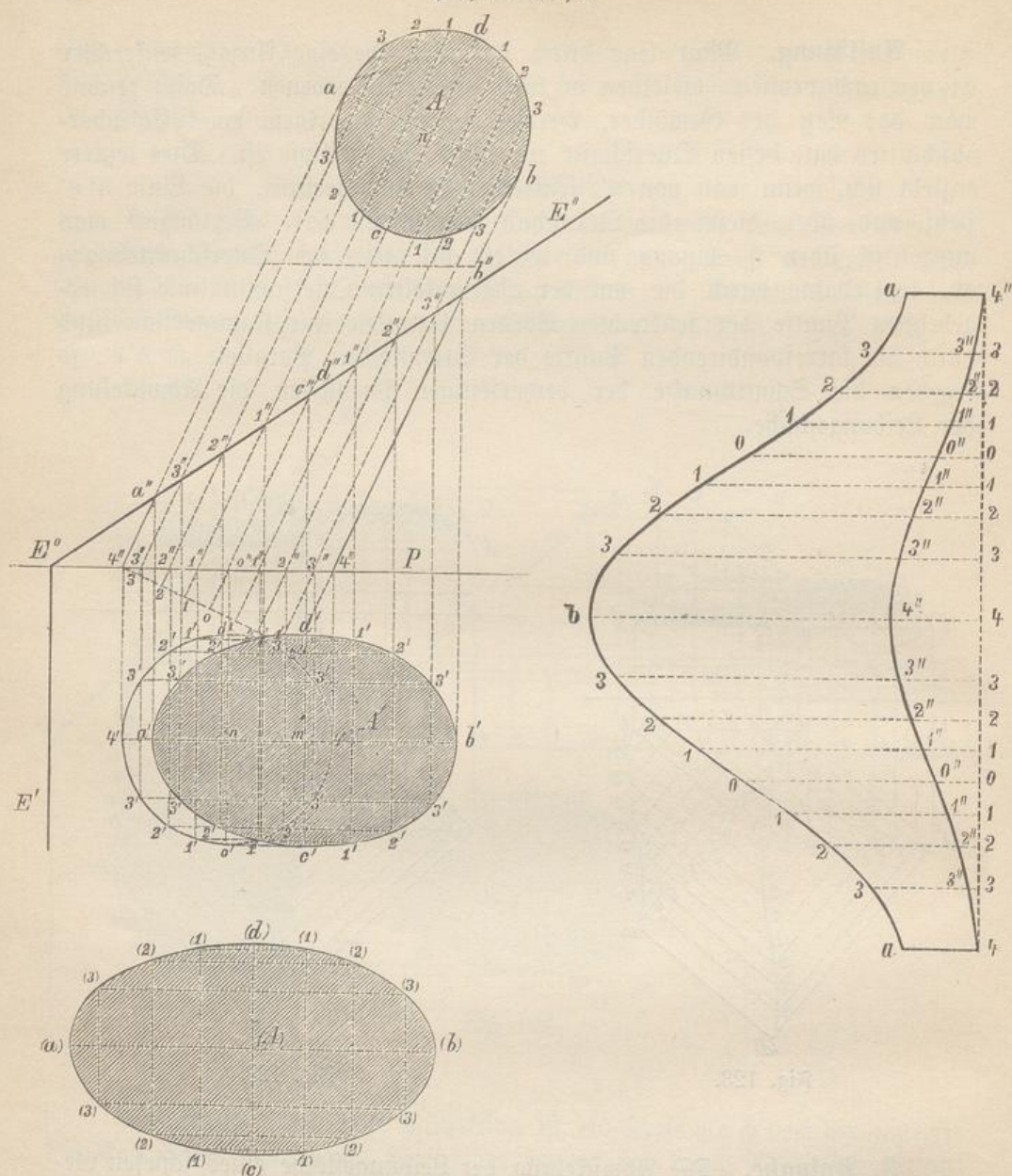


Fig. 125.

fläche und die Abwicklung des abgeschnittenen Cylinders zu zeichnen. Fig. 125.

Auflösung. Aus dem Grundkreise ist zunächst der ellipsenförmige Normal-Querschnitt durch Herabschlagen in die zweite Projektionsebene zu konstruieren, und dann die erste Projektion zu zeichnen. Die Durchschnitsfigur ist eine Ellipse, deren große Axe die Linie $(a)(b) = a''b''$ und deren kleine Axe $(c)(d)$ der Durchmesser des Grundkreises ist. Um das Netz zeichnen zu können, vervollständige man den Cylinder nach unten zu einem lothrechten,

wickle den Normal-Querschnitt des Cylinders auf eine gerade Linie ab, und errichte auf dieser Senkrechte, welche gleich den betreffenden Seiten des Cylinders zu machen sind.

5. Aufgabe. Ein schiefer Kreiscylinder, dessen Axe parallel zur zweiten Projektionsebene ist, wird von einer parallel zur zweiten Projektionsebene stehenden Ebene geschnitten; es sind beide Projektionen zu zeichnen. Fig. 126.

Auflösung. Aus dem kreisförmigen Normal-Querschnitt sind beide Projektionen zu konstruieren. Die Schnittfigur ist in der zweiten Projektion ein Parallelogramm $a''b''c''d''$, welches auch ihre wirkliche Größe ist, in der ersten Projektion eine gerade Linie $a'e'$, welche in E' liegt.

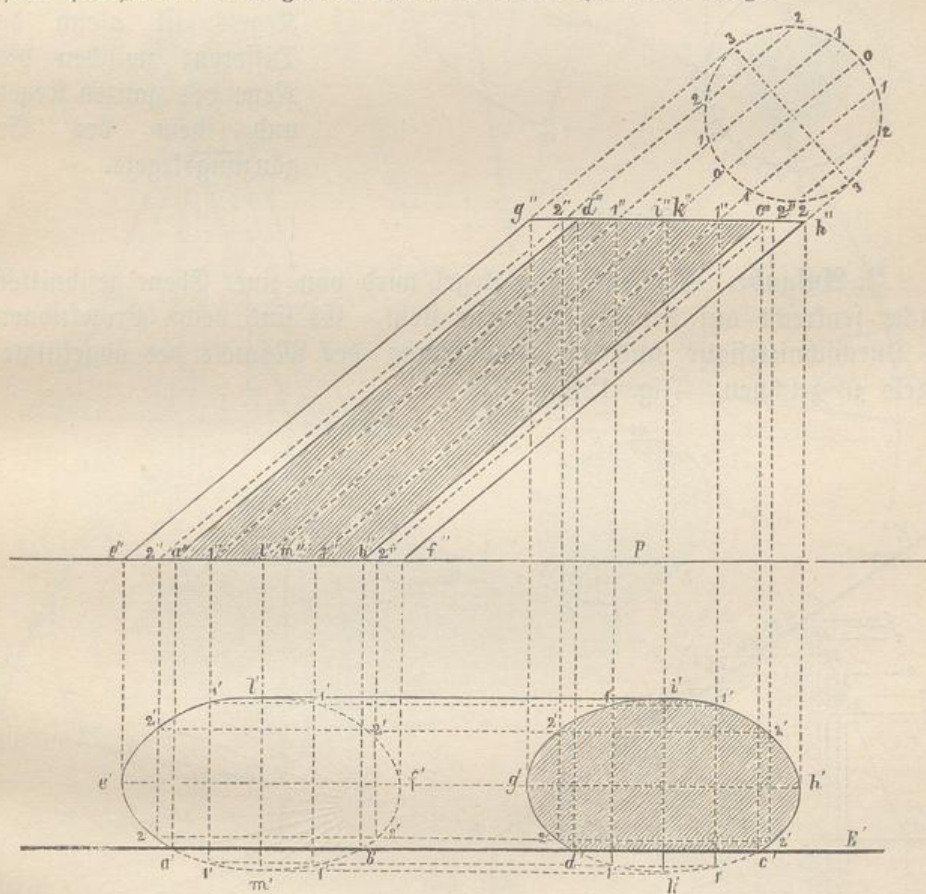


Fig. 126.

2. Kegelschnitte.

1. Aufgabe. Ein senkrechter Kreiskegel wird von einer Ebene, welche parallel zur ersten Projektionsebene ist, geschnitten; es sind beide Projektionen und die Abwicklung des Mantels des abgekürzten Kegels zu zeichnen. Fig. 127.

Auflösung. Die zweite Projektion der Durchschnitsfigur ist eine gerade Linie $e''f''$, die erste Projektion ist ein Kreis mit dem Durchmesser $e'f'$, welcher auch die wirkliche Größe der Durchschnitsfigur darstellt.

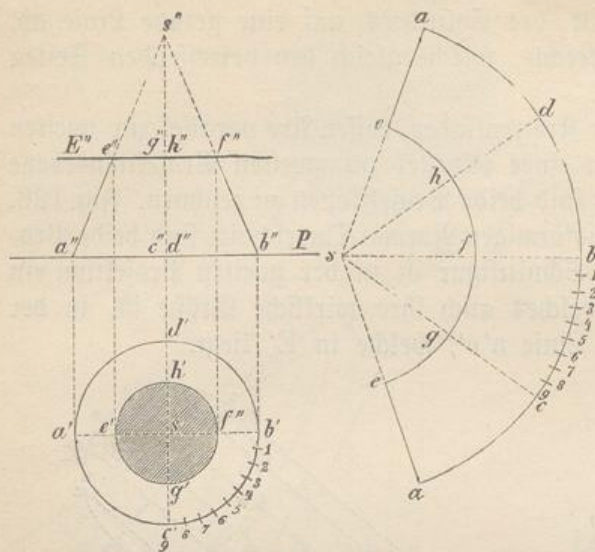


Fig. 127.

Der Mantel des ganzen Kegels ist abgewickelt ein Kreisabschnitt, dessen Radius die Seite des Kegels und dessen Bogen gleich der Peripherie des Grundkreises ist. Das Netz des abgekürzten Kegels ist gleich der Differenz zwischen dem Netze des ganzen Kegels und dem des Ergänzungskegels.

2. Aufgabe. Ein senkrechter Kegel wird von einer Ebene geschnitten, welche senkrecht auf der Vertikalebene steht. Es sind beide Projektionen, die Durchschnitsfigur und die Abwicklung des Mantels des abgekürzten Kegels zu zeichnen. Fig. 128.

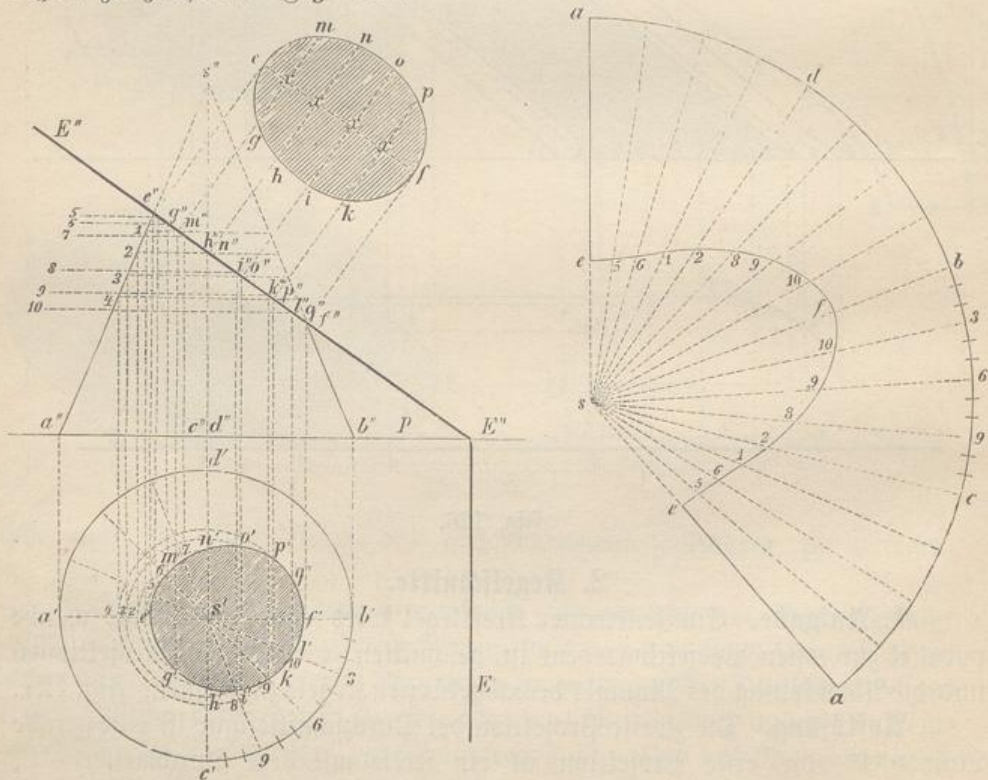


Fig. 128.

Auflösung. Die erste Projektion ergibt sich, indem man durch die zweite Projektion, innerhalb der Durchschnitfigur, eine Anzahl von Parallelfkreisen zur Grundebene legt und deren Schnittpunkte mit E'' in die erste Projektionsebene projicirt.

Die Abwicklung des ganzen Kegels ist wiederum ein Kreisabschnitt. Die Abwicklung des abgeschnittenen Kegels erhält man, indem man auf der des ganzen Kegels eine Anzahl Seiten zieht und die Längen derselben aus der zweiten Projektion entnimmt. Die Durchschnitfigur wird mit der Ebene E in die zweite Projektionsebene herabgeschlagen.

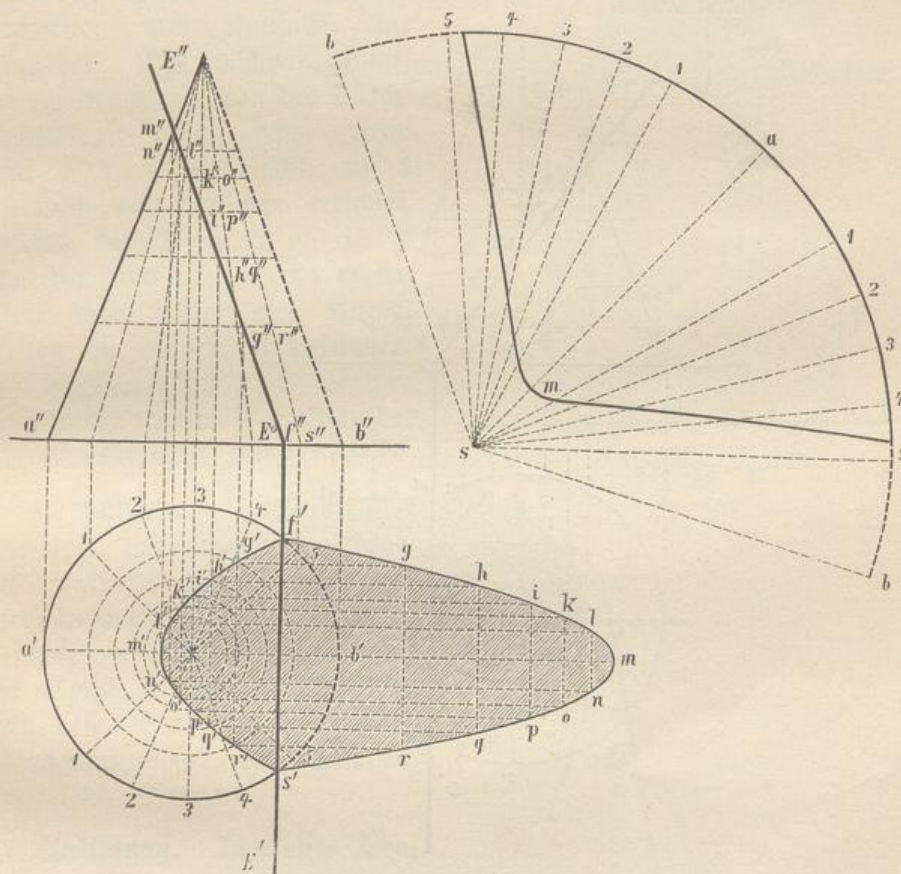


Fig. 129.

3. Aufgabe. Ein senkrechter Kreiskegel ist durch eine Ebene, welche lothrecht auf der zweiten Projektionsebene steht und parallel zu einer Seite des Kegels ist, geschnitten. Es sind beide Projektionen und die Abwicklung des abgeschnittenen Kegels zu zeichnen und die Durchschnitfigur in die erste Projektionsebene herabzuschlagen. Fig. 129. Die Durchschnitfigur ist in diesem Falle eine **Parabel**.

Auflösung. Die erste Projektion ergibt sich, indem man in der zweiten Projektion, innerhalb der Schnittebene, Ebenen parallel zur Grund-

ebene durch den Kegel legt und die Schnittpunkte dieser Ebenen mit der Ebene E in die erste Projektionsebene projicirt. Die Durchschnittsfigur wird durch Herabschlagen in die erste Projektionsebene erhalten. Die Abwicklung des ganzen Kegels ist wieder ein Kreisabschnitt mit der Seite des Kegels als Radius und der Peripherie des Grundkreises als Bogen. Zieht man nun auf dem Mantel des ganzen Kegels eine Anzahl Seiten und überträgt auf diese die Längen des abgeschnittenen Kegels, so ergibt sich der Mantel des letzteren ($am = a''m''$, $1 = 1''h''$, $2 = 2''l''$).

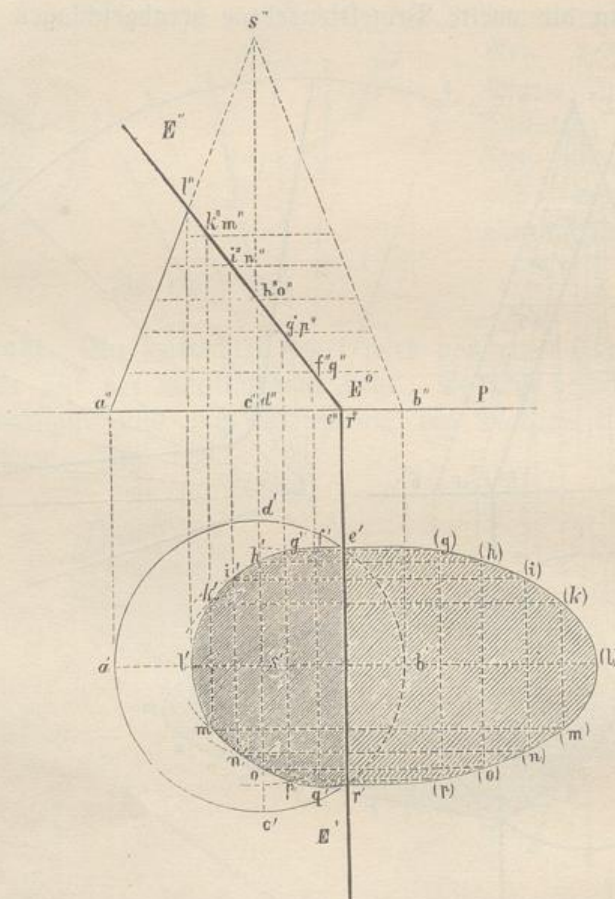


Fig. 130.

4. Aufgabe. Eine auf der zweiten Projektionsebene senkrecht stehende Ebene schneidet einen senkrechten Kreiskegel derart, daß die Grundebene geschnitten wird, aber der Schnitt E'' nicht parallel zu einer Seite des Kegels geht. Es sind beide Projektionen und die Durchschnittsfigur des abgeschnittenen Kegels zu zeichnen. Fig. 130. Die Durchschnittsfigur ist in diesem Falle eine **Hyperbel**.

Auflösung. Die beiden Projektionen ergeben sich in derselben Weise wie in der vorigen Aufgabe. Die Durchschnittsfigur erhält man, wenn man dieselbe mit der Ebene E in die erste Projektionsebene herabschlägt.

5. Aufgabe. Ein normaler Kreiskegel wird durch eine Ebene geschnitten, welche senkrecht auf der ersten Projektionsebene und parallel zur zweiten steht. Fig. 131. Es sind beide Projektionen zu zeichnen.

Auflösung. Die Durchschnitsfigur ist gleich ihrer zweiten Projektion und ebenfalls eine Hyperbel. Den höchsten Punkt der zweiten Projektion der Durchschnitsfigur erhält man, wenn man $g''x = a'f'$ macht, in x ein Loth auf der Aze errichtet, welches die Seite $g''s''$ in y schneidet, und $m''f'' = xy$ macht. Zieht man ferner eine Anzahl Seiten in beiden Projektionen, so ergeben sich die übrigen Punkte der zweiten Projektion der Durchschnitsfigur leicht aus E' .

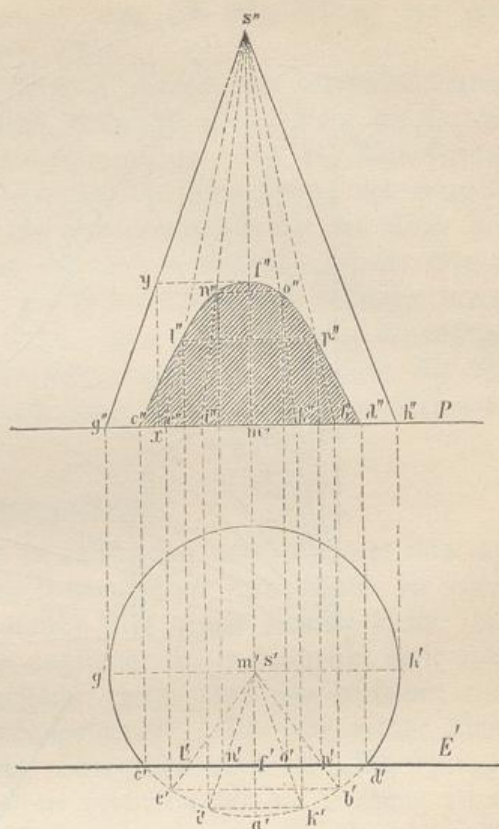


Fig. 131.

6. Aufgabe. Ein lothrechtter Kreiskegel wird von einer Ebene, die senkrecht auf der zweiten Projektionsebene steht, derartig geschnitten, daß die Ebene durch die Spitze des Kegels geht; es sind beide Projektionen und die Durchschnitsfigur zu zeichnen. Fig. 132.

Auflösung. Die erste Projektion der Durchschnitsfigur ist ein Dreieck. Die Durchschnitsfigur selbst ist ebenfalls ein Dreieck und wird erhalten, indem man sie in die erste Projektionsebene herabschlägt.

7. Aufgabe. Ein schiefer Kreiskegel wird von einer Ebene geschnitten, welche senkrecht auf der Vertikalebene steht. Es sind

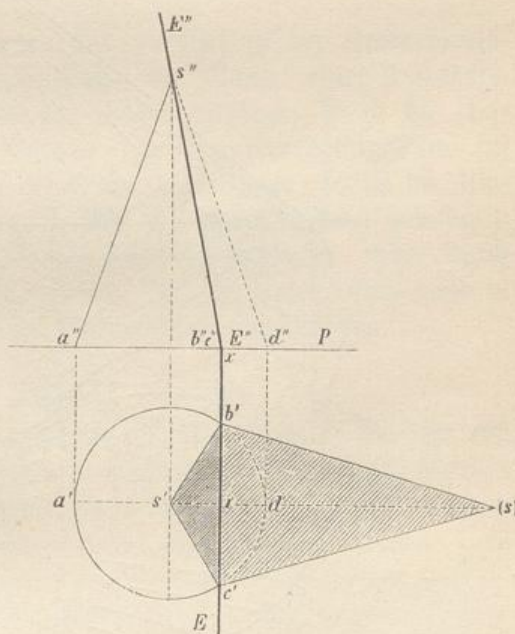


Fig. 132.

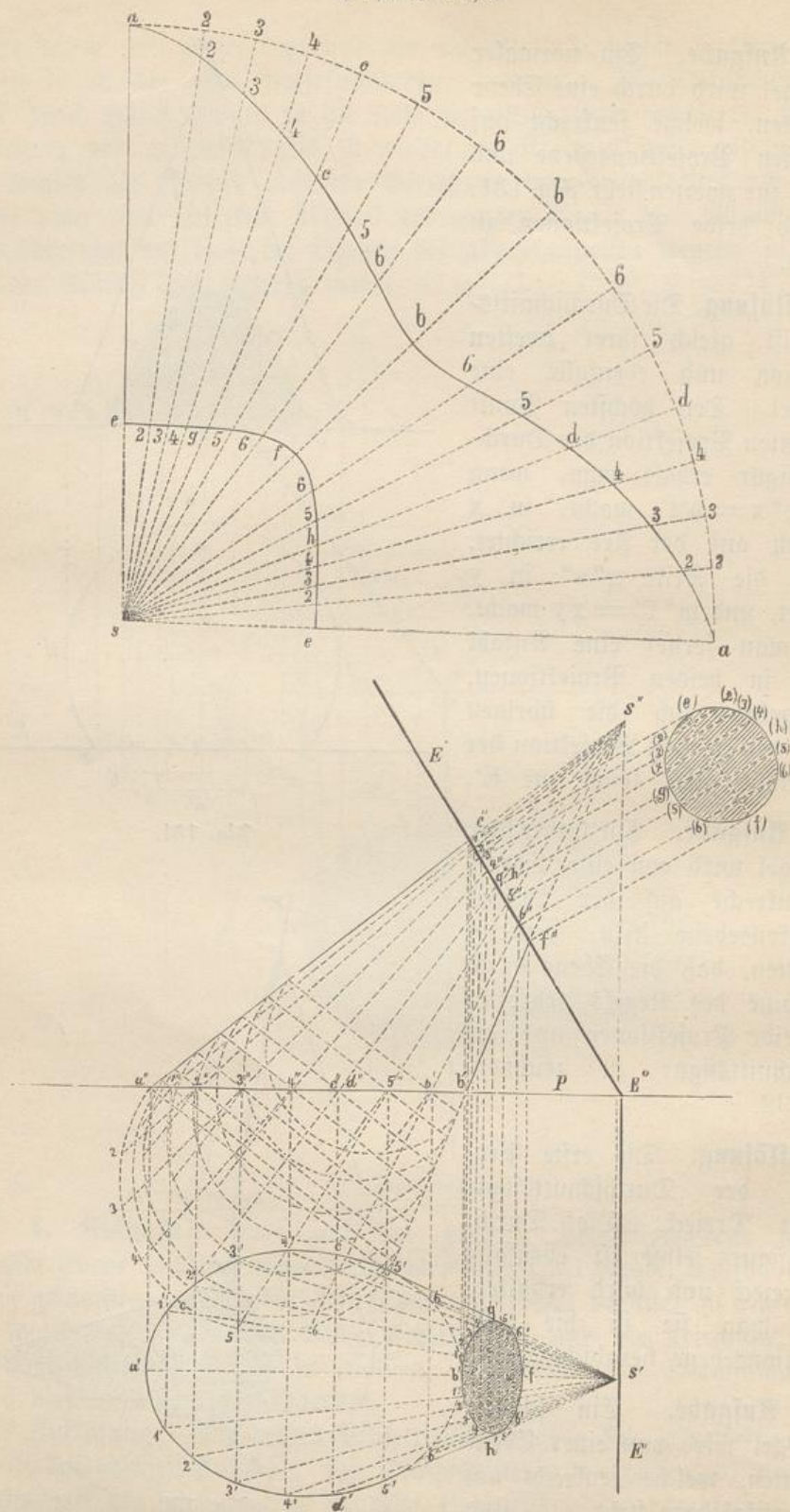


Fig. 133.

beide Projektionen, die Durchschnittsfigur und die Abwicklung des abgeschnittenen Kegels zu zeichnen. Fig. 133.

Auflösung. Man ziehe eine Anzahl Seiten des vervollständigten normalen Kegels, zeichne dann die erste Projektion und schlage die Durchschnittsfigur in die zweite Projektionsebene herab. Um die Abwicklung zeichnen zu können, konstruiere man zunächst die Abwicklung des vervollständigten normalen Kegels, welche ein Kreisabschnitt mit der Seite des Kegels als Radius und mit der Peripherie des Grundkreises als Bogen ist. Auf dieses Netz übertrage man die Mantellinien und bestimme deren Länge aus dem vervollständigten Kegel, oder man bestimme die Länge der Seiten als Hypothenuse von Dreiecken, deren eine Kathete die betreffende erste Projektion der Seite und deren andere Kathete die Ordinate in der zweiten Projektionsebene ist.

c. Umdrehungskörper.

Nimmt man eine gerade Linie in vollständig unverrückbarer Lage an und bewegt eine zweite gerade oder krumme Linie derartig um die erste, daß die Lage beider Linien zu einander stets genau dieselbe bleibt, bis die zweite Linie an ihrem Ausgange angelangt ist, so beschreibt diese eine krumme Fläche, welche „Umdrehungsfläche“ heißt; der von derselben eingeschlossene Raum heißt ein „Umdrehungskörper“. Die feste gerade Linie heißt die „Umdrehungsaxe“, die sich bewegende Linie die „Erzeugungslinie“. Jeder Punkt der Erzeugungslinie beschreibt bei der Drehung einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Umdrehungsaxe steht und „Parallelkreis“ genannt wird. Jeder Punkt einer Umdrehungsfläche liegt in der Peripherie eines Parallelkreises.

Wird die Erzeugungslinie gerade und parallel zu der Umdrehungsaxe angenommen, so ist die Umdrehungsfläche der Mantel eines Cylinders. Schneidet die gerade Erzeugungslinie die Umdrehungsaxe, so ist die Umdrehungsfläche der Mantel eines Kegels. Ist die Erzeugungslinie ein Halbkreis, dessen Durchmesser in der Umdrehungsaxe liegt, so ist die Umdrehungsfläche der Mantel einer Kugel. Alle auf der Drehbank gebildeten Körper sind Umdrehungskörper. Jeder Umdrehungskörper wird durch Ebenen, welche durch seine Umdrehungsaxe derartig gehen, daß diese in den Ebenen liegt, in kongruenten Durchschnittsfiguren geschnitten.

Die Kugel.

Die Kugel hat eine nicht abwickelbare Oberfläche, d. h. sie läßt sich nicht ohne Risse oder Falten in eine Ebene ausbreiten. Aus diesem Grunde kann dieselbe auch nur näherungsweise abgewickelt werden. Gewöhnlich geschieht dies durch eine Anzahl von kongruenten sphärischen Zweiecken — in der Regel 8 oder 16 —, die erhalten werden, wenn die Kugel durch „größte Durchschnittskreise“, sogenannte „Meridiankreise“, d. h. Kreise, welche durch die Erzeugungslinie gehen, geschnitten wird. Die Abwicklung geschieht auch

3. Aufgabe. Eine Kugel wird durch eine Ebene geschnitten, welche senkrecht auf der zweiten Projektionsebene steht und mit der ersten einen gegebenen Winkel bildet. Es sind die Projektionen und die Durchschnittsfigur zu zeichnen. Fig. 136.

Auflösung. Die Durchschnittsfigur ist ein Kreis, ihre erste Projektion ist eine Ellipse, die sich aus der Durchschnittsfigur ergibt. Ihre zweite Projektion ist eine gerade Linie, welche mit E'' zusammenfällt. Die Durchschnittsfigur erhält man, indem man dieselbe in die zweite Projektionsebene herabschlägt.

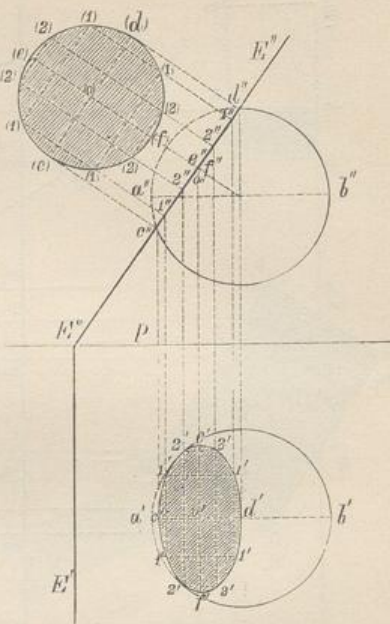


Fig. 136.

17. Durchdringungen von Körpern.

a. Ebene Körper.

Sind die Projektionen zweier sich durchdringender Körper gegeben, so erhält man die Projektionen der Durchschnittsfiguren, wenn man entweder die Durchschnittslinien der sich schneidenden Seitenebenen bestimmt, oder wenn man die Punkte konstruiert, in denen die Kanten des einen Körpers die Flächen des anderen durchdringen; die Verbindung dieser Schnittpunkte ergibt dann die Durchschnittsfigur. Man hat in jedem gegebenen Falle darauf zu achten, in möglichst einfacher Weise die Aufgabe zu lösen und demgemäß seine Wahl zu treffen.

1. Aufgabe. Ein vierseitiges Prisma, welches senkrecht auf der ersten Projektionsebene steht, wird von einem anderen vierseitigen Prisma, dessen Seitenkanten parallel zur zweiten Projektionsebene sind, durchdrungen. Es sind beide Projektionen und die Durchschnittsfiguren zu zeichnen. Fig. 137.

Auflösung. Das durchdrungene Prisma zeigt seinen Querschnitt in der ersten Projektion; der Querschnitt des anderen Prisma ist in die erste Projektionsebene herabgeschlagen anzunehmen und demnächst zu heben. Die Projektionen der Durchschnittsfigur erhält man in der dritten Projektionsebene. Demnächst schlägt man dieselben in eine der Projektionsebenen herab.

2. Aufgabe. Ein vierseitiges Prisma, welches senkrecht auf der ersten Projektionsebene steht, dessen Seitenebenen aber geneigt zur zweiten Projektionsebene sind, wird von einem anderen vierseitigen Prisma,