



Elemente der Mineralogie

Naumann, Carl Friedrich

Leipzig, 1901

1. Reguläres Krystallsystem.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84232](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84232)

Um der Hemimorphie eine Selbständigkeit gegenüber der Hemiëdrie zu wahren, ist es erforderlich, die Singularität der gedachten Symmetrie-Axe zu betonen. Denn nur in diesem Falle werden Formen erzeugt, die von den Wirkungen der Hemiëdrie verschieden und nicht auch durch letztere deutbar sind. Sofern man sich vorstellt, dass die Hemimorphie gleichzeitig nach mehreren gleichwerthigen S.-A.n stattfindet, würden Formen entstehen, welche von den vermöge der Hemiëdrie resultirenden nicht verschieden sind.

Während sich bei einer Anzahl von Mineralien die Hemimorphie als eine gesetzmässige Erscheinung zu erkennen gibt, kommen bei anderen nur dann und wann zufällige Unregelmässigkeiten der Ausbildung vor, welche zwar eine Ähnlichkeit mit der Hemimorphie besitzen, aber doch nur als individuelle Anomalieen betrachtet werden können; z. B. am Topas, am Kalkspath, am Wiluit.

1. Reguläres Krystallsystem.

§ 15. **Geometrischer Grundcharakter.** Dieses Krystallsystem, welches auch das tessularische, tesserale, isometrische, kubische genannt worden ist, zeichnet sich dadurch aus, dass alle seine Formen auf drei, unter einander rechtwinkelige, völlig gleiche und gleichwerthige krystallographische Axen bezogen werden können. Daher lässt sich jede reguläre Form nach drei verschiedenen Richtungen in völlig gleicher Weise aufrecht stellen. Das Axenkreuz, welches man den Gestalten dieses Systems zu Grunde legt, wird so gerichtet, dass die eine Axe vertical, die zweite horizontal und quer, die dritte geradeaus von vorne nach hinten verläuft.

§ 16. **Holoëdrische Formen des regulären Systems.** Die vollflächigen regulären Krystalle besitzen 3 zu einander normale H.-S.-E.n und daher auch 3 H.-S.-A.n, welche in ihrer Richtung mit den krystallographischen Hauptaxen zusammenfallen und senkrecht stehen auf den Flächen des Würfels¹⁾; ausserdem noch 6 sich unter 420° durchschneidende gewöhnliche S.-E.n, welche die 6 rechtwinkeligen Neigungswinkel jener H.-S.-E.n halbiren und den Flächen des Rhombendodekaëders entsprechen. Diese 9 S.-E.n theilen den Raum in 48 gleiche Theile. Die 3 Hauptaxen sind vierzählige S.-A.n. Daneben besitzen die holoëdrischen regulären Krystalle noch 4 dreizählige S.-A.n (auch trigonale Zwischenaxen genannt), welche senkrecht auf den Oktaëderflächen stehend, mitten zwischen drei Hauptaxen liegen und gegen jede derselben gleich geneigt sind. Ferner noch 6 zweizählige S.-A.n (sog. rhombische Zwischenaxen), welche mitten zwischen zwei Hauptaxen liegen und den Winkel derselben halbiren; sie stehen senkrecht auf den Rhombendodekaëderflächen. Diese 3 Arten von S.-A.n sind in der erwähnten Reihenfolge in Fig. 17, 18, 19 in den Würfel eingezeichnet. Wie überhaupt im regulären System existiren keine sechszähligen S.-A.n. Ein Centrum der Symmetrie ist vorhanden. — Die sphärische Projection Fig. 15, ausgeführt nach den auf S. 23 stehenden

¹⁾ Obgleich nach S. 13 jeder beliebige Complex von drei Flächen eines Krystalls als Axenebenen gewählt werden kann, um die anderen darauf zu beziehen (welche dann stets rationale Parameterverhältnisse ergeben), so gestaltet sich doch die Betrachtung der Formen in allen Systemen erheblich einfacher, wenn die Wahl der Axenebenen so getroffen wird, dass alle Flächen einer jeden einfachen Form auch die gleichen Parameter erhalten. Dies ist für die Gestalten des regulären Systems nur dann der Fall, wenn eben die 3 H.-S.-E.n als Axenebenen angenommen werden; die Berechnung der Formen wird alsdann hier auch wesentlich leichter, weil die Axenebenen nun senkrecht aufeinander stehen.

Angaben, zeigt die Vertheilung der Flächen bei der allgemeinsten Form, dem Acht- und vierzigflächner $\{hkl\}$ und gewährt auch eine Uebersicht über die allen Formen gemeinsamen Symmetrieverhältnisse.

Jede reguläre Form wird durch ein besonderes Verhältniss der Parameter, d. h. der Abschnitte, welche jede Fläche derselben auf den Halbaxen hervorbringt, charakterisirt, wobei immer der kleinste Parameter $= 1$ gesetzt werden kann. Während nun das Verhältniss der durchgängigen Gleichheit der Parameter $1:1:1$ mit Recht als das eigentliche Grundverhältniss gelten muss, sind ausser ihm nur noch zwei allgemeine Grössenverhältnisse derselben denkbar.

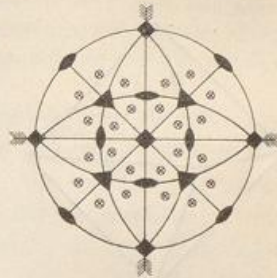


Fig. 15.

Das zweite ist nämlich das Verhältniss zweier gleicher gegen einen ungleichen Parameter; dasselbe liefert aber zwei verschiedene Gruppen von Formen, je nachdem die beiden gleichen Parameter grösser oder kleiner sind als der dritte, oder, den kleinsten Parameter $= 1$ gesetzt, je nachdem dasselbe

$$m:m:1, \text{ oder } m:1:1$$

geschrieben werden kann, wobei m irgend eine rationale Zahl bedeutet, welche grösser als 1 ist. Da nun aber diese Zahl bis auf ∞ wachsen kann, und da die solchenfalls eintretenden Grenzverhältnisse

$$\infty:\infty:1, \text{ oder } \infty:1:1$$

wiederum zwei besondere Formen bedingen, so ergibt sich, dass das zweite allgemeine Grössenverhältniss der Parameter überhaupt vier verschiedene Arten von Formen bedingt. — Das dritte allgemeine Verhältniss endlich ist das der durchgängigen Ungleichheit der Parameter, welches man

$$m:n:1$$

schreiben kann, wenn der kleinste Parameter $= 1$, der grösste $= m$, der mittlere $= n$ gesetzt wird. Dasselbe liefert abermals eine besondere Gruppe von Formen; da jedoch m wieder bis ∞ wachsen kann, in welchem Falle das Verhältniss

$$\infty:n:1$$

resultirt, und da dieses Grenzverhältniss gleichfalls eine besondere Art von Formen bedingt, so folgt, dass das dritte allgemeine Grössenverhältniss der Parameter überhaupt zwei verschiedene Arten von Formen hervorruft.

Nach dieser allgemeinen Erläuterung sind sieben verschiedene Parameterverhältnisse und demgemäss sieben Arten von holoëdrisch-regulären Formen möglich, welche einen völlig abgeschlossenen Inbegriff bilden und mit einander nach verschiedenen Richtungen durch Uebergänge in Verbindung stehen. Bei der weiteren Beschreibung derselben ist aus Gründen der Zweckmässigkeit eine andere Reihenfolge gewählt, als sie sich aus obiger Deduction ergeben würde.

Die vollflächigen Formen des regulären Systems sind:

- das Oktaëder,
- das Hexaëder,
- das Rhombendodekaëder,

die Triakisoktaeder,
die Tetrakishexaeder,
die Ikositetraeder und
die Hexakisoktaeder.

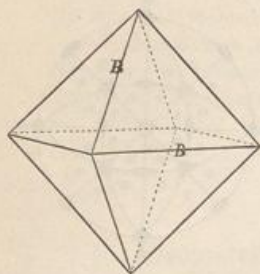


Fig. 16.

Das Oktaeder (Fig. 16) ist eine von 8 gleichseitigen Dreiecken umschlossene Form, mit 12 gleichen Kanten B , die $109^\circ 28' 16''$ messen, und mit 6 vierflächigen (tetragonalen) Ecken. Die Hauptaxen verbinden je zwei gegenüberliegende Ecken, damit der auch für alle folgenden Formen geltenden Nothwendigkeit genügt werde, dass die 6 gleichwerthigen Enden der 3 Hauptaxen sämtlich in krystallographisch gleichwerthigen Orten liegen. Auf den Flächen stehen die 4 dreizähligen S.-A.n senkrecht. — Spinell, Magneteisen, Gold, Fluorit, Senarmontit.

Eine jede Fläche des Oktaeders liegt so, dass sie die drei Hauptaxen in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkt schneidet. Bezeichnet man, wie es von Weiss eingeführt wurde, diese 3 gleichen Parameter mit a , so ergibt sich als Flächenzeichen des Oktaeders $a : a : a$, und da nun sämtliche Flächen dasselbe Parameterverhältniss besitzen, so kann das der einzelnen zukommende als repräsentatives Symbol der ganzen Form gelten. Dieses Zeichen liefert in jedem Oktanten eine und nur eine Fläche, indem die Vertauschung der 3 gleichen Parameter auf den 3 Axenhälften keine neue Fläche erzeugt.

Von Naumann wird das Oktaeder mit dem Parameterverhältniss $4 : 4 : 4$ als die eigentliche Grundform des regulären Systems betrachtet, aus welcher vermöge einer einfachen Construction alle anderen Formen desselben abgeleitet werden können. Er bezeichnet daher das Oktaeder mit O , dem Anfangsbuchstaben seines Namens, und unter diesem Zeichen hat man sich also das vollständige Oktaeder, nicht bloß eine einzelne Fläche dieser Gestalt vorzustellen. — Das Miller'sche Indexzeichen für das Oktaeder ist $\{111\}$; vgl. S. 22.

Das Hexaeder, oder der Würfel (Fig. 17), ist eine von 6 gleichen Quadraten umschlossene Form, mit 12 gleichen Kanten C von 90° Winkelmaass, mit 8 dreiflächigen (trigonalen) Ecken. Die Hauptaxen verbinden die Mittelpunkte je zweier

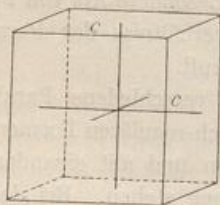


Fig. 17.

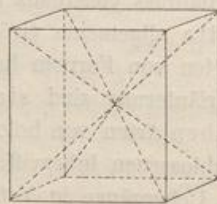


Fig. 18.

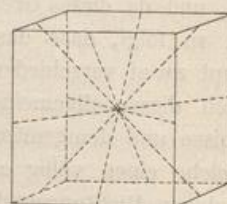


Fig. 19.

gegenüberliegender Flächen (Fig. 17); die Kanten des Würfels geben also die Lage der Hauptaxen an. Die Flächen des Würfels gehen den drei H.-S.-E.n des regulären Systems parallel, dessen sechs gewöhnliche S.-E.n je zwei gegenüberliegende Kantenwinkel des Würfels halbiren. Die 4 dreizähligen S.-A.n verbinden je zwei gegenüberliegende Würfecken (Fig. 18), die 6 zweizähligen S.-A.n verbinden die

Halbirungspunkte zweier gegenüberliegender Würfelkanten (Fig. 19). — Flussspath, Bleiglanz.

Die Fläche des Hexaëders schneidet allemal nur eine Hauptaxe und geht den beiden anderen parallel, daher das Flächenzeichen $a : \infty a : \infty a$. Eine Fläche mit diesem Parameterverhältniss muss in jedem Oktanten dreimal vorhanden sein; jede fällt aber, da sie mit 2 Hauptaxen parallel geht, mit ihren symmetrischen Flächen in allen 3 Nachbaroktanten zusammen und die vollflächige Form kann also statt 3×8 nur den vierten Theil, d. h. 6 Flächen haben.

Das Hexaëder resultirt aus dem Oktaëder, indem man in jede Oktaëderecke eine Fläche legt, welche den beiden, nicht zu derselben Ecke gehörigen Hauptaxen parallel ist (oder solche in der Entfernung ∞ schneidet). Das krystallographische Körperzeichen *Naumann's* für das Hexaëder, dessen jede Fläche durch das Parameterverhältniss $\infty : 1 : \infty$ bestimmt wird, ist daher $\infty 0 \infty^1$. — Das *Miller'sche* Indexzeichen ist $\{100\}$ mit seinen 6 verschiedenen Flächen (100) , (010) , (001) , $(\bar{1}00)$, $(0\bar{1}0)$, $(00\bar{1})$.

Das Rhombendodekaëder (Fig. 20) ist eine von 12 gleichen und ähnlichen Rhomben (mit dem Verhältniss der Diagonalen $1 : \sqrt{2}$) umschlossene Form; es hat 24 gleiche Kanten A von 120° Winkelmaass, und 6 vierflächige (tetragonale) sowie 8 dreiflächige (trigonale) Ecken. Von den Kanten sind je 6 einander parallel, so dass je 6 Flächen eine Zone bilden; solcher Zonen existiren daher 4 und jede Rhombendodekaëderfläche liegt in zwei dieser Zonen. Zwei Flächen, welche ihre spitzen Ecken einander zuwenden, sind unter 90° gegenseitig geneigt. Die Hauptaxen verbinden je zwei gegenüberliegende tetragonale Ecken. Die Flächen fallen mit den 6 gewöhnlichen S.-E.n des regulären Systems zusammen, senkrecht auf ihnen stehen die 6 zweizähligen S.-A.n. — Granat, Silberamalgam, Magneteisen; das häufige Vorkommen am Granat veranlasste den Namen Granatoëder.

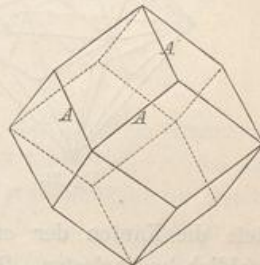


Fig. 20.

Die Fläche des Rhombendodekaëders schneidet 2 Hauptaxen in gleichen Abständen (a) und geht der dritten a parallel, daher das Flächenzeichen $a : a : \infty a$. Eine Fläche mit diesem Parameterverhältniss muss in jedem Oktanten dreimal vorhanden sein; da jede derselben aber einer Hauptaxe parallel ist, so muss ihre symmetrische Gegenfläche in dem anstossenden Oktanten mit ihr identisch sein. Statt 3×8 kann die ganze Form daher nur die Hälfte dessen, nämlich 12 Flächen aufweisen.

Aus dem Oktaëder entsteht das Rhombendodekaëder, indem in jede der 12 Oktaëderkanten eine Fläche gelegt wird, welche der nicht zu derselben Kante gehörigen Hauptaxe parallel ist (oder solche in der Entfernung ∞ schneidet). Da dann jede Fläche durch das Parameterverhältniss $\infty : 1 : 1$ bestimmt wird, so ist das *Naumann'sche* Körperzeichen des Rhombendodekaëders $\infty 0$ (anstatt $\infty 01$). — Das *Miller'sche* Symbol ist $\{110\}$, liefernd die 12 verschiedenen Flächen (110) , (101) , (011) , $(\bar{1}10)$, $(\bar{1}01)$, $(0\bar{1}1)$, $(1\bar{1}0)$, $(10\bar{1})$, $(01\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}0)$, $(\bar{1}0\bar{1})$, $(0\bar{1}\bar{1})$.

¹⁾ Hierfür, wie auch für die folgenden Symbole gilt, dass der eine Coëfficient, welcher stets = 1 ist, nicht geschrieben wird, indem er gewissermassen in O steckt; die auf die beiden anderen Axen bezüglichen Coëfficienten werden vor und hinter O gesetzt, und zwar der grössere immer links, der kleinere rechts; ist der letztere = 1, so wird er ebenfalls weggelassen.

Anm. Diese drei ersten Formen des regulären Systems sind einzig in ihrer Art, indem sie gar keine verschiedenen Varietäten zulassen. Diese Invariabilität ergibt sich einerseits aus der Natur der sie begrenzenden Flächen — gleichseitiges Dreieck, Quadrat, Rhombus —, welche keiner Modification fähig sind, anderseits aus der Beschaffenheit ihrer Symbole, in denen variable Coefficienten nicht vorkommen, sondern nur 1 und ∞ . Die übrigen folgenden Formen aber können in sehr verschiedenen Varietäten ausgebildet sein, ohne doch den allgemeinen geometrischen Charakter ihrer Art aufzugeben.

Zufolge ihrer Lage am Axenkreuz sind unter Berücksichtigung des S. 19 Angeführten eigentlich die Oktaëderflächen als Pyramiden-, die des Würfels als Pinakoid-, die des Rhombendodekaëders als Prismenflächen charakterisirt.

Die Triakisoktaëder (oder Pyramidenoktaëder, Fig. 21, 22, 23) sind von 24 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren allgemeine Gestalt zwischen jener des Oktaëders und Rhombendodekaëders schwankt, jedoch so, dass

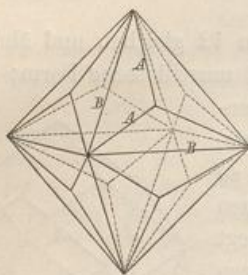


Fig. 21.

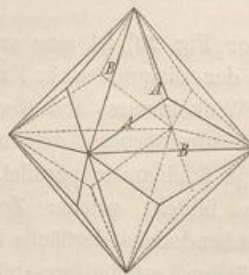


Fig. 22.

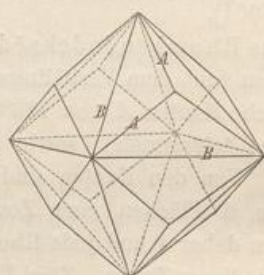


Fig. 23.

stets die Kanten der ersteren, niemals aber die Kanten der anderen Grenzform wirklich hervortreten. Die Kanten sind zweierlei: 12 längere B , welche den Kanten des Oktaëders entsprechen, und 24 kürzere A (Pyramidenkanten), welche zu je drei über den Flächen des eingeschriebenen Oktaëders liegen. Die Ecken sind gleichfalls zweierlei: 6 achtfächige (ditetragonale) Oktaëderecken, so liegend wie die Ecken eines Oktaëders, und 8 dreifächige (trigonale), in den einzelnen Oktanten gelegene Pyramidenecken. Die Hauptaxen verbinden je zwei gegenüberliegende ditetragonale Ecken. — Bleiglanz.

Der Name Triakisoktaëder erinnert an die stets vorhandene Gruppierung [der Flächen in 8 dreizählige Systeme, indem die Gestalt gewissermassen ein Oktaëder ist, auf dessen jeglicher Fläche sich eine stumpfe dreiseitige Pyramide erhebt. Je niedriger diese Pyramiden sind, je flacher der Winkel A ist (wie in Fig. 21), desto mehr nähert sich die Gestalt einem Oktaëder. Bei grösserer Steilheit der Pyramiden und grösserem Werth des Winkels B (wie in Fig. 23) findet immer mehr Annäherung an das Rhombendodekaëder statt. — Die Fläche des Triakisoktaëders schneidet zwei Hauptaxen in derselben Entfernung a , die dritte erst in einer m -mal verlängerten, ist daher charakterisirt durch das Zeichen $a : a : ma$ (z. B. $a : a : 2a$; $a : a : 3a$), welches in jedem Oktanten 3 Flächen ergibt. Je grösser m , desto mehr nähert sich die Gestalt dem Rhombendodekaëder, je kleiner, desto mehr dem Oktaëder; wird $m = \infty$, so geht das Rhombendodekaëder ($a : a : \infty a$), wird $m = 1$, dann das Oktaëder ($a : a : a$) hervor.

Die Construction aus dem Oktaëder ergibt sich folgendermassen: Man verlängere jede Halbaxe des Oktaëders durch Vervielfältigung nach einer Zahl m , welche rational und grösser als 1 ist, und lege hierauf in jede Oktaëderkante zwei

Flächen, welche die nicht zu derselben Kante gehörige Hauptaxe beiderseits in der Entfernung m schneiden; so entsteht ein Triakisoktaëder, dessen Zeichen mO ist, weil jede Fläche das Parameterverhältniss $m : 4 : 4$ hat. Die gewöhnlichsten Varietäten sind $\frac{3}{2}O$, $2O$ und $3O$ ¹⁾. Bei *Miller* sind die Triakisoktaëder allgemein $\{hhl\}$; $3O = \{331\}$; $\frac{3}{2}O = \{332\}$. Durch Veränderung der Indexfolge und wechselnde Anbringung des Minuszeichens liefert das Symbol $\{hhl\}$ wie auch das der folgenden beiden Formen überhaupt 24 im Einzelnen abweichend bezeichnete Flächen.

Die Tetrakishehexaëder (oder Pyramidenwürfel, Fig. 24, 25, 26) sind von 24 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren allgemeine Gestalt zwischen jener des Hexaëders und des Rhombendodekaëders schwankt, jedoch so,

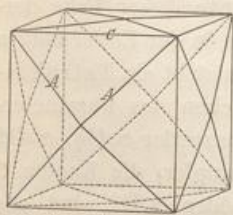


Fig. 24.

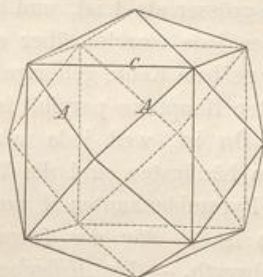


Fig. 25.

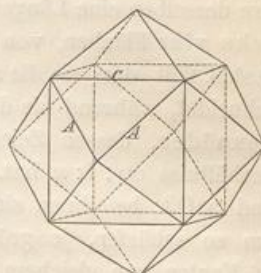


Fig. 26.

dass stets die Kanten der ersteren, nie aber die Kanten der anderen Grenzform an ihnen zu erkennen sind. Die Kanten sind zweierlei: 12 längere C , welche den Kanten des Hexaëders entsprechen, und 24 kürzere A (Pyramidenkanten), welche zu je 4 über den Flächen des eingeschriebenen Hexaëders liegen. Die Ecken sind gleichfalls zweierlei: 6 vierflächige (tetragonale) Pyramidenecken und 8 sechsflächige, so liegend wie die Ecken eines Hexaëders. Die Hauptaxen verbinden je zwei gegenüberliegende tetragonale Ecken. — Gold, Flussspath.

Der Name Tetrakishehexaëder erinnert an die bestimmte Beziehung zu dem Hexaëder, während er zugleich die, in Bezug auf diese Form stets vorhandene Gruppierung der Flächen in 6 vierzählige Systeme betont. Der Name Pyramidenwürfel drückt aus, dass die Gestalt gleichsam ein Würfel ist, der auf jeder seiner Flächen eine niedrige vierseitige Pyramide trägt. Je niedriger diese Pyramiden sind, je flacher der Winkel A ist (Fig. 24), desto mehr nähert sich die Gestalt des Tetrakishehexaëders einem Würfel, je höher (Fig. 26), desto mehr einem Rhombendodekaëder.

1) Als Beispiel für die Winkelwerthe verschiedener Varietäten dienen nachstehende Angaben, in welche auch die beiden Grenzformen mit aufgenommen sind.

	Oktaëderkanten B	Pyramidenkanten A
O	$109^{\circ}28'$	480°
$\frac{3}{2}O$	$113^{\circ}42'$	$174^{\circ}36'$
$2O$	$129^{\circ}31'$	$162^{\circ}39'$
$\frac{3}{2}O$	$136^{\circ}0'$	$157^{\circ}5'$
$2O$	$144^{\circ}3'$	$152^{\circ}44'$
$4O$	$159^{\circ}37'$	$136^{\circ}39'$
$9O$	$174^{\circ}4'$	$127^{\circ}24'$
$36O$	$177^{\circ}45'$	$121^{\circ}50'$
∞O	180°	120°

Triakisoktaëder mit gleichen Kanten können in der Natur nicht vorkommen, da in diesem Fall m den irrationalen Werth $4 + \sqrt{2}$ erhalten würde.

Schneidet die Fläche des Tetrakishexaëders die eine Axe in der Entfernung a , so wird die andere Axe in einer um n (> 1) verlängerten Entfernung getroffen, während die Fläche mit der dritten Axe parallel geht. Daher das Flächenzeichen $a : na : \infty a$, z. B. $a : 2a : \infty a$; $a : 4a : \infty a$. Dasselbe würde in jedem Oktanten 6 Flächen liefern, von denen aber immer je zwei mit zweien eines benachbarten Oktanten zusammenfallen, daher die ganze Form $\frac{6 \times 8}{2} = 24$ Flächen aufweist. Je mehr n wächst, desto mehr nähert sich ein Tetrakishexaëder gestaltlich dem Hexaëder; ist $n = \infty$ geworden, so resultirt das Hexaëder ($a : \infty a : \infty a$) selbst. Wird n immer kleiner, so nähert sich die Gestalt immer mehr dem Rhombendodekaëder ($a : a : \infty a$), zu welchem sie wird, wenn $n = 1$.

Bei der Construction aus dem Oktaëder nehme man wiederum in jeder Halbaxe desselben eine Länge n , die grösser als 1 ist, und lege hierauf in jede Oktaëder-ecke vier Flächen, von welchen jede einzelne über eine Kante dieser Ecke dergestalt fällt, dass sie die zu derselben Kante gehörige Halbaxe in der Entfernung n schneidet, während sie der dritten Hauptaxe parallel ist; so entsteht ein Tetrakis-hexaëder, dessen Zeichen $\infty 0n$ ist, weil jede seiner Flächen das Parameter-verhältniss $\infty : 1 : n$ hat. — Am häufigsten sind die Tetrakishexaëder $\infty 0\frac{2}{3}$, $\infty 02$ und $\infty 03$; bei ihnen sind die Pyramidenkanten A um so stumpfer, die Kanten C um so schärfer, je grösser n ist¹⁾. Für das Tetrakishexaëder $\infty 02$ sind alle 36 Kanten von gleichem Winkelwerth. — Die Miller'schen Indices für die Tetrakis-hexaëder sind allgemein $\{h k 0\}$; $\infty 0\frac{2}{3} = \{320\}$; $\infty 02 = \{210\}$; $\infty 04 = \{410\}$.

Die Ikositetraëder (Fig. 27, 28, 29) sind Formen, welche von 24 Deltoiden umschlossen werden, d. h. von Trapezoiden, welche 2 Paare gleicher Seiten besitzen.

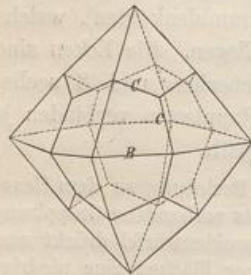


Fig. 27.

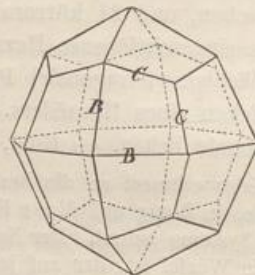


Fig. 28.

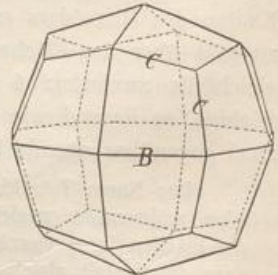


Fig. 29.

Ihre allgemeine Gestalt schwankt zwischen jener des Oktaëders und des Hexaëders, ohne dass doch die Kanten einer dieser beiden Grenzformen jemals hervortreten könnten. Die Kanten sind zweierlei: 24 längere B , paarweise über den Kanten des eingeschriebenen Oktaëders, und 24 kürzere C , zu je drei über den Flächen des

1) Es betragen bei

$\infty 0$
 $\infty 0\frac{2}{3}$
 $\infty 02$
 $\infty 0\frac{3}{2}$
 $\infty 03$
 $\infty 04$
 $\infty 05$
 $\infty 0\infty$

Würfelkanten C

480°
 $457^\circ 23'$
 $443^\circ 8'$
 $433^\circ 36'$
 $426^\circ 52'$
 $418^\circ 4'$
 $412^\circ 38'$
 90°

Pyramidenkanten A

420°
 $433^\circ 49'$
 $443^\circ 8'$
 $449^\circ 33'$
 $454^\circ 9'$
 $460^\circ 15'$
 $464^\circ 4'$
 480°

letzteren. Die Ecken sind dreierlei: 6 gleichkantig-vierflächige (tetragonale), 8 dreiflächige (trigonale), und 12 ungleichkantig-vierflächige (rhombische). Durch 2 gegenüberliegende dieser 26 Ecken geht je eine der 13 S.-A.n des regulären Systems. Die Hauptaxen verbinden je zwei gegenüberliegende tetragonale Ecken. — Das häufige Vorkommen der in Fig. 28 abgebildeten Varietät am Leucit veranlasste für sie den Namen Leucitoëder, während man die in Fig. 29 abgebildete Varietät das Leucitoid nannte. Je stumpfer die Kanten C sind, desto grösser ist die Annäherung an das Oktaëder (Fig. 27), je stumpfer die Kanten B , desto grösser diejenige an das Hexaëder (Fig. 29).

Schneidet die Fläche des Ikositetraëders die eine Hauptaxe in der Entfernung a , so werden die beiden anderen Axen in der unter einander gleichen, um m -mal verlängerten Entfernung getroffen; daher das Flächenzeichen $a : ma : ma$, z. B. $a : 2a : 2a$; $a : 3a : 3a$; dasselbe liefert in jedem Oktanten 3 Flächen. Hohe Werthe für m bedingen eine Annäherung an das Hexaëder ($a : \infty a : \infty a$), sehr kleine eine solche an das Oktaëder ($a : a : a$); wird $m = \infty$, so geht das erstere, wird $m = 1$, dann das letztere hervor.

Um die Ikositetraëder aus dem Oktaëder zu construiren, nehme man in jeder der Halbaxen des Oktaëders abermals die Länge m , und lege hierauf in jede Oktaëderecke vier Flächen, von denen jede einzelne über eine Fläche derselben Ecke dergestalt fällt, dass sie die beiden zu derselben Fläche gehörigen Halbaxen in der Entfernung m schneidet; so entsteht ein Ikositetraëder, dessen Zeichen mOm ist, weil jede seiner Flächen das Parameterverhältniss $m : 1 : m$ hat. — Die gewöhnlichsten Ikositetraëder sind 202 und 303, von denen zumal das erstere (Fig. 28) am Analcim, Leucit und Granat sehr häufig vorkommt; es hat die Eigenschaft, dass die seine Deltoide symmetrisch theilenden Flächendiagonalen mit den Kanten des eingeschriebenen Rhombendodekaëders zusammenfallen¹⁾. — Die Indices sind allgemein $\{hkk\}$; $303 = \{311\}$; $202 = \{322\}$.

Die Hexakisoktaëder oder Sechsmalachtflächner oder Achtundvierzigflächner (Fig. 30) sind von 48 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Formen, deren allgemeine Gestalt zwischen denen aller übrigen holoëdrisch-regulären Formen schwanken kann; am häufigsten gruppiren sich jedoch die Flächen entweder in 6 achtzählige oder in 8 sechszählige, oder auch in 12 vierzählige Flächensysteme: der Achtundvierzigflächner erscheint bald durch das Aufsetzen sehr stumpfer achtseitiger Pyramiden über den 6 Hexaëderflächen (Oktakishexaëder), bald durch

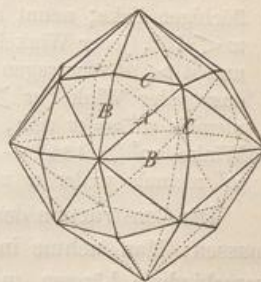


Fig. 30.

1) Es betragen bei

	Kanten B	Kanten C
0	109° 28'	180°
001	118° 4'	169° 4'
010	121° 58'	160° 15'
202	134° 49'	146° 27'
303	141° 18'	132° 2'
404	144° 54'	129° 31'
606	152° 44'	120°
12012	162° 20'	110°
∞0∞	170° 30'	99° 52'
	180°	90°

das Aufsetzen sehr stumpfer sechsseitiger Pyramiden über den 8 Oktaëderflächen (Hexakisoktaëder), bald durch das Aufsetzen sehr stumpfer vierseitiger Pyramiden über den 12 Rhombendodekaëderflächen (Tetrakisdodekaëder) entstanden zu sein. Flächenvertheilung und Symmetrie-Elemente zeigt die sphärische Projection Fig. 15. — Die Kanten sind dreierlei: 24 längste Kanten A , welche nicht selten mit denen des Rhombendodekaëders zusammenfallen, jedenfalls aber eine ähnliche Lage und Vertheilung haben; 24 mittlere Kanten B , welche paarweise über den Kanten des eingeschriebenen Oktaëders (gebrochene Oktaëderkanten), und 24 kürzeste Kanten C , welche paarweise über den Kanten des eingeschriebenen Hexaëders liegen. Die längsten Kanten schwanken in ihrem Winkelmaass zwischen 180° und 120° , die mittleren zwischen 180° und $109^\circ 28' 46''$, die kürzesten zwischen 180° und 90° . Die Ecken sind gleichfalls dreierlei: 6 achtflächige (ditetragonale), 8 sechsfächige, und 12 vierflächige (rhombische) Ecken. Durch je 2 gegenüberliegende Ecken geht je eine der 13 S.-A.n. Die Hauptaxen verbinden je zwei gegenüberliegende ditetragonale Ecken. — Granat, Flussspath.

Die Fläche eines Hexakisoktaëders schneidet alle 3 Halbaxen in abweichender Entfernung vom Mittelpunkt, daher das Zeichen $a : ma : na$, z. B. $a : 2a : 3a$; $a : \frac{3}{2}a : 3a$. In jedem der 8 Oktanten müssen hier 6 verschiedene Flächen auftreten, weil, wenn man in den einzelnen Oktanten die Längen l , m und n auf jeder der 3 Hauptaxen aufrägt, die möglichen Vertauschungen bei der Verbindung dieser Schnittpunkte eben 6 Flächen liefern (lmn , lnm , mln , $nm l$, nlm , nml), von denen keine mit einer anderen im Nachbaroktanten übereinstimmt. — Es lässt sich leicht zeigen, dass jede dieser Flächen, die Gleichheit derselben vorausgesetzt, auch nur ein ungleichseitiges Dreieck darstellen kann. Ein jedes derselben trägt nämlich mit seinen 3 Winkeln bei zur Bildung einer achtflächigen, einer sechsfächigen und einer vierflächigen Ecke; nennt man diese 3 Winkel w , w' , w'' , so ist nothwendig jeder Winkel $w < 45^\circ$, jeder Winkel $w' < 60^\circ$, jeder Winkel $w'' < 90^\circ$, denn $8 \times 45^\circ$, $6 \times 60^\circ$ und $4 \times 90^\circ$ betragen schon 360° . Da nun aber $w + w' + w'' = 180^\circ$, so folgt, dass jeder Winkel $w' > 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ)$, d. h. $> 45^\circ$ sein muss; mithin kann niemals $w' = w$ sein, denn $w < 45^\circ$. Ebenso ergibt sich aber auch, dass jeder Winkel $w'' > 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ)$, d. h. $> 75^\circ$ sein muss, woraus erhellt, dass w'' niemals weder w noch w' werden kann, denn $w < 45^\circ$ und $w' < 60^\circ$.

Die Construction der Hexakisoktaëder aus dem Oktaëder gestaltet sich folgendermassen: Man nehme in jeder Halbaxe des Oktaëders vom Mittelpunkt aus zwei verschiedene Längen m und n , von denen m grösser als n ist, während beide grösser als 1 sind, und lege hierauf in jede Oktaëderecke acht Flächen, von welchen je zwei über eine Kante derselben Ecke dergestalt fallen, dass sie die zu derselben Kante gehörige Halbaxe gemeinschaftlich in der kleineren Entfernung n , die nicht zu solcher Kante gehörige Halbaxe aber beiderseits in der grösseren Entfernung m schneiden; so entsteht ein Hexakisoktaëder, dessen Zeichen mOn ist, weil jede seiner Flächen das Parameterverhältniss $m : 1 : n$ hat. Die gewöhnlichsten Varietäten sind $30\frac{2}{3}$, 402 und $50\frac{5}{3}$.

Jede Fläche des Hexakisoktaëders besitzt den kleinsten Parameter in derjenigen Halbaxe, mit welcher sie unmittelbar zum Durchschnitt gelangt; ihre mittlere Kante stösst auf die Halbaxe mit dem mittleren Parameter, ihre kürzeste Kante auf die Halbaxe mit dem grössten Parameter. Die Hexakisoktaëder, bei welchen $n = \frac{2m}{m+1}$, z. B. $20\frac{4}{3}$, $30\frac{3}{2}$ und $50\frac{5}{3}$, sind sog. isogonale, d. h. solche, deren längste und kürzeste

Kanten gleiches Winkelmaass haben; diejenigen, bei welchen $n = \frac{m}{m-1}$, z. B. $30\frac{3}{2}$, $40\frac{1}{3}$, $120\frac{1}{2}$, heissen parallelkantige, weil ihre längsten Kanten mit den Kanten des eingeschriebenen Rhombendodekaëders zusammenfallen und folglich zu je sechs und sechs einander parallel sind. Die Varietät $30\frac{3}{2}$ besitzt daher die merkwürdige Eigenschaft, sowohl isogonal als parallelkantig zu sein.

Die Hexakisoktaëder sind allgemein $\{hkl\}$; $30\frac{3}{2} = \{321\}$; $302 = \{632\}$; $50\frac{5}{3} = \{531\}$; $20\frac{4}{3} = \{432\}$. — Bei der Form $\{321\}$ liegen z. B. in dem vorderen oberen rechten Oktanten, in welchem (vgl. S. 18) alle Parameter positiv sind, die Flächen (321) , (312) , (231) , (213) , (132) , (123) ; in dem vorderen oberen linken die Flächen $(\bar{3}21)$, $(\bar{3}12)$, $(2\bar{3}1)$, $(2\bar{1}3)$, $(1\bar{3}2)$, $(1\bar{2}3)$ u. s. w.¹⁾.

Anm. Dass die Triakisoktaëder, Tetrakisheptaëder, Icositetraëder und Hexakisoktaëder — im Gegensatz zum Oktaëder, Hexaëder und Rhombendodekaëder — in ihrer äusseren Gestaltung grosser Variabilität fähig sind, ergibt sich aus der Erwägung, dass die sie begrenzenden Flächen — gleichschenkelige Dreiecke, Deltoide und ungleichseitige Dreiecke — selbst sehr abweichend in ihren Winkelverhältnissen beschaffen sein können; nicht minder auch aus der Thatsache, dass ihre Symbole variable Coëfficienten enthalten.

Die Analogie der drei Bezeichnungsweisen zeigt folgende Vergleichung:

$$\begin{aligned} a : a : a &= 0 &= \{111\} \\ \infty a : a : a &= \infty 0 &= \{110\} \\ \infty a : a : \infty a &= \infty 0 \infty &= \{100\} \\ ma : a : a &= m0 &= \{hhl\} \\ \infty a : a : na &= \infty 0n &= \{hko\} \\ ma : a : ma &= m0m &= \{hkk\} \\ ma : a : na &= m0n &= \{hkl\}. \end{aligned}$$

Abgesehen von den S. 21 u. 22 gegebenen Regeln mögen hier noch einige allgemeine Andeutungen über die Umwandlung der Naumann'schen Zeichen in diejenigen von Miller und umgekehrt folgen. Der letzteren Signatur liegt gewissermassen die Voraussetzung zu Grunde, dass die verschiedenen regulären Formen nicht durch Umschreibung um, sondern durch Einschreibung in das Oktaëder abgeleitet werden.

Um die Zeichen Naumann's in die Miller's zu übersetzen, bedarf es nur folgender Erwägung. Das Hexakisoktaëder $m0n$ hat bei Naumann das Parameterverhältniss $m : n : 4$; schreiben wir es umgekehrt, und dividiren wir es mit mn , so wird

$$4 : n : m = \frac{4}{mn} : \frac{1}{m} : \frac{1}{n};$$

also würde ganz allgemein $h : k : l = mn : m : n$, welches Verhältniss jedoch stets auf seinen einfachsten Ausdruck zu bringen ist. Dies geschieht immer sehr leicht, wenn m und n ganze Zahlen sind; ist aber eine dieser Zahlen ein (unächter) Bruch,

1) Die Bezeichnungsweise der einzelnen Flächen gestaltet sich allgemein in nachstehender Weise; dabei bedeutet, wie auch in der Folge, v: vorne, h: hinten, o: oben, u: unten, r: rechts, l: links.

vor	vol	hor	hol	vur	vul	hur	hul
hkl	$h\bar{k}l$	$\bar{h}kl$	$\bar{h}\bar{k}l$	$hk\bar{l}$	$h\bar{k}\bar{l}$	$\bar{h}k\bar{l}$	$\bar{h}\bar{k}\bar{l}$
$h\bar{l}k$	$h\bar{l}\bar{k}$	$\bar{h}lk$	$\bar{h}\bar{l}k$	$h\bar{l}k$	$h\bar{l}\bar{k}$	$\bar{h}l\bar{k}$	$\bar{h}\bar{l}\bar{k}$
$kh\bar{l}$	$k\bar{h}l$	$\bar{k}hl$	$\bar{k}\bar{h}l$	$kh\bar{l}$	$k\bar{h}\bar{l}$	$\bar{k}h\bar{l}$	$\bar{k}\bar{h}\bar{l}$
$kl\bar{h}$	$k\bar{l}h$	$\bar{k}lh$	$\bar{k}\bar{l}h$	$kl\bar{h}$	$k\bar{l}\bar{h}$	$\bar{k}l\bar{h}$	$\bar{k}\bar{l}\bar{h}$
$lh\bar{k}$	$l\bar{h}k$	$\bar{l}hk$	$\bar{l}\bar{h}k$	$lh\bar{k}$	$l\bar{h}\bar{k}$	$\bar{l}h\bar{k}$	$\bar{l}\bar{h}\bar{k}$
lkh	$l\bar{k}h$	$\bar{l}kh$	$\bar{l}\bar{k}h$	lkh	$l\bar{k}\bar{h}$	$\bar{l}k\bar{h}$	$\bar{l}\bar{k}\bar{h}$

oder sind beide dergleichen Brüche, so hat man das Verhältniss $mn : m : n$ mit den Nennern dieser Brüche zu multipliciren.

Umgekehrt übersetzen sich die *Miller'schen* Zeichen in diejenigen *Naumann's*, wie folgt: Da $h : k : l = mn : m : n$, so wird offenbar $h : k = n : 1$, und folglich auch $n = \frac{h}{k}$; ebenso wird $k : l = m : n$, und folglich $m = \frac{h}{l}$.

Dem *Miller'schen* Zeichen $\{hkl\}$ entspricht daher das *Naumann'sche* $\frac{h}{l} 0 \frac{h}{k}$; also $\{432\} = 20\frac{4}{3}$; $\{522\} = \frac{5}{2}0\frac{5}{2}$; $\{221\} = 20$; $\{430\} = \infty 0\frac{4}{3}$.

§ 17. **Verband der holoëdrisch-regulären Formen.** Die Uebergänge und Verwandtschaften sämtlicher holoëdrisch-regulärer Formen lassen sich am besten aus bestehendem triangulären Schema erkennen (Fig. 31).

In den drei Ecken des Schemas stehen diejenigen drei Formen, welche einzig in ihrer Art sind (S. 36), während die drei Seiten des Schemas die Zeichen der

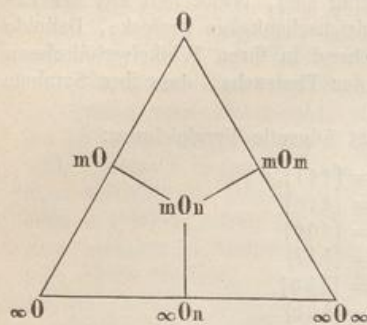


Fig. 31.

drei Vierundzwanzigflächner tragen, als deren Grenzformen die drei singulären Formen zwar schon oben (§ 16) genannt worden sind, während sie jetzt erst mit Evidenz als solche anerkannt werden können. In der That wird durch Vergleichung der Stellung und des Zeichens der Formen sehr anschaulich, dass die Triakisoktaëder $m0$ je nach dem Werth von m körperlich zwischen dem Oktaëder und dem Rhombendodekaëder, dass ebenso die Ikositetraëder $m0m$ je nach dem Werth von m zwischen dem Oktaëder und Hexaëder, dass

die Tetrakisheptaëder je nach dem Werth von n zwischen dem Rhombendodekaëder und Hexaëder schwanken. Werden diese Werthe bald gleich 1 und bald gleich ∞ , so gehen die Grenzformen hervor. In diesem Schema nimmt das Hexakisoktaëder den Mittelpunkt ein, weil in seinen Verhältnissen die Bedingungen für die Existenz aller übrigen Formen ebenso, wie in seinem Zeichen die Zeichen derselben enthalten sind und es sonach als der eigentliche Repräsentant aller regulären Formen betrachtet werden kann, welche nur gewisse Specialfälle desselben darstellen. Jedes $m0n$ erscheint als ein Glied dreier verschiedener Ableitungsreihen: 1) einer Reihe, deren Endglieder ein Triakisoktaëder und ein Ikositetraëder sind; 2) einer solchen, deren Endglieder ein Triakisoktaëder und ein Tetrakisheptaëder darstellen; 3) einer Reihe mit einem Tetrakisheptaëder und Ikositetraëder als Endgliedern.

Wird in dem Zeichen des Achtundvierzigflächners $n = 1$, so geht daraus $m0$ hervor; wird $m = \infty$, so erhält man $\infty 0n$; wenn $n = m$, so $m0m$; wenn sowohl m als $n = 1$, alsdann 0; wenn m und n beide $= \infty$, alsdann $\infty 0\infty$; wenn schliesslich $m = \infty$ und $n = 1$, alsdann $\infty 0$. Oder das Hexakisoktaëder (Fig. 30) wird zu einem

Triakisoktaëder, wenn die kürzesten Kanten verschwinden, d. h. $C = 180^\circ$,
Tetrakisheptaëder, wenn die mittleren Kanten verschwinden, d. h. $B = 180^\circ$,
Ikositetraëder, wenn die längsten Kanten verschwinden, d. h. $A = 180^\circ$,
Oktaëder, wenn die längsten und kürzesten Kanten verschwinden, $C = A = 180^\circ$,
Hexaëder, wenn die längsten und mittleren Kanten verschwinden, $B = A = 180^\circ$,
Dodekaëder, wenn die mittleren und kürzesten Kanten verschwinden, $C = B = 180^\circ$.

So können also die übrigen sechs Formen als Quasi-Hexakisoktaëder aufgefasst werden, bei welchen bald diese, bald jene Kanten verschwunden sind. Und zwar sind die 3 Vierundzwanzigflächner solche Quasi-Achtundvierzigflächner, bei welchen bloß eine Kantenart verschwunden ist, die 3 invariablen Formen solche, bei welchen zwei Kantenarten zum Verschwinden gelangt sind. So wäre z. B.:

- $30\frac{3}{2}$ ein sehr triakisoktaëder-
- 2502 ein sehr tetrakisheptaëder-
- $\frac{3}{4}0\frac{1}{2}$ ein sehr ikositetraëder-
- $\frac{5}{3}0\frac{3}{2}$ ein sehr oktaëder-
- 17016 ein sehr hexaëder-
- $200\frac{3}{2}$ ein sehr rhombendodekaëderähnliches Hexakisoktaëder.

Das Hexakisoktaëder 402 kann z. B. folgende und nur sechs folgende Variationen seiner Parameter bis zu den Grenzformen erfahren:

- 1) der kleinere Parameter verkleinert: $40\frac{7}{4}$, $40\frac{3}{2}$, $40\frac{1}{4}$ bis 40 ,
- 2) der grössere Parameter vergrößert: 502 , 1202 bis $\infty 02$,
- 3) der grössere verkleinert, bis er den kleineren erreicht: $\frac{7}{2}02$, 302 bis 202 ,
- 4) beide Parameter verkleinert: $\frac{7}{2}0\frac{7}{4}$, $30\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}0\frac{1}{4}$ bis 0 ,
- 5) beide vergrößert: 503 , 807 bis $\infty 0\infty$,
- 6) einer vergrößert und zugleich der andere verkleinert: $50\frac{7}{4}$, $60\frac{3}{2}$, $70\frac{1}{4}$ bis $\infty 0$.

Dass mit den angeführten sieben holoëdrischen Formen überhaupt alle, welche in dem regulären System vorkommen können, bekannt und erschöpft sind, ergibt sich, abgesehen von den auf S. 33 vorgenommenen Eintheilungen, auch noch aus folgender Erwägung. Im Allgemeinen kann die Lage einer Fläche mit Bezug auf die einen Oktanten bildenden drei Halbaxen eine dreifache sein: die drei Parameter derselben sind entweder alle von endlichem Werth, oder zwei sind endlich, der dritte ∞ , oder bloß einer ist endlich, die beiden anderen ∞ ; der vierte Fall, dass alle drei Parameter ∞ seien, ist nicht denkbar. Die weiteren Möglichkeiten zeigt das folgende Schema:

I. Alle drei Parameter endlich:

- 1) alle drei gleich ($a : a : a$), Oktaëder;
- 2) zwei gleich, der dritte ungleich:
 - a) der dritte grösser ($a : a : ma$), Triakisoktaëder,
 - b) der dritte kleiner ($ma : ma : a$), Ikositetraëder;
- 3) alle drei ungleich ($a : ma : na$), Hexakisoktaëder.

II. Zwei Parameter endlich, der dritte unendlich:

- 1) die endlichen gleich ($a : a : \infty a$), Rhombendodekaëder;
- 2) die endlichen ungleich ($a : na : \infty a$), Tetrakisheptaëder.

III. Ein Parameter endlich, die beiden anderen unendlich ($a : \infty a : \infty a$), Hexaëder.

Weitere Haupt- oder Unterabtheilungen sind nicht möglich und somit ist ein fernerer holoëdrisch-regulärer Körper nicht denkbar. — Auf genau dieselben Abtheilungen gelangt man übrigens, wenn die verschiedenen Möglichkeiten der Lage einer Fläche zu den drei Haupt-Symmetrie-Ebenen ins Auge gefasst werden.

§ 48. **Combinationen der holoëdrisch-regulären Formen.** Sind die Formen des regulären Systems mit parallelen Symmetrie-Ebenen zu zwei, drei und mehr an einem und demselben Krystall zugleich ausgebildet, so liegt eine Combination derselben vor (§ 8). In solchen Combinationen, welche nach der Anzahl der zu ihnen beitragenden Formen als zweizählige, dreizählige u. s. w. unterschieden werden, kann natürlich keine der combinirten Formen ganz vollständig erscheinen, weil ihre gleichzeitige Ausbildung an demselben Krystall (oder um denselben Mittelpunkt) nur in der Weise möglich ist, dass die Flächen der einen Form symmetrisch zwischen den Flächen, und folglich an der Stelle gewisser Kanten und Ecken der anderen Formen auftreten; weshalb diese Kanten

und Ecken durch jene Flächen gleichsam wie weggeschnitten (abgestumpft, zugespitzt oder zugespitzt) erscheinen, und ganz neue Kanten (Combinationskanten) entstehen, welche weder der einen noch der anderen Form eigenthümlich zugehören. Gewöhnlich sind die Flächen der einen Form viel grösser als die der anderen, so dass sie den Totalhabitus der Combination bestimmt, während manche Formen nur sehr geringe Flächenausdehnung zeigen; dies Verhältniss bedingt den Gegensatz der vorherrschenden und untergeordneten Formen.

Als eine auch für alle folgenden Krystalssysteme gültige Bemerkung mag erwähnt werden, dass man unter der Entwicklung oder Auflösung einer Combination die Bestimmung aller zu ihr beitragenden Formen versteht, und dass das krystallographische Zeichen einer Combination dadurch gewonnen wird, dass man die Zeichen ihrer einzelnen Formen nach Maassgabe des Vorherrschens derselben, durch Punkte getrennt (aber ganz dicht) hinter einander schreibt.

Um ein Bild von dem Aussehen einer Combination zu erhalten, bringt man die beiden einfachen Formen in parallele Stellung, so dass die entsprechenden Symmetrieelemente übereinstimmend orientirt sind und beobachtet, welche Veränderungen an der einen Form erfolgen würden, wenn man an diese letztere die parallel fortgeschobenen Flächen der anderen Form überträgt. So modificiren die Flächen der einen Form immer nur gleichartige Kanten und Ecken der anderen durch Abstumpfung oder Zuschärfung.

In den meisten holoëdrisch-regulären Combinationen erscheint das Hexaëder, oder das Oktaëder oder auch das Rhombendodekaëder als vorherrschende

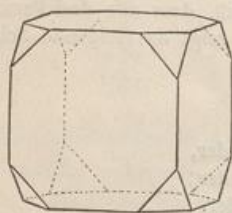

 $\infty 0 \infty . 0.$

Fig. 32.

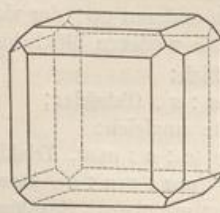

 $\infty 0 \infty . \infty 0.$

Fig. 33.

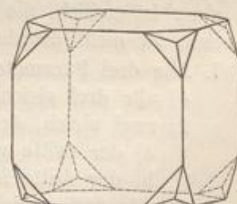

 $\infty 0 \infty . 202.$

Fig. 34.

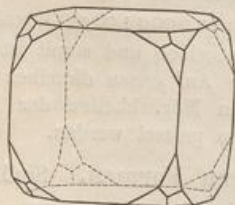

 $\infty 0 \infty . 20.$

Fig. 35.

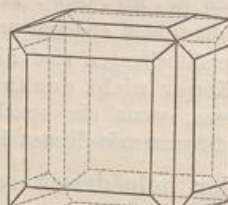

 $\infty 0 \infty . \infty 03.$

Fig. 36.

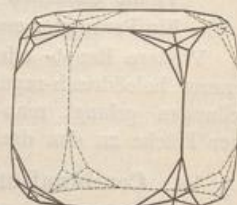

 $\infty 0 \infty . 402.$

Fig. 37.

Form, wie denn überhaupt diese drei Formen am häufigsten ausgebildet und in der Mehrheit der Combinationen zu finden sind. Das Hexaëder erfährt durch die Flächen des Oktaëders eine regelmässige Abstumpfung seiner Ecken, durch die Flächen des Rhombendodekaëders eine regelmässige Abstumpfung seiner Kanten, durch jedes Ikositetraëder $m0m$ (am häufigsten durch 202) eine dreiflächige, auf die Flächen aufgesetzte Zuspitzung seiner Ecken, durch jedes Triakisoktaëder eine

dreiflächige, auf die Kanten aufgesetzte Zuspitzung seiner Ecken, durch jedes Tetrakis-hexaëder eine zweiflächige Zuschärfung seiner Kanten, durch jedes Hexakisoktaëder eine sechsflächige Zuspitzung seiner Ecken.

Das Oktaëder erfährt durch die Flächen des Hexaëders eine Abstumpfung seiner Ecken, durch die Flächen des Rhombendodekaëders eine regelmässige Abstumpfung seiner Kanten, durch jedes Ikositetraëder (gewöhnlich durch 202) eine

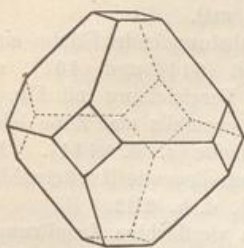

 $0.\infty 0\infty.$

Fig. 38.

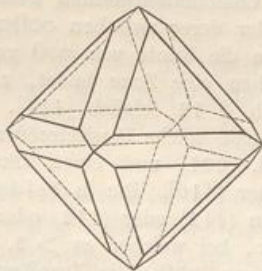

 $0.\infty 0.$

Fig. 39.

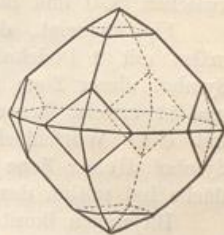

 $0.202.$

Fig. 40.

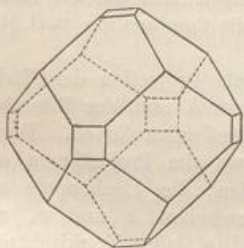

 $\infty 0.\infty 0\infty.$

Fig. 41.

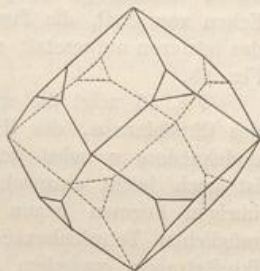

 $\infty 0.0.$

Fig. 42.

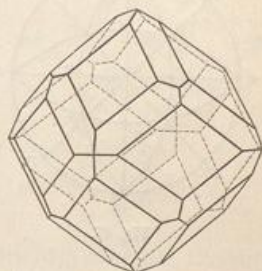

 $\infty 0.202.$

Fig. 43.

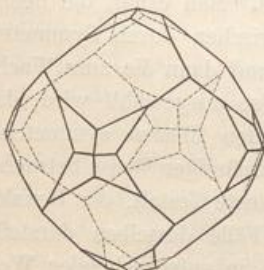

 $\infty 0.303.$

Fig. 44.

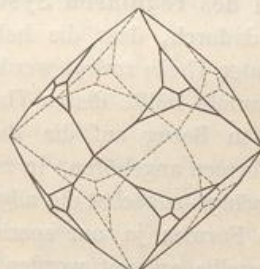

 $\infty 0.\frac{3}{2}0\frac{3}{2}.$

Fig. 45.

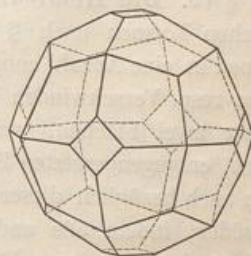

 $202.\infty 0\infty.$

Fig. 46.

vierflächige, auf die Flächen aufgesetzte Zuspitzung seiner Ecken, durch jedes Triakisoktaëder eine zweiflächige Zuschärfung seiner Kanten.

Das Rhombendodekaëder erleidet durch das Hexaëder eine Abstumpfung der tetragonalen, durch das Oktaëder eine solche der trigonalen Ecken, durch das Ikositetraëder 202 eine Abstumpfung seiner Kanten, durch das Hexakisoktaëder eine zweiflächige Zuschärfung seiner Kanten.

Bei der Auflösung der Combination sucht man zweckmässig zunächst die 3 einfachsten Formen 0 , $\infty 0$, $\infty 0 \infty$ auf, oder stellt sich bei Abwesenheit derselben vor, welche Lage dieselben einnehmen würden. Ferner erinnere man sich, dass alle $m0$ eine Zone bilden mit 0 und $\infty 0$, sämtliche $m0m$ eine solche mit 0 und $\infty 0 \infty$, sämtliche $\infty 0n$ mit $\infty 0$ und $\infty 0 \infty$. Aus den gebildeten Zonen werden dann unmittelbar diese 3 Vierundzwanzigflächner erkannt. Alle Flächen, die nicht in den 3 genannten Zonen liegen, gehören Hexakisoktaedern an; letztere treten auch mit zwei Flächen auf an Stelle der Combinationskanten zwischen 0 und $\infty 0n$, oder derer zwischen $\infty 0$ und $m0m$, oder derer zwischen $\infty 0 \infty$ und $m0$.

Fig. 43 zeigt, dass eine die Kante von $\infty 0$ gerade abstumpfende Fläche eines $m0m$ mit 2 Dodekaederflächen eine Zone bildet, z. B. mit (011) und (101) ; das Symbol dieser Zone ist nach § 12 folglich $[11\bar{1}]$. Eine Vergleichung mit Fig. 41 und 42 erweist ferner, dass eine solche Ikositetraederfläche ebenfalls eine Zone bildet mit einer Würfelfläche z. B. (001) und einer Oktaederfläche z. B. (111) . Das Symbol dieser Zone ist daher $[\bar{1}10]$. Die in beiden Zonen liegende Ikositetraederfläche hat mithin das Zeichen $(\bar{1}\bar{1}2)$ oder (112) , d. h. 202 .

Diejenigen Ikositetraeder, bei welchen $m > 2$, bilden vierflächige Zuspitzungen an den vierkantigen Ecken von $\infty 0$, die Zuspitzungsflächen auf die Dodekaederkanten aufgesetzt; z. B. die Combination $\infty 0.303$, Fig. 44. — Diejenigen Ikositetraeder, bei denen $m < 2$, bilden dreiflächige Zuspitzungen an den dreikantigen Ecken von $\infty 0$, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten des letzteren aufgesetzt; z. B. die Combination $\infty 0.\frac{3}{2}0\frac{3}{2}$, Fig. 45.

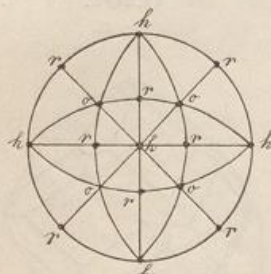


Fig. 47.

Fig. 47 zeigt die sphärische Projection der Flächen des Oktaeders o , des Hexaeders h und des Rhombendodekaeders r nebst den betreffenden Zonen. Daraus ist auch leicht einzusehen, wo die Projectionen aller übrigen Formen liegen werden: die Flächenpole aller möglichen Tetrakishexaeder zwischen h und r , aller Ikositetraeder zwischen h und o , aller Triakisoktaeder

zwischen r und o , aller Hexakisoktaeder in den Räumen zwischen den benachbarten hro .

§ 19. Die Hemiëdrien des regulären Systems. Man erhält die hemiëdrischen Formen nach § 13 dadurch, dass die holoëdrischen durch Symmetrieebenen in eine Anzahl congruenter Theile zerlegt werden und dann die zum Wachsthum resp. Verschwinden bestimmte Hälfte dieser Theile so ausgewählt wird, dass immer zwei Flächen, welche in Bezug auf die theilenden Ebenen symmetrisch liegen, entgegengesetzten Hälftformen angehören. In zweckmässiger Weise betrachtet man auch bezüglich dieser Vorgänge zunächst die allgemeinste Gestalt, das Hexakisoktaeder, indem alle anderen Formen ja nur specielle Fälle desselben darstellen und so dasjenige, was für dasselbe erkannt worden ist, in entsprechender Weise auch auf die übrigen Gestalten, als auf Quasi-Achtundvierzigflächner Anwendung finden muss.

Da die regulären Holoëder 3 H.-S.-E.n und 6 gewöhnliche S.-E.n besitzen, so werden 3 Modalitäten der Hemiëdrie — nicht mehr und nicht weniger — zu unterscheiden sein, je nachdem aus dem Complex ausscheiden:

- 1) die 3 H.-S.-E.n; dann verhalten sich die 8 congruenter Räume, welche durch dieselben gebildet werden, nur abwechselnd gleich. Bei dem Hexakisoktaeder macht sich dies darin geltend, dass bloß die in den abwechseln-

- den Oktanten gelegenen sechszähligen Flächengruppen ausgebildet sind (tetraëdrische oder geneigtflächige Hemiëdrie);
- 2) die 6 gewöhnlichen S.-E.n; die durch dieselben gebildeten 24 congruenten Räume sind nur abwechselnd gleich. Alsdann bleiben am Hexakisoktaëder nur noch die abwechselnden Flächenpaare erhalten, welche an den mittleren gebrochenen Oktaëderkanten (oder an den in den H.-S.-E.n befindlichen Kanten) gelegen sind (dodekaëdrische oder pentagonale oder parallelfächige Hemiëdrie);
- 3) alle 9 S.-E.n zusammen; von den 48 congruenten Räumen sind nur die abwechselnden gleich. Bei dem Hexakisoktaëder hat dies die Wirkung, dass von ihm bloß die abwechselnden einzelnen Flächen ausgebildet vorliegen (plagiëdrische oder gyroëdrische Hemiëdrie).

§ 20. **Die tetraëdrische Hemiëdrie.** Die Formen derselben sind nicht mehr nach den Würfelflächen, sondern nur noch nach den 6 gewöhnlichen S.-E.n oder nach den Rhombendodekaëderflächen symmetrisch. Die krystallographischen Hauptaxen (bei den Holoëdern vierzählig) sind hier zu 3 gleichwerthigen zweizähligen S.-A.n geworden; ausserdem sind vorhanden 4 gleichwerthige dreizählige S.-A.n von polarer Ausbildung, senkrecht zu den Tetraëderflächen. Ein Centrum der Symmetrie fehlt; für die Fläche ist eine parallele Gegenfläche nicht ausgebildet, daher die Bezeichnung geneigtflächige Hemiëdrie. Die sphärische Projection Fig. 48 zeigt die Flächenvertheilung bei der allgemeinsten Form und die Symmetrie (vgl. S. 25).

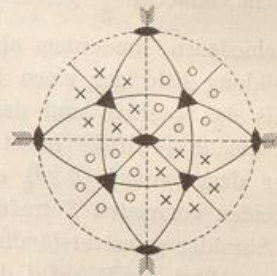


Fig. 48.

Indem die tetraëdrische Hemiëdrie sich darin ausspricht, dass die Oktanten zwischen den drei H.-S.-E.n sich bloß abwechselnd gleich verhalten, werden alle diejenigen Formen dabei eine Gestaltsveränderung erfahren, bei welchen die Normalen der Flächen in diese Oktantenräume fallen, also das Oktaëder, Ikositetraëder, Triakisoktaëder, Hexakisoktaëder. Bei den übrigen Formen (Hexaëder, Rhombendodekaëder, Tetrakishexaëder) liegen aber die Normalen der Flächen in den H.-S.-E.n selbst und daher zugleich in dem einen und in dem benachbarten Oktanten; eine Verschiedenheit dieser beiden Oktanten ist demzufolge hier auf die Normalen ohne geometrischen Einfluss, und die zu solchen Normalen gehörigen Flächen werden scheinbar ebenso auftreten, wie in der holoëdrischen Abtheilung. Die Würfelfläche z. B. deckt gleichzeitig vier Oktanten, also kann eine abwechselnde Verschiedenheit der letzteren für die Ausbildung der Würfelfläche keine Veränderung im Gefolge haben.

Bei dem Oktaëder wird derjenige sechszählige Flächencomplex (§ 49, 1), um dessen abwechselndes Verschwinden es sich bei dem Achtundvierzigflächner auf dem Gebiet der tetraëdrischen Hemiëdrie handelt, vollgültig durch die einzelne Fläche repräsentirt. Das Oktaëder wird daher zufolge dieser Modalität hemiëdrisch, indem man seine vier abwechselnden Flächen vergrößert, wobei dann die übrigen zum Verschwinden gelangen (Fig. 49). Es entstehen so aus demselben zwei Tetraëder (Fig. 50 und 51).

Das Tetraëder ist eine von 4 gleichseitigen Dreiecken umschlossene Form mit 6 gleichen Kanten B' , deren Winkelmaass $70^\circ 31' 44''$, und mit 4 dreiflächigen (trigonalen) Ecken. Die krystallographischen Axen verbinden die Mittelpunkte je

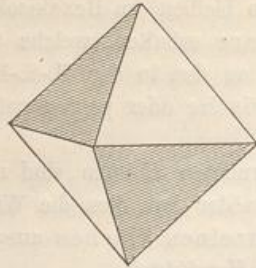


Fig. 49.

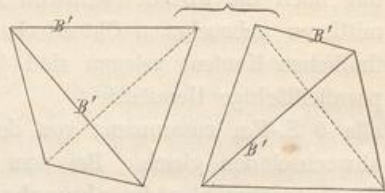


Fig. 50.

Fig. 51.

zweier gegenüberliegender Kanten. Das Zeichen kann in Folge der Ableitung aus dem Oktaëder $\frac{0}{2}$ geschrieben werden und die beiden, durch ihre Stellung verschiedenen, ausserdem aber völlig gleichen Tetraëder, welche durch alleinige Ausbildung bald der einen bald der anderen Hälfte der Flächen entstehen, werden als das positive und das negative unterschieden. — Fahlerz, Boracit, Helvin, Diamant. — *Miller* bildet das Zeichen der tetraëdrisch-hemiëdrischen Form, indem er dem Symbol $\{hkl\}$ ein α (als Abkürzung von $\alpha\lambda\nu\sigma\varsigma$, geneigt) vorsetzt. Die beiden correlaten Tetraëder sind daher $\alpha\{111\}$ und $\alpha\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$. Ist der hemiëdrische Charakter selbstverständlich, so wird α auch wohl weggelassen.

Wird der Würfel der in Rede stehenden Hemiëdrie unterworfen, so erleidet derselbe zufolge der oben angestellten Erwägung keine wirkliche Gestaltsveränderung, sondern erscheint gerade so, als ob er holoëdrisch geblieben wäre, ob schon auch an ihm die Hälfte der Flächen als verschwunden gelten muss. Dies wird ebenfalls einleuchtend, wenn man sich den Würfel durch angemessene Feldereintheilung seiner Flächen in einen Quasi-Achtundvierzigflächner verwandelt denkt, und dann auch für ihn genau das Gesetz dieser Hemiëdrie zur Verwirklichung bringt. Ebenso liefern auch das Rhombendodekaëder und die Pyramidenwürfel keine neuen Gestalten.

In nachstehenden drei Figuren stellen die schwarzen Theile diejenigen Flächenfelder vor, welche eigentlich als verschwunden zu denken, während die weiss ge-



$$\frac{\infty 0 \infty}{2}$$

Fig. 52.



$$\frac{\infty 0}{2}$$

Fig. 53.



$$\frac{\infty 0 n}{2}$$

Fig. 54.

lassenen Flächenfelder die wirklich rückständigen sind. Da nun aber jedes verschwindende Flächenfeld mit einem bleibenden Flächenfeld in eine Ebene fällt, so wird in

der geometrischen Erscheinungsweise dieser Formen gar nichts geändert werden, obgleich die Bedeutung ihrer Flächen eine ganz andere ist. Im Hexaëder z. B. besteht streng genommen jede Fläche nur noch aus zweien, an einer Diagonale anliegenden quadratischen Feldern, welche sich aber, weil sie in eine Ebene fallen, zur vollständigen Hexaëderfläche ausdehnen; und auf ähnliche Weise verhält es sich im Rhombendodekaëder und Tetrakishexaëder. Diese drei Formen sind also da, wo sie zugleich mit Tetraëdern vorkommen, wenn auch nicht ihrem Aussehen, so doch ihrem Wesen nach als hemiëdrische Formen zu deuten. Gegenüber den wirklich holoëdrischen Formen sind auch bei ihnen die Symmetrieverhältnisse in derselben Weise reducirt, wie es bei dem Tetraëder und den anderen hier neu entstehenden Formen der Fall. Während die Flächen des holoëdrischen Würfels tetrasymmetrisch sind (S. 17), sind diejenigen des hemiëdrischen nur disymmetrisch nach den Diagonalen des Quadrats, wie sich dies auch in der Oberflächenstreifung (vgl. § 64) ausspricht. Naumann hat diese nun allgemein angenommene Anschauungsweise schon seit dem Jahre 1830 geltend gemacht.

Bei den Ikositetraëdern mOm kommen die abwechselnden dreizähligen, über den Flächen des eingeschriebenen Oktaëders gelegenen Flächengruppen zum Verschwinden, die übrigen dazwischen liegenden dehnen sich bis zur gegenseitigen Durchschneidung aus (Fig. 55). Als Hälftflächner entstehen so die Trigondodekaëder (Pyramidentetraëder,

Triakistetraëder), deren Zeichen daher $\frac{mOm}{2}$ oder auch $-\frac{mOm}{2}$ sein wird, entsprechend $x\{hkk\}$ und $x\{h\bar{k}k\}$.

Es sind von 12 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren allgemeine Gestalt zwischen jener des Tetraëders und Hexaëders schwankt, jedoch so, dass stets die Kanten der ersteren, aber niemals die Kanten der letzteren Grenzform hervortreten. Die Gestalt ist gleichsam ein Tetraëder, welches auf jeder seiner 4 Flächen eine dreiseitige Pyramide trägt. Je flacher dieselbe ist (Fig. 56), desto mehr nähert sich die Form einem Tetraëder, je steiler (Fig. 58), desto mehr einem Hexaëder. — Von

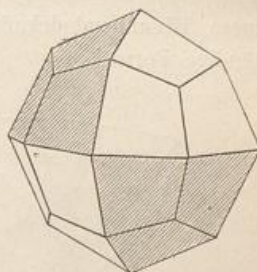


Fig. 55.

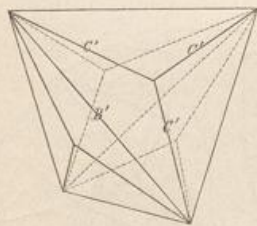


Fig. 56.

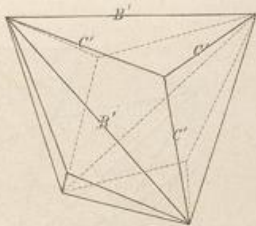


Fig. 57.

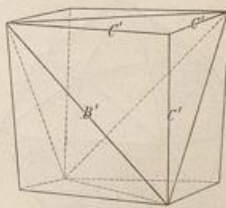


Fig. 58.

den Kanten entsprechen 6 längere (B') den Kanten des Tetraëders und liegen 12 kürzere (C') zu je drei über den Flächen des eingeschriebenen Tetraëders; die Ecken sind gleichfalls zweierlei: 4 sechsflächige, und 4 dreiflächige (trigonale) Ecken. Die krystallographischen Axen verbinden die Mittelpunkte je zweier gegenüberliegender längerer (Tetraëder-) Kanten. — Fahlerz, Kieselwismut.

Die Triakisoktaeder mO liefern, nach den in den abwechselnden Oktanten gelegenen dreizähligen Flächensystemen (Fig. 59) hemiëdrisch werdend, die Deltoiddodekaeder, welche demgemäss das Zeichen $\frac{mO}{2}$ oder $-\frac{mO}{2}$ erhalten, entsprechend $\alpha\{hhl\}$ und $\alpha\{\bar{h}\bar{h}l\}$. Dieselben sind von 12 Deltoiden umschlossene

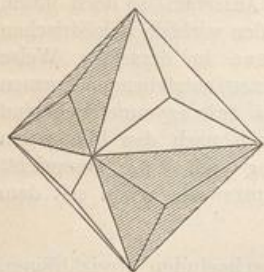


Fig. 59.

Formen, deren allgemeine Gestalt zwischen jener des Tetraëders und Rhombendodekaëders schwankt, ohne dass jedoch die Kanten einer dieser Grenzformen jemals hervortreten können (Fig. 60, 61, 62). — Von den Kanten liegen 12 längere (B') paarweise über den Kanten, und 12 kürzere (A') zu drei über den Flächen des eingeschriebenen Tetraëders. Die Ecken sind dreierlei: 6 vierflächige (rhombische) Ecken, 4 spitzere, und 4 stumpfere dreiflächige (trigonale) Ecken. Die krystallographischen Axen verbinden je zwei gegenüberliegende rhombische Ecken. Je stumpfer letztere (Fig. 60) sind,

desto mehr nähert sich die Form einem Tetraëder, je spitzer (Fig. 62), desto mehr einem Rhombendodekaëder. — Fahlerz, Weissgültigerz, doch nicht als selbständige Form.

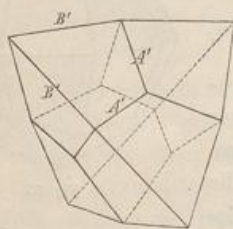


Fig. 60.

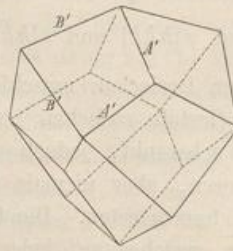


Fig. 61.

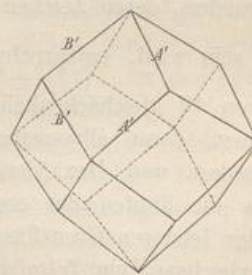


Fig. 62.

Bei den Hexakisoktaedern mOn sind es die in den abwechselnden Oktanten gelegenen sechszähligen Flächensysteme (Fig. 63), nach welchen diese

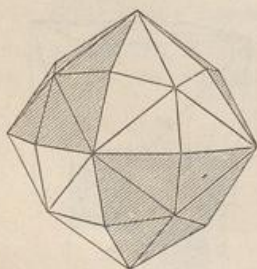


Fig. 63.

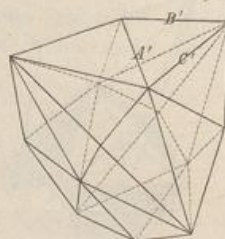


Fig. 64.

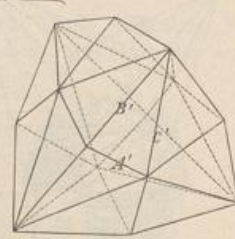


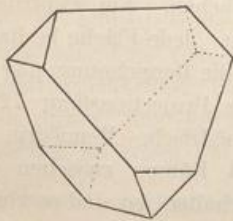
Fig. 65.

Hemiëdrie erfolgt; alsdann gehen aus ihnen die mit $\frac{mOn}{2}$ oder $-\frac{mOn}{2}$ zu bezeichnenden Hexakistetraëder (Fig. 64, 65) hervor, $\alpha\{hkl\}$ und $\alpha\{\bar{h}\bar{k}l\}$. Dieselben sind von 24 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Formen, deren allgemeine

Gestalt bald einer der drei vorhergehenden hemiëdrischen Formen, bald auch dem Rhombendodekaëder, dem Hexaëder oder dem Tetrakishehexaëder genähert sein kann; doch gruppieren sich die Flächen am häufigsten in 4 sechszählige Systeme. — Die Kanten sind dreierlei: 12 mittlere B' , paarweise über den Kanten, 12 längere C' , und 12 kürzere A' , zu je dreien über den Flächen des eingeschriebenen Tetraëders. Die Ecken sind gleichfalls dreierlei: 6 vierflächige (rhombische), 4 spitzere, und 4 stumpfere sechsfächige Ecken. Die krystallographischen Axen verbinden je zwei gegenüberliegende rhombische Ecken. — Diamant, Boracit, Fahlerz; jedoch an letzteren beiden nicht selbständig.

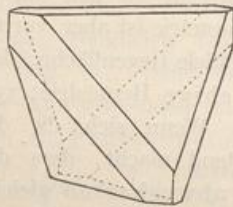
Das Hexakistetraëder (vgl. auch die Projection in Fig. 48) ist die allgemeinste Gestalt dieser Hemiëdrie, in dessen Symbol alle anderen, einschliesslich des hemiëdrischen Hexaëders, Rhombendodekaëders und Pyramidenwürfels als Specialfälle enthalten sind. Werden die Kanten $A' = 180^\circ$, so geht ein Pyramidentetraëder hervor; bei $C' = 180^\circ$ ein Deltoiddodekaëder; bei A' und $C' = 180^\circ$ ein Tetraëder.

Combinationen. Tetraëdrisch-hemiëdrische Formen können nur mit solchen desselben Charakters Combinationen bilden. Wenn also in letzteren ein Würfel,



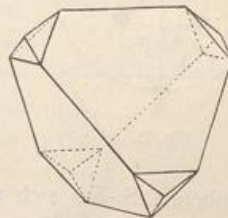
$$\frac{0}{2} \cdot \frac{0}{2}$$

Fig. 66.



$$\frac{0}{2} \cdot \infty 0 \infty$$

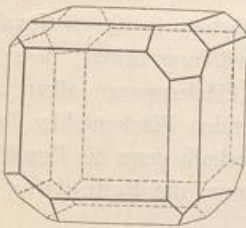
Fig. 67.



$$\frac{0}{2} \cdot \infty 0$$

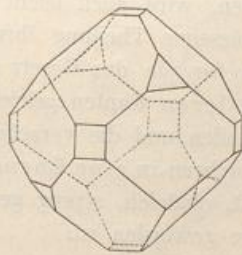
Fig. 68.

Rhombendodekaëder, Pyramidenwürfel auftritt, so sind diese Formen tetraëdrisch-hemiëdrischer Natur; kommt scheinbar ein Oktaëder vor, so muss es als Combination zweier Tetraëder (Fig. 66) gelten, welche im Gleichgewicht stehen.



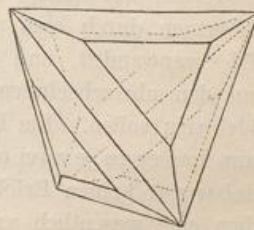
$$\infty 0 \infty \cdot \frac{0}{2} \cdot \infty 0$$

Fig. 69.



$$\infty 0 \cdot \frac{0}{2} \cdot \infty 0 \infty$$

Fig. 70.



$$\frac{202}{2} \cdot \frac{0}{2}$$

Fig. 71.

In diesen Combinationen erscheint gewöhnlich das Tetraëder, oder das Rhombendodekaëder, oder auch das Hexaëder, selten ein Trigondodekaëder als vorherrschende Form. Das Tetraëder erleidet durch die Flächen seines Gegen-

körpers eine Abstumpfung der Ecken, durch die Flächen des (hemiëdrischen) Hexaëders eine Abstumpfung der Kanten, durch die Flächen des (hemiëdrischen) Rhombendodekaëders eine dreiflächige, auf die Flächen aufgesetzte Zuspitzung der Ecken, wobei die zuspitzenden Flächen mit einander Winkel von 120° bilden.

Das Rhombendodekaëder erleidet durch die Flächen des Tetraëders eine Abstumpfung der abwechselnden trigonalen Ecken, das Hexaëder durch dieselbe Form eine Abstumpfung seiner abwechselnden Ecken¹⁾, und jedes Trigondodekaëder durch das Tetraëder von gleicher Stellung eine Abstumpfung der trigonalen Pyramidenecken (Fig. 71).

§ 24. Die dodekaëdrische Hemiëdrie. Bei ihr sind die Formen nicht mehr nach den 6 gewöhnlichen S.-E.n symmetrisch, sondern nur noch nach den Würfelflächen (welche aber hier keine H.-S.-E.n mehr darstellen); sonst besitzen die Formen, wie die tetraëdrisch-hemiëdrischen 3 zweizählige S.-A.n, senkrecht zu einander und zu den Würfelflächen (die krystallographischen Hauptaxen), sowie 4 dreizählige S.-A.n, senkrecht zu den Oktaëderflächen. Ein Centrum der Symmetrie ist aber vorhanden. Jede Fläche besitzt eine parallele Gegenfläche, daher die Bezeichnung parallelflächige Hemiëdrie; vgl. die Projectionsfigur 72.

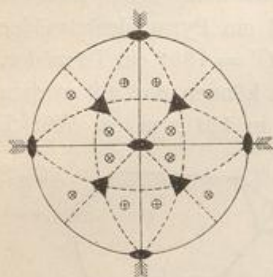


Fig. 72.

Wenn sich die dodekaëdrische Hemiëdrie darin geltend macht, dass die 24 Räume zwischen den 6 gewöhnlichen S.-E.n sich nur abwechselnd gleich verhalten, so sind es von allen holoëdrisch-regulären Formen bloß die Tetrakishexaëder und die Hexakisoktaëder, bei welchen die Normalen der Flächen in diese Räume fallen und daher geschieht es, dass auch nur diese beiden in Folge solcher Hemiëdrie ihre Gestalt verändern, die fünf anderen Formen aber dabei in geometrischer Hinsicht anscheinend unverändert bleiben.

Dass das Hexaëder, das Oktaëder, das Rhombendodekaëder, die Triakisoktaëder und Ikositetraëder, wenn sie dieser Hemiëdrie unterliegen, demnach keine wesentliche Gestaltsveränderung erleiden, wird auch leicht eingesehen, indem man diese fünf Formen durch eine angemessene Theilung ihrer Flächen in Quasi-Hexakisoktaëder verwandelt, und dann für sie das Gesetz in Erfüllung bringt, dass nur die an den abwechselnden mittleren Kanten gelegenen Flächenpaare allein ausgebildet sein sollen. Die bleibenden und die verschwindenden Flächenfelder fallen alsdann immer zu je zwei oder mehreren in eine Ebene, weshalb denn die Hemiëdrie scheinbar gar keinen Erfolg hat, obgleich, streng genommen, die Bedeutung der Flächen eine wesentlich andere geworden ist.

In nachstehenden Figuren entsprechen die weiss gelassenen Flächenfelder den bleibenden, die schwarzen Flächenfelder dagegen denjenigen Flächenpaaren, welche eigentlich als verschwunden zu denken sind. Es ist augenscheinlich, dass z. B. bei dem so nach der dodekaëdrischen Hemiëdrie hälftflächig gewordenen Würfel die Begren-

¹⁾ Daraus ergibt sich auch, dass dieses Hexaëder, ungeachtet seines Aussehens, nicht holoëdrisch und nicht mehr zu seinen eigenen Flächen symmetrisch ist, denn sonst müssten alle seine Ecken als gleichwerthig auch gleichmässig abgestumpft werden.

zungselemente eine ganz andere Bedeutung besitzen, als bei dem ebenfalls scheinbar holoëdrischen, welcher (vgl. Fig. 52) das Resultat der tetraëdrischen Hemiëdrie ist. Die Flächen des Würfels sind hier disymmetrisch nach den Seiten des Quadrats, wie

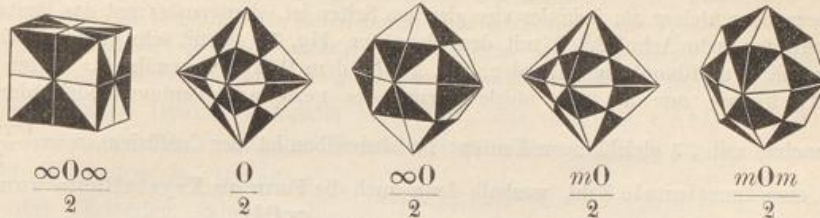


Fig. 73.

sich dies auch in der Oberflächenstreifung (§ 64) kund gibt. Das Oktaëder, welches in der tetraëdrischen Abtheilung als solches nicht existirt, tritt also hier als vollgültiges Mitglied auf, aber seine Flächen sind asymmetrisch.

Bei den Tetrakishexaëdern $\infty 0 n$ sind die einzelnen Flächen das vollgültige Aequivalent derjenigen an den mittleren Kanten gelegenen Flächenpaare, um deren abwechselndes Wachsen und Verschwinden es sich auf dem Gebiete dieser Hemiëdrie bei dem Achtundvierzigflächner handelt (Fig. 74). Sind die Tetrakishexaëder nur mit ihren abwechselnden Flächen ausgebildet, so gehen aus ihnen die Pentagondodekaëder hervor, welche daher allgemein mit $\frac{\infty 0 n}{2}$ bezeichnet werden. Die Pentagondodekaëder sind von 12 symmetrischen Pentagonen umschlossen, d. h. von Fünfecken, welche 4 gleiche Seiten und 2 Paare gleicher Winkel haben. Die allgemeine Gestalt der Formen schwankt zwischen jener des Hexaëders und des Rhombendodekaëders, ohne dass jedoch die Kanten einer dieser beiden Grenzformen jemals hervortreten könnten.

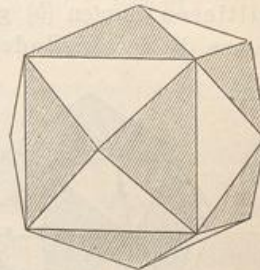


Fig. 74.

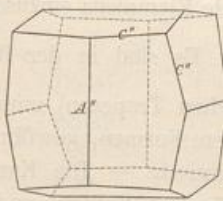


Fig. 75.

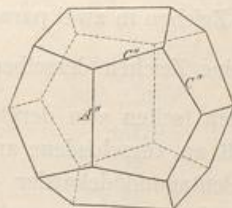


Fig. 76.

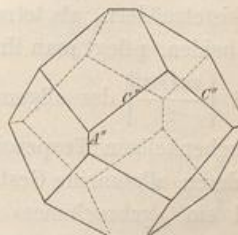


Fig. 77.

Die Kanten sind zweierlei: 6 regelmässige, die abweichend langen Seiten der Pentagone repräsentirende, meist längere (selten kürzere) Kanten A'' , welche über den Flächen, und 24 unregelmässige, meist kürzere (selten längere) Kanten C'' , welche, die gleichen Pentagonseiten darstellend, gewöhnlich paarweise über den Kanten des eingeschriebenen Hexaëders liegen. Auch die Ecken sind zweierlei: 8 gleichkantig-dreiflächige (trigonale) und 12 ungleichkantig-dreiflächige (unregel-

mässige) Ecken. Die krystallographischen Axen verbinden die Mittelpunkte je zweier gegenüberliegender regelmässiger Kanten. — Eisenkies, Kobaltglanz.

Je nachdem in den Pentagonen die einzelne, abweichend lange Seite entweder grösser oder kleiner als jede der vier gleichen Seiten ist, demgemäss hat das Pentagonododekaëder mehr Aehnlichkeit mit dem Hexaëder, Fig. 75 (n mit sehr grossem Werth), oder mit dem Rhombendodekaëder, Fig. 77 (n dem Werth 1 genähert). Mitten inne steht, freilich nur als eine ideale Form, das reguläre Pentagonododekaëder der

Geometrie mit 30 gleichlangen Kanten; bei demselben ist der Coëfficient $n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, also eine irrationale Zahl, weshalb denn auch die Form als Krystallform unmöglich ist (§ 40, S. 20); sehr nahe würde die Varietät $\frac{\infty 0 \frac{3}{2}}{2}$ kommen. Die gewöhnlichste Varietät $\frac{\infty 0 2}{2}$ findet sich am Eisenkies oder Pyrit gar häufig ausgebildet und wird daher auch Pyritoëder genannt (Fig. 76).

Miller setzt hier vor das Symbol $\{hkl\}$ ein π (als Abkürzung von $\pi\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\omicron\varsigma$); das positive Pentagonododekaëder = $\pi\{hkl\}$, das negative = $\pi\{khl\}$.

Werden die Hexakisoktaëder mOn nach denen an den abwechselnden mittleren Kanten (b) gelegenen Flächenpaaren (Fig. 78) hemiëdrisch, so gehen daraus die Dyakisdodekaëder (oder Diploëder) hervor (Fig. 79, 80); um sie von

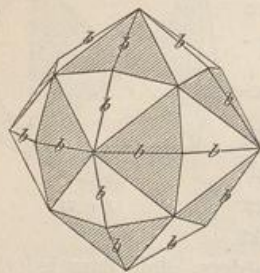


Fig. 78.

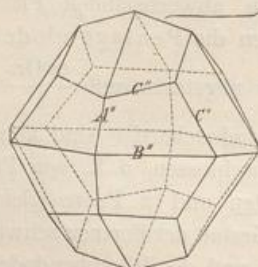


Fig. 79.

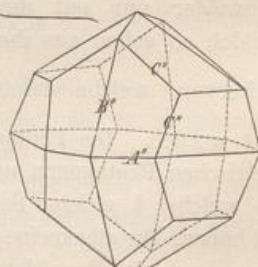


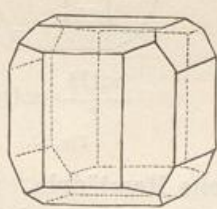
Fig. 80.

den Hexakistetraëdern, als tetraëdrisch-hemiëdrischen Formen derselben Stammform zu unterscheiden, pflegt man ihr Zeichen in zwei parallele Klammern einzuschliessen; sonach ist $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ das allgemeine Zeichen derselben. Es sind in der Regel von 24 gleichschenkeligen Trapezoiden (selten von dergleichen Trapezen) umschlossene Formen, deren allgemeine Gestalt an verschiedene andere Formen, gewöhnlich aber an irgend ein »gebrochenes« Pentagonododekaëder erinnert. — Die Kanten sind dreierlei: 12 kürzeste A'' , paarweise über den regelmässigen Kanten, und 12 längere B'' , einzeln über den Flächen des eingeschriebenen Pentagonododekaëders, sowie 24 mittlere, unregelmässige Kanten C'' , welche eine den unregelmässigen Kanten desselben Dodekaëders nahe kommende Lage haben. Die Ecken sind gleichfalls dreierlei: 6 gleichwinkelig-vierflächige (rhombische), 8 dreiflächige (trigonale) und 12 ungleichwinkelig-vierflächige (unregelmässige) Ecken. Die krystallographischen Axen verbinden je zwei gegenüberliegende rhombische Ecken. — Eisenkies (an ihm bisweilen selbständig), Kobaltglanz.

Am häufigsten kommen vor $\left[\frac{30\frac{3}{2}}{2}\right]$, $\left[\frac{402}{2}\right]$ und $\left[\frac{50\frac{5}{2}}{2}\right]$. Sind die Flächen Trapeze, so wird jede Kante C'' der gegenüberliegenden Kante B'' parallel, weshalb denn in jedem eine längste Kante bildenden Flächenpaare drei parallele Kanten hervortreten; diese auffallende Erscheinung rechtfertigt für solche Varietäten den Namen parallelkantige Dyakisdodekaëder, für welche die allgemeine Bedingung gilt: $m = n^2$; die zweite der oben aufgeführten Varietäten ist daher parallelkantig.

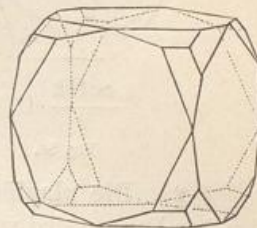
Das positive Dyakisdodekaëder ist $\pi\{hkl\}$, das negative $\pi\{khl\}$.

Combinationen. In den dodekaëdrisch-hemiëdrischen Combinationen erscheint gewöhnlich das Hexaëder, oder das Oktaëder, oder auch das Pentagondodekaëder als vorherrschende Form. Das Hexaëder erfährt durch die Flächen eines jeden Pentagondodekaëders (gewöhnlich der Varietät $\frac{\infty 02}{2}$)



$$\infty 0\infty \cdot \frac{\infty 02}{2}$$

Fig. 81.

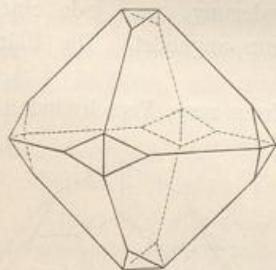


$$\infty 0\infty \cdot \left[\frac{402}{2}\right]$$

Fig. 82.

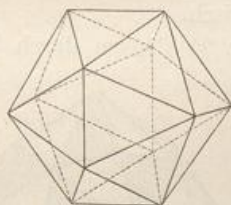
eine unsymmetrische Abstumpfung seiner Kanten (Gegensatz zur Combination mit dem Rhombendodekaëder, Fig. 33) und durch jedes Dyakisdodekaëder eine unsymmetrische dreiflächige Zuspitzung seiner Ecken.

Das Oktaëder erleidet durch die Flächen eines jeden Pentagondodekaëders, meist der Varietät $\frac{\infty 02}{2}$, eine Zuschärfung, durch jedes Dyakisdodekaëder eine vierflächige Zuspitzung seiner Ecken, wobei sowohl jene Zuschärfungs- als diese



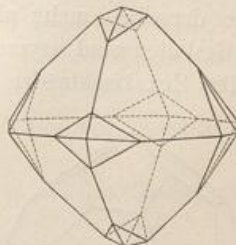
$$0 \cdot \frac{\infty 02}{2}$$

Fig. 83.



$$0 \cdot \frac{\infty 02}{2}$$

Fig. 84.



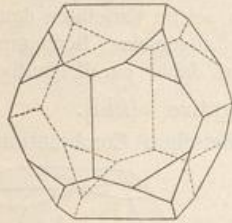
$$0 \cdot \left[\frac{30\frac{3}{2}}{2}\right]$$

Fig. 85.

Zuspitzungsflächen (die letzteren paarweise) auf zwei gegenüberliegende Kanten aufgesetzt sind. Stehen die Flächen des Oktaëders und Pentagondodekaëders im Gleichgewicht, so erscheint die Combination ähnlich dem Ikosaëder der Geometrie; Fig. 84.

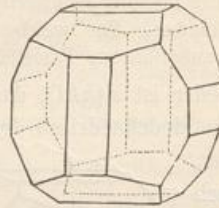
Das Pentagondodekaëder $\frac{\infty 02}{2}$ erfährt durch die Flächen des Oktaëders eine Abstumpfung seiner trigonalen Ecken, durch die Flächen des Hexaëders eine

Abstumpfung seiner regelmässigen Kanten, und durch die Flächen gewisser, in gleicher Stellung befindlicher Dyakisidodekaëder eine regelmässige dreiflächige, auf die Flächen aufgesetzte Zuspitzung seiner trigonalen Ecken.



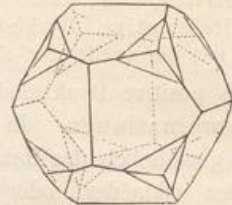
$$\frac{\infty 02}{2} \cdot 0.$$

Fig. 86.



$$\frac{\infty 02}{2} \cdot \infty 0 \infty.$$

Fig. 87.



$$\frac{\infty 02}{2} \cdot \left[\frac{30}{2} \right].$$

Fig. 88.

§ 22. Die **plagiëdrische Hemiëdrie**. Die sämtlichen 9 S.-E.n der holoëdrischen Formen sind verloren gegangen, weshalb die dieser Hemiëdrie angehörigen

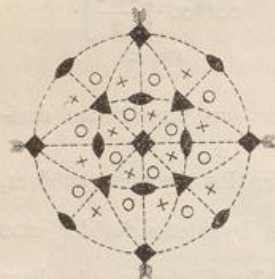


Fig. 89.

Formen überhaupt keine S.-E. mehr besitzen. Es existiren von S.-A.n 3 vierzählige senkrecht zu den Würfel-
flächen, 4 dreizählige senkrecht zu den Oktaëderflächen
und 6 zweizählige senkrecht zu den Rhombendodekaëder-
flächen (also dieselben wie bei den regulären Holoëdern);
ein Centrum der Symmetrie fehlt; vgl. Fig. 89. — Nur
bei den Hexakisoktaëdern fallen die Normalen der
Flächen in die 48 Räume zwischen den 9 S.-E.n und
blos bei ihnen hat daher diese Hemiëdrie eine morpho-
logische Wirkung. Alle übrigen 6 vollflächigen Formen
erleiden keine Gestaltsveränderung, weil jede einzelne

Fläche derselben mehr als nur einem jener 48 Räume angehört. Die Flächen
aller Gestalten sind asymmetrisch.

Die Hexakisoktaëder (Fig. 91) liefern durch Wachsen resp. Verschwinden der

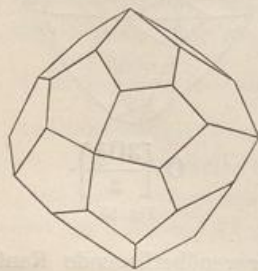


Fig. 90.

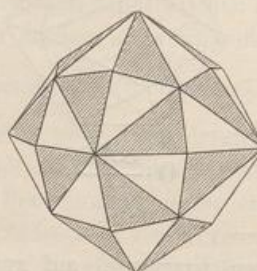


Fig. 91.

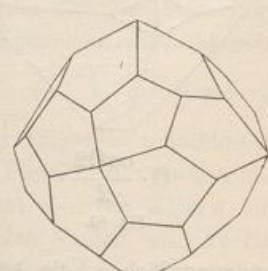


Fig. 92.

einzelnen abwechselnden Flächen als neue eigenthümliche Formen die **Pentagon-
Ikositetraëder**⁴⁾, begrenzt von 24 ungleichseitigen Fünfecken (Fig. 90 und 92).

⁴⁾ Der Name ist dadurch gerechtfertigt, dass die übrigen Vierundzwanzigflächner theils (Tetrakishexaëder, Triakisoktaëder, Hexakisoktaëder) von Dreiecken, theils (Ikositetraëder, Dyakisidodekaëder) von Vierecken begrenzt werden.

Die zwei correlaten Ikositetraëder dieser Art, welche aus einem und demselben Hexakisoktaëder hervorgehen, sind enantiomorph (S. 29); sie haben in Folge der Abwesenheit von S.-E.n die Eigenschaft, dass sie sich — bei übrigens völlig gleichen Begrenzungselementen — zu einander als ein rechts und als ein links gebildeter Körper verhalten, welche durch keine Aenderung der Stellung des einen zur Congruenz gebracht werden können; die eine Gestalt ist gewissermassen das Spiegelbild der anderen.

Fig. 90 ist ein linkes, Fig. 92 ein rechtes Hemiëder, das erstere $\frac{mOn}{2}l$, das letztere $\frac{mOn}{2}r$, weil von den beiden obersten Flächen im vorderen oberen rechten Oktanten des Hexakisoktaëders Fig. 91 sich die links gelegene schraffierte in Fig. 90, die rechts gelegene unschraffierte in Fig. 92 wiederfindet. — *Miller* setzt zur Bezeichnung vor das holoëdrische Symbol ein γ (von γῆρας, gebogen); das linke ist $\gamma\{hkl\}$, das rechte $\gamma\{khl\}$.

Früher war diese Art der Hemiëdrie nur als möglich bekannt, indem eine derselben wirklich folgende krystallisierte Substanz nicht beobachtet war. 1882 wies indessen *Tschermak* nach, dass an den Krystallen des Chlorammoniums in der That plagiëdrisch-hemiëdrische Pentagon-Ikositetraëder auftreten, insbesondere $\frac{3}{2}0\frac{3}{2}$ zur Hälfte = $\gamma\{875\}$. Zuzufolge *Miers* kommt auch am cornischen Rothkupfererz selten und untergeordnet das Pentagon-Ikositetraëder $\frac{3}{2}0\frac{3}{2}$ = $\gamma\{896\}$ vor. — Der in der Natur immer scheinbar holoëdrisch als die Combination $\infty 0 \infty . 0$ ausgebildete Sylvin (Chlorkalium) ist ebenfalls plagiëdrisch, wie die von *Brauns* 1886 daran beobachteten Aetzfiguren erweisen, welche auf den Würfelflächen die Gestalt einer vertieften tetragonalen Pyramide besitzen, die aber nicht mit den Würfelkanten parallel, sondern unsymmetrisch gegen dieselben gedreht ist; die häufigsten Aetzfiguren gehören dem rechten Pentagon-Ikositetraëder $\frac{903}{2}r$ = $\gamma\{391\}$ an.

§ 23. Die Tetartoëdrie im regulären System. Dabei handelt es sich nach S. 30 um die Erscheinung, dass die nach einer Modalität der Hemiëdrie hervorgebrachten Formen noch einmal nach einer anderen Hemiëdriemodalität in zwei Hälften zerfallen, das Holoëder also 4 Viertelflächner liefern würde. Aus den tetraëdrisch-hemiëdrischen Formen können noch die vorhandenen 6 gewöhnlichen S.-E.n austreten, aus den dodekaëdrisch-hemiëdrischen noch die 3 rechtwinkelig auf einander stehenden S.-E.n verloren gehen.

Wird die allgemeinste Gestalt des regulären Systems, das Hexakisoktaëder, der Tetartoëdrie unterworfen, so kann dies geschehen durch Anwendung:

der tetraëdrischen Hemiëdrie auf die dodekaëdrisch-hemiëdrische Form: das Dya-kisdodekaëder ist nur mit seinen in den abwechselnden Oktanten liegenden Flächen ausgebildet; oder

der plagiëdrischen Hemiëdrie auf die tetraëdrisch-hemiëdrische Form: das Hexakisoktaëder ist nur mit den abwechselnden einzelnen Flächen ausgebildet.

Ferner könnte auch das Pentagon-Ikositetraëder nur mit den in den abwechselnden Oktanten gelegenen dreizähligen Flächengruppen ausgebildet sein. — Alle drei hemiëdrischen Formen des Hexakisoktaëders liefern dabei immer ein und dieselbe tetartoëdrische Form, die tetraëdrischen Pentagondodekaëder (Fig. 93 und 94), begrenzt von 12 unsymmetrischen Pentagonen, welche zwei Paare gleicher Seiten, aber lauter verschiedene Winkel haben; es sind enantiomorphe Formen (§ 13) ohne S.-E. und ohne Centrum der Symmetrie; es existiren noch 3 gleichwerthige zu einander senkrechte zweizählige und 4 dreizählige S.-A.n von polarer Ausbildung

(vgl. Fig. 95); diese letzteren Symmetrie-Elemente sind daher hier andere als bei der ebenfalls einer S.-E. und eines Centrums der Symmetrie entbehrenden plagi-
 -drischen Hemiëdrie. Der Kanten sind 30 von dreierlei Art. Da jedes Hexakisok-
 taëder als holoëdrische Stammform vier solche Pentagondodekaëder liefert, so wird es

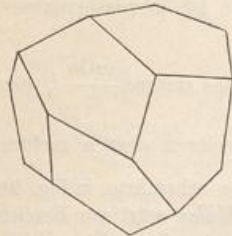


Fig. 93.

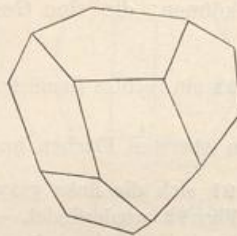


Fig. 94.

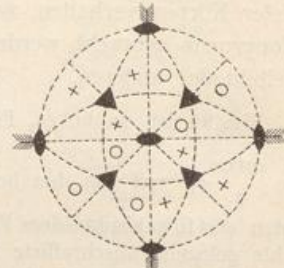


Fig. 95.

darunter zwei rechts und zwei links gebildete geben, von denen zwar je zwei gleichnamige durch bloße Stellungsänderung zur Congruenz gebracht werden können, während dies für je zwei ungleichnamige ganz unmöglich ist. Fig. 93 ist ein rechtes, Fig. 94 ein linkes.

Wenn nun auch die übrigen holoëdrischen regulären Formen von diesem Bildungs-
 gesetz ergriffen und zu tetartoëdrischen umgestaltet werden, so entfernen sich vier
 derselben äusserlich nicht von den hemiëdrischen, indem sich

- das Oktaëder in ein Tetraëder,
- die Tetrakishexaëder in Pentagondodekaëder,
- die Triakisoktaëder in Deltoiddodekaëder,
- die Ikositetraëder in Trigondodekaëder

verwandeln, während das Hexaëder und Rhombendodekaëder auch hier scheinbar ihre holoëdrische Gestalt unverändert beibehalten. Es stellt sich also die merkwürdige Thatsache heraus, dass das Tetraëder und das Pentagondodekaëder, welche, durch verschiedene Modalitäten der Hemiëdrie erzeugt, sich bei einer hemiëdrisch krystallisirenden Substanz durchaus gegenseitig ausschliessen und unmöglich machen (vgl. S. 30), auf dem Gebiete der Tetartoëdrie beide zugleich zum Vorschein kommen und hier nothwendig coëxistiren und zusammengehören¹⁾.

Deutlich tetartoëdrisch-reguläre Entwicklung zeigt unter den natürlichen Mineralien zufolge *Luedcke* der Langbeinit, welcher tetraëdrisch- und dodekaëdrisch-hemiëdrisch erscheinende Formen an sich vereinigt; ferner gehört hierher der Ullmannit, insofern seine Krystalle bei übereinstimmender chemischer Zusammensetzung theils pentagondodekaëdrisch, theils tetraëdrisch ausgebildet sind. Unter den künstlich in Krystallen erhaltenen Substanzen erweisen sich als tetartoëdrisch-regulär chlores Natrium, Nitrate von Blei, Strontium, Baryum. Die in der Natur vorkommenden Krystalle des salpetersauren Baryums besitzen die Form eines Oktaëders, welches daher als Combination zweier Tetraëder von tetartoëdrischem Charakter aufgefasst werden muss.

¹⁾ Die Unmöglichkeit des Zusammenvorkommens von tetraëdrisch- und dodekaëdrisch-hemiëdrischen Formen an einem und demselben Krystall schien durch die Combinationen des chlores Natriums und einiger anderer Salze widerlegt zu werden, an welchen das Tetraëder zugleich mit dem Pentagondodekaëder erscheint. *Naumann* hat jedoch 1835 gezeigt, dass diese Combinationen nicht als eine Mesalliance der beiderseitigen Hemiëdrien, überhaupt nicht als hemiëdrische, sondern als tetartoëdrische aufzufassen sind, und dass die Coëxistenz von Tetraëdern und Pentagondodekaëdern eine nothwendige Folge der Tetartoëdrie ist. *Baumhauer* wies auch später durch die auf den Tetraëderflächen des chlores Natriums erzeugten Aetzeindrücke nach, dass diese Flächen nicht hemiëdrischer, sondern tetartoëdrischer Natur sind. Vgl. auch die Untersuchungen über die tetartoëdrisch-regulären Nitrate von Blei, Baryum, Strontium von *L. Wulff* in Z. f. Kr. IV. 1880. 122.

Aus Vorstehendem ergibt sich, dass wenn eine regulär krystallisirte Substanz nur im Hexaëder oder Rhombendodekaëder bekannt ist, diese Form an sich keinen Aufschluss darüber gewährt, ob die Substanz holoëdrisch ist, oder einer der 3 Hemiëdrie-Abtheilungen angehört, oder als tetartoëdrisch gelten muss. Gestalt und Stellung der Aetzfiguren, das elektrische Verhalten, das Auftreten der Circularpolarisation können alsdann eine Unterscheidung ermöglichen.

Eine Hemimorphie ist im regulären System ausgeschlossen, weil eine S.-A. von singulärem Charakter nicht existirt.

2. Tetragonales Krystallsystem.

§ 24. **Grundcharakter.** Das tetragonale System (früher quadratisches oder viergliedriges genannt) hat mit dem regulären System die Dreizahl und Rechtwinkeligkeit der krystallographischen Axen gemein, unterscheidet sich aber durch das Grössenverhältniss derselben, indem gegen zwei gleiche Axen a eine ungleiche Axe c vorhanden ist. Diese letztere beherrscht die Symmetrie aller Formen und wird in eine senkrechte Stellung gebracht. Man nennt die Endpunkte dieser verticalen Axe Pole, und die von solchen auslaufenden Kanten Polkanten, die in sie fallenden Ecken Polecken. Von den beiden gleichwerthigen horizontalen Axen a pflegt man die eine auf den Beobachter zulaufend, die andere quer zu richten. Die zwei Linien, welche ihre rechten Durchkreuzungswinkel halbiren, heissen die Zwischenaxen. — Die Formen des tetragonalen Systems besitzen einen sogenannten wirtelförmigen Bau, indem ihre Flächen gleichmässig um die Verticalaxe gruppiert sind. — Der Name Tetragonalsystem bezieht sich auf die, meist quadratische oder tetragonale Figur der durch die Horizontalaxen gelegten Ebene.

§ 25. Beschreibung und Ableitung der holoëdrisch-tetragonalen Formen.

Dieselben besitzen nur eine H.-S.-E., nämlich die als Basis bezeichnete Ebene durch die beiden horizontalen Axen a ; demgemäss hat die auf der letzteren senkrecht stehende Verticalaxe c hier den Charakter einer (nur einzig in ihrer Art vorhandenen) H.-S.-A. oder einer Hauptaxe; ihr gegenüber führen die beiden Horizontalaxen a die Bezeichnung der Nebenaxen. Der gewöhnlichen S.-E.n sind vier vorhanden und sie entsprechen den vier verticalen Ebenen, welche jedesmal durch die Hauptaxe und entweder eine der beiden Nebenaxen a oder eine

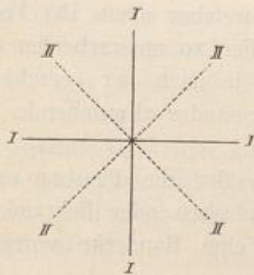


Fig. 96.

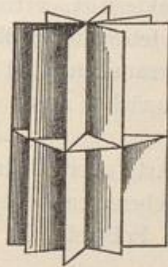


Fig. 97.

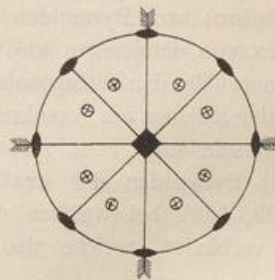


Fig. 98.

der beiden Zwischenaxen gelegt werden; erstere heissen auch die primären, letztere die secundären Hauptschnitte (I und II in Fig. 96). Diese 4 abwechselnd gleichen verticalen Ebenen schneiden sich unter 45° in der Hauptaxe c (Fig. 97).