Elemente der Mineralogie

Naumann, Carl Friedrich

Leipzig, 1901

§. 10. Lage und Bezeichnung der Flächen

urn:nbn:de:hbz:466:1-84232

I. Krystalle mit drei rechtwinkelig auf einander stehenden gleichwerthigen Haupt-Symmetrie-Ebenen (mit drei gleichwerthigen Hauptaxen), und sechs gewöhnlichen Symmetrie-Ebenen, welche die Winkel der letzteren halbiren: 1) Reguläres System.

II. Krystalle mit einer Haupt-Symmetrie-Ebene (mit einer Hauptaxe):
  a) ausserdem mit vier gewöhnlichen Symmetrie-Ebenen, senkrecht auf der Hauptebene: 2) Tetragonales System.
  b) ausserdem mit sechs gewöhnlichen Symmetrie-Ebenen, senkrecht auf der Hauptebene: 3) Hexagonales System.

III. Krystalle ohne Haupt-Symmetrie-Ebene (ohne Hauptaxe):
  a) mit drei auf einander senkrechten gewöhnlichen Symmetrie-Ebenen: 4) Rhombisches System.
  b) mit einer gewöhnlichen Symmetrie-Ebene: 5) Monoklines System.
  c) ohne Symmetrie-Ebene überhaupt: 6) Triklines System.

Es muss noch besonders hervorgehoben werden, dass diese Charakteristik der Krystallsysteme sich nur auf die vollflächigen Formen bezieht und die aus den letzteren abgeleiteten theilflächigen Krystalle in den einzelnen Abtheilungen ein minderes Maass der Symmetrie aufweisen. Die auf die krystallographischen Axen gegründete Charakteristik der Systeme (S. 14) ist aber sowohl für die vollflächigen, als für die theilflächigen Formen derselben gültig.

Es ist ein Grundgesetz der Krystallographie, dass mit einer Form nur solche andere in Combination treten, welche denselben Grad der Symmetrie besitzen. Die S.-E.n der Combination fallen dabei mit denjenigen zusammen, welche die einfachen, mit einander combinirten Formen für sich selbst aufweisen.

Mit der Symmetrie der Krystalle steht auch diejenige der daran auftretenden Flächen im Zusammenhang. Eine Linie theilt eine Fläche symmetrisch, wenn zu beiden Seiten der ersteren die Kanten gleich gelegen sind. Eine Fläche wird asymmetrisch genannt, wenn sie keine solche Linie besitzt, also überhaupt nicht in zwei symmetrische Hälften theilbar ist (z. B. ungleichseitiges Dreieck, Rhomboid); monosymmetrisch, wenn nur eine solche Linie vorhanden ist (z. B. gleichschenkeliges Dreieck, Deltoid Fig. 27, symmetrisches Pentagon Fig. 75); disymmetrisch, wenn zwei solcher Linien (z. B. Rhombus, Rechteck); trisymmetrisch, wenn drei (z. B. gleichseitiges Dreieck); tetrasymmetrisch, wenn vier (z. B. Quadrat); hexasymmetrisch, wenn sechs (z. B. regelmässiges Hexagon) derselben zugegen sind. Im Allgemeinen muss nun natürlich eine Fläche einen um so höheren Grad von Symmetrie zeigen, je grösser die Zahl der S.-E.n ist, auf denen sie senkrecht steht: ist sie senkrecht auf einer S.-E., so hat sie monosymmetrischen, senkrecht auf keiner, dann asymmetrischen Charakter. Daraus folgt, dass die triklinen Krystalle lediglich von asymmetrischen Flächen begrenzt werden; die monoklinen besitzen asymmetrische und monosymmetrische; die rhombischen ausser diesen beiden noch disymmetrische; die tetragonalen ausser diesen drei auch tetrasymmetrische; die regulären ausser diesen vier auch trisymmetrische Flächen; die hexagonalen zeigen ausser a-, mono-, di- und trisymmetrischen auch hexasymmetrische Flächen.

§ 10. **Lage und Bezeichnung der Flächen.** Diejenigen Abschnitte, welche irgend eine Fläche nach entsprechender Vergrösserung an den Axen hervorbringt, werden, gemessen vom Durchschnittspunkt der letzteren, Parameter genannt. OA, OB, OC sind die Parameter der Fläche ABC (Fig. 2); bei ihnen kommt es nicht auf ihre absolute, sondern nur auf die relative gegenseitige Länge an.

Von den sechs Halbaxen eines dreilinigen Axenkreuzes werden diejenigen drei, welche den vorderen oberen rechten Oktanten begrenzen, als positiv oder (mit ungestrichelten Buchstaben) als X, Y, Z, die drei anderen als negativ, $-X$, $-Y$, $-Z$ oder (mit gestrichelten Buchstaben) X', Y', Z' eingeführt (Fig. 2); also die verticale Axe ist oben, die Queraxe rechts, die Längsaxe vorne positiv.

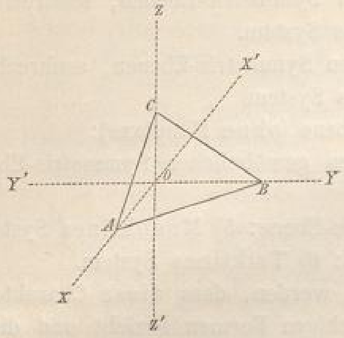

Fig. 2.

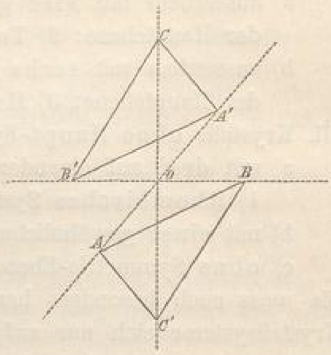

Fig. 3.

Die auf den ersteren positiven Axenästen hervorgebrachten Abschnitte werden bei der Aufzählung der Parameter gleichfalls als positiv oder ungestrichelt, die auf den anderen negativen erzeugten ebenso als negativ oder gestrichelt angegeben. Bezeichnet man abgekürzt OA, OB, OC als a, b, c, so wird die Lage der Fläche ABC (Fig. 2) durch die Parameter $a : b : c$ ausgedrückt; diejenige der Fläche ABC' (vorne unten rechts) durch $a : b : -c$, diejenige der Fläche $A'B'C$ (hinten oben links) durch $-a : -b : c$ (Fig. 3).

Bei einem dreilinigen Axenkreuz werden diejenigen zwei Oktanten, welche durch eine Axenebene getrennt sind, anliegende genannt (z. B. der vordere obere rechte und der vordere obere linke); diejenigen, die sich nur in einer Axe berühren, gegenüberliegende (z. B. der vordere obere rechte und der vordere untere linke); diejenigen, die nur im Durchkreuzungspunkt der Axen zusammenstossen, entgegengesetzte (z. B. der vordere obere rechte und der hintere untere linke Oktant).

Wenn man die drei Parameter einer Fläche alle mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe dividirt, so erhält man die Parameter keiner neuen anderen Fläche, sondern nur einer solchen, welche mit der vorigen parallel ist, weil dadurch die bezügliche Lage am Axenkreuz sich nicht verändert. So repräsentirt $3a : 3b : 3c$, oder $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c$ keine andere Fläche als $a : b : c$. Jeder Flächenausdruck, in welchem gebrochene Zahlen als Parameter vorkommen, kann durch Multiplication oder Division mit einer Zahl in einen Ausdruck mit ganzen Zahlen verwandelt werden; so ist die Fläche mit dem Parameterverhältniss $\frac{3}{4}a : b : \frac{3}{2}c$ gleich derjenigen mit $3a : 4b : 6c$. — Eine jede Fläche dagegen, welche mit Bezug auf eine gegebene andere abweichende Parameterverhältnisse besitzt, hat auch eine andere Lage als diese, ist mit ihr nicht parallel; so ist $2a : 3b : c$ eine ganz abweichend gerichtete Fläche als $a : b : c$.

Geht eine Fläche einer Axe parallel, kann also für die letztere kein endlicher Parameter angegeben werden, so gelangt dies dadurch zum Ausdruck, dass der betreffende Parameter als unendlich gross (∞) bezeichnet wird.

Jede Fläche liegt an einem dreilinigen Axenkreuz so, dass sie entweder:

1) alle drei Axen schneidet (Pyramidenfläche, z. B. $a:b:c$ oder $a:2b:3c$),
2) zwei Axen schneidet, der dritten parallel geht (Prismenfläche, z. B. $a:b:\infty c$ oder $a:\infty b:2c$), oder
3) nur eine Axe schneidet, den beiden anderen parallel geht (Pinakoidfläche, z. B. $a:\infty b:\infty c$ oder $\infty a:b:\infty c$). Ein fernerer Fall ist nicht denkbar.

Unter einer Form versteht man (s. S. 12) in der Krystallographie den Inbegriff von solchen Flächen, welchen ein und dasselbe Parameterverhältniss zukommt, also den vollzähligen Complex von lauter isoparametrischen Flächen. Soll nicht jede einzelne Fläche für sich, sondern die Gesammtheit aller gleichen, eine einfache Form bildenden Flächen auf einmal bezeichnet werden, so pflegt man das Zeichen der einzelnen Fläche mit einer Klammer zu umschliessen.

So bedeutet also $(a:b:c)$ gemeinsam die Flächen:

$$a:b:c \qquad -a:b:c \qquad a:-b:c \qquad a:b:-c$$
$$-a:-b:c \qquad a:-b:-c \qquad -a:b:-c \qquad -a:-b:-c.$$

$(\infty a:\infty b:c)$ bedeutet die eingeklammerte Fläche und ausserdem noch $\infty a:\infty b:-c$. Doch fallen auch oft, wo kein Missverständniss zu besorgen ist, die Klammern weg.

In jedem Raumabschnitt (Oktanten oder Dodekanten), welcher durch die krystallographischen Axensysteme gebildet wird, müssen auf allen gleichen Axen des Systems durch die vollzählig auftretenden Flächen eines Krystalls gleiche Stücke abgeschnitten werden und ferner müssen in allen unter einander gleichen derartigen Raumabschnitten dann stets gleichviel solcher Flächen vorhanden sein.

Bei der Betrachtung der Gestalten eines krystallisirten, nicht dem regulären System angehörenden Minerals geht man von einer ausgewählten Form, der Grundform aus, deren Fläche man das Parameterverhältniss $a:b:c$ zuschreibt, indem dessen einzelne Glieder als Einheit gesetzt werden. Dieses Parameterverhältniss, also das Zahlenverhältniss der Parameterlängen der Grundform, wird gewöhnlich das Axenverhältniss genannt, welches, weil es sich nur um die relativen, nicht um die absoluten Längen handelt, auf die Form gebracht werden kann, dass wenigstens eine der drei Zahlen als 1 erscheint; z. B.: 0,8584 . . . : 1 : 1,3697 . . ., d. h. wenn die Fläche der Grundform von der einen Axe die Länge 1 abschneidet, so trifft sie die beiden anderen in den Entfernungen 0,8584 . . . und 1,3697 . . . Diese Werthe sind, mit Ausnahme von 1, irrational.

Die Nothwendigkeit der Irrationalität des Axenverhältnisses ergibt sich z. B. daraus, dass die Winkel des Krystalls, aus denen dasselbe berechnet wird, sich mit der Temperatur stetig ändern, also alsdann auch das Axenverhältniss einer bestimmten Temperatur continuirlich in dasjenige einer anderen Temperatur übergehen muss, was nur dann erfolgen kann, wenn dasselbe im Allgemeinen überhaupt irrationale Werthe aufweist. — Bei den Krystallen des regulären Systems mit seinen lediglich gleichwerthigen Axen verliert der Begriff des Axenverhältnisses seine Bedeutung.

Die Lage irgend einer Fläche einer anderen Form, welche an derselben krystallisirten Substanz auftritt, wird nun nicht sowohl durch das Zahlenverhältniss ihrer eigenen Parameterlängen ausgedrückt, als vielmehr durch die Angabe, das Wievielfache ihre Parameter sind von den entsprechenden, auf dieselben Axen bezogenen Parametern der Grundform. Die ganze Krystallwelt ist aber von dem allgemeinen, zuerst (1785) von *Haüy* angegebenen Grundgesetz beherrscht, dass, wenn an einem Krystall eine Fläche das Parameterverhältniss $a : b : c$ hat, dann an demselben Krystall neben dieser Grundform nur solche ferneren Flächen vorhanden oder möglich sind, in deren allgemeinem Parameterverhältniss $ma : nb : rc$ die Coëfficienten m, n, r wechselnde rationale Zahlen (oder theilweise ∞) und ausserdem insbesondere recht einfache Zahlen sind. Solche Formen, welche nur nach irrationalen Werthen dieser Coëfficienten (z. B. $\sqrt{2}$) abgeleitet werden können, sind also in der Krystallwelt unmöglich; sie lassen sich zwar geometrisch construiren, haben aber keine objective Realität in der Natur. Das Gesetz ist empirisch gefunden, ist aber auch eine Folgerung der Anschauungen über die Molecularstructur der Krystalle. Man nennt dieses merkwürdige Gesetz, durch welches die Krystalle eine ganz besondere Stellung innerhalb der Fülle der denkbaren stereometrischen Polyëder einnehmen, dasjenige der Rationalität der Ableitungs-Coëfficienten. Dasselbe beschränkt daher die Combinationsfähigkeit von Gestalten noch in dem Falle, wo das Gesetz der Symmetrie sie zuliesse. Bei ihm wird natürlich vorausgesetzt, dass die gewählten Axen parallel sind mit wirklichen oder möglichen Kanten des Krystalls[1]).

Hat eine Fläche das Parameterverhältniss $a : b : c$, so hat z. B. eine andere das Verhältniss $2a : b : c$, eine andere $a : 3b : c$, eine weitere $a : 2b : 3c$, eine fernere $2a : \infty b : c$, oder $a : \infty b : \infty c$. Ist das Axenverhältniss für die Fläche $a : b : c$, in Zahlen ausgedrückt, $= 0{,}8584 \ldots : 1 : 1{,}3697 \ldots$, so ist dasjenige für die Fläche mit dem Parameterverhältniss $2a : b : 3c = 1{,}7168 \ldots : 1 : 4{,}1091 \ldots$

Die Flächen, deren Parameter für 2 Axen ein constantes Verhältniss aufweisen, liegen in einer Zone; so bilden z. B. eine Zone die Flächen $a : b : \infty c$, $a : 2b : \infty c$, $a : 3b : \infty c$, $a : \infty b : \infty c$.

Im Allgemeinen ist also die Grundform eines Krystalls bestimmt durch die Kenntniss 1) der drei Axenwinkel (α der Axenwinkel zwischen Z und Y in Fig. 2, β der zwischen X und Z, γ der zwischen X und Y); 2) der Axenlängen ($a = OA$ in Fig. 2, $b = OB$, $c = OC$), von denen, da die eine $= 1$ gesetzt wird, nur zwei zu bestimmen sind. Diese fünf von einander unabhängigen Grössen heissen die Elemente des Krystalls.

Die im Vorstehenden befolgte Methode, die Flächen durch Symbole anzugeben, welche die das Axenverhältniss andeutenden Buchstaben enthalten und nebstdem die rationalen Coëfficienten für die Axenabschnitte aufführen, rührt von *Christian Samuel Weiss* her. Sie empfiehlt sich durch ihre unmittelbare Anschaulichkeit namentlich bei den anfänglichen allgemeinen Darlegungen der Verschiedenheiten der Flächenlage, während sie in Folge ihrer Länge und Umständlichkeit zu wissenschaftlichen Beschreibungen minder geeignet erscheint.

Eine zweite krystallographische Bezeichnungsweise ist die von *Carl Friedrich Naumann* (zuerst angewandt 1826), welche in diesen Elementen in erster Linie zu Grunde gelegt und deshalb später specieller erläutert wird. Im Gegensatz zu der Flächenbezeichnung von *Weiss* unternimmt sie kurz und logisch, den Körper als solchen, also den Inbegriff sämmtlicher seiner Flächen, durch ein Symbol zu

1) Die Gesammtheit aller jener unendlich zahlreichen einfachen Krystallformen, welche mit ihren Flächen in Folge dieses Gesetzes für eine krystallisirte Substanz möglich sind, nennt man den Formencomplex oder die Krystallreihe dieser Substanz.

repräsentiren, wobei natürlich auf die Angabe einer einzelnen von den gleichen Flächen verzichtet werden muss. Auch bei dieser Methode gewähren die Zeichen unmittelbar und ohne Schwierigkeit eine Vorstellung über die Lage der Flächen.

Nach einer dritten, der sog. *Miller*'schen [1]) Methode werden anstatt der Coëfficienten deren reciproke Werthe in derselben Reihenfolge unmittelbar nebeneinander geschrieben. Letztere werden Indices genannt und allgemein mit h, k, l bezeichnet. Sind für die Axenschnitte a, b, c die Coëfficienten m, n, r, so ist

$$m : n : r = \frac{1}{h} : \frac{1}{k} : \frac{1}{l} \text{ sowie } h : k : l = \frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{r}.$$

Die drei Zahlen h, k, l sind, als Nenner von Brüchen mit dem Zähler 1, den durch die Coëfficienten ausgedrückten Abschnitten der Fläche an den drei Axen umgekehrt proportional, während die Coëfficienten der *Weiss*'schen und *Naumann*'schen Symbole diesen Abschnitten direct entsprechen.

Ist die Lage der Grundform-Fläche ABC (Fig. 4) durch deren Parameter (Axenlängen) OA, OB, OC bekannt und handelt es sich um Bestimmung der Lage der (nicht parallelen und dem Axenschnittpunkt näher gerückt erscheinenden) Fläche HKL an demselben Axenkreuz, so sei

OH der h-te Theil von OA, OK der k-te Theil von OB, OL der l-te Theil von OC,

also
$$h = \frac{OA}{OH},\ k = \frac{OB}{OK},\ l = \frac{OC}{OL}.$$

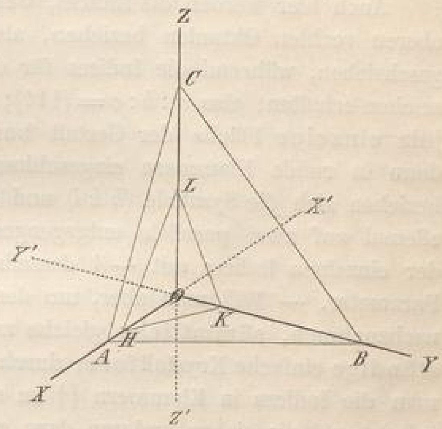

Fig. 4.

Alsdann wird durch diese drei Grössen h, k, l die Fläche HKL mit Bezug auf ABC vollkommen bestimmt. Die Grössen h, k, l können mit einer beliebigen Zahl m multiplicirt werden, ohne dass dadurch an dem Verhältniss der beiden Flächen HKL und ABC, d. h. der Richtung derselben etwas geändert wird; denn jene Multiplication von h, k, l mit m ist gleichbedeutend mit einer Multiplication der Parameter OA, OB, OC mit m, wodurch für die Fläche ABC selbst keine Veränderung, sondern nur eine Parallelverschiebung bewirkt wird. Die Indices können also immer auf eine Form gebracht werden, in welcher sie sämmtlich ganze rationale Zahlen darstellen und das Gesetz von der Rationalität der Ableitungs-Coëfficienten heisst daher auch dasjenige von der Rationalität der Indices.

Um nun aus den Coëfficienten m, n, r die Indices h, k, l zu erhalten, kann man auf zweierlei Weise verfahren: Entweder man nimmt statt der Coëfficienten deren reciproke Werthe und bringt das entstehende Verhältniss auf ganze Zahlen, welche dann die Indices darstellen.

In dem Parameterzeichen $a : 2b : 3c$ werden statt der Coëfficienten 1, 2, 3 deren reciproke Werthe $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ gesetzt, welche der Multiplication mit 6 bedürfen, um auf

---

1) Diese Methode wurde 1825 zuerst von *Whewell*, dann unabhängig davon 1829 von *Grassmann* ersonnen, aber erst durch *W. H. Miller* (A Treatise on crystallography, London 1839) allgemeiner eingeführt.

ganze Zahlen gebracht zu werden und dann zuerst $\frac{6}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{6}{3}$, darauf als Indices (632) liefern.

Oder man bringt die Coëfficienten durch Division mit einer gemeinsamen Zahl auf die Form $\frac{1}{x}$, und schreibt die so erhaltenen drei Nenner als Indices an.

In dem Parameterzeichen $a : 2b : 3c$ werden die Coëfficienten 1, 2, 3 durch Division mit 6 (zuerst auf die Form $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ oder) auf die Form $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ gebracht, woraus sich abermals die Indices (632) ergeben.

Das Zeichen $3a : \frac{3}{2}b : c$ wird zuerst in $6a : 3b : 2c$ verwandelt, welches zunächst $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ oder $\frac{6}{6}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{6}{2}$ und sodann die Indices (123) liefert. — $2a : \frac{3}{2}b : c = 4a : 3b : 2c = (346)$.

Die Indices der Grundform, deren Parameter $= a : b : c$, sind offenbar (111). Dem maximalen Coëfficientenwerth ∞ entspricht hier der Minimalwerth 0. So liefert $a : \infty b : c$ nach dem zuerst angegebenen Verfahren das Verhältniss $\frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{1}$, d. h. die Indices (101). Ebenso ist $a : \infty b : \infty c = (100)$.

Um umgekehrt die Indices (h, k, l) in die Coëfficienten m, n, r zu verwandeln, hat man nur zu bedenken, dass $h = \frac{1}{m}$, $k = \frac{1}{n}$, $l = \frac{1}{r}$ ist; die Indices (221) liefern also zunächst $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{1}c$, was durch Multiplication mit $2 = a : b : 2c$; die Indices (432) ergeben $\frac{1}{4}a : \frac{1}{3}b : \frac{1}{2}c = a : \frac{4}{3}b : 2c$.

Auch hier werden die Indices, welche sich auf die drei Halbaxen im vorderen oberen rechten Oktanten beziehen, als positiv oder ohne weiteres Nebenzeichen geschrieben, während die Indices für die drei anderen Halbaxen oben ein Minuszeichen erhalten; also $a : b : c = (111)$; $a : b : -c = (11\bar{1})$. Dadurch ist es möglich, jede einzelne Fläche der Gestalt besonders zu bezeichnen, deren Indices alsdann in runde Klammern eingeschlossen zu werden pflegen. Auf diese Weise beziehen sich die Symbole $(h\,k\,l)$ und $(\bar{h}\,\bar{k}\,\bar{l})$, oder die Symbole $(h\,\bar{k}\,l)$ und $(\bar{h}\,k\,\bar{l})$ allemal auf zwei parallele entgegengesetzte Krystallflächen, da die Multiplication der einzelnen Indices mit -1 dasselbe liefert, wie die gleiche Multiplication der Parameter. — Will man aber, um den Vorzug der *Naumann*'schen Schreibweise nachzuahmen, sämmtliche gleiche zusammengehörende Flächen, also die vollständige einfache Krystallform durch ein einziges Symbol repräsentiren, so pflegt man die Indices in Klammern {} zu setzen; also $(a : b : c) = \{111\}$, d. h. (111) selbst und die sieben anderen dazu gehörigen Flächen $(\bar{1}11)$, $(1\bar{1}1)$, $(11\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(1\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}1\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$.

§ 11. **Projection.** Um eine Uebersicht über die Formen eines Krystalls zu gewinnen und insbesondere die Zonenverhältnisse desselben hervortreten zu lassen, wird eine sog. Projection seiner Flächen vorgenommen. Man bedient sich dabei namentlich zweier Methoden, der Linearprojection (der *Quenstedt*'schen) und der sphärischen, stereographischen oder Kugelprojection (*Miller*'schen) [1].

Die erstere Methode besteht darin, jede Fläche durch eine gerade Linie darzustellen, und zwar durch diejenige, in welcher sie die Ebene der Zeichnung

1) Beide Methoden wurden von *F. E. Neumann* ersonnen, die erstere von ihm nur angedeutete aber später von *Quenstedt* ausführlich entwickelte, 1835, die zweite, insbesondere durch *Miller* zur Verbreitung gelangte, schon 1823.