



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Elemente der Mineralogie

Naumann, Carl Friedrich

Leipzig, 1901

§. 11. Projection

[urn:nbn:de:hbz:466:1-84232](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-84232)

ganze Zahlen gebracht zu werden und dann zuerst $\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{3}$, darauf als Indices (632) liefern.

Oder man bringt die Coëfficienten durch Division mit einer gemeinsamen Zahl auf die Form $\frac{1}{x}$, und schreibt die so erhaltenen drei Nenner als Indices an.

In dem Parameterzeichen $a : 2b : 3c$ werden die Coëfficienten 1, 2, 3 durch Division mit 6 (zuerst auf die Form $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}$ oder) auf die Form $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ gebracht, woraus sich abermals die Indices (632) ergeben.

Das Zeichen $3a : \frac{3}{2}b : c$ wird zuerst in $6a : 3b : 2c$ verwandelt, welches zunächst $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ oder $\frac{6}{6}, \frac{6}{3}, \frac{6}{2}$ und sodann die Indices (123) liefert. — $2a : \frac{3}{2}b : c = 4a : 3b : 2c = (346)$.

Die Indices der Grundform, deren Parameter $= a : b : c$, sind offenbar (111). Dem maximalen Coëfficientenwerth ∞ entspricht hier der Minimalwerth 0. So liefert $a : \infty b : c$ nach dem zuerst angegebenen Verfahren das Verhältniss $\frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{1}$, d. h. die Indices (101). Ebenso ist $a : \infty b : \infty c = (100)$.

Um umgekehrt die Indices (h, k, l) in die Coëfficienten m, n, r zu verwandeln, hat man nur zu bedenken, dass $h = \frac{1}{m}, k = \frac{1}{n}, l = \frac{1}{r}$ ist; die Indices (224) liefern also zunächst $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{4}c$, was durch Multiplication mit $2 = a : b : 2c$; die Indices (432) ergeben $\frac{1}{4}a : \frac{1}{3}b : \frac{1}{2}c = a : \frac{4}{3}b : 2c$.

Auch hier werden die Indices, welche sich auf die drei Halbaxen im vorderen oberen rechten Oktanten beziehen, als positiv oder ohne weiteres Nebenzeichen geschrieben, während die Indices für die drei anderen Halbaxen oben ein Minuszeichen erhalten; also $a : b : c = (111)$; $a : b : -c = (1\bar{1}1)$. Dadurch ist es möglich, jede einzelne Fläche der Gestalt besonders zu bezeichnen, deren Indices alsdann in runde Klammern eingeschlossen zu werden pflegen. Auf diese Weise beziehen sich die Symbole ($h k l$) und ($\bar{h} \bar{k} \bar{l}$), oder die Symbole ($h \bar{k} l$) und ($\bar{h} k \bar{l}$) allemal auf zwei parallele entgegengesetzte Krystallflächen, da die Multiplication der einzelnen Indices mit -1 dasselbe liefert, wie die gleiche Multiplication der Parameter. — Will man aber, um den Vorzug der *Naumann'schen* Schreibweise nachzuahmen, sämtliche gleiche zusammengehörende Flächen, also die vollständige einfache Krystallform durch ein einziges Symbol repräsentiren, so pflegt man die Indices in Klammern $\{ \}$ zu setzen; also $(a : b : c) = \{111\}$, d. h. (111) selbst und die sieben anderen dazu gehörigen Flächen ($\bar{1}11$), ($1\bar{1}1$), ($11\bar{1}$), ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$), ($\bar{1}1\bar{1}$), ($1\bar{1}\bar{1}$), ($11\bar{1}$).

§ 11. **Projection.** Um eine Uebersicht über die Formen eines Krystalls zu gewinnen und insbesondere die Zonenverhältnisse desselben hervortreten zu lassen, wird eine sog. Projection seiner Flächen vorgenommen. Man bedient sich dabei namentlich zweier Methoden, der Linearprojection (der *Quenstedt'schen*) und der sphärischen, stereographischen oder Kugelprojection (*Miller'schen*)¹⁾.

Die erstere Methode besteht darin, jede Fläche durch eine gerade Linie darzustellen, und zwar durch diejenige, in welcher sie die Ebene der Zeichnung

¹⁾ Beide Methoden wurden von *F. E. Neumann* ersonnen, die erstere von ihm nur angedeutete aber später von *Quenstedt* ausführlich entwickelte, 1833, die zweite, insbesondere durch *Miller* zur Verbreitung gelangte, schon 1823.

durchschneiden würde, wenn man sich sämtliche Flächen durch einen einzigen Punkt gelegt vorstellt. Man denkt sich den Krystall so gerichtet, dass die zu seiner Verticalaxe senkrechte, also horizontale Ebene parallel wird der Projectionsebene, d. h. der Papierfläche, und verschiebt nun in der Vorstellung alle Flächen des Krystalls parallel mit sich selbst so weit, bis sie sich in einem Punkt schneiden, welcher von dem Mittelpunkt der Zeichnung in verticaler Richtung um die Länge der Verticalaxe der Grundform absteht. Der Endpunkt der Verticalaxe erscheint dann als das Centrum der Projection. Jedes Paar von parallelen Flächen fällt dabei natürlich zu einer einzigen Fläche zusammen, welche dann die Projectionsebene in einer Linie (Sectionslinie) schneidet, die ihrerseits ausgezogen wird. Die Fläche, welche der Projectionsebene parallel gestellt wurde, liefert in der Zeichnung selbstverständlich keine Linie. Schneiden sich zwei oder mehrere Sectionslinien in einem Punkt, so zeigt dies an, dass die denselben entsprechenden Flächen in einer Zone liegen, deren Zonenaxe eben jenen Schnittpunkt (Zonenpunkt) als Projectionspunkt liefert. Wenn es sich aber um einen Zonenverband handelt, zu welchem die Projectionsebene als Krystallfläche selbst gehört, so geht die Zonenaxe der Projectionsebene parallel und alle sonst in solche Zone fallenden Flächen liefern ein System paralleler Sectionslinien, deren gemeinsame Richtung parallel der Zonenaxe ist. — Offenbar kann auch jede andere Krystallfläche als Projectionsebene gewählt werden. Bei einer hinreichend genauen Construction gestattet die Linearprojection, das Symbol einer Fläche zu bestimmen, welche sich an zwei Zonen theiligt.

Die sphärische Projectionsmethode besteht darin, dass die Flächen des Krystalls als Punkte projicirt werden. Man denkt sich um einen Punkt des Krystalls als Centrum eine Kugeloberfläche von beliebigem Radius construirt und darauf, von diesem Mittelpunkt aus, gegen die Krystallflächen senkrechte Linien gezogen, welche verlängert die Kugeloberfläche in Punkten treffen. Jede Krystallfläche liefert so auf der Kugeloberfläche einen Punkt, den Pol der Krystallfläche genannt, durch welchen dieselbe ihrer Lage nach vollständig bestimmt ist. Da die Senkrechten, welche vom Centrum aus auf die Flächen einer Zone gezogen werden, sämtlich in einer Ebene liegen, die auch ihrerseits durch das Centrum geht, eine so gerichtete Ebene aber allemal die Kugeloberfläche in einem grössten Kreis schneidet, so müssen die Pole aller tautozonalen Flächen auf einem grössten Kreis liegen. Auf der Kugeloberfläche erscheinen die Kantenwinkel des Krystalls als deren Supplemente in der Gestalt der sog. Normalenbögen.

Nun handelt es sich darum, von der Kugeloberfläche mit den darauf gelegenen Flächenpolen durch die Projection ein Bild in der Ebene zu entwerfen. Dies geschieht nicht etwa so, dass die Projection die Kugel aus einer grösseren Entfernung gesehen, bildlich darstellt, sondern in der Weise, dass dieselbe gleichsam die Innenansicht der Kugel ist, welche sich einem in der Kugeloberfläche befindlichen Auge darbietet. Man wählt zur Projectionsebene eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene, welche die Kugel in dem sog. Grundkreis schneidet. Nimmt man dazu diejenige Ebene, welche senkrecht steht zu den Flächen der verticalen prismatischen Zone des Krystalls, also der horizontalen Basis parallel geht, so liegen natürlich die Pole aller vertical gerichteten Flächen in dem Grundkreis. Die eine

der beiden durch den Grundkreis getrennten Kugelhälften wird nun so auf dessen Ebene projectirt, dass man sich das Auge in den am weitesten entfernten Punkt der anderen Kugelhälfte versetzt denkt, welcher von allen Punkten des Grundkreises um 90° absteht. Wenn man also vom Mittelpunkt der Kugel aus nach derjenigen Seite, welche ihrer abzubildenden Hälfte entgegengesetzt ist, eine Senkrechte zur Ebene des Grundkreises zieht, und den Punkt, in welchem dieses Loth die Kugeloberfläche trifft, mit allen Flächenpolen jener Hälfte durch gerade Linien verbindet, so sind die Punkte, in denen diese Linien die Grundkreisebene schneiden, die Projectionen der Flächenpole. Der Projectionspunkt einer Fläche F ist also, um es anders auszudrücken, der Punkt, in welchem eine von dem Südpol der Kugel nach dem Pol der Fläche F gezogene Linie die Aequatorialebene schneidet. Bei dieser Projection der halben Kugeloberfläche auf die Ebene des Grundkreises erscheint jeder auf der Kugel befindliche grösste Kreis, welcher die Pole einer Flächenzone enthält, als Durchmesser des Grundkreises oder als Kreisbogen (Zonenkreis), welcher den Grundkreis in den Enden eines Durchmessers desselben schneidet. Alle Zonen, welche senkrecht zu derjenigen des Grundkreises stehen, deren Pole also in letzteren fallen, stellen sich als Durchmesser dar. Der Pol der horizontalen Basis ist der Mittelpunkt des Grundkreises. Bei der oben angegebenen Wahl des Grundkreises sind die Pole der einzelnen Flächen der Verticalzone unmittelbar durch die Winkel ihrer Normalen gegeben, indem diese letzteren in der Ebene des Grundkreises selbst liegen.

In Fig. 5 ist o der gemeinsame Mittelpunkt des Krystals und der Kugel. Die Normale auf die Fläche b trifft die Kugeloberfläche im Punkt B , die auf b' in B' , die auf d , a , e und c beziehungsweise in D , A , E und C . Diese Pole der eine Zone bildenden Flächen b , d , a , e u. s. w. liegen auf einem grössten Kreis. — Der Bogen BD zwischen den Polen von b und d misst im Centrum einen Winkel BoD , welcher das Supplement des wirklichen, einwärts gerichteten Winkels bnd zwischen jenen beiden Flächen ist.

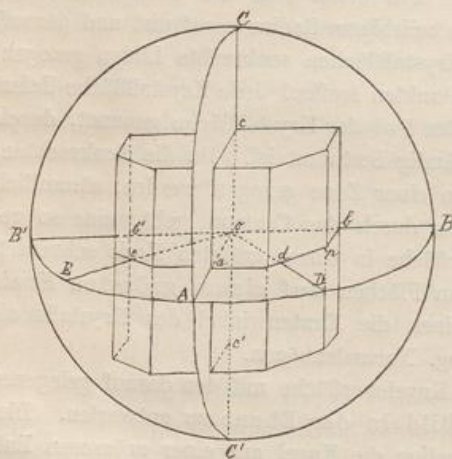


Fig. 5.

Diese sphärische Projectionsmethode ist sehr bequem für die Sichtbarmachung und Ermittlung der Zonenverhältnisse, sowie für die Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Form und den physikalischen Eigenschaften der Krystalle, indem z. B. die optischen Elasticitätsachsen, die optischen Axen für die verschiedenen Farben als Punkte markirt werden können, in welchen diese Richtungen die Kugelfläche treffen. Sie gewährt ferner den Vortheil, dass die wichtigsten krystallographischen Rechnungen mit ihrer Hülfe auf einfache Probleme der sphärischen Trigonometrie zurückgeführt werden können. Da es die Normalenwinkel, d. h. die Supplemente der körperlichen Winkel der Flächen sind, welche bei diesen Projectionen gebraucht und den Berechnungen zu Grunde gelegt werden, so hat Müller vorgeschlagen, anstatt der wahren Winkel stets diese, bei der Messung unmittelbar gefundenen Supplemente anzuführen.

Der Olivinkrystall Fig. 7 ist in Fig. 6 in der Linearprojection, in Fig. 8 in der Kugelprojection dargestellt. In der ersteren geht die Projectionsebene horizontal, parallel der Fläche *c*. Die verticale Zone *msab*, ferner diejenigen *aïd*, *eka*, *oikb* liefern Projectiionslinien, welche je durch einen Punkt gehen. Die Zone *bed*, zu welcher auch die Projectionsebene *c* selbst gehört, besitzt aber eine horizontale, auf *b* senkrechte Zonenaxe und deshalb müssen die Sectionslinien ihrer Flächen sämmtlich parallel und zwar senkrecht auf *a* verlaufen; ebenso müssen *o* und *a* horizontale parallele Linien liefern. — In der Kugelprojection Fig. 8 erscheinen die erstgenannten Zonen als Theile je eines Kreises, die verticale *msab* als Peripherie (Grundkreis); die Zonen *aoc* und *bede* stellen sich aber als gerade Linien dar, indem sie auf der Projectionsebene senkrecht stehen.

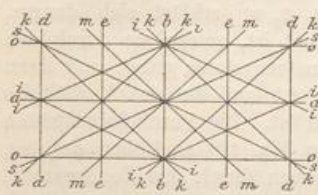


Fig. 6.

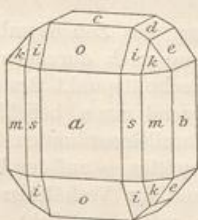


Fig. 7.

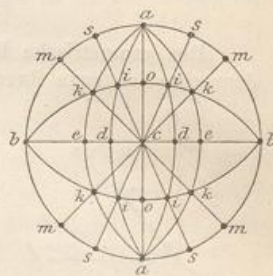


Fig. 8.

Die Symmetrie einer jeden Abtheilung von Krystallformen kann nach dem Vorgang von *A. Gadolin* leicht durch die sphärische Projection ihrer allgemeinsten Form dargestellt werden, wovon im Folgenden bei den einzelnen Gebrauch gemacht ist. Die Schnittpunkte der 2-, 3-, 4- oder 6-zähligen Symmetrie-Axen mit der Kugeloberfläche werden beziehungsweise durch die Zeichen \bullet \blacktriangle \blacklozenge \bullet wiedergegeben; eine Symmetrie-Ebene wird durch eine ausgezogene Linie (Zonenkreis) repräsentirt, wogegen eine punktirte Linie das Fehlen einer S.-E. anzeigt. Die Lage der krystallographischen Axen, soweit sie in der Ebene des Grundkreises liegen, ist durch einen Pfeil an den Enden jener Linien bezeichnet; die nicht gezeichneten Axen stehen (mit Ausnahme des triklinen Systems) senkrecht zu den Grundkreisen. Der Pol einer Fläche in der oberen Hälfte des Krystalls (oberhalb der Projectionsebene) wird durch ein Kreuzchen, ein solcher in der unteren durch ein Kreischen markirt. Fallen zwei Flächenpole zusammen (oder liegen sie auf der Kugel senkrecht über einander), so erscheinen die beiden letzteren Zeichen vereinigt.

Unsere üblichen Kristallbilder sind nicht nach den Regeln der gewöhnlichen Perspektive entworfen (sonst müssten z. B. parallele Linien, wie die Kanten eines Würfels, welche auf den Beschauer zulaufen, nach der vom Beobachter abgewendeten Richtung convergieren) — sondern sie sind nach der Methode der Parallelperspective gezeichnet, d. h. es sind Bilder, welche die Kristalle, wie man sagt, aus unendlicher Entfernung gesehen darstellen, und zwar weil anderenfalls der für die Auffassung der Zonenverhältnisse so wichtige Kantenparallelismus verloren gehen würde.

§ 12. **Zonenverband.** Eine Krystallfläche, welche zugleich in zwei Zonen, also in der Durchkreuzung derselben gelegen ist, geht sowohl der Zonenaxe der einen als derjenigen der anderen parallel und ist deshalb dadurch vollkommen bestimmt, da überhaupt eine Ebene durch zwei derselben parallele gerade Linien ihrer Richtung nach gegeben ist. Es kann natürlich nur eine einzige Fläche sein, die im Durchschnitt zweier Zonen liegt. Sind daher die zwei Zonen bekannt, so ist die Fläche in ihrer Durchkreuzung auch bekannt.