Elemente der Mineralogie

Naumann, Carl Friedrich

Leipzig, 1901

§. 12. Zonenverband

urn:nbn:de:hbz:466:1-84232

Der Olivinkrystall Fig. 7 ist in Fig. 6 in der Linearprojection, in Fig. 8 in der Kugelprojection dargestellt. In der ersteren geht die Projectionsebene horizontal, parallel der Fläche *c*. Die verticale Zone *msab*, ferner diejenigen *aid*, *eka*, *oikb* liefern Projectionslinien, welche je durch einen Punkt gehen. Die Zone *bed*, zu welcher auch die Projectionsebene *c* selbst gehört, besitzt aber eine horizontale, auf *b* senkrechte Zonenaxe und deshalb müssen die Sectionslinien ihrer Flächen sämmtlich parallel und zwar senkrecht auf *a* verlaufen; ebenso müssen *o* und *a* horizontale parallele Linien liefern. — In der Kugelprojection Fig. 8 erscheinen die erstgenannten Zonen als Theile je eines Kreises, die verticale *msab* als Peripherie (Grundkreis); die Zonen *aoc* und *bedc* stellen sich aber als gerade Linien dar, indem sie auf der Projectionsebene senkrecht stehen.

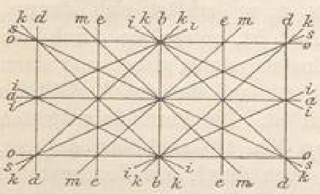

Fig. 6.

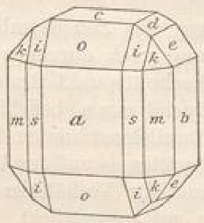

Fig. 7.

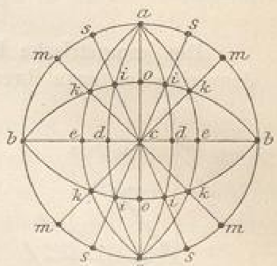

Fig. 8.

Die Symmetrie einer jeden Abtheilung von Krystallformen kann nach dem Vorgang von *A. Gadolin* leicht durch die sphärische Projection ihrer allgemeinsten Form dargestellt werden, wovon im Folgenden bei den einzelnen Gebrauch gemacht ist. Die Schnittpunkte der 2-, 3-, 4- oder 6-zähligen Symmetrie-Axen mit der Kugeloberfläche werden beziehungsweise durch die Zeichen ⬬ ▲ ◆ ⬣ wiedergegeben; eine Symmetrie-Ebene wird durch eine ausgezogene Linie (Zonenkreis) repräsentirt, wogegen eine punktirte Linie das Fehlen einer S.-E. anzeigt. Die Lage der krystallographischen Axen, soweit sie in der Ebene des Grundkreises liegen, ist durch einen Pfeil an den Enden jener Linien bezeichnet; die nicht gezeichneten Axen stehen (mit Ausnahme des triklinen Systems) senkrecht zu den Grundkreisen. Der Pol einer Fläche in der oberen Hälfte des Krystalls (oberhalb der Projectionsebene) wird durch ein Kreuzchen, ein solcher in der unteren durch ein Kreischen markirt. Fallen zwei Flächenpole zusammen (oder liegen sie auf der Kugel senkrecht über einander), so erscheinen die beiden letzteren Zeichen vereinigt.

Unsere üblichen Krystallbilder sind nicht nach den Regeln der gewöhnlichen Perspective entworfen (sonst müssten z. B. parallele Linien, wie die Kanten eines Würfels, welche auf den Beschauer zulaufen, nach der vom Beobachter abgewendeten Richtung convergiren) — sondern sie sind nach der Methode der Parallelperspective gezeichnet, d. h. es sind Bilder, welche die Krystalle, wie man sagt, aus unendlicher Entfernung gesehen darstellen, und zwar weil anderenfalls der für die Auffassung der Zonenverhältnisse so wichtige Kantenparallelismus verloren gehen würde.

§ 12. **Zonenverband.** Eine Krystallfläche, welche zugleich in zwei Zonen, also in der Durchkreuzung derselben gelegen ist, geht sowohl der Zonenaxe der einen als derjenigen der anderen parallel und ist deshalb dadurch vollkommen bestimmt, da überhaupt eine Ebene durch zwei derselben parallele gerade Linien ihrer Richtung nach gegeben ist. Es kann natürlich nur eine einzige Fläche sein, die im Durchschnitt zweier Zonen liegt. Sind daher die zwei Zonen bekannt, so ist die Fläche in ihrer Durchkreuzung auch bekannt.

In Fig. 9 bildet z. B. die Fläche 111 eine Zone mit 100 und 011, ferner mit 101 und 010, sodann auch mit 001 und 110, stets je mit den nach hinten liegenden parallelen Gegenflächen. — Die Fläche 110 liegt in einer Zone mit 100 und 010, sowie mit 111 und $\bar{1}11$.

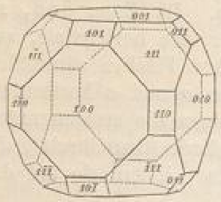

Fig. 9.

Eine Zone ist aber ihrerseits bekannt, sofern die Durchschnittslinie zweier in ihr liegender nicht paralleler Flächen bekannt ist. Aus den Indices dieser Flächen müssen sich somit Werthe ableiten lassen, durch welche die Richtung jener gemeinsamen Durchschnittskante (= der Zonenaxe) bestimmt ist. Die Indices dieser Durchschnittslinie $[u, v, w]$ heissen das Zonensymbol oder Zonenzeichen.

Die geometrische Bedeutung des Zonensymbols $[u, v, w]$ erklärt sich daraus, dass eine Zonenaxe ihrer Richtung nach durchaus bestimmt ist, sofern sie durch den Durchschnittspunkt des Coordinatensystems gelegt und dann für irgend einen beliebigen Punkt auf ihr das Verhältniss der Parallelcoordinaten bekannt ist. Die Parallelcoordinaten des Punktes p auf der Linie op (Fig. 10) sind eben ou, ov, ow und ihr Verhältniss wird eben durch das Zonensymbol $[u, v, w]$ ausgedrückt.

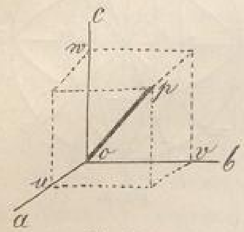

Fig. 10.

Haben die beiden Flächen die Indices hkl und $h'k'l'$, so ist

$$u = kl' - lk',\ v = lh' - hl',\ w = hk' - kh'$$ [1].

Sind die bekannten Indices einer Fläche z. B. (111), die einer anderen (123), so erhält man nach Vorstehendem das Symbol ihrer Zone, indem man die Indices der einen Fläche zweimal hintereinander schreibt, darunter die der anderen ebenfalls zweimal setzt, sodann die erste und letzte Colonne weglässt und nun bei dem Rest den ersten oberen Index mit dem zweiten unteren multiplicirt, darauf den zweiten oberen mit dem ersten unteren multiplicirt und alsdann die beiden Producte von einander abzieht, deren Differenz den ersten Index u des gesuchten Zonensymbols liefert. Durch entsprechende Fortsetzung des Verfahrens dieser kreuzweisen Multiplication erhält man auch die beiden anderen Indices derselben.

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$u = (1 \times 3) - (1 \times 2) = 1;\ v = (1 \times 1) - (1 \times 3) = -2;\ w = (1 \times 2) - (1 \times 1) = 1.$$

Also ist das Zonensymbol hier $[1\bar{2}1]$; aus den Indices zweier Flächen (201) und (110) würde man so das Zonenzeichen $[\bar{1}12]$ erhalten; dasjenige für die beiden Flächen (201) und (314) ist $[\bar{1}\bar{5}2]$.

Da die Indices stets ganze rationale Zahlen sind, so müssen es auch die Grössen u, v, w sein.

Wenn eine Fläche R mit zwei anderen, Q und S, in einer Zone liegen soll, so müssen die Indices jener Fläche einer besonderen Bedingung genügen. Diese besteht darin, dass, wenn das Zonensymbol von Q und S nach der eben gegebenen Berechnung $[u\,v\,w]$ ist und die Indices von $R = h\,k\,l$ sind, alsdann $u\,h + v\,k + w\,l = 0$. Da diese Bedingungsgleichung nicht abhängt von den Elementen des Krystalls, sondern nur von den Indices, welche ihre rationalen Werthe bei jeder Temperatur

1) Die theoretische Ableitung dieser Zonenregeln, welche hier nur als solche gegeben werden können, mag man z. B. in *Groth*, Physikal. Krystallogr. 1895. S. 301 nachsehen.

constant beibehalten, so folgt daraus das S. 12 erwähnte Gesetz von der »Erhaltung der Zonen«.

Sind die Indices von Q und S z. B. (111) und (123), so ist ihr Zonensymbol, wie oben, $[1\bar{2}1]$. Die Fläche R mit den Indices (432) liegt daher auch in dieser Zone, da $(1\times 4) + (-2\times 3) + (1\times 2) = 0$. Ebenso gehört die Fläche $(\bar{3}11)$ in die (z. B. die Flächen 201 und 314 aufweisende) Zone, deren Symbol $[\bar{1}\bar{5}2]$ ist. — Anderseits erkennt man auf Grund dieser sog. Zonencontrolle, dass die Fläche (112) dagegen nicht in der Zone $[1\bar{2}1]$ liegen kann, da man bei jener Addition der Producte nicht 0, sondern 1 erhält.

Das Zeichen $[uvw]$ einer Zone liefert daher auch die Gesammtheit aller möglichen zu ihr gehörigen Flächen, indem man für k und l in obiger Bedingungsgleichung der Tautozonalität nach und nach alle einfachen rationalen Zahlen 0, 1, 2 u. s. w. einsetzt und jedesmal das entsprechende h aus derselben berechnet.

Wie angeführt, ist eine Krystallfläche, welche zugleich in zwei Zonen liegt, dadurch vollkommen bestimmt. Man erhält nun die Indices des Durchschnittspunkts zweier Zonen, d. h. der in beiden liegenden Fläche auf dieselbe Weise, nach welcher man das Zonensymbol aus den Flächen-Indices entwickelt. Sind die Symbole der beiden Zonen $[uvw]$ und $[u'v'w']$, so sind die Indices der in beiden liegenden Fläche hkl:

$$h = vw' - wv';\ k = wu' - uw';\ l = uv' - vu'.$$

Das Zonensymbol der beiden Flächen (123) und (113) ist $[30\bar{1}]$, dasjenige der beiden Flächen (011) und (122) ist $[01\bar{1}]$. Wird zufolge obigem Schema der nach Abtrennung der ersten und letzten Colonne vorgenommenen kreuzweisen Multiplication u. s. w. nunmehr mit diesen beiden Zonensymbolen selbst verfahren, so erhält man die gesuchten Indices (133) für diejenige Fläche, welche sowohl in der einen als in der anderen Zone liegt, also einerseits mit (123) und (113), anderseits mit (011) und (122) parallele Kanten bildet. Ebenso liegt die Fläche (531) in der Durchkreuzung der beiden Zonen $[1\bar{2}1]$ und $[\bar{1}12]$.

Da die auf diese Weise berechneten Indices für eine in zwei Zonen liegende Fläche stets rational sind, so ist eine solche Fläche stets am Krystall möglich. Anderseits sind aber auch in einem Krystallsystem nur solche Flächen möglich, welche je zweien Zonen dieses Systems zugleich angehören.

Die Indices einer Fläche, welche die Kante zweier gleichartiger Flächen gleichmässig abstumpft, werden erhalten durch die Addition der Indices der letzteren bezüglich jeder Axe. So ist es eine Fläche mit den Indices (332), welche die Kante der beiden gleichartigen Flächen (211) und (121) gerade abstumpft.

Auch vermittels einfacher Sätze der analytischen Geometrie und an der Hand der Linearprojection können die im Vorstehenden angeführten Ermittelungen vorgenommen werden[1].

Aus dem Vorstehenden sieht man, dass: 1) die Ableitung der Indices einer Zone aus zwei, durch ihre Indices bekannten Flächen; 2) die Ableitung der Indices einer Fläche aus den Indices zweier Zonen, in welchen sie liegt, möglich ist, ohne Verwendung von Winkeln. Diese Operationen heissen Deduction. Geht man von vier beliebigen, an einem Krystall auftretenden Flächen aus, von denen nie je drei in einer Zone liegen, so kann man aus den vorhandenen Durchschnitts-

1) Vgl. darüber z. B. *Quenstedt*, Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie, 1873. S. 188. — *Klein*, Einleitung in die Krystallberechnung, 1876. S. 39.

kanten fortwährend vermittels solcher Deduction neue Flächen, und alsdann aus den von diesen gebildeten Durchschnittskanten wiederum weitere neue Flächen herleiten. Da zufolge der Deductionsweise ihre Indices allemal rational sein müssen, so sind alle diese deducirten Flächen auch möglich. So kann man auf solchem Wege im Voraus alle möglichen Flächen eines Krystalls ableiten, gerade so, wie wenn man in das allgemeine Flächensymbol $ma : nb : rc$ nach einander alle rationalen Zahlen für die Coëfficienten m, n, r einsetzen würde.

In dem monoklinen Krystall Fig. 11 wird $k = (100)$, Orthopinakoid, $M = (010)$, Klinopinakoid, $P = (001)$, Basis, $o = (11\bar{1})$ und $o_{,} = (1\bar{1}\bar{1})$, Grundpyramiden angenommen. Die Indices sämmtlicher übrigen Flächen können nun, ohne trigonometrische Rechnung, blos durch den Zonenverband, bestimmt werden: Die Fläche x liegt in der Zone kP, deren Zonensymbol (nach dem Vorstehenden aus (100) und (001) berechnet) $= [10\bar{1}]$, und in der Zone Mo, deren Zonensymbol (aus (010) und $(11\bar{1})$ berechnet) $= [\bar{1}0\bar{1}]$; daraus ergeben sich für x die Indices $(10\bar{1})$. — Die Fläche T liegt in der Zone kM und in derjenigen Po; ihre Indices sind daher (110); $T_{,} = (1\bar{1}0)$. — y liegt in der Zone kx und $To_{,}$, hat demnach die Indices $(20\bar{1})$. — n liegt in der Zone PM und Ty, besitzt deshalb die Indices (021); $n_{,} = (0\bar{2}1)$. — Bisweilen erhält man bei diesen Bestimmungen die Indices der Fläche, die mit der gesuchten parallel ist; so hätte man bei einer Wahl zweier anderer Zonen auch für x die Indices $(\bar{1}01)$ finden können, welche sich dann aber auf die mit x parallele Gegenfläche $x_{,}$ (auf der hinteren Seite des Krystalls oben gelegen) beziehen; in diesem Falle braucht man die gefundenen Indices nur mit -1 einzeln zu multipliciren, um das Symbol der gesuchten Fläche zu erhalten.

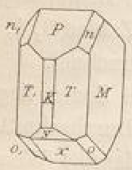

Fig. 11.

§ 13. **Vollflächigkeit und Theilflächigkeit.** Vollflächige Formen oder Holoëder sind solche einfache Krystallformen, welche diejenigen Symmetrie-Ebenen, die ihnen durch das betreffende Krystallsystem vorgeschrieben werden (S. 17), auch in voller Zahl besitzen. Hälftflächner oder Hemiëder werden zunächst diejenigen, aus den holoëdrischen durch ein bestimmtes Verfahren ableitbaren Krystallformen genannt, für welche man sich vorstellen kann, dass bei ihnen eine oder mehre Gruppen von gleichwerthigen Symmetrie-Ebenen aus dem Complex ausgetreten und nicht mehr vorhanden sind. Hiermit ist dann auch der Verlust von anderen Symmetrie-Elementen verbunden, jedesmal der von Symmetrie-Axen, möglicherweise auch der des Symmetrie-Centrums.

Die Ableitung der Hemiëder aus den Holoëdern erfolgt in der Weise, dass von jedem Flächenpaar, für welches eine bestimmte Ebene die Bedeutung einer S.-E. einbüssen soll, je eine Fläche unterdrückt wird und zum Verschwinden gelangt, wobei aber die andere Fläche sich soweit ausdehnt, dass sie mit den übrigen verbleibenden Flächen zum Durchschnitt gelangt und Kanten bildet. Dies ergibt sich aus der Erwägung, dass eine Ebene, welche ja in dem Falle den Charakter einer S.-E. besitzt, wenn alle übrigen Krystallflächen paarweise zu ihr auftreten, dann anderseits diese Bedeutung verlieren muss, wenn alle Flächen mit Bezug auf sie nur einmal am Krystall vorhanden sind.

Nach den Symmetriegesetzen muss das Verlorengehen einer S.-E. als solcher zugleich auch das Austreten aller übrigen, mit ihr gleichwerthigen S.-E.n zur Folge haben, so dass, wenn eine S.-E. nicht als einzige ihrer Art vorliegt, es eine