Elemente der Mineralogie

Naumann, Carl Friedrich

Leipzig, 1901

§. 20. Die tetraëdrische Hemiëdrie

urn:nbn:de:hbz:466:1-84232

den Oktanten gelegenen sechszähligen Flächengruppen ausgebildet sind (tetraëdrische oder geneigtflächige Hemiëdrie);

2) die 6 gewöhnlichen S.-E.n; die durch dieselben gebildeten 24 congruenten Räume sind nur abwechselnd gleich. Alsdann bleiben am Hexakisoktaëder nur noch die abwechselnden Flächenpaare erhalten, welche an den mittleren gebrochenen Oktaëderkanten (oder an den in den H.-S.-E.n befindlichen Kanten) gelegen sind (dodekaëdrische oder pentagonale oder parallelflächige Hemiëdrie);

3) alle 9 S.-E.n zusammen; von den 48 congruenten Räumen sind nur die abwechselnden gleich. Bei dem Hexakisoktaëder hat dies die Wirkung, dass von ihm blos die abwechselnden einzelnen Flächen ausgebildet vorliegen (plagiëdrische oder gyroëdrische Hemiëdrie).

§ 20. **Die tetraëdrische Hemiëdrie.** Die Formen derselben sind nicht mehr nach den Würfelflächen, sondern nur noch nach den 6 gewöhnlichen S.-E.n oder nach den Rhombendodekaëderflächen symmetrisch. Die krystallographischen Hauptaxen (bei den Holoëdern vierzählig) sind hier zu 3 gleichwerthigen zweizähligen S.-A.n geworden; ausserdem sind vorhanden 4 gleichwerthige dreizählige S.-A.n von polarer Ausbildung, senkrecht zu den Tetraëderflächen. Ein Centrum der Symmetrie fehlt; für die Fläche ist eine parallele Gegenfläche nicht ausgebildet, daher die Bezeichnung geneigtflächige Hemiëdrie. Die sphärische Projection Fig. 48 zeigt die Flächenvertheilung bei der allgemeinsten Form und die Symmetrie (vgl. S. 25).

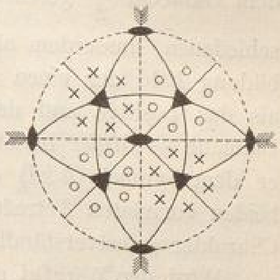


Fig. 48.

Indem die tetraëdrische Hemiëdrie sich darin ausspricht, dass die Oktanten zwischen den drei H.-S.-E.n sich blos abwechselnd gleich verhalten, werden alle diejenigen Formen dabei eine Gestaltsveränderung erfahren, bei welchen die Normalen der Flächen in diese Oktantenräume fallen, also das Oktaëder, Ikositetraëder, Triakisoktaëder, Hexakisoktaëder. Bei den übrigen Formen (Hexaëder, Rhombendodekaëder, Tetrakishexaëder) liegen aber die Normalen der Flächen in den H.-S.-E.n selbst und daher zugleich in dem einen und in dem benachbarten Oktanten; eine Verschiedenheit dieser beiden Oktanten ist demzufolge hier auf die Normalen ohne geometrischen Einfluss, und die zu solchen Normalen gehörigen Flächen werden scheinbar ebenso auftreten, wie in der holoëdrischen Abtheilung. Die Würfelfläche z. B. deckt gleichzeitig vier Oktanten, also kann eine abwechselnde Verschiedenheit der letzteren für die Ausbildung der Würfelfläche keine Veränderung im Gefolge haben.

Bei dem Oktaëder wird derjenige sechszählige Flächencomplex (§ 19, 1), um dessen abwechselndes Verschwinden es sich bei dem Achtundvierzigflächner auf dem Gebiet der tetraëdrischen Hemiëdrie handelt, vollgültig durch die einzelne Fläche repräsentirt. Das Oktaëder wird daher zufolge dieser Modalität hemiëdrisch, indem man seine vier abwechselnden Flächen vergrössert, wobei dann die übrigen zum Verschwinden gelangen (Fig. 49). Es entstehen so aus demselben zwei Tetraëder (Fig. 50 und 51).

Das Tetraëder ist eine von 4 gleichseitigen Dreiecken umschlossene Form mit 6 gleichen Kanten B', deren Winkelmaass $70^{\circ}\ 31'\ 44''$, und mit 4 dreiflächigen (trigonalen) Ecken. Die krystallographischen Axen verbinden die Mittelpunkte je

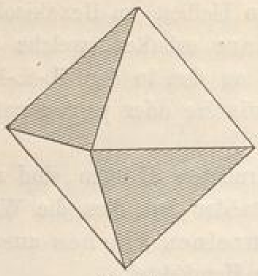


Fig. 49.

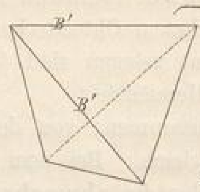


Fig. 50.

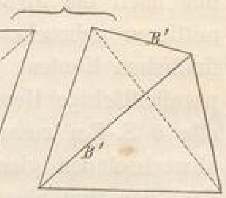
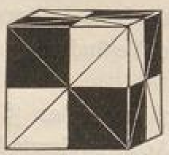


Fig. 51.

zweier gegenüberliegender Kanten. Das Zeichen kann in Folge der Ableitung aus dem Oktaëder $\frac{O}{2}$ geschrieben werden und die beiden, durch ihre Stellung verschiedenen, ausserdem aber völlig gleichen Tetraëder, welche durch alleinige Ausbildung bald der einen bald der anderen Hälfte der Flächen entstehen, werden als das positive und das negative unterschieden. — Fahlerz, Boracit, Helvin, Diamant. — *Miller* bildet das Zeichen der tetraëdrisch-hemiëdrischen Form, indem er dem Symbol $\{h\,k\,l\}$ ein $\varkappa$ (als Abkürzung von κλῖνος, geneigt) vorsetzt. Die beiden correlaten Tetraëder sind daher $\varkappa\{1\,1\,1\}$ und $\varkappa\{1\,\bar{1}\,1\}$. Ist der hemiëdrische Charakter selbstverständlich, so wird $\varkappa$ auch wohl weggelassen.

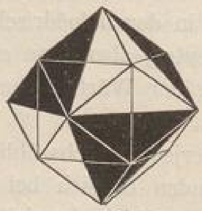
Wird der Würfel der in Rede stehenden Hemiëdrie unterworfen, so erleidet derselbe zufolge der oben angestellten Erwägung keine wirkliche Gestaltsveränderung, sondern erscheint gerade so, als ob er holoëdrisch geblieben wäre, obschon auch an ihm die Hälfte der Flächen als verschwunden gelten muss. Dies wird ebenfalls einleuchtend, wenn man sich den Würfel durch angemessene Feldereintheilung seiner Flächen in einen Quasi-Achtundvierzigflächner verwandelt denkt, und dann auch für ihn genau das Gesetz dieser Hemiëdrie zur Verwirklichung bringt. Ebenso liefern auch das Rhombendodekaëder und die Pyramidenwürfel keine neuen Gestalten.

In nachstehenden drei Figuren stellen die schwarzen Theile diejenigen Flächenfelder vor, welche eigentlich als verschwunden zu denken, während die weiss gelassenen Flächenfelder die wirklich rückständigen sind. Da nun aber jedes verschwindende Flächenfeld mit einem bleibenden Flächenfeld in eine Ebene fällt, so wird in



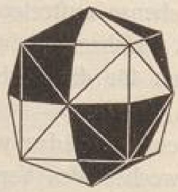
$\frac{\infty O \infty}{2}$

Fig. 52.



$\frac{\infty O}{2}$

Fig. 53.



$\frac{\infty O n}{2}$

Fig. 54.

der geometrischen Erscheinungsweise dieser Formen gar nichts geändert werden, obgleich die Bedeutung ihrer Flächen eine ganz andere ist. Im Hexaëder z. B. besteht streng genommen jede Fläche nur noch aus zweien, an einer Diagonale anliegenden quadratischen Feldern, welche sich aber, weil sie in eine Ebene fallen, zur vollständigen Hexaëderfläche ausdehnen; und auf ähnliche Weise verhält es sich im Rhombendodekaëder und Tetrakishexaëder. Diese drei Formen sind also da, wo sie zugleich mit Tetraëdern vorkommen, wenn auch nicht ihrem Aussehen, so doch ihrem Wesen nach als hemiëdrische Formen zu deuten. Gegenüber den wirklich holoëdrischen Formen sind auch bei ihnen die Symmetrieverhältnisse in derselben Weise reducirt, wie es bei dem Tetraëder und den anderen hier neu entstehenden Formen der Fall. Während die Flächen des holoëdrischen Würfels tetrasymmetrisch sind (S. 17), sind diejenigen des hemiëdrischen nur disymmetrisch nach den Diagonalen des Quadrats, wie sich dies auch in der Oberflächenstreifung (vgl. § 64) ausspricht. *Naumann* hat diese nun allgemein angenommene Anschauungsweise schon seit dem Jahre 1830 geltend gemacht.

Bei den Ikositetraëdern mOm kommen die abwechselnden dreizähligen, über den Flächen des eingeschriebenen Oktaëders gelegenen Flächengruppen zum Verschwinden, die übrigen dazwischen liegenden dehnen sich bis zur gegenseitigen Durchschneidung aus (Fig. 55). Als Hälftflächner entstehen so die Trigondodekaëder (Pyramidentetraëder, Triakistetraëder), deren Zeichen daher $\frac{mOm}{2}$ oder auch $-\frac{mOm}{2}$ sein wird, entsprechend $\varkappa\{hkk\}$ und $\varkappa\{h\bar{k}\bar{k}\}$. Es sind von 12 gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Formen, deren allgemeine Gestalt zwischen jener des Tetraëders und Hexaëders schwankt, jedoch so, dass stets die Kanten der ersteren, aber niemals die Kanten der letzteren Grenzform hervortreten. Die Gestalt ist gleichsam ein Tetraëder, welches auf jeder seiner 4 Flächen eine dreiseitige Pyramide trägt. Je flacher dieselbe ist (Fig. 56), desto mehr nähert sich die Form einem Tetraëder, je steiler (Fig. 58), desto mehr einem Hexaëder. — Von

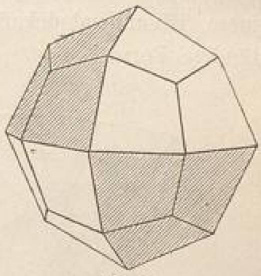


Fig. 55.

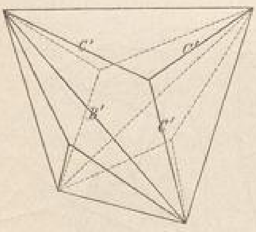


Fig. 56.

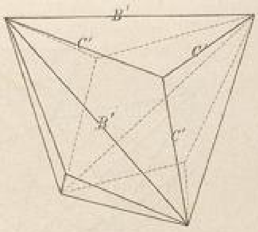


Fig. 57.

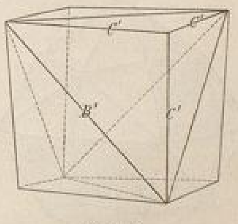


Fig. 58.

den Kanten entsprechen 6 längere (B') den Kanten des Tetraëders und liegen 12 kürzere (C') zu je drei über den Flächen des eingeschriebenen Tetraëders; die Ecken sind gleichfalls zweierlei: 4 sechsflächige, und 4 dreiflächige (trigonale) Ecken. Die krystallographischen Axen verbinden die Mittelpunkte je zweier gegenüberliegender längerer (Tetraëder-) Kanten. — Fahlerz, Kieselwismut.

Die Triakisoktaëder mO liefern, nach den in den abwechselnden Oktanten gelegenen dreizähligen Flächensystemen (Fig. 59) hemiëdrisch werdend, die Deltoiddodekaëder, welche demgemäss das Zeichen $\frac{mO}{2}$ oder $-\frac{mO}{2}$ erhalten, entsprechend $\varkappa\{hhl\}$ und $\varkappa\{h\bar{h}\bar{l}\}$. Dieselben sind von 12 Deltoiden umschlossene Formen, deren allgemeine Gestalt zwischen jener des Tetraëders und Rhombendodekaëders schwankt, ohne dass jedoch die Kanten einer dieser Grenzformen jemals hervortreten können (Fig. 60, 61, 62). — Von den Kanten liegen 12 längere (B') paarweise über den Kanten, und 12 kürzere (A') zu drei über den Flächen des eingeschriebenen Tetraëders. Die Ecken sind dreierlei: 6 vierflächige (rhombische) Ecken, 4 spitzere, und 4 stumpfere dreiflächige (trigonale) Ecken. Die krystallographischen Axen verbinden je zwei gegenüberliegende rhombische Ecken. Je stumpfer letztere (Fig. 60) sind, desto mehr nähert sich die Form einem Tetraëder, je spitzer (Fig. 62), desto mehr einem Rhombendodekaëder. — Fahlerz, Weissgültigerz, doch nicht als selbständige Form.

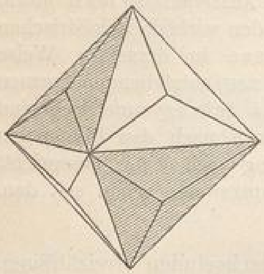


Fig. 59.

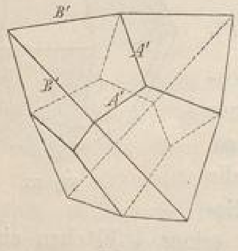


Fig. 60.

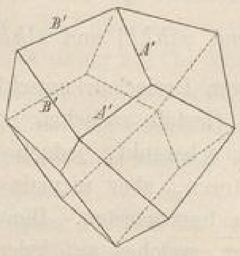


Fig. 61.

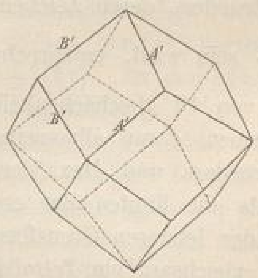


Fig. 62.

Bei den Hexakisoktaëdern mOn sind es die in den abwechselnden Oktanten gelegenen sechszähligen Flächensysteme (Fig. 63), nach welchen diese

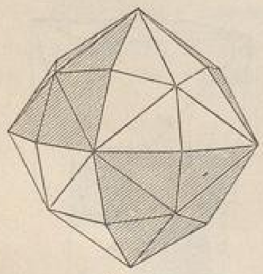


Fig. 63.

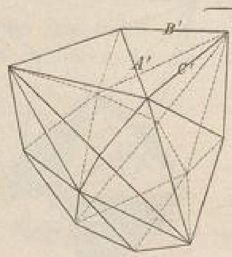


Fig. 64.

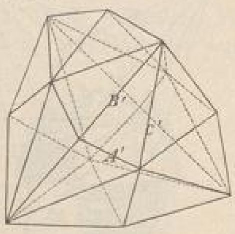


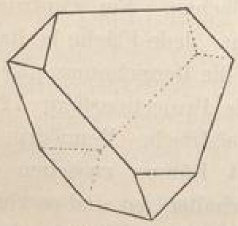
Fig. 65.

Hemiëdrie erfolgt; alsdann gehen aus ihnen die mit $\frac{mOn}{2}$ oder $-\frac{mOn}{2}$ zu bezeichnenden Hexakistetraëder (Fig. 64, 65) hervor, $\varkappa\{hkl\}$ und $\varkappa\{h\bar{k}\bar{l}\}$. Dieselben sind von 24 ungleichseitigen Dreiecken umschlossene Formen, deren allgemeine

Gestalt bald einer der drei vorhergehenden hemiëdrischen Formen, bald auch dem Rhombendodekaëder, dem Hexaëder oder dem Tetrakishexaëder genähert sein kann; doch gruppiren sich die Flächen am häufigsten in 4 sechszählige Systeme. — Die Kanten sind dreierlei: 12 mittlere B', paarweise über den Kanten, 12 längere C', und 12 kürzere A', zu je dreien über den Flächen des eingeschriebenen Tetraëders. Die Ecken sind gleichfalls dreierlei: 6 vierflächige (rhombische), 4 spitzere, und 4 stumpfere sechsflächige Ecken. Die krystallographischen Axen verbinden je zwei gegenüberliegende rhombische Ecken. — Diamant, Boracit, Fahlerz; jedoch an letzteren beiden nicht selbständig.

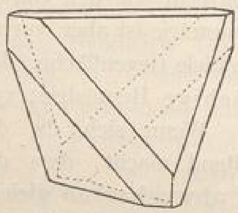
Das Hexakistetraëder (vgl. auch die Projection in Fig. 48) ist die allgemeinste Gestalt dieser Hemiëdrie, in dessen Symbol alle anderen, einschliesslich des hemiëdrischen Hexaëders, Rhombendodekaëders und Pyramidenwürfels als Specialfälle enthalten sind. Werden die Kanten $A' = 180°$, so geht ein Pyramidentetraëder hervor; bei $C' = 180°$ ein Deltoiddodekaëder; bei A' und $C' = 180°$ ein Tetraëder.

Combinationen. Tetraëdrisch-hemiëdrische Formen können nur mit solchen desselben Charakters Combinationen bilden. Wenn also in letzteren ein Würfel,



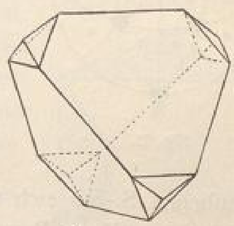
$\frac{O}{2} \cdot -\frac{O}{2}$.

Fig. 66.



$\frac{O}{2} \cdot \infty O \infty$.

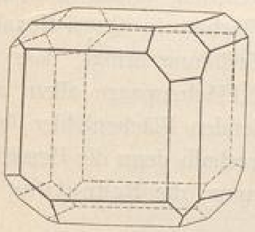
Fig. 67.



$\frac{O}{2} \cdot \infty O$.

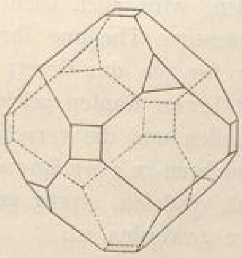
Fig. 68.

Rhombendodekaëder, Pyramidenwürfel auftritt, so sind diese Formen tetraëdrisch-hemiëdrischer Natur; kommt scheinbar ein Oktaëder vor, so muss es als Combination zweier Tetraëder (Fig. 66) gelten, welche im Gleichgewicht stehen.



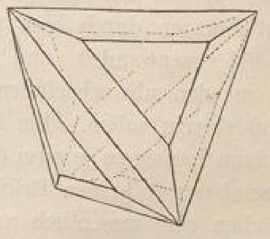
$\infty O \infty \cdot \frac{O}{2} \cdot \infty O$.

Fig. 69.



$\infty O \cdot \frac{O}{2} \cdot \infty O \infty$.

Fig. 70.



$\frac{2O2}{2} \cdot \frac{O}{2}$.

Fig. 71.

In diesen Combinationen erscheint gewöhnlich das Tetraëder, oder das Rhombendodekaëder, oder auch das Hexaëder, selten ein Trigondodekaëder als vorherrschende Form. Das Tetraëder erleidet durch die Flächen seines Gegenkörpers eine Abstumpfung der Ecken, durch die Flächen des (hemiëdrischen) Hexaëders eine Abstumpfung der Kanten, durch die Flächen des (hemiëdrischen) Rhombendodekaëders eine dreiflächige, auf die Flächen aufgesetzte Zuspitzung der Ecken, wobei die zuspitzenden Flächen mit einander Winkel von 120° bilden.

Das Rhombendodekaëder erleidet durch die Flächen des Tetraëders eine Abstumpfung der abwechselnden trigonalen Ecken, das Hexaëder durch dieselbe Form eine Abstumpfung seiner abwechselnden Ecken[1]), und jedes Trigondodekaëder durch das Tetraëder von gleicher Stellung eine Abstumpfung der trigonalen Pyramidenecken (Fig. 71).

§ 21. **Die dodekaëdrische Hemiëdrie.** Bei ihr sind die Formen nicht mehr nach den 6 gewöhnlichen S.-E.n symmetrisch, sondern nur noch nach den Würfelflächen (welche aber hier keine H.-S.-E.n mehr darstellen); sonst besitzen die Formen, wie die tetraëdrisch-hemiëdrischen 3 zweizählige S.-A.n, senkrecht zu einander und zu den Würfelflächen (die krystallographischen Hauptaxen), sowie 4 dreizählige S.-A.n, senkrecht zu den Oktaëderflächen. Ein Centrum der Symmetrie ist aber vorhanden. Jede Fläche besitzt eine parallele Gegenfläche, daher die Bezeichnung parallelflächige Hemiëdrie; vgl. die Projectionsfigur 72.

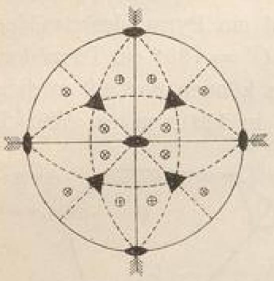


Fig. 72.

Wenn sich die dodekaëdrische Hemiëdrie darin geltend macht, dass die 24 Räume zwischen den 6 gewöhnlichen S.-E.n sich nur abwechselnd gleich verhalten, so sind es von allen holoëdrisch-regulären Formen blos die Tetrakishexaëder und die Hexakisoktaëder, bei welchen die Normalen der Flächen in diese Räume fallen und daher geschieht es, dass auch nur diese beiden in Folge solcher Hemiëdrie ihre Gestalt verändern, die fünf anderen Formen aber dabei in geometrischer Hinsicht anscheinend unverändert bleiben.

Dass das Hexaëder, das Oktaëder, das Rhombendodekaëder, die Triakisoktaëder und Ikositetraëder, wenn sie dieser Hemiëdrie unterliegen, demnach keine wesentliche Gestaltsveränderung erleiden, wird auch leicht eingesehen, indem man diese fünf Formen durch eine angemessene Theilung ihrer Flächen in Quasi-Hexakisoktaëder verwandelt, und dann für sie das Gesetz in Erfüllung bringt, dass nur die an den abwechselnden mittleren Kanten gelegenen Flächenpaare allein ausgebildet sein sollen. Die bleibenden und die verschwindenden Flächenfelder fallen alsdann immer zu je zwei oder mehren in eine Ebene, weshalb denn die Hemiëdrie scheinbar gar keinen Erfolg hat, obgleich, streng genommen, die Bedeutung der Flächen eine wesentlich andere geworden ist.

In nachstehenden Figuren entsprechen die weiss gelassenen Flächenfelder den bleibenden, die schwarzen Flächenfelder dagegen denjenigen Flächenpaaren, welche eigentlich als verschwunden zu denken sind. Es ist augenscheinlich, dass z. B. bei dem so nach der dodekaëdrischen Hemiëdrie hälftflächig gewordenen Würfel die Begren-

1) Daraus ergibt sich auch, dass dieses Hexaëder, ungeachtet seines Aussehens, nicht holoëdrisch und nicht mehr zu seinen eigenen Flächen symmetrisch ist, denn sonst müssten alle seine Ecken als gleichwerthig auch gleichmässig abgestumpft werden.