Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 1. Einleitung. Überblick über die Geschichte der Erdmessungen

§ 1. Einleitung.

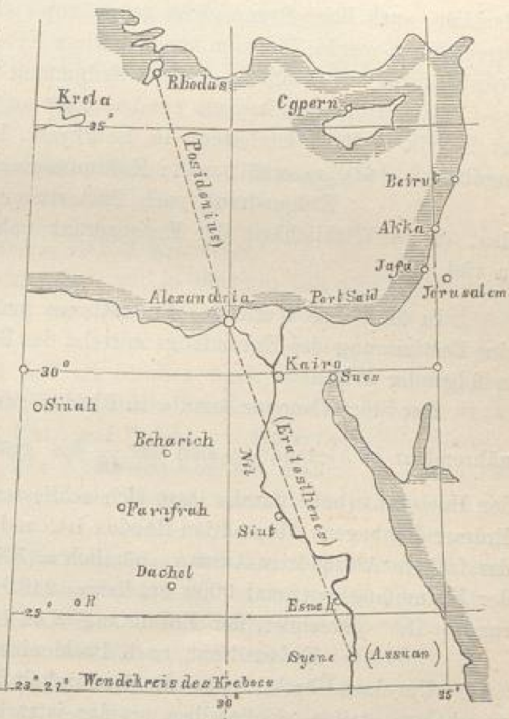
Überblick über die Geschichte der Erdmessung.

Nach der kindlichen Anschauung, welche in Homers Gesängen (800—900 v. Chr.) ihren Ausdruck findet, war die Erde eine vom Okeanos umflossene Scheibe; und diese Anschauung hat sich lange erhalten, ohne sich von dem unmittelbaren Anblick, welchen z. B. die Krümmung der Meeresfläche beim Verschwinden eines Schiffes darbietet, stören zu lassen.

Pythagoras (geb. 582 v. Chr.) erklärte die Erde für eine Kugel.

Aristoteles (384—322 v. Chr.) entwickelt in dem Werke περὶ οὐρανοῦ, B, 13—14, die Gründe für und wider die Kugelform, und kommt zu dem Schluss, dass die Form der Erde notwendig kugelförmig sei (Aristoteles, griechisch und deutsch von Prantl. S. 178): „ἀναγκαῖον εἶναι τὸ σχῆμα σφαιροειδές.“

Fig. 1.
Gradmessung von Eratosthenes und Posidonius.
Massstab = 1 : 18 000 000.



Was weiter die Frage nach der *Grösse* der Erde betrifft, d. h., nachdem die Kugelform erkannt war, die Frage nach dem Umfang oder dem Halbmesser der Erdkugel, so ist als einer der ersten, dem wir eine geschichtlich verbürgte Messung bzw. Schätzung verdanken, der alexandrinische Gelehrte *Eratosthenes* (276—195 v. Chr.) zu nennen.

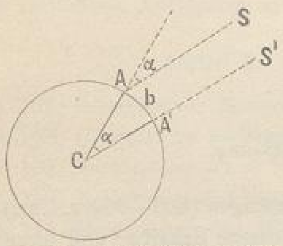
Eratosthenes benützte zur Bestimmung des Erdumfangs den zufälligen günstigen Umstand, dass in Ober-Egypten in Assuan (heutiges Syene, vgl. Fig. 1.) zur Zeit der Sommersonnenwende die Sonnenstrahlen senkrecht in einen Brunnen schienen, während zu gleicher Zeit in Alexandrien die Sonnenstrahlen mit der Lotrichtung einen erheblichen Winkel bildeten, der zu $\frac{1}{50}$ von 360° gemessen wurde. Die Entfernung beider Punkte Alexandrien und Syene wurde aus der Zahl der Tagereisen zu 5000 Stadien geschätzt.

Auf diese Angaben gründete

Eratosthenes eine Bestimmung des Erdumfangs, nach dem Grundsatze der von da an durch Jahrtausende zur Ausführung von „Gradmessungen" gedient hat.

Wir wollen dieses mit Benützung von Fig. 2. ausführlichst darlegen:

Fig. 2.
Breitengradmessung.



Hier bezeichnen A und A' zwei Punkte der kugelförmigen Erdoberfläche (etwa A = Alexandrien, A' = Assuan), welche von den Sonnenstrahlen S und S' getroffen werden. Wegen der weiten Entfernung der Sonne sind die von S und S' aus gehenden Sonnenstrahlen als *parallel* zu betrachten.

In A' falle die Sonnenstrahlrichtung zufällig mit der Vertikalen oder der Richtung des Erdhalbmessers $A'\,C$ zusammen (Brunnen in Assuan) und in A sollen die Sonnenstrahlen mit dem Erdhalbmesser den Winkel α machen, was durch Schattenbeobachtung bestimmt werden kann. Dann ist dieser Winkel α in A auch gleich dem Erdcentriwinkel $A\,C\,A'$, und wenn man auf irgend welchem Wege dazu noch den Meridian-Bogen $A\,A' = b$ bestimmt hat, so lässt sich daraus der Erdumfang bestimmen:

$$U = \frac{360^\circ}{\alpha}\, b$$

In dem Falle der Gradmessung des Eratosthenes war $\alpha = \frac{1}{50} 360^\circ$, und $b = 5000$ Stadien, also der

Erdumfang $= 50 \times 5000 = 250\,000$ Stadien.

Wie aus Fig. 1. zu ersehen ist, liegen Alexandrien und Syene nicht in einem Meridian, auch liegt Syene nicht genau unter dem Wendekreis, wie von Eratosthenes angenommen wurde; indessen kommen diese Nebenumstände bei einer *ersten* genäherten Beantwortung der Frage nach dem Erdumfang nicht in Betracht.

Nimmt man 1 Stadium rund $= 185^{\text{m}}$ an (vgl. Karsten, Allgemeine Encyclopädie der Physik, I. Band Einleitung in die Physik. Leipzig 1869. S. 433, nebst Litteraturangaben S. 441), so erhält man: Erdumfang $= 46\,250\,000^{\text{m}}$ oder:

Erdquadrant, nach Eratosthenes $= 11\,562\,500$ Meter

also, da in Wirklichkeit der Erdquadrant nahezu gleich $10\,000\,000^{\text{m}}$ ist, um 16% zu viel.

In ähnlicher Weise wie Eratosthenes machte *Posidonius* (von 135—51 v. Chr.) eine Bestimmung des Erdumfangs mittelst des Bogens Alexandrien-Rhodus (vgl. Fig. 1.) in folgender Weise:

Der Stern Canopus konnte in Rhodus gerade noch im Horizonte gesehen werden, während er in Alexandrien sich um $\frac{1}{48}$ des grössten Himmelskreises ($= 7^\circ\, 30'$) über den Horizont erhob; daraus lässt sich schliessen, dass der Erdumfang das 48 fache des Erdmeridianbogens Alexandrien-Rhodus ist, und indem dieser Bogen ebenso gross wie der frühere Alexandrien-Assuan, nämlich = 5000 Stadien geschätzt wurde, fand sich der Erdumfang = 48 mal 5000 Stadien = 240 000 Stadien, also, das Stadium wieder rund $= 185^{\text{m}}$ gerechnet, der Erdumfang = 44 400 000 Stadien, oder:

Erdquadrant, nach Posidonius, = 11 100 000 Meter.

Um einen Überblick über die Genauigkeit dieser alten Messungen, bzw. Schätzungen zu erhalten, stellen wir dieselben mit den jetzt bekannten Zahlen $\varDelta\ B$ und b zusammen:

	Breiten B	ΔB	Meridianbogen b	$\Delta B'$	Meridianbogen b'
Rhodus	36° 26′				
		5° 14′	580^{km}	7° 30′	5000 Stad. = 925^{km} (Posidonius)
Alexandrien	31° 12′				
		7′ 7′	789^{km}	7° 12′	5000 Stad. = 925^{km} (Eratosthenes)
Syene	24° 5′				

Die Fehler 925^{km} gegen 580^{km} und 925^{km} gegen 789^{km} sind also ganz erheblich.

In diesem Zusammenhange erwähnen wir auch noch ein Werk über Feld- und Landmessung aus dem Altertum, nämlich *Heron* (etwa 200 v. Chr.) über das Diopter (περὶ διόπτρας) vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1876“ S. 120, 1887 S. 553, S. 674, 1888 S. 282, S. 325, S. 365.

Nach diesem haben wir über eine im Mittelalter ausgeführte Erdmessung zu berichten, welche wir den *Arabern* verdanken. Diese machten etwa um 827 nach Chr. eine Breitengradmessung, über welche der Niederländer Snellius in seinem Werke „Eratosthenes Batavus“ S. 107—112 nach Citat eines arabischen Schriftstellers Abelfedeas (1322) etwa folgendes berichtet: Die Messung geschah auf Befehl des Khalifen *Almanun* in der Ebene Zinjar (Sindschar nordwestlich von Bagdad) unter der Breite 36° 20′.

Das Ergebnis war:

$$1 \text{ Meridiangrad} = 56\frac{2}{3} \text{ Meilen} = \frac{170}{3} \text{ Meilen}$$

$$1 \text{ Meile} = 4000 \text{ Ellen,}$$

also der Meridianquadrant der Erde:

$$Q = 90 \text{ Grad} = 90\,\frac{170}{3}\,4000 = 20\,400\,000 \text{ Ellen.}$$

Weiter soll sein 1 Elle = 24 Zoll und 1 Zoll = 6 Gerstenkornbreiten; was ist aber nun 1 Gerstenkornbreite? Snellius nahm an: 1 Gerstenkornbreite $= \frac{1}{89}$ rheinländische Fuss, also $= \frac{0{,}313853}{89} = 0{,}00352644$ Meter, und dieses giebt 1 Meridiangrad = 115 103 Meter und:

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,359 \text{ Kilometer.}$$

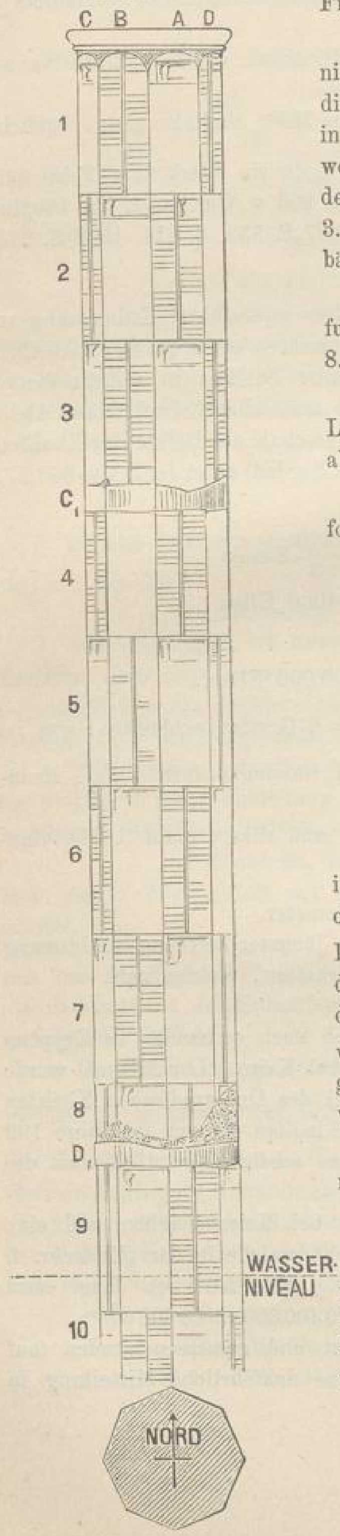
Statt dieser Gerstenkorn-Rechnung haben wir in jüngster Zeit eine Bestimmung der arabischen Elle nach dem Nilmesser von Kairo erhalten, welche nahe auf den richtigen Wert des Erdumfangs führt.

Die arabische Elle mit ihren 24 Zoll ist nämlich noch vorhanden in Egypten an dem Nilmesser (Mikyas) auf der Nilinsel Rodah bei Kairo. Der Mikyas wurde im Jahre 97 der Hedschrah (716 nach Chr.) auf Befehl des Omayyadischen Khalifen Suleman (715—717) erbaut und von dem Abbasiden-Khalifen Manun im Jahre 199 der Hedschrah (814 n. Chr.) repariert. (Dieser *Manun* scheint der *Al-Manun* der Gradmessung zu sein.)

Im Jahre 1874 habe ich die Nilmesser-Säule bei Kairo gesehen und eine flüchtige Zeichnung und Messung von derselben gemacht, welche in der „Zeitschr. f. Verm. 1869“ S. 106—107 mitgeteilt ist. Die arabische Elle fand ich dabei etwa = 0,52^{m}, also ist der Erdmeridianquadrant $= 0{,}52 \times 20\,400\,000 = 10\,608\,000^{m}$.

Inzwischen ist der Nilometer genauer untersucht und gemessen worden (auf unsere Anregung) von Dr. Reiss in Kairo, worüber eine ausführliche Mitteilung in

Fig. 3.
Alt-arabischer Nil-Pegel bei Kairo.
Massstab 1 : 30.



der „Zeitschr. f. Verm. 1889" S. 439—445 von Dr. Reiss gegeben wurde, aus welcher wir auch die nebenstehende Fig. 3. als Darstellung der Nilometer-Säule entnehmen.

Hiernach ist die Säule in ihrem jetzigen Zustande nicht mehr das ursprüngliche Bauwerk selbst, sondern die Säule war gebrochen oder umgestürzt und ist später in unvollkommener Weise wieder zusammengesetzt worden, denn die Säule zeigt eine Knickung zwischen der 8. und 9. Elle und eine Abweichung zwischen der 3. und 4. Elle. An beiden Stellen sind breite Bleibänder um die Säule gelegt.

Bei D_1 muss eine grössere Zerstörung stattgefunden haben, so dass es nötig wurde, einen Teil der 8. Elle abzunehmen.

Die einzelnen Ellen sind nicht genau gleich, ihre Länge schwankt zwischen 0,525^m und 0,550^m, die Unterabteilungen sind ganz ungenau eingetragen.

Im Einzelnen gab die Messung von Herrn Reiss folgendes:

1. Elle	= 0,525^m	
2. „	= 0,535	
3. u. 4. Elle	= 1,085	(0,5425)
5. Elle	= 0,550	
6. „	= 0,546	
7. „	= 0,5355	
9. „	= 0,5425	
Summe 8 Ellen	= 4,319^m	
Mittel 1 Elle	= 0,53987^m	

Zur Kontrolle sind ausserdem die 7 oberen Ellen im Ganzen gemessen worden und zwar einmal von oben nach unten und dann von unten nach oben.

Die 7 ersten Ellen von oben nach unten gemessen	= 3,785^m
die 7 ersten Ellen von unten nach oben gemessen	= 3,775
die 7 ersten Ellen im Mittel	= 3,780

woraus sich die Länge der einzelnen Elle zu 0,54^m ergiebt, was mit dem Mittel aus den Einzelmessungen vollständig stimmt.

Nehmen wir hiernach 1 Elle = 0,54^m, so wird nach der arabischen Gradmessung

$$\text{Meridianquadrant} = 0{,}54 \times 20\,400\,000 = 11\,016\,000^m$$

Dieses ist um 10% zu viel, was kein glänzendes Ergebnis ist. Wollte man den Erdquadranten = 10 000 000^m erhalten, so müsste man die Elle = 0,49^m setzen, was nach dem Zustande des Nilometers nicht angeht.

Trotzdem schien es nicht uninteressant, die vorstehenden Massbestimmungen zu jener alten vielbesprochenen arabischen Gradmessung mitzuteilen.

Seit jener Zeit geschah 700 Jahre lang nichts mehr.

Die erste Erdmessung nach diesem langen Zeitabschnitt verdanken wir dem französischen Arzt *Fernel*, welcher im Jahr 1525 die Breiten von Paris und Amiens mittelst eines Quadranten, und die Entfernung beider Orte mittelst der Umdrehungen seines Wagenrades mass, und damit ein Ergebnis erzielte, welches zufällig nahezu richtig ist, nämlich nach Lalande's Nachrechnung:

$$1 \text{ Meridiangrad} = 57\,070 \text{ Toisen} = 111\,232 \text{ Meter}$$
$$\text{Meridian-Quadrant} = 10\,011 \text{ Kilometer},$$

also der Fehler nur $= + 0{,}1\%$.

Eine neue Epoche der Erdmessung beginnt mit dem Niederländer *Willebrord Snellius* (1580—1626).

Snellius war, wie aus seinem Werke „Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, a Willebrordo Snellio, Lugduni-Batavorum 1617“ hervorgeht, ein nicht nur mathematisch sehr verständiger, sondern auch allgemein sehr gebildeter und scharfsinniger Mann. Die Erdmessung verdankt ihm wenn nicht die „Erfindung“, doch die erste uns überlieferte, auf etwa 1′ in den Winkeln gemessene und richtig trigonometrisch berechnete Triangulierung, worüber bereits in unserem I. Bande, „Handb. d. Verm. 4. Aufl. 1895“, S. 478 berichtet worden ist.

Die ganze Triangulierung von Snellius umfasst 33 Dreiecke, welche im wesentlichen in der heute noch üblichen Weise zu einer Breitengradmessung zwischen Alkmaar und Bergen op Zoom benützt wurden, wie folgende Zahlen zeigen:

Punkt	Breiten	Breiten-Unterschied	Meridianbogen (triang.)
Alkmaar	52° 40′ 30″		
		1° 11′ 30″	33 930 Rheinl. Ruten
Bergen op Zoom	51° 29′ 0″		

$$\text{Hiernach ist 1 Grad} = \frac{60'}{71{,}5'}\, 33\,930 = 28\,473 \text{ Ruten.}$$

Nach diesem Ergebnis in Verbindung mit einer zweiten ähnlichen Messung nahm Snellius den Meridiangrad = 28 500 Rheinl. Ruten an. Dieses ist = 107 7338 Meter, und damit berechnet man auch:

$$\text{Meridian-Quadrant} = 9\,660 \text{ Kilometer.}$$

Hiernach hat die Snellius'sche Erdbestimmung einen Fehler von $3{,}4\%$. Snellius machte selbst Nachmessungen, aber erst sein Nachfolger *Musschenbroek* brachte Snellius' Werk zum Abschluss; er fand 1719 „secundum mensuram ultimam Snellii et nostram“ 1 Meridiangrad = 29 514 Ruten oder = 111 157 Meter, also

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,004 \text{ Kilometer.}$$

Inzwischen waren auf Snellius zwei durch die Art ihres Verfahrens merkwürdige Gradmessungen gefolgt. Im Jahr 1633 mass *Norwood* den Bogen zwischen London und York unmittelbar mit der Kette.

Grimaldi und *Riccioli* bestimmten 1645 in Italien durch gegenseitige *terrestrische* Zenitdistanzen einen Meridiangrad.

Diese Messung terrestrischer Zenitdistanzen, welche auch Snellius schon in seinem Schluss-Kapitel erwähnt, wäre das einfachste und beste Mittel zur Messung der Erde, wenn die Strahlenbrechung nicht bestünde, oder wenigstens der Rechnung besser zugänglich wäre, als es bis jetzt der Fall ist.

Indem wir nun den genauen Erdmessungen näher kommen, haben wir auch kurz zu erwähnen, *welche* Erdfläche bestimmt werden soll: Als Erdoberfläche im Sinne dieser Messungen ist zu betrachten die ruhend gedachte Meeresfläche, nebst ihrer unter den Kontinenten stetig angenommenen Fortsetzung.

Die wichtigsten Erdmessungen des 17. und 18. Jahrhunderts sind die *französischen.* Dieselben wurden von der im Jahre 1666 gegründeten Pariser Akademie veranlasst, und von *Picard* geleitet. Der Zweck dieser Messungen war ein zweifacher, erstens die Herstellung einer guten Karte von Frankreich und zweitens die Bestimmung der Grösse der Erde.

Aus der Fortsetzung der Picardschen Messungen, welche von *Lahire, Dominique Cassini* und *Jaques Cassini* geleitet wurde (1683—1716 südlich bis Collioure, nördlich bis Dünkirchen), schien zu folgen, dass die Erde an den Polen zugespitzt sei, während Newtons Theorie und Richers Pendelversuche das Gegenteil behaupteten. Entschieden wurde die Frage durch die von den Franzosen im Jahre 1735 nach Peru und Lappland geschickten Gradmessungs-Expeditionen, durch welche festgestellt wurde, dass am Äquator der Erdmeridian stärker gekrümmt ist als in der Nähe des Pols, was mit der Newtonschen Theorie stimmt.

Die Gradmessung in Peru, 1735—1741, ist beschrieben in dem Werk: „Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hemisphère australe, tirée des observations de Mrs. de l'académie royale des sciences, envoyés par le roi sous léquateur, par M. de la Condamine. Paris 1751."

Die Gradmessung in Lappland, ausgeführt 1736—1737, ist beschrieben von *Maupertuis:* „La figure de la terre. Paris 1738."

Es folgte 1740 eine Nachmessung des französischen Meridianbogens durch Cassini de Thury (III) und Lacaille.

Folgendes sind die wichtigsten hierauf bezüglichen Zahlenwerte:

Picards Messung des Bogens zwischen Paris und Amiens, welche 1669 begann, gab einen Breitengrad = 57 060 Toisen und damit:

Meridianquadrant = 10 009 081 Meter.

Die nördliche und südliche Fortsetzung gab folgendes:

		Mittelbreite	1 Meridiangrad
nördlich	zwischen Paris und Dünkirchen	49° 56′	56 960 Toisen
	„ Paris und Amiens	49° 22′	57 060 „
südlich	„ Paris und Bourges	47° 57′	57 098 „

Hieraus schien eine gegen die Pole zugespitzte Erdform zu folgen.

Wir haben versucht, hieraus ein langgestrecktes Ellipsoid zu berechnen, das also eine *negative* Abplattung erhält. Es fand sich:

Meridianquadrant = 10 042 650 Meter, Abplattuug = 1 : — 66.

Die peruanische und die lappländische Gradmessung (letztere mit der späteren Verbesserung und Erweiterung durch Svanberg, 1801—1803) geben folgendes:

	Mittelbreite	1 Meridiangrad
Lappland	+ 66° 20′ 10″	57 196 Toisen
Peru	— 1° 31′ 30″	56 734 „

Hieraus wird berechnet

Meridianquadrant = 10 000 157 Meter, Abplattung = 1 : 310,3.

Von den nun folgenden aussereuropäischen Gradmessungen erwähnen wir hier besonders diejenige von Mason und Dixon in Nordamerika, 1764—1768.

Dieselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass eine Gerade von 434 011,64 engl. Fuss (= 132 286 Meter) Länge unmittelbar mit Messlatten (also ohne Triangulierung) nahezu in der Meridianrichtung gemessen wurde. Im ganzen wurde der Meridianbogen zwischen den Breiten 39° 56′ 19″ und 38° 27′ 34″ bestimmt.

(Eine neuere Mitteilung hierüber s. „Zeitschr. f. Verm.“ 1888, S. 33—39.)

In die zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts fällt auch die Gradmessung von La Caille am Kap der guten Hoffnung, Beccarias Messung in Turin, Liesganigs Messung in Ungarn, dann die Anfänge der englischen Messungen in England selbst und in Indien.

Die wichtigste Gradmessung vom Schluss des vorigen und Anfang dieses Jahrhunderts ist jedoch wieder eine französische, nämlich die von *Delambre* und *Méchain* 1792—1808 zur definitiven Feststellung des *Meters* ausgeführte. Das hierüber veröffentlichte Werk ist: Base du système métrique décimal, ou mesure du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone, exécutée en 1792 et années suivantes, par M. M. Méchain et Delambre, rédigée par M. Delambre. Tome premier Paris janvier 1806, tome second Paris juillet 1807, tome troisième Paris novembre 1810.

Das Meter sollte möglichst genau der zehnmillionste Teil des Erdquadranten sein. Zur möglichst genauen Ermittlung desselben wurde die Gradmessung von Delambre und Méchain 1792 unternommen.

Dieselbe gab den Bogen zwischen Dünkirchen und Montjouy = 275 792,36 Modules (1 Module = 2 Toisen) und dieser nahezu 10° grosse Bogen zwischen den Breiten 51° 2′ 8,85″ und 41° 21′ 44,96″ wurde als Grundlage für das metrische System genommen. Um die Abplattung zu erhalten, wurde dieser Bogen mit der peruanischen Gradmessung kombiniert, woraus die Abplattung 1 : 334 erhalten wurde.

Nun wurde der Meridianquadrant berechnet = 2 565 370 Modules = 5 130 740 Toisen, und da eine Toise 864 Par. Linien hat, so ist hiernach:

$$1 \text{ Meter} = \frac{5\,130\,740 \times 864}{10\,000\,000} = 443{,}295\,936 \text{ Par. Linien},$$

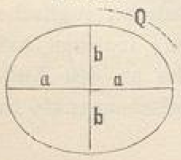
was auf 443,296 abgerundet wurde.

Indem man umgekehrt für die Delambre sche Messung das Meter = 443,296 Par. Linien als Einheit annimmt, hat man:

Meridianquadrant = 10 000 000 Meter, Abplattung = 1 : 334.

(Vorstehende Zahlenangaben finden sich in dem Werk: Base du système métrique III. Band S. 433, S. 619—622.)

Fig. 4.
Erdmeridian-Ellipse.



Bestimmung der Meridian-Ellipse.

Nachdem die Abplattung der Erde entschieden war, handelte es sich nicht mehr bloss wie früher um *eine* Unbekannte, nämlich den Halbmesser der Erdkugel, sondern um *zwei* Unbekannte, etwa die beiden Halbachsen a und b der Meridian-Ellipse (Fig. 4.) oder statt dessen um eine Halbachse a und dazu die Excentricität $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$ oder den Meridianquadranten Q und die Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a}$.

Aus der grossen Halbachse a und der Abplattung α berechnet man, wie wir später entwickeln werden, den Meridianquadranten Q nach der Formel:

$$Q = \frac{a\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right)$$

Wenn zwei Gradmessungen in dem bisher gültigen Sinne vorliegen, nämlich ein Meridianbogen und die beiden geographischen Breiten der Endpunkte für je eine Gradmessung, so ist es mathematisch betrachtet eine leichte Aufgabe, mit genügender Näherung eine Ellipse zu bestimmen, welche diesen *zwei* Gradmessungen genügt, und wir werden später z. B. die Berechnung der oben angegebenen Gradmessungen von Lappland und Peru in wenigen Gleichungen entwickeln können.

Als man aber im vorigen Jahrhundert anfing, mehr als zwei Gradmessungen zusammen in Rechnung zu nehmen, stiess man auf starke Widersprüche, welche sich aus den unvermeidlichen Messungsfehlern kaum erklären liessen und bald den Gedanken nahe legten, dass die Erde nicht genau ein Umdrehungs-Ellipsoid sei.

Dennoch ist nun ein Zeitraum von wohl 100 Jahren (etwa von 1740—1840) der Aufgabe gewidmet, eine solche *Ausgleichung* der zahlreichen Gradmessungen zu erzielen, dass die übrig bleibenden Widersprüche in den Messungen der geographischen Breiten in ihrer Gesamtheit möglichst klein ausfallen.

Insofern fällt die Geschichte der Gradmessungs-Berechnungen mit der Geschichte der Methode der kleinsten Quadrate zusammen, welche wir in unserem „I. Bande Handb. d. Verm., 4. Aufl. 1895 (Einleitung)“ behandelt haben.

Die erste öffentliche Mitteilung über die Methode der kleinsten Quadrate, nämlich *Legendre's* Abhandlung „sur la méthode des moindres carrés“, welche als Anhang der „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes“ im Jahre 1806 erschien, enthält zugleich auch die erste Ausgleichung von Gradmessungen nach dieser Methode. Legendre nimmt 5 geographische Breiten zwischen Dünkirchen (51° 2′ 10,50″) und Montjouy (41° 21′ 44,80″) mit den 4 dazwischen liegenden französischen Meridianbögen, und macht damit eine theoretisch richtige Ausgleichung, welche jedoch den sehr grossen Abplattungswert 1 : 148 und auch einen zu kleinen Meridianquadranten = 9 997 780 Meter gab; doch berührt uns hier weniger das Erdberechnungs-Ergebnis als das theoretisch richtige dabei angewendete Verfahren.

Die nächste Ausgleichung dieser Art machte *Walbeck* im Jahre 1819, in einer kleinen Abhandlung: „De forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcubus meridiani, definiendis“ (Abo, 1819), welche lange nur aus einem Citate von Gauss in der „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona“ 1823, S. 72 und S. 82 bekannt gewesen, vor kurzem in Helsingfors 1891 neu gedruckt und von da auch in der „Zeitschr. f. Verm. 1893“ S. 426—434 abgedruckt worden ist.

Walbeck hat die peruanische, die beiden ostindischen, die französische, englische und die neuere lappländische Gradmessung der Rechnung unterworfen; indessen hat er bei jeder einzelnen Gradmessung nur den ganzen Bogen, oder die an den *End*punkten beobachteten Polhöhen in Betracht gezogen, ohne die Zwischenpunkte zu berücksichtigen. Das Ergebnis war Abplattung = 1 : 302,78 und mittlerer Meridiangrad = 57 009,76 Toisen, dieses giebt:

Meridianquadrant = 10 000 268 Meter Abplattung = 1 : 302,78.

Neun Jahre später, 1828, haben wir eine abermals verbesserte und erweiterte Ausgleichung, welche *Schmidt* in Göttingen auf Gauss' Veranlassung machte, wie in der „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona" S. 82—84 von Gauss mitgeteilt wird. Schmidt hat die an den Zwischenpunkten beobachteten Polhöhen mit berücksichtigt, auch die hannoversche Gradmessung zugezogen, so dass er die peruanische, erste und zweite ostindische, französische, englische, hannoversche und schwedische Gradmessung, mit zusammen 25 Polhöhen nach dem Grundsatze ausglich, dass die Quadratsumme der übrigbleibenden Polhöhenfehler ein Minimum wird. Das Ergebnis war: Abplattung 1 : (298,39 ± 12,5) und mittlerer Meridiangrad = 57 010,35 ± 5 Toisen, oder:

Meridianquadrant = 10 000 372 Meter Abplattung = 1 : 298,39
± 88 ± 12,50

Der mittlere Polhöhenfehler ist ± 3,18″.

Schmidt hat solche Berechnungen noch weiter fortgesetzt, und hievon Mitteilung gemacht in dem „Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie von Dr. J. C. Eduard Schmidt, Privatdozent auf der Universität Göttingen." Erster Teil 1829. Vorrede Seite IV—V. und Astr. Nachr. 7. Band (1829) Nr. 161. S. 329—332.

Die letzte Bestimmung Schmidts ist vom Jahr 1830, und giebt (nach Listing (3)):

Meridianquadrant = 10 000 061 Meter Abplattung = 1 : 297,648.

Der Engländer *Airy* machte im Jahre 1830 eine Bestimmung aus 14 Breitengradmessungen mit Hinzuziehung einiger gemessener Längengrade. Die Ergebnisse sind nach „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland, London 1858, introduction" Seite XVI: $a = 20\,923{,}713$ engl. Fuss und $b = 20\,853{,}810$ engl. Fuss, woraus wir berechnen:

Meridianquadrant = 10 001 012 Meter Abplattung = 1 : 299,325.

Wir kommen nun 1837—1841 an die Bessel sche Ausgleichung der Gradmessungen, welche auf einer sehr gründlichen Prüfung und Sichtung des bis dahin angesammelten Gradmessungsstoffes beruht. Bessel benützte die folgenden Messungen:

Gradmessung	Mittelbreite	Amplitude	Zahl der Polhöhen
1. Peruanische	— 1° 31′	3° 7′	2
2. erste Ostindische	12 32	1 35	2
3. zweite Ostindische	16 8	15 58	7
4. Französische	44 51	12 22	7
5. Englische	52 2	2 50	5
6. Hannoversche	52 32	2 1	2
7. Dänische	54 8	1 32	2
8. Preussische	54 58	1 30	3
9. Russische	56 4	8 2	6
10. Schwedische	66 20	1 37	2
	Summen	50° 34′	38

Die Einzelheiten der Messungen und der Ausgleichung (Quadratsumme der 38 Polhöhen-Verbesserungen) sind von Bessel mitgeteilt in einer Abhandlung in den astr. Nachr. 14. Band (1837) Nr. 333, S. 333—346. Es wurde jedoch eine Neuberechnung nötig wegen Auffindung eines Fehlers in der französischen Gradmessung, worüber Bessel im 19. Bande der astr. Nachr. (1842) Nr. 438, S. 97—116 berichtet. Die Besselschen End-Ergebnisse sind (2. Dezember 1841):

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,000\,855{,}76 \text{ Meter} \atop \pm 498{,}23 \quad , \quad \text{Abplattung} = 1 : 299{,}1528 \atop \pm 4{,}667$$

Diese Besselschen Erddimensionen haben rasch allgemeinste Anerkennung und weiteste Verbreitung gefunden; sie sind namentlich deswegen wichtig, weil Hilfstafeln in grosser Zahl und Ausdehnung für praktische Vermessungen und Berechnungen darauf gegründet sind.

Mit diesen Mitteilungen über *Berechnungen* sind wir der Geschichte der *Messungen* zum Teil vorausgeeilt.

Ausser den schon erwähnten französischen Arbeiten haben wir in diesem Jahrhundert folgende Erdmessungen zu erwähnen:

Die *dänische* Gradmessung unter Leitung von *Schumacher* von 1816 an. Zu einem abgeschlossenen Werke gelangte die dänische Gradmessung in jüngster Zeit unter Leitung von *Andrä* durch das Werk: Den Danske Gradmaaling, 1. Band, Kopenhagen 1867, 2. Band 1872, 3. Band 1878, 4. Band 1884, vgl. hiezu unseren I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 487.

Hieran schloss sich die *hannoversche* Gradmessung von *Gauss* 1821—1823, und bald folgte die Gradmessung in Ostpreussen von *Bessel*. Über diese zwei klassischen Werke haben wir ebenfalls schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 493 und S. 499 das Wichtigste angegeben.

Die grösste Ausdehnung in Europa hat die *russische* Gradmessung von *Struve* und *Tenner*. Der erste Teil hievon ist behandelt in dem Werk: „Beschreibung der von der Universität Dorpat veranstalteten Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, ausgeführt und bearbeitet in den Jahren 1821—1831 mit Beihilfe des Kapitän-Lieutenants B. W. v. Wrangel und Anderer, von F. G. W. Struve, Direktor der Dorpater Sternwarte. Dorpat 1831," vgl. auch hiezu unseren Band I, 4. Aufl. 1895, S. 486.

Von russischer Seite sind hier auch die Arbeiten des Generals *v. Schubert* zu erwähnen, welcher zuerst den Versuch machte, die Erde durch ein *drei*axiges Ellipsoid darzustellen, und auch andere Erdberechnungen ausführte. Weiteres hierüber giebt Listing (11), vgl. das Litteratur-Verzeichnis am Schlusse dieses Abschnitts S. 14.

Die *englischen* Messungen begannen im Jahre 1783 unter General *Roy*. Wir haben hierüber das grosse Werk: „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland. Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived from, etc., by Captain Alexander Ross *Clarke* under the direction of Colonel *H. James*, Superintendent of the Ordnance survey. London 1858," (vgl. Band I, 4. Aufl. 1895, S. 484—486).

Auf Seite 771 dieses Werkes wird als Ergebnis einer Ausgleichung von 8 Gradmessungen mit 66 Breiten mitgeteilt:

$$a = 20\,926\,348 \qquad b = 20\,855\,233 \text{ engl. Fuss,}$$

woraus wir berechnen:

Meridianquadrant = 10 001 983 Meter, Abplattung = 1 : 294,261.

Hier sind auch die britisch-ostindischen Arbeiten zu erwähnen, 1790 begonnen von Reuben Burrow, fortgesetzt von Dalby, Lambton Everest bis 1847, sowie die zweite Gradmessung am Kap der guten Hoffnung von Maclear 1836—1848.

Unter den englischen Erdmessungsarbeiten sind namentlich auch die zahlreichen Erd-Ellipsoid-Berechnungen anzuführen, welche Clarke seit 1856 bis in die neueste Zeit ausgeführt hat. (Listing (7)—(10).) Wir wollen hievon diejenigen beiden Bestimmungen hierhersetzen, welche in den Verhandlungen der permanenten Konferenz der internationalen Erdmessung von 1887 angegeben sind in Beilage I, Lotabweichungen, von Helmert, S. 5—6, nämlich mit Zufügung des Meridianquadranten:

Clarke 1866 $a = 20\,926\,062$ $b = 20\,855\,121$ engl. Fuss
Meridianquadrant = 10 001 888 Meter, Abplattung = 1 : 294,978
Clarke 1880 $a = 20\,926\,202$ $b = 20\,854\,895$ engl. Fuss
Meridianquadrant = 10 001 871 Meter, Abplattung = 1 : 293,466.

In diesem Zusammenhange haben wir auch die nordamerikanischen Messungen einzureihen, deren erste Anfänge, die Mason-Dixon sche Gradmessung von 1764, wir schon oben erwähnt haben. Die Fortsetzung der nordamerikanischen Messungen in der Neuzeit sind wissenschaftlich und praktisch wichtig und interessant. Das Hauptwerk hierüber ist:

„Professional papers of the corps of engineers, U. S. Army, Nr. 24. Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Lieut. Col. C. B. Comstock, Corps of Engineers, Brevet Brigadier-General, U. S. A., aidet by the Assistents on the survey. Washington: Government printing office. 1882.“ (Vgl. „Zeitschr. f. Verm.“ 1888, S. 203—207 und S. 385—395).

Lotabweichungen, Geoid.

Schon die ersten Berechner des Erdellipsoids hatten erkannt, dass die Widersprüche bei solchen Berechnungen und Ausgleichungen nicht durch Messungsfehler allein erklärt werden können, dass vielmehr die ideale Erdfläche überhaupt nicht genau die Form eines Umdrehungs-Ellipsoides hat. Trotzdem wurden die Berechnungen lange in der Form fortgeführt, als ob es sich nur um unregelmässige Messungsfehler handelte. Insofern jedoch die Widersprüche der Berechnungen nicht den Messungen, sondern den Abweichungen der Erdform von dem Ellipsoid zuzuschreiben sind, nannte man diese Widersprüche „Lotabweichungen“.

Die erste Klarlegung der hiebei vorkommenden geodätisch-physikalischen Begriffe hat *Listing* gegeben in der kleinen Abhandlung: „Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde“ in den Nachrichten von der K. Ges. d. Wiss. und der G. A. Universität zu Göttingen, 5. Febr. 1873. Nr. 3. S. 33—98. (S. 41 Einführung des „*Geoids*“.)

Man hat hiernach drei verschiedene Flächen zu unterscheiden:

1) Die Begrenzungsfläche zwischen den starren und tropfbarflüssigen Teilen der Erde einerseits und der Atmosphäre andererseits, d. h. die physische Erdoberfläche.

2) Die Oberfläche des gesamten Meeres in seinem Gleichgewichtszustand, also abgesehen von Flut und Ebbe und Wellenschlag; unter den Kontinenten denkt man sich diese Fläche erweitert durch ein Netz von Kanälen, welche unter sich und mit dem freien Meer in Verbindung stehen. Diese Fläche, welche, dem hydrostatischen Gesetz der ruhenden Flüssigkeit entsprechend, alle Lotlinien (Richtung der Schwerkraft) rechtwinklig durchschneidet, heisst nach Listing das *Geoid*.

3) Da die Abweichungen des Geoids von einem Umdrehungsellipsoid im Vergleich mit den Erddimensionen selbst klein sind, z. B. in Deutschland nach den neuesten Bestimmungen von Helmert (1888) nur etwa 5—10 Meter, kann man auf die Bestimmung eines idealen Erdellipsoids ausgehen, dessen Umdrehungsaxe mit der wirklichen Erdaxe zusammenfällt, dessen Lage im übrigen jedoch verschieden definiert werden kann. Listing setzt hiefür fest:

erstens, es soll das Ellipsoid mit dem Geoid gleiches Volumen haben,
zweitens, es soll die Summe der Beträge von Erhöhungen und Vertiefungen zwischen dem Geoid und dem Ellipsoid ein Minimum sein.

Hiernach berechnet Listing ein „typisches Ellipsoid" mit folgenden Dimensionen (Listing (20)):

$$a = 6\,377\,365^{m} \qquad b = 6\,355\,298^{m}$$

$$\text{Meridianquadrant } Q = 10\,000\,218^{m} \qquad \text{Abplattung} = 1 : 289{,}00$$

$$\text{Mittlerer Halbmesser } R = \sqrt[3]{a\,a\,b} = 6\,370\,000^{m}.$$

Pendelbeobachtungen.

Wie schon im vorigen Jahrhundert das Pendel Richers zur ersten Aufklärung über die Abplattung beigetragen hatte, so sind heute noch die Pendelbeobachtungen ein wichtiges Hilfsmittel der Erdmessung.

Eine Bestimmung der Abplattung der Erde aus Pendelbeobachtungen hat Helmert ausgeführt in dem Werke: „Die mathem. und phys. Theorien der höheren Geodäsie, II. Band, Leipzig 1884". Auf S. 215—241 dieses Werkes wird aus einer Reduktion und Ausgleichung von 122 Pendellängen die Abplattung der Erde abgeleitet:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{,}26 \pm 1{,}26}$$

Im Anschluss hieran möge auch die Annahme von Helmert für ein Referenz-Ellipsoid zu Lotabweichungs-Berechnungen hier hergesetzt werden, nämlich nach den „Verhandlungen der Konferenz der perm. Kommiss. d. internat. Erdm. von 1887, Berlin 1888, Beilage I Lotabweichungen" S. 7, ein Ellipsoid, dessen lineare Dimensionen (nach verschiedenen Erwägungen) unter Festhaltung des Besselschen (genäherten) Abplattungswertes aus der französisch-englisch-russischen Breitengradmessung hervorgehen:

$$a = 6\,378\,153^{m} \qquad b = 6\,356\,832^{m}$$

$$\text{Meridianquadrant} = 10\,002\,041 \qquad \text{Abplattung} = 1 : 299{,}149.$$

Internationale Erdmessung.

Der Mitarbeiter Bessels an der Gradmessung in Ostpreussen, *Baeyer*, hat das grosse Verdienst der Begründung der internationalen Erdmessung. (*J. J. Baeyer*, geb. 1794, gest. 1885, vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1885, S. 369—372, und Vierteljahrsschr. d. astr. Ges. 1886, S. 2—13").

Im Jahre 1862 veröffentlichte General Baeyer den ersten „General-Bericht über den Stand der mitteleuropäischen Gradmessung“ mit Teilnahme von 15 Staaten.

Im Herbst 1864 fand die „erste allgemeine Konferenz der Bevollmächtigten zur mitteleuropäischen Gradmessung“ in Berlin statt, dabei wurde als erstes Organ der Vereinigung eine „permanente Kommission“ bestellt, welche von da an jährlich einmal tagte, während die allgemeine Konferenz nur von 3 zu 3 Jahren zusammentritt.

In demselben Jahre 1864 erfolgte auch die Schaffung des Centralbureaus der mitteleuropäischen Gradmessung.

Auf der allgemeinen Konferenz von 1867 wurde die „mitteleuropäische Gradmessung“ zur „europäischen Gradmessung“ erweitert.

Am 10. September 1885 starb General Baeyer; sein Nachfolger wurde Professor *Helmert*.

Im folgenden Jahre 1886 fand die VIII. allgemeine Konferenz in Berlin statt, wobei die „europäische Gradmessung“ zur „internationalen Erdmessung“ erweitert, und die Vereinigung im ganzen reorganisiert wurde. Eine abermalige Neuberatung und Organisation der internationalen Erdmessung erfolgte auf der XI. allgemeinen Konferenz in Berlin, 1895. („Zeitschr. f. Verm. 1895,“ S. 569—586 und 625—630.)

Die Geschichte der internationalen Erdmessung ist im wesentlichen enthalten in den seit 1863 nahezu jährlich erschienenen „Generalberichten“ und „Verhandlungen der allgemeinen Konferenzen“ u. s. w. der Gradmessung bzw. Erdmessung.

Verschiedene Ergebnisse der Erdmessung und Erdberechnung.

Jahr	Bezeichnung	Meridian-Quadrant Meter	Abplattung
1617	Snellius	9 660 000	1 : ∞
1719	Musschenbroek	10 004 000	1 : ∞
1720	Cassini	10 044 000	1 : (—66)
1740—1803	Peruanische und verbesserte Lappländische Gradmessung	10 000 157	1 : 310
1792—1806	Delambre, Annahme für das Metermass	10 000 000	1 : 334
1819	Walbeck.	10 000 266	1 : 302,76
1830	Schmidt	10 000 061	1 : 297,648
1830	Airy	10 001 012	1 : 299,325
1841	Bessel	10 000 856	1 : 299,153
1866	Clarke	10 001 888	1 : 294,978
1872	Listing (typisches Ellipsoid)	10 000 218	1 : 289,000
1880	Clarke	10 001 871	1 : 293,466
1884	Helmert (Pendel-Beobachtungen) . .	. .	1 : 299,26
1887	Helmert (Referenz-Ellipsoid)	10 002 041	1 : 299,15

Litteratur zur Geschichte der Erdmessungen.

1617. *Snellius.* Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, u. s. w. Lugduni Batavorum, 1617 (I. Teil Altertum, Eratosthenes, Posidonius u. s. w., II. Teil niederländische Triangulierung).

1729. *Musschenbroek.* Dissertatio de magnitudine terrae, als Teil (S. 357—420) des allgemeinen Werkes: Petri van Musschenbroek physicae experimentales et geometricae u. s. w. Lugduni Batavorum 1729.

1806. *Delambre.* Base du système métrique I. Discours préliminaire.

1827. *Gehlers* physikalisches Wörterbuch, dritter Band, *Erde*, S. 825—940.

1829. *Schmidt.* Lehrbuch der math. und physischen Geographie. Göttingen 1829.

1849. *Encke.* Über die Dimensionen des Erdkörpers. Berl. Astr. Jahrb. für 1852, S. 318 u. ff.

1860. *Posch.* Geschichte und System der Breitengradmessungen. Freysing 1860.

1861. *Baeyer.* Über die Grösse und Figur der Erde. Eine Denkschrift zur Begründung einer mitteleuropäischen Gradmessung. Berlin 1861.

1868. *Fischer.* Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt 1868.

1869. *Wolf.* Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. Zürich 1869. 2. Band S. 125—146. (Litteraturausgaben.)

1873. *Mädler.* Geschichte der Himmelskunde. Braunschweig 1872, I. Band, S. 89, S. 142 und ff. (Litteraturangaben.)

1873. *Listing.* Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde. Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahr 1873. Göttingen 1873, S. 33—98.

1878. *Listing.* Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers. Aus den Nachrichten der K. Ges. der Wiss. Göttingen 1878.

1880. *Clarke.* Geodesy by Colonel A. R. Clarke, C. B. royal engineers; F. R. S.; u. s. w. Oxford at the Clarendon press. 1880.

1880—1884. *Helmert.* Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Einleitung und I. Teil, die mathematischen Theorien. Leipzig 1880. II. Teil, die physikalischen Theorien. Leipzig 1884.

1885—1888. *Westphal.* Basisapparate und Basismessungen (mit Angaben über die älteren Gradmessungen). Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1885 und 1888.