



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

Kapitel I. Triangulierung erster Ordnung.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](#)

Kapitel I.

Triangulierung erster Ordnung.

§ 2. Aufsuchung und Auswahl der Dreieckspunkte.

In dem zu vermessenden Gebiete werden solche hervorragende Punkte aufgesucht, zwischen welchen zusammengesehen werden kann, auf welchen feste Beobachtungsplätze eingerichtet werden können, und welche günstige Dreiecksverbindungen geben. Die Entfernung solcher Punkte nimmt man etwa 20^{km} bis 50^{km}, nötigenfalls auch noch erheblich grösser.

Zur Aufsuchung von Triangulierungs-Punkten muss man das Land bereisen, namentlich alle *hoch* gelegenen Punkte, hohe Berge, Kirchtürme u. s. w. besteigen und jedenfalls alles was man sieht, durch flüchtige Winkelmessung, oder auch nur durch Kompasspeilung, vorläufig bestimmen.

In früheren Zeiten mass man wohl auch sofort endgültige Winkel; so berichtete z. B. *Bohnenberger* über seine erste Triangulierung von Württemberg, von 1797: „Eine vorläufige Bereisung des Landes wurde nicht vorgenommen, um die schicklichsten Punkte zu den Hauptdreiecken aufzusuchen, daher wurden an jedem Standpunkte alle Winkel zwischen Punkten genommen, von denen man eine zur Fortsetzung der Arbeit günstige Lage erwarten konnte. Erst am Ende der Reise war ich im stande, die Hauptdreiecke heraus zu suchen, deren Winkel nachher bei der Kleinaufnahme nachgemessen und durch Vervielfältigung genauer bestimmt wurden.“

Dieses Verfahren ist heute nicht mehr am Platz aus zahlreichen Gründen: Zunächst ist im allgemeinen zu bemerken, dass Württemberg ein Hügelland ist, in welchem das Aufsuchen der Punkte am leichtesten ist, dann sind aber seit 1797 die Ansprüche an die Genauigkeit und an die günstige Form der Dreiecke so sehr gestiegen, dass das, was damals Bohnenberger als endgültige Triangulierung lieferte, heute kaum als erschöpfende Rekognosierung gelten würde (ohne dass damit Bohnenbergers Arbeit von 1797 in ihrer damaligen Bedeutung beeinträchtigt würde).

Was *günstige* Dreiecksverbindungen sind, die man aufsuchen soll, das lässt sich allgemein schwer sagen, zumal die Anschauungen hierüber verschieden sind; jedenfalls ist ein Netz von nahezu gleichseitigen Dreiecken gut.

Indem weitere Betrachtungen hierüber auf später verschoben werden, bringen wir hier einen Auszug einer sehr wertvollen Abhandlung, welche im Jahre 1887

für die „Zeitschrift für Vermessungswesen“ von einem sehr erfahrenen Beamten der Landesaufnahme geschrieben wurde, und deren Abdruck vom Verfasser der Abhandlung uns besonders gestattet wurde.

Technischer Betrieb der Feldarbeiten der Triangulation erster Ordnung bei der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme, von Vermessungsdirigent Erfurth. „Zeitschrift für Vermessungswesen“ 1887, S. 377—383 und S. 421—437.

I. Die Erkundung im allgemeinen.

Schon vor der Bereisung des Gebietes, auf welchem eine Triangulierung vorbereitet werden soll, sind gewisse Vorarbeiten zu machen, welche gewöhnlich in dem der Feld-Rekognoszierung vorhergehenden Winter ausgeführt werden. Diese Vorarbeiten sind im wesentlichen folgende:

1) Kartenstudien.

Hier kommt hauptsächlich die topographische Spezialkarte von Mittel-Europa im Massstabe 1 : 200 000 (früher Reymannsche Karte genannt) in Betracht. In diese werden alle Punkte und Seiten der bereits fertigen Triangulierung, an welche angegeschlossen werden muss, eingetragen. Nur für die Erkundung von Grundlinien und Basisvergrösserungsnetzen können Karten in grösserem Massstabe nötig werden. Sehr wichtig sind Höhenzahlen der Karte, sind solche nicht genügend vorhanden, so wird es sich empfehlen, nach weiteren Hilfsmitteln, nach Spezialkarten, geographischen Handbüchern und ähnlichen Publikationen die Höhenangaben der Karte möglichst zu vervollständigen.

2) Studium der Vorgänge.

Fast immer handelt es sich um Gebiete, welche in früherer Zeit schon mehrfach als Operationsfeld für grössere Triangulationen gedient haben. Die Landesaufnahme ist in der bevorzugten Lage, von diesen Vermessungen zum grössten Teil noch die Originalakten, Protokolle, Tagebücher, Rechnungen und eine grosse Zahl von Skizzen und Übersichtsblättern der verschiedensten Dreiecks-Konfigurationen zu besitzen. Dieses ganze ältere Material wird, so weit es für das Arbeitsgebiet in Betracht kommt, gründlich durchforscht, alles, was wertvoll oder von Interesse erscheint, herausgezogen und einem besonderen Tagebuche einverleibt.

Auf Grund dieser Studien und mit ihnen fortschreitend, werden sich ganz von selbst Projekte über vorhandene und wünschenswerte Dreiecks-Konfigurationen bilden, welche in vorläufigen Übersichtsdarstellungen zum Ausdruck gebracht, und deren Punkte, soweit sie älteren Triangulationen angehören, durch vorläufige rohe Rechnungen bestimmt werden. Dies geschieht in dem bei der trigonometrischen Abteilung eingeführten ebenen rechtwinkligen Coordinatenystem, und — da es hierbei auf einige Meter nicht ankommt — mit 4- oder 5 stelligen Logarithmen.

Die Abscissenaxe dieses Systems ist der 31. Längengrad, und die Coordinaten werden in diesem System einheitlich in ganz Preussen gezählt.

Alle Rechnungsergebnisse werden in übersichtlicher Form, nötigenfalls durch Handrisse erläutert, in das Tagebuch eingetragen. Dieses Buch nimmt ferner Notizen auf über Kommunikationen, Quartier-Verhältnisse, Beschaffung von Fuhrwerk, Bauholz u. s. w.

3) Ausrüstung zu den Feldarbeiten.

Jedes Mitglied der trigonometrischen Abteilung, welches während des Sommers mit Feldarbeiten betraut wird, erhält die nötige Zahl von „Offenen Ordres“. Es sind dies Kollektiv-Erlasse der beteiligten Ministerien an die Landesbehörden, ausgestellt für den Chef der trigonometrischen Abteilung bzw. die diesem unterstellten Offiziere und Beamten, wodurch dieselben legitimiert werden und ihnen vorkommenden Falles die Unterstützung der Behörden gesichert wird.

Zur weiteren Ausrüstung des Dirigenten gehören:

- ein kleines Universal-Instrument von 1,5^{kg} Gewicht,*)
- ein kleiner Messtisch mit Stativ und Dosenlibelle,
- ein grosses Handfernrohr,
- ein Aneroidbarometer,
- Massstäbe, Bandmass, ein Lot, Transporteur; —
- ferner das gesammelte Material an Karten, Büchern und Manuskripten,
- Schreibmaterial, Formulare und Vorschriften.

Die zur Sektion gehörigen Trigonometer sind im wesentlichen ebenso ausgerüstet, führen aber ein erheblich grösseres Winkelmess-Instrument mit sich.

Ausserdem treten noch hinzu:

- ein bis zwei kleinere Fernrohre,
- einige Heliotrope,
- ein Stativ zur Aufstellung des Universal-Instruments,
- ferner Werkzeuge und Gerätschaften, welche für den Signalbau erforderlich sind, dazu gehören Werkzeuge des Zimmermanns und des Tischlers, Seil- und Tauwerk, Flaschenzüge u. s. w.

Näheres darüber wird sich beim Signalbau (§ 3.) ergeben.

II. Die Arbeiten im Felde behufs Auswahl der Punkte, oder die eigentliche Erkundung.

Der Zweck der Erkundung besteht darin, die Konfiguration einer neuen Dreieckskette oder eines neuen Dreiecksnetzes festzustellen und anzugeben, welche baulichen Einrichtungen auf jedem Punkte getroffen werden müssen, um die Konfiguration zu ermöglichen. So einfach diese Aufgabe klingt, so schwierig ist sie. Sie verlangt besondere körperliche und geistige Eigenschaften des Erkundenden und bürdet ihm zugleich eine erhebliche persönliche Verantwortlichkeit auf, da sich Vorschriften, wie die Arbeit auszuführen ist, allgemein gar nicht geben lassen. Es ist zunächst alles seiner Initiative und seinem Ermessen anheimgegeben.

Als Grundsatz ist festzuhalten, dass die Erkundung eine in sich selbständige Arbeit ist, welche die Grundlage für die ganze spätere Triangulation bildet, dass Fehler und Unterlassungssünden, welche etwa hierbei vorkommen, später gar nicht mehr gut zu machen sind.

*) Nach unserer Ansicht können noch mit Vorteil gebraucht werden: Ein Kompass zum Aufsetzen auf das kleine Universal-Instrument, jedenfalls ein Taschen-Kompass; ferner ein Spiegel Sextant oder kleiner Reflexionskreis zum Winkel messen auf hohen Türmen, auf Umschängerüsten u. s. w., überall, wo kein fester Instrumenten stand zu gewinnen ist. Das Messen mit dem Sextanten in freier Hand muss aber wohl geübt sein, vgl. Jordan, Grundzüge der astr. Zeit- und Orts-Bestimmung, 1885, § 40.

In Bezug auf dieses Thema sei hierbei auf die verdienstvolle Arbeit von *Gaede*, „Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch-geodätischen Arbeiten“, „Zeitschrift für Vermessungswesen“, Jahrgang 1885, S. 136 u. ff. verwiesen.

Die Erkundung eines Dreieckssystems, sei es nun Kette oder Netz, muss als eine einheitliche Arbeit für das ganze System aufgefasst werden. Sie darf nicht eher abgeschlossen werden, als bis das ganze Arbeitsfeld gründlich durchforscht ist, und bis alle möglichen brauchbaren Konfigurationen festgestellt sind. Bei einer *Kette*, für welche an beiden Enden feste Anschlussseiten gegeben sind, ist man nach der Mitte zu unabhängiger, hat grösseren Spielraum; doch ist nicht zu vergessen, dass jeder dieser Punkte bei späteren Arbeiten wiederum Auschlusspunkt für eine andere Kette oder für ein Netz werden kann.

Schwieriger ist die Erkundung eines *Netzes*, für welches rundum ein ganzes Polygon von festen Anschlussseiten gegeben ist. Man kann von fast keinem Punkte, wenn er zunächst auch noch so brauchbar erscheint, von vornherein sagen, dass er wirklich endgültig brauchbar ist. Selbstverständlich giebt es einzelne Punkte, die vermöge ihrer dominierenden Lage gar nicht zu umgehen sind, wie z. B. den Brocken, Inselsberg, Feldberg im Taunus, Melibokus u. s. w. Solche Punkte sind aber Ausnahmen.

Die Erkundung wird für gewöhnlich auf den gegebenen Anschlusspunkten beginnen, ferner diejenigen Punkte umfassen, welche man durch die Vorstudien als frühere Punkte kennen gelernt hat, und endlich auf alle Punkte sich erstrecken, welche während der Arbeiten im Felde sich sonst noch als vielleicht geeignet herausstellen. Die Erkundung ist eine sehr mühsame, zeitraubende und aufregende Arbeit, welche an die körperliche und geistige Ausdauer hohe Anforderungen stellt.

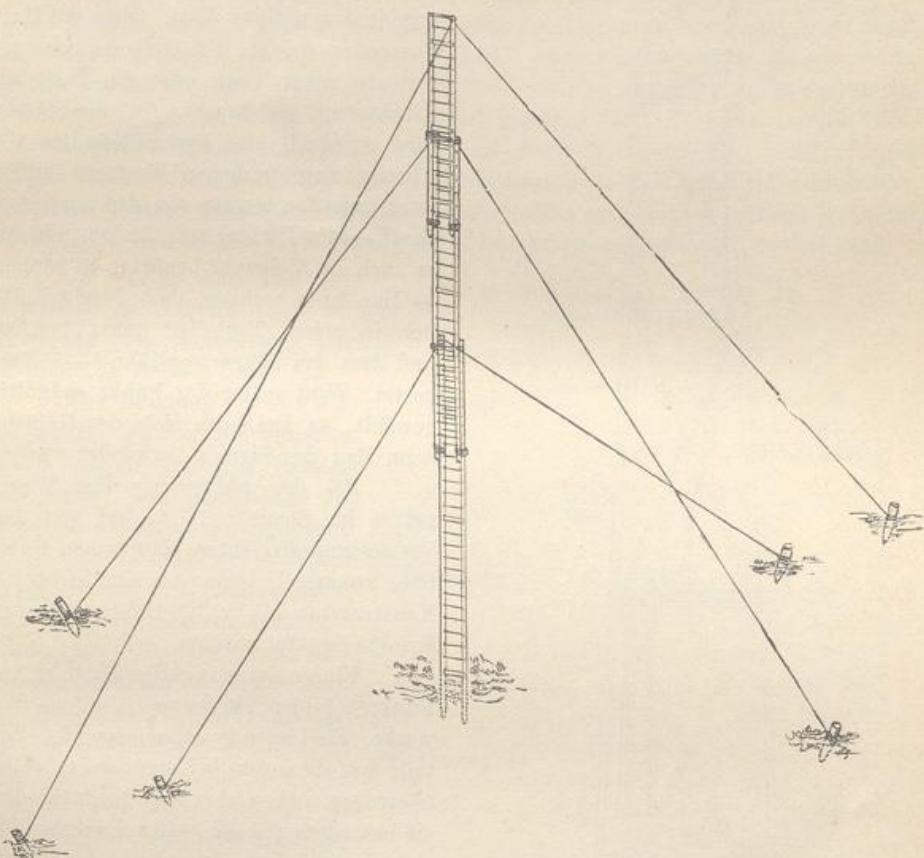
Die angeführten Schwierigkeiten beziehen sich zunächst nur auf Norddeutschland. In südlicheren Ländern von günstigerer Bodengestaltung, mit geringerer Bewaldung und klarerer Luft (z. B. Süddeutschland, Frankreich, Spanien, Italien) werden sie kaum, oder doch nicht in dem Masse vorhanden sein.

Die Erkundung auf einem Punkte gestaltet sich folgendermassen: Bevor man sich auf ihn begiebt, empfiehlt es sich, alles, was man über ihn schon festgestellt hat, nochmals zu rekapitulieren und etwa fehlende rechnerische Vorarbeiten zu ergänzen. Auf ihm angekommen, hat man den ganzen Horizont gründlich zu durchforschen. Zu dem Ende stellt man den Messtisch und darauf das kleine Universal-Instrument auf und lässt den ganzen Umkreis langsam durch das Fernrohr wandern. Alle hervorragenden Punkte stellt man ein, liest die Winkel ab und schreibt sie auf. Hierzu gehören trigonometrische Signale, Türme, Windmühlen, ferner hervorragende Bergkuppen, markierte Baumgruppen, Punkte, wo etwa näherer Horizont aufhört und fernerer anfängt, die Grenzen von Gebirgszügen, Wäldern u. dergl. Dabei dient das Instrument zur Messung der Winkel, dagegen zur näheren Untersuchung der Objekte das stärkere Handfernrohr. Die Entfernung werden geschätzt. Die Resultate mit erläuternden Bemerkungen werden graphisch in einer Skizze auf starkem Zeichenpapier zur Darstellung gebracht. Solche Skizze nennt man bei der Abteilung „*Spinne*“. Im Quartier findet die Verarbeitung, Sichtung und ordnungsmässige Eintragung des gewonnenen Materials unter Zuhilfenahme von Karte, Zirkel und Transporteur statt. Dies muss stets sofort erfolgen, damit weitere Entschlüsse gefasst und Vorbereitungen für den folgenden Tag getroffen werden können.

Es wird häufig der Fall eintreten, dass man auf dem in Aussicht genommenen

Punkte zu ebener Erde keinen Rundblick hat, wenn an der betreffenden Stelle Wald vorhanden ist, oder wenn die Gegend in hoher Kultur steht und anderweite Hindernisse bietet, Gehöfte, Gärten u. s. w. Dann muss man zunächst einen möglichst hohen Standpunkt zu gewinnen suchen, indem man Bäume erklettert, Windmühlen, Türme besteigt. In Ermanglung von solchen kann man sich mitunter dadurch helfen, dass man eine Leiter, wie man sie in jedem Dorfe findet, senkrecht aufrichten lässt (Fig. 1.).

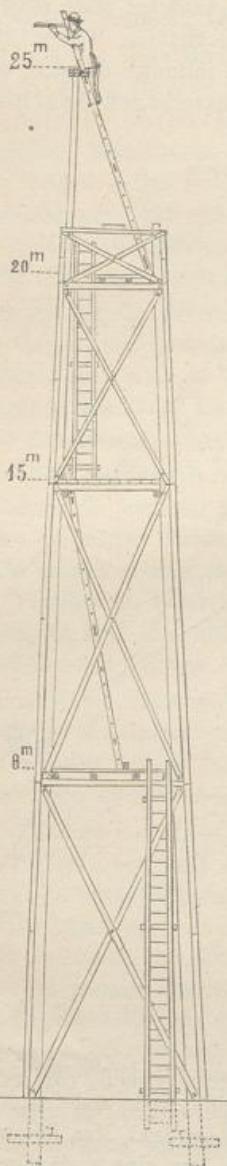
Fig. 1.
Vorläufige Aufstellung von Leitern.



Den nötigen Halt giebt man ihr dadurch, dass man sie mit dem unteren Ende in die Erde gräbt und das obere durch Seile halten lässt; eine zweite und dritte Leiter kann daran in die Höhe geschoben und ähnlich festgestellt werden. Man kommt auf diese Weise leicht 10—15^m hoch. Es ist dies jedoch alles nur eine vorläufige Massregel, welche die Auswahl des zweckmässigsten Platzes erleichtern soll.

Zur Ausführung der wirklichen Erkundung, also zur Feststellung, ob die gewünschten Richtungen vorhanden, und in welcher Höhe sie zu haben sind, wird dann die Errichtung eines *Umschau-Gerüstes* (Fig. 2. S. 20) notwendig. Man wird das Gerüst immer einige Meter höher bauen lassen, als man voraussichtlich gebrauchen wird.

Fig. 2.
Umschau-Gerüst.



umgehen sind, wie z. B. in dem stark angebauten Flachlande des nordwestlichen Deutschlands. In der hannoverschen Kette und im Wesernetz mussten deshalb, entsprechend dem Vorgange von Gauss, unverhältnismässig viele Türme zu Punkten I. Ordnung gemacht werden.

Für die vorläufige Erkundung auf Türmen wird es zunächst genügen, eine flüchtige Einrichtung zu treffen, dass das kleine Instrument aufgestellt, vielleicht auch ein Heliotrop angebracht werden kann.

Ein solches Umschau-Gerüst ist leicht in die Höhe getrieben. Vier Ständer, welche bei grösserer Höhe aus starken Stangen zusammengesetzt werden, geben das Gerippe und werden durch mehrere horizontale Kränze zusammengehalten. Jede Wand dieses Gerüstes erhält durch Kreuzverbindungen (Verschwertungen) den nötigen Halt. Oben wird ein Fussboden gelegt, ein Geländer gezogen und ein roher Tisch oder ein Brett als Leuchtstand angebracht. Auf die Ständer wird eventuell eine Pyramiden spitze von schwarz angestrichenen Brettern aufgesetzt, um das Gerüst von den umliegenden Punkten leichter aufzufinden, und um es auch als Zielpunkt benützen zu können. — Man kann rechnen, dass durchschnittlich in einem Tage 10^m gebaut werden, und dass das Meter ungefähr 4—5 Mark kostet. Wird später der Punkt endgültig gewählt, so kann das Holz des Gerüstes beim Bau des Signals verwendet werden.

Bei der Erkundung des Wesernetzes im Sommer 1883 sind von dem Vermessungsdirigenten Hauptmann Gaede über zwanzig Umschau-Gerüste leichtester Konstruktion bis zu 32^m Höhe mit bestem Erfolge benutzt worden.

Eine weitere wichtige Gattung von Punkten bilden *Türme* und ähnliche Bauwerke. Sie bieten im allgemeinen den Vorteil, dass sie meist die Umgegend erheblich überragen, haben aber den Nachteil, dass sie besondere und oft recht schwierige Einrichtungen behufs Ausführung der Beobachtungen erfordern, und dass zu ihrer Benutzung die Erlaubnis der Behörden und Besitzer erwirkt werden muss. — Es giebt aber Gegenden, wo sie durchaus nicht zu

Erdkrümmung und Strahlenbrechung. Man kann manchmal durch Höhenwinkelmessung entscheiden, ob eine wünschenswerte Richtung überhaupt möglich ist. (Die nötigen Theorien hiezu, mit Erdkrümmung und Strahlenbrechung, haben wir in unserem II. Bande, „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl. 1893, Kap. XI. behandelt).

Durchhau von Wäldern.

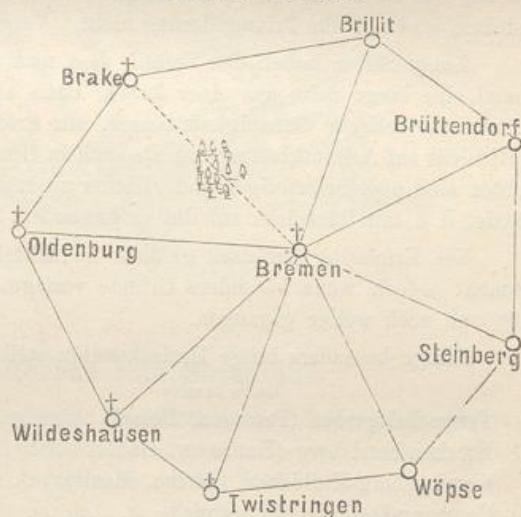
Die Fälle, dass einzelne Bäume hindern und gefällt oder wenigstens ausgeästet werden müssen, kommen häufig vor. Von diesen ist hier nicht die Rede, da sie wenig Schwierigkeiten bieten. Anders liegt der Fall, wenn eine Richtung längere Waldstrecken durchschneidet. Solche grössere Durchhaue sind als äusserstes Gewaltmittel zu betrachten und nur durch die höchste Not gerechtfertigt, da sie erhebliche Eingriffe in private Rechte darstellen, viele, oft recht unerquickliche Verhandlungen mit den Besitzern erfordern und endlich grosse Kosten an Zeit und Geld verursachen. Nichtsdestoweniger wird man sich doch mitunter dazu entschliessen müssen, wenn nur dadurch eine wesentliche Verbesserung der Dreiecksformen gewonnen werden kann.

Ein solcher Fall trat beispielsweise im Sommer 1883 bei Erkundung des Wesernetzes mit der Richtung Bremen-Brake ein.

Diese Richtung war der einzige Strahl, welcher zur Vollständigkeit des Polygons um Bremen noch fehlte; ihre Herstellung erschien für die ganze Konfiguration von grossem Werte. Die örtlichen Verhältnisse lagen folgendermassen: Von Brake aus schlossen, etwa 16^{km} entfernt, in der Richtung nach Bremen bewaldete Berge den Horizont. Auch von Bremen aus erschien hochgelegener Wald, etwa 14^{km} entfernt, als Abschluss des Gesichtskreises gegen Brake. Es lag somit ziemlich in der Mitte der 35^{km} langen Richtung als Hindernis ein etwa 5^{km} breites Waldgebiet, über welches hinaus auch die Turmspitzen gegenseitig nicht sichtbar waren. Eine örtliche Erkundung der Hindernisse ergab, dass eine Reihe parallel streichender, ziemlich bedeutender Höhenzüge die projektierte Verbindung der beiden Türme von Bremen und Brake annähernd senkrecht durchschnitt, und dass die ganze Gegend mit vielen einzelnen Waldparzellen bedeckt war, welche besonders auf den Kämmen der Berge sehr hohe Bäume, Eichen und Buchen von 30—40^m Höhe, enthielten.

Nun musste zunächst durch besondere schärfere Messung und Rechnung die Richtung in horizontaler Beziehung mit einer Genauigkeit von 10—20" festgelegt werden. In vertikaler Beziehung wurden die Höhen in der Gegend der Hindernisse teils aus älteren Daten, teils durch besondere Messungen festgestellt. Es ergab sich daraus mit Sicherheit, dass nicht etwa die Berge selbst, sondern nur die Bäume das

Fig. 3.
Durchhau eines Waldes.
Massstab 1:1200000.



Hindernis bildeten. Nunmehr wurde zur Markierung und Freilegung der Richtung geschritten.

Das allgemeine Verfahren bei solcher Arbeit ist im Prinzip einfach, in der Ausführung jedoch mitunter recht schwierig und zeitraubend. Man richtet auf beiden Endpunkten Beobachtungsstände ein und bringt in dem Hindernis einige Flaggen auf den höchsten Bäumen an, so dass sie schon möglichst in der Richtung liegen. Um sie nicht mit einander zu verwechseln, müssen sie durch verschiedene Farben oder dergl. kenntlich sein. Die Winkel nach den Flaggen werden gemessen, und aus ihnen unter Zuhilfenahme der angenähert festgestellten, etwa aus der Karte entnommenen Entfernung die seitlichen Verschiebungen berechnet, welche nötig sind, um die Flaggen in die Richtung zu bringen. (Vgl. hiezu den Abschnitt „Abstecken von langen Geraden“ in unserem II. Bande „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl., 1893, § 199).

Bei dem Durchhau Bremen-Brake sind rund 1620 Mark an Entschädigungen gezahlt worden.

Grösse der Dreiecksseiten. Rein theoretisch lässt sich über die Vorzüge oder Nachteile kürzerer oder längerer Dreiecksseiten wenig sagen; so einfache allgemeine Gesetze, wie sie z. B. über die Zielweiten bei Polygonzügen, bei Nivellierung u. s. w. bestehen, giebt es für Triangulierung nicht. (Vergl. hiezu die späteren § 18. und § 19.)

Lange Seiten haben den Vorteil, dass man rasch weiter kommt, und wenn man einmal eine lange Seite aus einer kurzen Basis abgeleitet hat, dann ist es auch für die rein theoretische Genauigkeit besser, mit grossen Dreiecken fortzufahren, sowohl in Hinsicht auf Azimutübertragung als auch in Hinsicht auf Längenübertragung; lange Sichten sind aber schwieriger und seltener zu messen, und werden daher verhältnismässig, d. h. mit Rücksicht auf die aufgewandte Zeit und Mühe ungenauer als kurze.

Die Erfahrung hat dazu geführt, im Mittel nur etwa 20—50^{km} Seitenlänge zu nehmen, jedoch wenn besondere Gründe vorlagen, ist man auch schon bis zu 100^{km}, 200^m und noch weiter gegangen.

Einige besonders lange Dreiecksseiten stellen wir im folgenden zusammen:

Dreieckseite	Meter	Bogen
Trunz-Galtgarben (Preussen, Bessel)	79 644	0° 43'
Brocken-Inselberg (Hannover, Gauss)	105 977	0° 57'
Kamiensberg-Knibiskow (Afrika, Maclear)	128 028	1° 9'
Campvey-Desierto (Frankreich)	160 903	1° 27'
Slieve Donard-Sca Fell (England, Ord. trig. survey S. 434)	178 932	1° 36'
Ararat-Godarebi (Kaukasus, Struve)	202 384	1° 49'
Mulhacen-Filhaussen (Mittelländ. Meer, Ibanez)	269 926	2° 26'

Nach Helmert math. u. ph. Th. d. höheren Geodäsie I. S. 70 sind in Vorder-Indien von den Engländern nach dem Himalaya Sichten bis zu 340^{km} genommen worden.

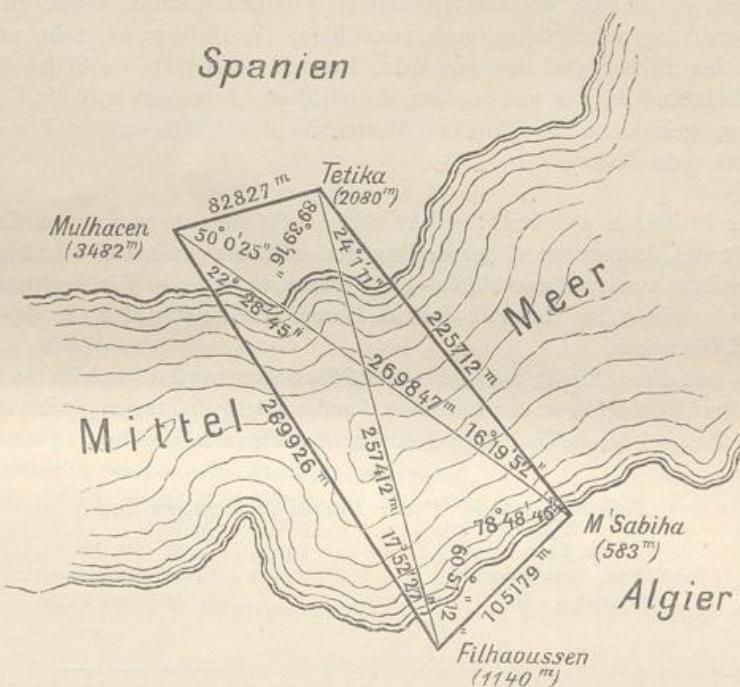
Von der vorerwähnten trigonometrischen Überspannung des mittelländischen Meeres geben wir in Fig. 4. S. 28 eine Darstellung mit eingeschriebenen Längen, Höhen und Winkeln. Das Unternehmen wurde im Herbst 1879 von Ibanez und Perrier ausgeführt.

Zur Signalisierung reichte Heliotropenlicht nicht aus, es wurde deshalb elektrisches Licht mit Nachtbeobachtung angewendet.

(Weiteres hierüber geben die Verhandl. d. 6. Konf. d. Eur. Gr., General-Bericht für 1880, S. 44—57; vgl. auch zwei Berichte in der „Zeitschr. f. Verm.“, Pattenhausen 1881, S. 247—257 und Fenner 1882, S. 303—308.)

Fig. 4.

Triangulierung über das mittelländische Meer zwischen Spanien und Algier, 1879.
Massstab 1 : 4 500 000.



§ 3. Pfeilerbau und Signalbau.

Nachdem die Triangulierungspunkte ausgewählt sind, hat man Einrichtungen zu treffen, erstens zum festen Aufstellen des Theodolits auf jedem Punkte und zweitens zum gegenseitigen Sichtbarmachen der Punkte für die Winkelmessung.

Diese Einrichtungen sind verschieden, je nachdem man es mit einem Punkte auf dem natürlichen Erdboden, z. B. auf dem Gipfel eines Berges, oder mit einem Punkte auf einem Turme oder ähnlichem Bauwerke zu thun hat.

Zur Sichtbarmachung dient heutzutage fast ausschliesslich das Heliotrop, von welchem später in § 4. die Rede sein wird. Die Einrichtung der Heliotropstände erfolgt gemeinsam mit dem Bau der Theodolitstände.

Zu ebener Erde nahm man früher als Theodolitstände allgemein hölzerne Stativen; indessen in neuerer Zeit erbaut man für Messungen erster Ordnung steinerne *Pfeiler*.

Nach Mitteilung von Vermessungs-Dirigent *Erfurth* (vgl. das Citat technischer Betrieb u. s. w. S. 16) hat die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme hiefür folgende Einrichtungen:

„Ein Beobachtungspfeiler der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme

besteht entweder aus einem einzigen behauenen Stein, lang genug, um ihm den nötigen Halt im Erdboden zu geben, oder, da solche Monolithe schwer zu haben und teuer sind, aus mehreren behauenen Bruchsteinen von ganzem Querschnitt, welche mit Zement gemauert und lagenweise durch Dübel oder durch eine oder zwei durchgehende Eisenstangen fest verbunden werden. Aus Ziegelsteinen aufgemauerte Pfeiler sind möglichst zu vermeiden, da sie bei wechselndem Wetter, namentlich durch Regen und Frost, baldiger Zerstörung anheimfallen, auch mutwilligen Beschädigungen mehr ausgesetzt sind. Um den Pfeiler wird eine vierseitige Pyramide errichtet; die Spitze derselben wird mit Brettern bekleidet und schwarz angestrichen. Ausserdem wird ein Fussboden von Brettern gelegt, um bei windigem Wetter das Aufwirbeln von Sand und Staub möglichst zu verhindern.“

Über Pfeilerbau und Punktversicherungen, teils auf dem natürlichen Erdboden, teils auf Türmen, können wir einige Erfahrungen mitteilen von den 10 „Gradmessungs-pfeilern“, welche vom Verfasser 1869—1873 erbaut wurden. — Wir benützten dabei auch die von *Nagel* im Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1864, S. 39—40 mitgeteilten Erfahrungen.

Die badischen Pfeiler mit ihren Versicherungen wurden zugleich an die vorzüglichen Punktfestlegungen der badischen Landes-Triangulierung angeschlossen.

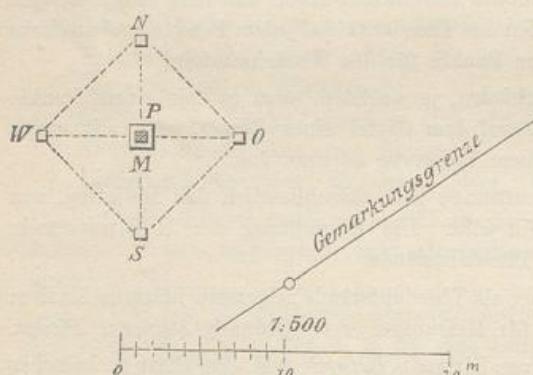
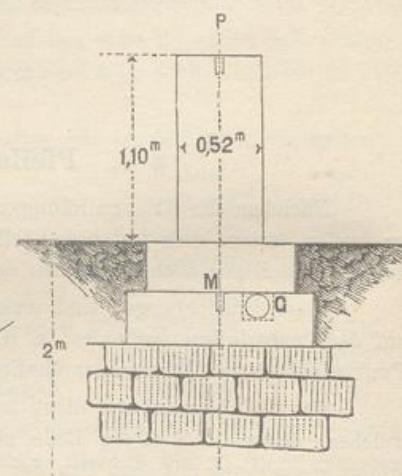
Ein Beispiel für beides ist in Fig. 1 a. und Fig. 1 b. gegeben.

Trigonometrischer Punkt Kandel (Schwarzwald).

Fig. 1 a.
P = Pfeiler. B = Pyramide.
Massstab 1 : 500.



Fig. 1 b.
Beobachtungspfeiler.
Massstab 1 : 50.



Die Bezeichnung eines Punktes der (alten) badischen Landes-Triangulierung wurde etwa im Jahr 1820 durch eine von Felsstücken aufgebaute vierseitige abgekürzte Pyramide B bewerkstelligt. Der trigonometrische Punkt ist auf der Mitte der Pyramide

durch ein eingehauenes + bezeichnet. Ferner wurden noch vier solche Zeichen auf der Pyramide angebracht, und ausserdem der Dreieckspunkt gegen 8 benachbarte Gemarkungs-Grenzsteine durch unmittelbare Messung von 11 Entfernungen und 14 Winkeln festgelegt (letzteres ist in unserer Fig. 1 a. nicht angedeutet).

Im Jahr 1870 fand ich die Lage der 50 Jahre alten Versicherungspunkte noch auf wenige Centimeter übereinstimmend mit den früheren Messungen; jedoch wurde die Pyramide nun verlassen und ein *neuer* Punkt P auf einem Pfeiler mit einem 2^m tiefen Fundament hergerichtet, wie die Einzelzeichnung Fig. 1 b. zeigt, und ferner wurden 4 Versicherungsquader $SWN\bar{O}$ auf Fundamentquadern versenkt.

In dem Fundamentquader des Pfeilers bei M und in jedem der 4 anderen Quader ist ein Messingcylinder in Blei eingegossen, und ein sechster Cylinder P lotrecht über M ist oben auf dem Pfeiler eingegossen, um die Theodolitmitte zur Winkelmessung zu bezeichnen.

Unten ist auch ein Glascylinder G eingesenkt, ein Schriftstück enthaltend, das der Nachwelt die Bedeutung der ganzen Anlage übermitteln soll.

Die 4 Versicherungspunkte wurden nicht willkürlich, sondern nach *Nord*, *Ost*, *Süd*, *West* eingewiesen, was leicht auf etwa 1' genau gemacht werden konnte mit Hilfe der alten badischen Landes-Triangulierung (trigonometrische Richtungswinkel mit Rücksicht auf Meridian-Konvergenz).

Nachdem somit die 5 unteren Punkte auf ihren Fundamentquadern in den Bau-gruben festlagen, wurden ihre Abstände gemessen:

$$\begin{array}{ll} MN = 6,059^m & NO = 8,579^m \\ MO = 6,075 & OS = 8,427 \\ MS = 5,840 & SW = 8,465 \\ MW = 6,125 & WN = 8,620 \end{array}$$

Man hat dabei 4 Hypotenusenproben, welche innerhalb weniger Millimeter stimmen sollen.

Um nun nach dem Aufbau des Pfeilers selbst den Punkt P genau lotrecht über M zu bringen, verfuhren wir so: Während der Theodolit centrisch über M stand und die 4 Azimute 0°, 90°, 180°, 270° eingewiesen wurden, musste mindestens ein ferner Punkt H mit angezielt werden, der durch sein berechnetes Azimut jene 4 Einweis-Azimute lieferte. Nach dem Aufbau des Pfeilers wurde der Theodolit *vorläufig* aufgestellt, mit Hilfe des fernen Punktes H orientiert und die 4 nahen Punkte wieder angezielt. Wegen der Excentricität der vorläufigen Theodolitstellung wurden nun nicht wieder genau 0°, 90°, 180°, 270° erhalten, sondern kleine Abweichungen, welche aber mit Zuziehung der 4 Entfernungen vollends zur genauen Centrierung führten.

Vor und nach der Pfeileraufstellung wurden alle Punkte nivelliert.

Das Endergebnis drückt sich in folgenden Coordinaten und Höhen aus, im badischen System + x nach Süden, + y nach Westen, h ungefähr um 2^m zu gross im Vergleich mit Höhen über N.N.

Punkt	y	x	h
Pyramide, Kreuz +	+ 33 403,830 ^m	+ 158 255,280 ^m	1247,010 ^m
Pfeiler oben P	+ 33 421,215	+ 158 271,909	1244,360
" unten M	"	"	1242,986
Versicherung N	+ 33 421,180	+ 158 265,850	1243,216
" O	+ 33 415 140	+ 158 271,944	1242,993
" S	+ 33 421,249	+ 158 277,749	1242,711
" W	+ 33 427,340	+ 158 271,873	1242,861

Wir haben diese Zahlen beispielshalber hier hergesetzt, weil solche oder entsprechend genaue Angaben, mit Zeichnungen, den amtlichen Triangulierungs-Veröffentlichungen beigegeben werden sollen.

Über *Signalbau* im besonderen haben wir die wertvollsten Mitteilungen in der Abhandlung von *Erfurth*, welche wir schon auf S. 16 citiert haben bei dem Abdruck des ersten Teiles.

Folgendes ist ein Auszug aus dem zweiten Teil von *Erfurth*:

Der Signalbau muss den Winkelmessungen mindestens ein Jahr voraus sein. Es wird schon im Laufe des Winters, sobald die Projekte festgestellt sind, Auftrag erteilt, welche Signale im folgenden Sommer gebaut werden sollen, damit das nötige Holz noch im Winter geschlagen werden kann. Denn die Bäume müssen vor dem Einschiessen des Saftes gefällt werden.

Der Signalbau umfasst die Herstellung aller Einrichtungen, welche erforderlich sind, um auf den endgültig bestimmten Punkten Beobachtungen machen, sowie auch dieselben von anderen Punkten aus als Zielpunkte benützen zu können. Für gewöhnlich dient der Stand des Theodolits, der Beobachtungsstand, zugleich auch als Stand für den einzustellenden Heliotropen, als Leuchtstand. Es kommt jedoch nicht selten vor, dass für schwierige Richtungen noch besondere Leuchtstände in grösserer Höhe eingerichtet werden müssen. Bei Winkelmessungen erster Ordnung wird zwar in der Regel nur auf Heliotrope eingestellt, nichtsdestoweniger erhält aber jedes auf dem Erdboden erbaute Signal eine schwarze Spitze, welche hauptsächlich für die Messungen der niederen Ordnungen als Einstellungs-Zielpunkt dient.

Signale mit erhöhten Beobachtungs- und Leuchtständen werden bei der trigonometrischen Abteilung aus Holz bis zu ungefähr 25^m Beobachtungshöhe und 30^m Leuchthöhe noch mit solcher Festigkeit gebaut, dass auch bei ziemlichem Winde die Beobachtungen mit vollster Genauigkeit und Zuverlässigkeit gemacht werden können. Es ist dies dadurch möglich, dass die Beamten, welche die Signalbauten ausführen, seit Jahren in diesen Arbeiten thätig sind und reiche Erfahrungen unter den verschiedensten Verhältnissen gesammelt haben.

Bei jedem solchen Signal sind *zwei* vollständig von einander *unabhängige und für sich isolierte* Bauten zu unterscheiden: der Beobachtungspfeiler als Stand für das Instrument, und das den Pfeiler umgebende Gerüst für die Beobachter. Die Pfeiler sind entweder Standpfeiler oder Hängepfeiler.

Standpfeiler werden bei grösseren Beobachtungshöhen errichtet, ein Beispiel giebt die nachfolgende Fig. 4 S. 29.

Hängepfeiler werden seitwärts durch Streben getragen und reichen in der Mitte nicht bis zum Erdboden herab, sondern lassen in der Mitte so viel freien Raum, dass der Beobachtungspunkt von oben herunter gelotet und *centrisch* festgelegt werden kann (was bei *Standpfeilern* nicht möglich ist). Aus diesem Grunde werden in neuerer Zeit bei der trigonometrischen Abteilung fast nur noch Hängepfeiler gebaut, z. B. Steuerndieb in Band II, 4. Aufl. 1895, S. 256.

Ein gutes Beispiel eines Hängepfeilers werden wir später auch in § 12. als Endpfeiler der Göttinger Basismessung kennen lernen.

Zur Verbindung von Pfeiler und Streben dienen durchgehende eiserne Schraubenbolzen. Zur Befestigung der unteren Stammenden in der Erde werden hölzerne Anker

angebracht; bei leichtem Boden werden außerdem Steinbrocken in die Löcher geschüttet, schichtweise mit Wasser eingeschlemmt und festgerammt.

Das ganze System von Pfeiler und Streben muss nun noch gegen Winddruck, Durchbiegen und Verziehen besonders gesteift werden. Dies geschieht

- 1) durch Verbindungen zwischen zwei nebeneinander liegenden Streben, sogen. Kränze und Schwerter, Fig. 2.,
- 2) durch Verbindungen zwischen Pfeiler und Streben, Kreuze und Quirle, Fig. 3.

Ein Kranz besteht aus vier Hölzern, welche in gleicher Höhe über dem Erdboden von Strebe zu Strebe geführt werden.

Schwerter sind diagonale Verbindungen in den durch die Kränze entstandenen Paralleltrapezen. Bei sehr hohen Signalen können für die unterste Verschwertung noch besondere Hilfsstützen und Unterzüge nötig werden, welche immer in den Erdboden zu führen sind.

Kreuze sind Hölzer, welche je zwei gegenüberliegende Streben unter sich und mit dem Pfeiler verbinden. Quirle werden zwischen Pfeiler und je einer Strebe gesetzt; sie müssen die letztere möglichst rechtwinklig treffen.

Fig. 2.
Kränze und Schwerter.

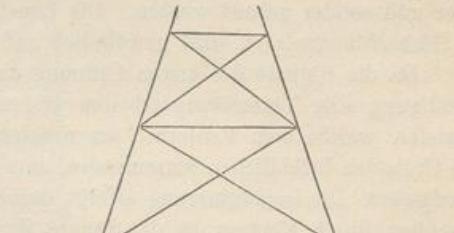
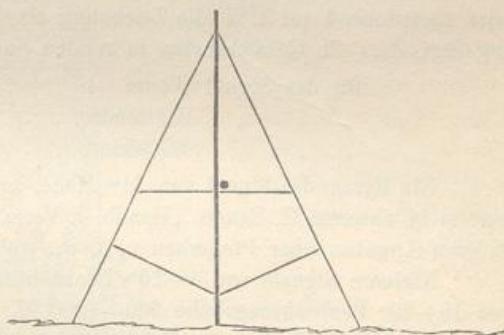


Fig. 3.
Kreuze und Quirle.



Das Beobachtungs-Gerüst.

Um den Pfeiler wird das Beobachtungs-Gerüst unabhängig so errichtet, dass dasselbe nirgends mit dem Pfeilerbau in Berührung kommt. Es besteht aus vier Ständern, welche nicht senkrecht, sondern nach oben zu mit einer Neigung von ungefähr 1:15 nach innen gestellt werden. Die Feststellung der Ständer erfolgt wie beim Pfeilerbau durch Kränze und Schwerter; doch können diese selten so regelmässig angebracht sein, sondern müssen den Verhältnissen angepasst werden, da die völlige Isolierung beider Bausysteme von einander streng gewahrt werden muss. In Höhen von 5—8^m werden Fussböden gelegt, zu denen man auf Leitern emporsteigt. Der oberste Fussboden bildet den Beobachtungsraum in quadratischer Form von 2,3—2,5^m Seite. Die Höhe des Beobachtungs-Punktes über dem obersten Fussboden beträgt 1,12—1,16^m. Zum Schutze wird ein Geländer aus starken Latten gezogen. Zwei Meter über dem Fussboden läuft um alle 4 Gerüstständer ein horizontaler Kranz von Latten zum Anbringen von Leinwandplanen, welche später beim Beobachten zum Schutze des Instruments gegen Sonne und Wind ausgespannt werden. Bei der ersten Anlage des Gerüstes muss schon darauf geachtet werden, dass vom Beobachtungspunkt aus gesehen keine der zu messenden Richtungen durch einen Ständer verdeckt wird. Jede dieser

letzteren muss mindestens 5^m daran vorbeistreichen. Auf die Ständer wird eine vierseitige Pyramide aufgesetzt, deren Spitze mit Brettern bekleidet und geschwärzt wird; die Spitze liegt in der Regel 4—5^m über der Beobachtungsplatte. Wird für einzelne Richtungen ein erhöhter Leuchtstand notwendig, so muss das Gerüst entsprechend höher und solider gebaut werden. Die Leuchtplatte, welche dieselbe Grösse hat wie die Beobachtungsplatte, wird gewöhnlich auf der Pyramidenspitze befestigt.

Da die Signale der ersten Ordnung auf eine längere Reihe von Jahren bis zur Beendigung aller Vermessungsarbeiten stehen bleiben müssen, so werden diejenigen Holzteile, welche dem Verderben am meisten ausgesetzt sind, d. h. die in oder nahe dem Erdboden befindlichen Stammenden, zum Schutze gegen Fäulnis und Insektenfrass *imprägniert*. Die Imprägnierung erfolgt durch Anstrich der betreffenden Holzteile und ausserdem durch Einguss in das Innere der Hölzer. Der dazu verwendete Stoff besteht aus Chlorzink, kaltem Wasser und Karbolsäure.

Zur besseren Erläuterung des bisher über den Bau erhöhter Signale Gesagten wird nachstehend auf S. 29 die Zeichnung eines solchen gegeben. Auch sei noch hinzugefügt, dass die Gesamtkosten in runden Summen betragen haben:

für das Signal Wöpse	1300	Mark
" " " Brüttendorf	1190	"
" " " Wittekind	1740	"

Ein Pyramiden-Signal von 31^m Höhe, auf Steuerndieb bei Hannover, haben wir bereits in unserem II. Bande, „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl. 1893, S. 256 gegeben, nebst anderen Angaben über Pfeilerbau u. s. w., welche auch hier hergehörig sind.

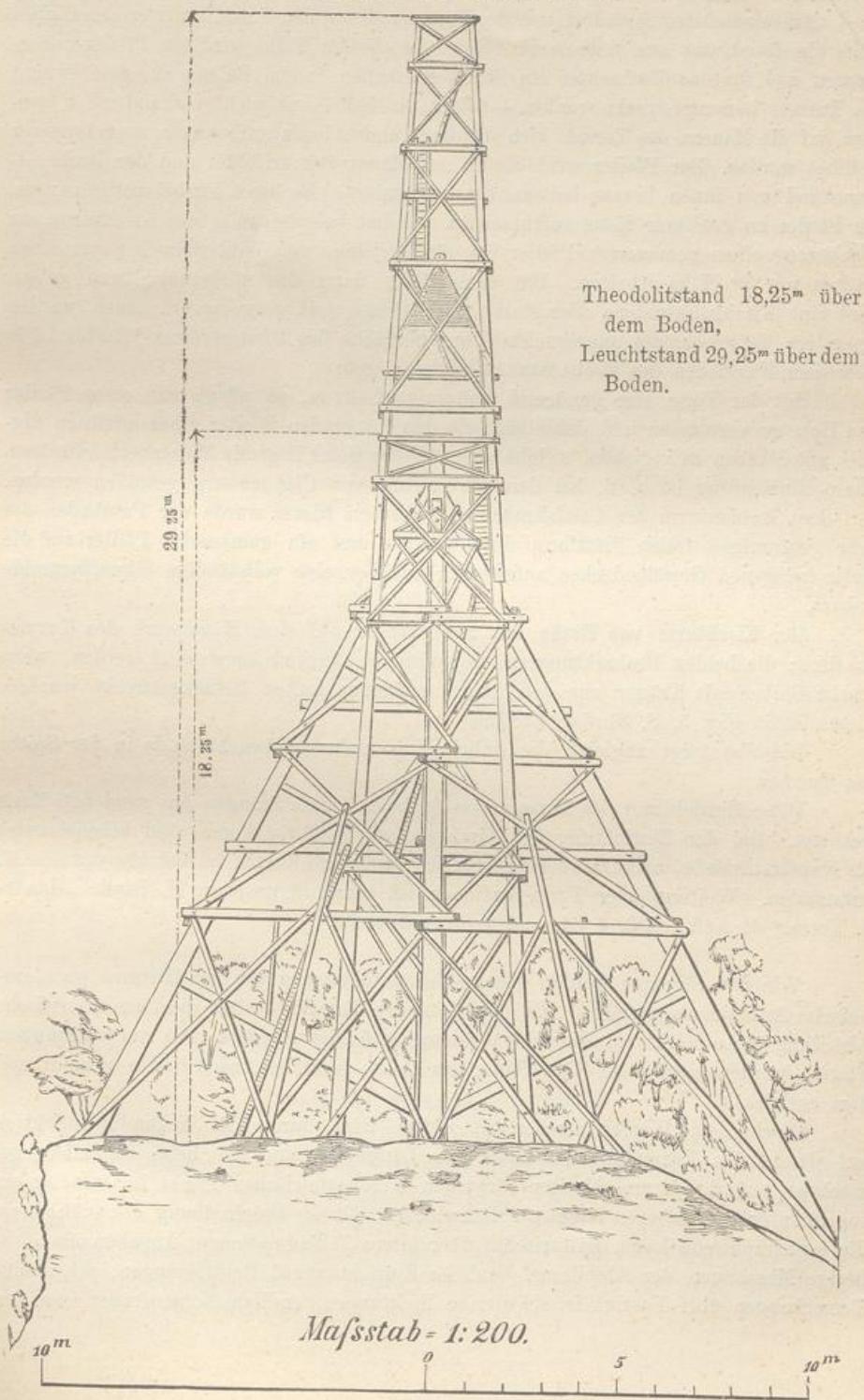
Kleinere Signale von 4—10^m Beobachtungshöhe kosten ungefähr 150—500 M., von 10—20^m Beobachtungshöhe 500—1000 M. Die Kosten können durch örtliche Verhältnisse, höhere Preise für Fuhrwerk und Arbeitskräfte, sowie namentlich durch etwaigen weiten Transport des Holzes sehr verschieden ausfallen. Was die erforderliche Bauzeit für ein höheres Signal anbetrifft, so kann man bis zu 20^m Beobachtungshöhe ungefähr 1 Tag für 1 Meter rechnen, für jedes Meter über diese Höhe hinaus 2 Tage.

Die Einrichtung von *Türmen* und ähnlichen Bauwerken zu Beobachtungszwecken bietet häufig besondere Schwierigkeiten. Es lassen sich für diese Arbeit keine allgemeinen Regeln geben, da dieselbe von der Bauart des Turmes abhängig ist. Als Grundbedingung ist festzuhalten, dass für das Instrument ein besonderer, möglichst fester und isolierter Stand, und für den Beobachter ausreichender und gesicherter Raum geschaffen werden muss. Dabei ist stets auf möglichste Schonung des Turmes Rücksicht zu nehmen und Vorkehrung zu treffen, dass durch die zu machenden Öffnungen nicht Regen und Schnee eindringen kann, damit eine Beschädigung des Turmes verhindert wird.

In dem nördlichen Teil der hannoverschen Kette und des Wesernetzes haben fast durchweg Kirchtürme und Leuchttürme zu Beobachtungs-Stationen eingerichtet werden müssen, und trotz der verschiedenen und mitunter recht mangelhaften Bauart der Türme ist es doch gelungen, die Einrichtungen so zu treffen, dass die Beobachtungen mit genügender Sicherheit gemacht werden konnten. Es trat hierbei nicht selten der Fall ein, dass, um den Horizont rundum zu beherrschen und alle Richtungen einzustellen zu können, sogar *zwei* Beobachtungsstände auf einem Turme gebaut werden

Fig. 4.

Signal Wittekind der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme,
gebaut 1885 von Trigonometer Otto.



mussten, wie z. B. bei den Kirchtürmen von Brake und Westerstede und bei dem Leuchtturm von Neuwerk.

Am einfachsten gestaltet sich der Bau, wenn um den Turm in der erforderlichen Höhe ein Rundgang aus Mauerwerk führt. In diesem Falle wird ein Pfeiler aufgemauert, und für den Beobachter ein Stand geschaffen, indem Balken aus dem Innern des Turmes herausgestreckt werden.— Wenn ein Rundgang nicht vorhanden ist, sondern auf die Mauern des Turmes sich das Dach ohne Absatz aufbaut, so muss letzteres geöffnet werden. Der Pfeiler wird wieder auf Mauerwerk errichtet und der Beobachtungsstand von innen heraus balkonartig konstruiert. Es kann hierbei nötig werden, die Pfeiler zu grösserer Höhe aufzumauern. So hat beispielsweise der Kirchturm von Wangeroog einen gemauerten Pfeiler von 4^m, derjenige von Wildeshausen sogar einen solchen von 5^m Höhe erhalten. Um dem Pfeiler dann den nötigen Halt zu geben, wird eine Eisenbahnschiene oder starke Eisenstange mit eingemauert; auch werden besondere Verstrebungen angebracht. Die Oberfläche des Pfeilers muss 1,10 bis 1,16^m über dem Fussboden des Beobachtungsstandes liegen.

Hat der Turm eine genügend geräumige Laterne, so pflegt man einen Pfeiler von Holz zu verwenden und denselben wie den hängenden Pfeiler eines erhöhten Signals mit Streben zu verschen, welche sich auf das tiefer liegende Mauerwerk aufsetzen. Diese Einrichtung ist z. B. bei dem Kirchturme von Cloppenburg getroffen worden. Auf dem Ruinenturm der Landskrone im südlichen Elsass wurde der Fussboden der sehr geräumigen freien Plattform durchbrochen und ein gemaueter Pfeiler auf die tiefer gelegenen Gewölbedecken aufgesetzt, darüber eine vollständige Signalpyramide gebaut.

Der Kirchturm von Brake hat zwei Pfeiler auf dem Mauerwerk des Turmes erhalten; die beiden Beobachtungsstände mussten hängend konstruiert werden, wozu starke Balken als Träger aus den höher gelegenen Luken herausgestreckt wurden, dieses ist in Fig. 5. S. 31 dargestellt.

Dieselbe zeigt zugleich die Anbringung mehrerer Leuchtstände in der Spitze des Turmes.

Diese Einrichtung des Turmes von Brake mit zwei Ständen hat rund 520 Mark gekostet. Bei der Einrichtung des Kirchturmes von Twistringen sind beispielsweise für Kupferschmiede- und Dachdecker-Arbeiten besondere Kosten im Betrage von 380 M. entstanden. Weiteres über Turm-Stationen ist schon in unserem II. Bande „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl. 1893, § 84. und § 85. mitgeteilt.

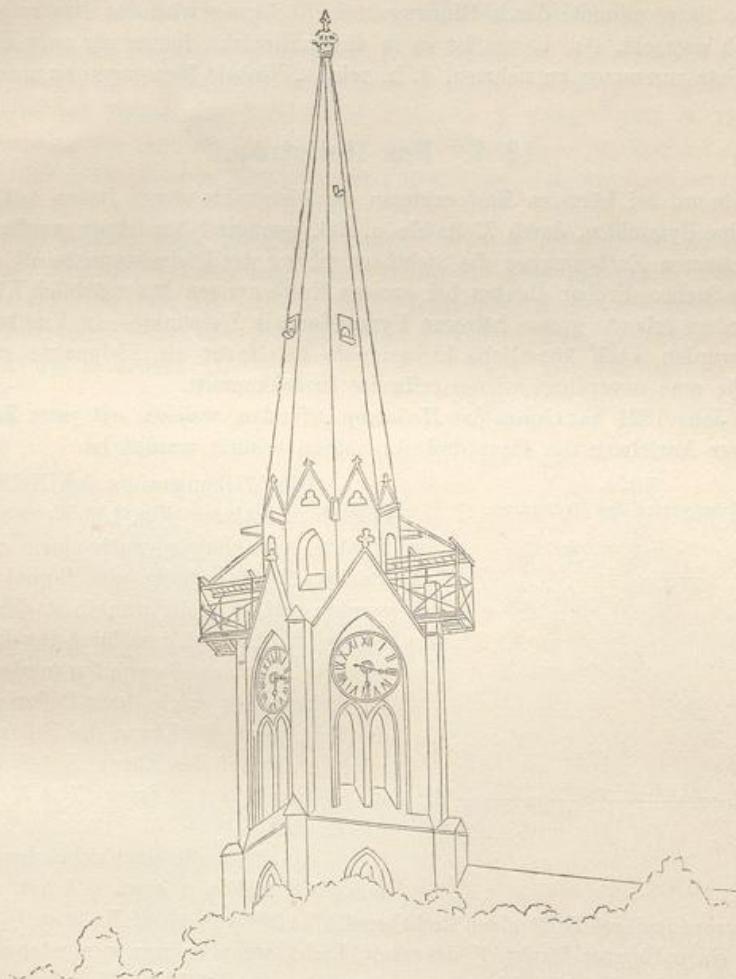
Von den Signalen werden genaue Zeichnungen und von den Türmen photographische Aufnahmen gemacht. Zu dem letzteren Zwecke besitzt die trigonometrische Abteilung einen leicht transportablen photographischen Apparat. Die aufgenommenen Platten werden, gegen die Einwirkung des Lichts geschützt, nach Berlin gesandt und dort entwickelt.

Nach dem Wiedereintreffen in Berlin wird durch die Erkundungs-Sektion auf Grund des Erkundungs-Berichtes des Dirigenten und der beim Signalbau gemachten Aufnahmen und Notizen für jeden trigonometrischen Punkt I. Ordnung ein sogenannter *Stammbogen* angelegt. Derselbe enthält die Beschreibung der Örtlichkeit, die topographische Lage, Historisches über ältere Triangulationen, Angaben über bisherige Messungen der Abteilung, bauliche Einrichtungen, Centrierungen, allgemeine Bemerkungen über Festigkeit, schwierige Richtungen, endlich Notizen über Quartier,

bezahlte Entschädigungen, Abmachungen wegen des Stehenbleibens bzw. des Abbruches der Signale und Beobachtungsstände etc. Der Stammbo gen ist sozusagen das curriculum vitae des Punktes. Jeder später folgende Beobachter hat für die nötige Ver vollständigung Sorge zu tragen.

Fig. 5.

Kirchturm von Brake
mit zwei Theodolitständern und mehreren hohen Leuchtständen.



Drehen der Beobachtungs-Pfeiler.

Bei hohen Türmen und Gerüsten beobachtet man die für Winkelmessungen missliche Erscheinung des *Drehens*, infolge ungleichförmiger Erwärmung durch die Sonne. Vollständig fest stehen auch steinerne Türme nicht, indessen wird das Drehen hauptsächlich bei hölzernen Gerüsten gefunden.

Eine eingehende Untersuchung dieser Sache mit vielen Beobachtungen bei der mecklenburgischen Triangulierung wurde von *Pascher* in den astronom. Nachrichten, 63. Band (1865) Nr. 1492—1493 mitgeteilt.

Es fanden sich bei einem 11 Meter hohen Pfeiler auf der Station Karbow, welcher äusserst haltbar aus vierkantig beschlagenen Balken konstruiert, und vom Standpunkt des Beobachters völlig unabhängig gestellt im Juli 1857 erbaut worden war, bei der Beobachtung im Juni 1858 starke Drehungen, die einen ziemlich regelmässigen Tagesverlauf zeigten, Morgens $-2'$, Mittags $0'$, Abends $+2'$. (Astr. Nachr. 1492, S. 56.)

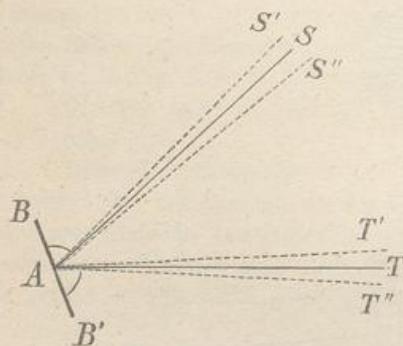
Das Drehen der Beobachtungs-Pfeiler wirkt offenbar am schlimmsten, wenn man lange Sätze nimmt; durch Hingang und Rückgang wird das Drehen zum Teil unschädlich gemacht. Am besten ist es in dieser Hinsicht, immer nur *zwei* Zielpunkte in einen Satz zusammen zu nehmen, d. h. reine „Winkel“-Messungen zu machen.

§ 4. Das Heliotrop.

Während bei kürzeren Entfernungen die Zielpunkte durch Baken mit Fahnen, durch kleine Pyramiden, durch Zieltafeln u. dgl. genügend bezeichnet werden können, ist bei grösseren Entfernungen die Sichtbarmachung der Dreieckspunkte oft eine sehr schwierige Sache. Früher dienten bei grossen Entfernungen hauptsächlich Kirchtürme und besonders erbaute grosse hölzerne Pyramiden als Zielpunkte. In Frankreich und England wurden auch künstliche Lichtsignale bei Nacht als Zielpunkte genommen (auf welche man neuerdings wieder teilweise zurückkommt).

Im Jahr 1821 hat *Gauss* das *Heliotrop* erfunden, welches seit jener Zeit hauptsächlich zur Anzielung von Hauptdreieckspunkten benutzt worden ist.

Fig. 1.
Wirkungsweise des Heliotrops.



der Heliotropenspiegel $B' B$ einen Lichtkegel $T' A T''$ von ebenfalls etwa $1/2^\circ$ Öffnung aus, und ein entfernter Punkt T bekommt Licht, wenn er nur wenigstens innerhalb dieses Strahlenkegels fällt, ohne gerade von der Axe $A T$ des Kegels getroffen zu werden.

Dieser Umstand ist für die Anwendung des Heliotrops in zweifacher Beziehung günstig; erstens ist infolge hiervon bei der Einstellung des Instruments keine grosse Genauigkeit erforderlich, und zweitens kann *eine* Einstellung während der Dauer von nahezu 1 Minute beibehalten werden, obgleich sich während dieser Zeit die Sonne um einen merkbaren Bogen bewegt. (1 Zeitminute entspricht einer Sonnenbewegung von $15'$). Das fortgesetzte Einstellen des Heliotrops, entsprechend der Sonnenbewegung, kann zwar durch mechanische Mittel (Heliostat) erzielt werden, doch hat man bei

Die Wirkungsweise des Heliotrops ist einfach zu erklären (Fig. 1.). Wenn von einem Punkte A (Heliotrop) nach einem entfernten Punkte T (Theodolit) ein Signal gegeben werden soll, so stellt man in A einen ebenen Spiegel $B' B$ so auf, dass durch ihn die Sonnenstrahlen $S A$ nach T geworfen werden. Dieses ist bekanntlich nach dem Reflexionsgesetze der Fall, wenn die Ebene des Spiegels rechtwinklig ist an der Ebene $S A T$ und wenn die Winkel $S A B$ und $T A B'$ einander gleich sind.

Da die Sonne einen scheinbaren Durchmesser $S' A S''$ von etwa $1/2^\circ$ hat, so sendet

Triangulierungen bis jetzt im allgemeinen das fortgesetzte Richten durch einen Gehilfen vorgezogen, weil ein solcher Gehilfe zur Bedienung des Instruments aus anderen Gründen ohnehin notwendig ist.

Nach dieser allgemeinen Darlegung wollen wir auf die Beschreibung verschiedener Heliotrope im einzelnen eingehen, und zwar wollen wir, aus geschichtlicher Rücksicht mit einem Werkzeuge beginnen, welches jetzt kaum noch gebraucht wird:

I. Das Sextanten-Heliotrop von Gauss („Vice-Heliotrop“).

Dasselbe wird zuerst von Gauss in einem Briefe an Schumacher in den astr. Nachr. 1. Band, S. 106 (Februar 1822) kurz erwähnt. Weiteres hierüber geben die Mitteilungen von Hauptmann Gädé in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1885, S. 125.

Hier nach fiel die Erfindung des Sextanten-Heliotrops in die Zeit der Ausführung des eigentlichen Gauss'schen (Spiegelkreuz-) Heliotrops, das wir nachher (S. 34—35) beschreiben.

Gauss schreibt (vgl. „Zeitschr. f. Verm.“ 1885, S. 125): „Noch vor dessen (des eigentlichen Heliotrops) Vollendung war ich auf die Idee gekommen, einen blossen Spiegel-Sextanten zu einer Art Vice-Heliotrop einzurichten, freilich viel unvollkommener, als jenes Instrument selbst, aber doch bei geschickter Behandlung gleichfalls brauchbar.“

Fig. 2. Sextant.

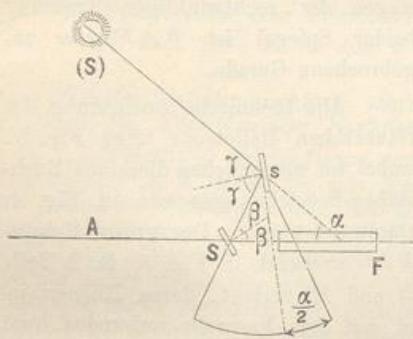
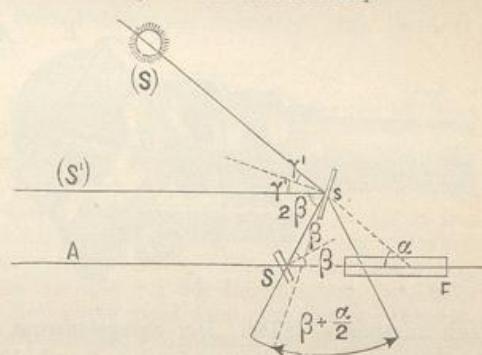


Fig. 3. Sextanten-Heliotrop.



Die Theorie dieses „Vice-Heliotrops“ erklärt sich an Fig. 2. und Fig. 3., bei welchen wir die Sextantentheorie selbst als bekannt voraussetzen (vgl. Jordan, Grundzüge der astronomischen Zeit- und Orts-Bestimmung, Berlin 1885, S. 155 und S. 175).

In Fig. 2. ist (S) die Sonne und A der Zielpunkt, welcher Licht erhalten soll, Fig. 2. zeigt also diejenige Sextantenstellung, welche zur Messung des Winkels α zwischen A und (S) erforderlich ist. Der Sextant wird hiebei auf einem festen Stativ gebraucht, und nachdem die Einstellung Fig. 2. gemacht ist, wird die Alhidade um den doppelten Schärfungswinkel, d. h. um 2β vorwärts gedreht (Fig. 3.), worauf man erwarten darf, dass das am grossen Spiegel S reflektierte Sonnenbild (S') nun in die Richtung (S') parallel SA geworfen wird.

Um dieses nach Fig. 2. und Fig. 3. einzusehen, hat man sich des allgemeinen Sextanten-Reflexions-Gesetzes zu erinnern, dass eine Spiegeldrehung (oder Alhidaden-drehung) um den Winkel β an dem reflektierten Strahl sS , bzw. $s(S)$ eine Drehung um den doppelten Betrag von β , also um 2β , erzeugt, oder es wird in Fig. 3. der Winkel $ss(S') = 2\beta$, wie auch daselbst eingeschrieben ist, und damit wird $s(S')$ parallel FA, was man haben will.

II. Das Spiegelkreuz-Heliotrop von Gauss.

Dieses ist das Instrument, welches von Gauss im Jahr 1821 erfunden wurde. Eine Beschreibung desselben wurde von Gauss im 5. Bande der astr. Nachrichten, S. 329—334 (Februar 1827) nebst Zeichnungen gegeben.

Fig. 4.
Grundsatz des Gauss'schen Heliotrops.

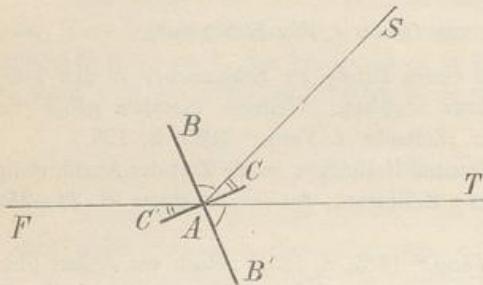
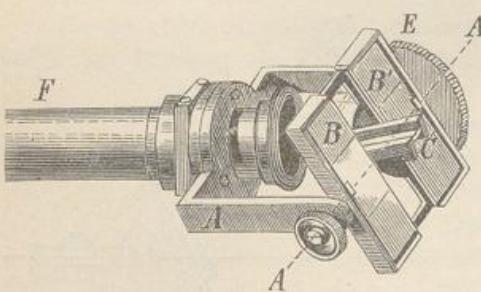


Fig. 5.
Ansicht des Gauss'schen Heliotrops.
(Massstab etwa 1 : 3).



doch zusammen fallen. Der Spiegelapparat wird mit dem Fernrohr verbunden, und das Fernrohr muss dann um seine Axe drehbar sein.

Die Anwendung besteht in Folgendem: Man richtet das Fernrohr für sich allein nach dem entfernten Punkt T , welcher Licht erhalten soll, und zwar hat man hiebei den kleinen Spiegel C parallel der Fernrohraxe zu stellen, so dass er zwar einen Teil des Objektivs verdeckt, aber immer noch genügend Licht auf dasselbe fallen lässt. Von da an bleibt das Fernrohr in seiner Richtung unverändert, und es wird vor das Okular desselben eine Sonnenblendung vorgeschieben. Nun stellt man zuerst die Spiegelaxe AA' rechtwinklig zu der Ebene SAT von Fig. 4., und zwar beurteilt man dieses darnach, dass eine Scheibe E (Fig. 5.), welche auf der Axe AA' rechtwinklig aufgesteckt ist, keinen Flächenschatten wirft, sondern im Sonnenschatten als Linie erscheint. Sobald nämlich eine zu AA' rechtwinklige Ebene keinen Schatten mehr wirft, kann man durch Drehen der Spiegel um die Axe AA' ein Sonnenbild im Fernrohr zum Vorschein bringen, und das Heliotrop ist dann gerichtet.

Was die Prüfung und Berichtigung des Apparates betrifft, so hat Gauss selbst im 5. Band d. astr. Nachr. S. 329—334 dieselbe sehr ausführlich behandelt und zwar mit Unterscheidung von folgenden 8 Forderungen:

In Fig. 4. haben wir den Grundsatz und in Fig. 5. die äussere Ansicht des Gauss'schen Heliotrops. Wir haben zwei ebene, rechtwinklig gekreuzte Spiegel BB' und CC' , welche vor einem Fernrohr F so angebracht sind, dass die gemeinsame Spiegelaxe AA' rechtwinklig zur Fernrohraxe ist, und sich in Fig. 4. als ein Punkt A zeigt. Ein von der Sonne S herkommender Lichtstrahl SA wird nun von dem einen grösseren Spiegel BB' vorwärts nach T reflektiert, und von dem zweiten kleineren Spiegel CC' rückwärts nach F in das Fernrohr; und wegen der rechtwinkligen Kreuzung beider Spiegel ist TAF eine ungebrochene Gerade.

Die technische Ausführung des Gauss'schen Heliotrops zeigt Fig. 5., wobei im wesentlichen dieselben Buchstaben-Bezeichnungen wie in Fig. 4. angewendet sind. Der grosse Spiegel BB' erscheint in Fig. 5. in 2 Teile B und B' zerlegt, deren Ebenen je-

1. 2. Die Absehlinie des Fernrohrs soll mit der Drehaxe des Fernrohrs zusammenfallen (oder wenn das Fernrohr fest und der Spiegelapparat um das Fernrohr drehbar ist, soll die Absehlinie des Fernrohrs mit der Drehaxe des Spiegelapparats zusammenfallen).
3. Die Drehaxe $A A'$ (Fig. 5.) der Spiegel soll rechtwinklig zur Fernrohraxe sein.
4. 5. 6. Die Ebenen der Spiegel sollen parallel dieser Drehaxe $A A'$ sein.
7. Die beiden Bestandteile B und B' (Fig. 5.) des grossen Spiegels sollen parallel sein.
8. Die Ebene des grossen Spiegels und die Ebene des kleinen Spiegels sollen rechtwinklig zu einander sein.

Die Ausführung wird so gemacht:

1. 2. Centrierung des Fernrohrs wie bei einem Nivellier-Instrument.
3. $A A'$ rechtwinklig zur Fernrohr-Axe, wird von Gauss mit Hilfe einer angehängten Libelle gemacht, worauf wir hier nicht weiter eingehen.
4. 5. 6. 7. Kann nötigenfalls rein äusserlich, durch angelegte Lineale und rechte Winkel untersucht werden.
8. Die Hauptforderung, ob die beiden Spiegel gegenseitig rechtwinklig sind, kann man dadurch erfüllen, dass man die beiden Spiegel zusammen wie ein Spiegelkreuz oder Prismenkreuz beim Feldmessen behandelt (vgl. Band II. 4. Aufl. 1895, S. 35 und S. 38).

Zu der Heliotrop-Prüfung schrieb Mechaniker Meyerstein im Januar 1876 im 87. Band, Nr. 2080, der astr. Nachrichten folgendes:

„Die Methode, welche Gauss zur Berichtigung des für die Geodäsie so wichtigen Instrumentes im 5. Bande der astr. Nachr. angegeben hat, lässt bekanntlich im Resultate nichts zu wünschen übrig. Soll aber dieses Resultat erzielt werden, so ist es nur durch eine so grosse Sorgfalt möglich, mit welcher Gauss diese Berichtigung vornahm, welche aber einen sehr bedeutenden Zeitaufwand erfordert. Diese letzte Bemerkung hat der selige Gauss mir gegenüber, indem ich ihm bei der Berichtigung der Heliotrope sehr häufig assistierte, oft gemacht.“ Meyerstein gibt dann eine andere Prüfungsmethode mit einem Hilfsfernrohr, das, mit beleuchtetem Fadenkreuz, auf das Heliotropen-Fernrohr eingerichtet wird.

Es ist hiezu auch über einige Bemerkungen zu berichten, welche von Helmert in dem Berichte über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung 1876, Berlin 1878, S. 165 ff. zu dem Gauss'schen und zu anderen Heliotropen gemacht hat. Für das Gauss'sche Heliotrop findet Helmert den Einstellfehler $\Delta = 2\sqrt{f^2 + \delta^2}$, wenn f die Neigung der Spiegelaxe in der Ebene der Fernrohraxe und δ der Fehler in der Rechtwinkligkeit der beiden Spiegel ist; es wirkt also auch f als Grösse erster Ordnung.

Da das Gauss'sche Heliotrop nur noch historisches Interesse hat, und in der Anwendung namentlich durch das Bertram'sche Heliotrop ersetzt ist (s. u. S. 37 und 38) schliessen wir damit ab.

III. Das Heliotrop von Steinheil.

Auch dieses, zuerst in Schumachers astr. Jahrbuch 1844, S. 13 beschriebene Instrumentchen ist praktisch kaum von Bedeutung, doch lohnt die sinnreiche Einrichtung wohl eine kurze Beschreibung:

Der Spiegel $B B'$ hat in der Mitte bei A eine unbelegte Stelle, so dass die von S herkommenden Sonnenstrahlen durchgehen, und auf eine hinter dem Spiegel

angebrachte Sammellinse L fallen können. Diese Linse L erzeugt ein Sonnenbild in C , welches durch eine matte Fläche aufgefangen wird. Das Sonnenbild in C sendet seinerseits wieder Strahlen zurück nach der Linse L , welche von da wieder parallel austreten, auf die unbelegte Rückseite des Spiegels in A fallen, und nach O zurückgeworfen werden. Infolgedessen sieht das Auge O ein mattes Sonnenbild in der Richtung AT . Die nach O gelangenden Sonnenstrahlen machen hiernach folgenden Weg: $SALC$, dann zurück CLA und reflektiert nach O .

Fig. 6.
Grundsatz des Steinheil'schen Heliotrops,
 S = Sonne, T = Zielpunkt.

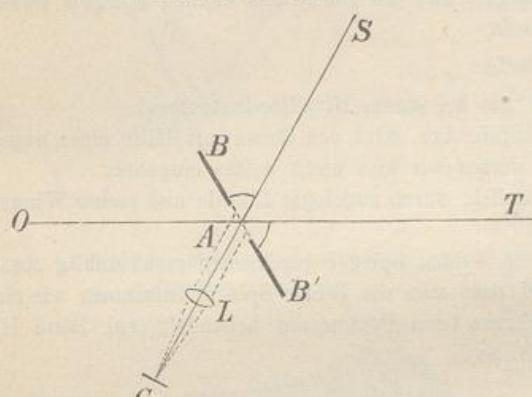
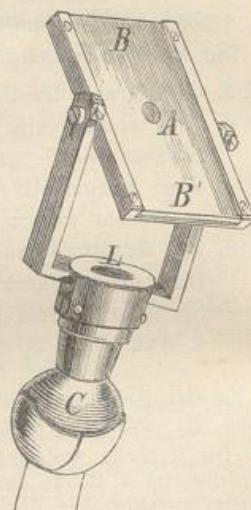


Fig. 7.
Ansicht des Steinheil'schen Heliotrops.
(Massstab ungefähr 1:2.)



Andererseits werden die von S auf den *belegten* Teil der Spiegelfläche BB' fallenden Strahlen in der Richtung AT vorwärts reflektiert, und daraus giebt sich folgende Anwendung:

Das Instrument wird unter Benützung eines Gelenkes bei C Fig. 7. so gestellt, dass die Linse L durch die unbelegte Stelle bei A Sonnenlicht erhält. Dann zielt das Auge O hinter dem Spiegel durch die Öffnung A nach dem Zielpunkt T , welcher Licht erhalten soll, und der Spiegel wird teils im Kugelgelenk C , teils um seine durch A gehende Axe so gedreht, dass in der Richtung AT das oben erwähnte matte Sonnenbild erscheint.

IV. Das Heliotrop von Bertram.

Diese einfache Vorrichtung, welche keine Prüfung und Berichtigung braucht, und ohne Fernrohr von jedem Gehilfen bedient werden kann, ist zur Zeit die am meisten gebrauchte.

Das Instrument wird zuerst von Bessel in der „Gradmessung in Ostpreussen“ S. 65 erwähnt mit den Worten: „Die benützten Heliotrope waren teils von der Einrichtung, welche der Erfinder (Gauss) dieser unschätzbareren Methode ihnen gegeben hat, teils waren sie von einer sehr leicht ausführbaren Konstruktion, welche von Herrn Ingenieur-Geographen Bertram herrührt.“ Die erste Beschreibung und Zeichnung dieses Bertramschen Heliotrops findet sich in General Baeyers „Küstenvermessung“ S. 52

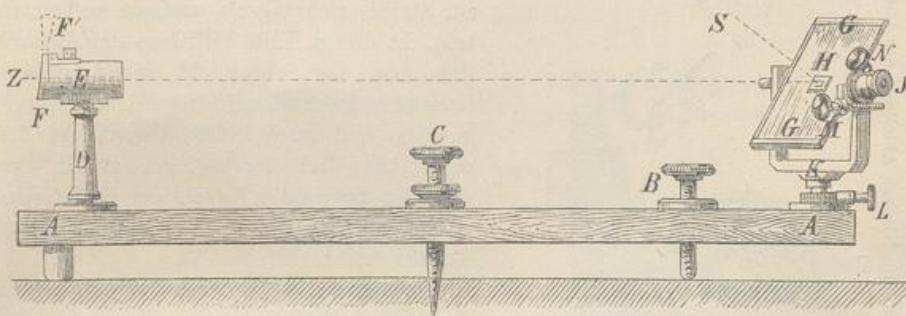
bis 53 und Tafel III. (Über den Urheber der Erfindung wurde eine Erörterung geführt von Nagel bzw. Baeyer, „Zeitschr. f. Verm.“ 1878, S. 34 und von Bertram selbst S. 193.)

Wir geben im Nachfolgenden zwei Zeichnungen des Bertram schen Heliotrops.

Fig. 8.

Bertramsches Heliotrop, ältere Anordnung.

Massstab 1 : 5.



Die Konstruktion des Bertram schen Heliotrops beruht auf dem einfachen Grundgedanken, dass ein entfernter Punkt Z dann Licht durch einen Spiegel H erhält, wenn ein Zwischenpunkt E , welcher sich auf der Ziellinie HZ befindet, von der Lichtlinie getroffen wird.

In Fig. 8. ist GG der Spiegel, welcher, wie immer, so gestellt wird, dass seine Ebene rechtwinklig ist auf der Leuchtebene SHZ , wobei S die Sonne, H die Spiegelmitte und Z der entfernte Punkt ist, welcher Licht erhalten soll, und dass die Strahlen SH und HZ gleiche Winkel mit der Spiegelsebene machen.

Der Spiegel GG hat in der Mitte ein kleines Loch H , welches zwei Zwecken dient, wie wir nachher sehen werden.

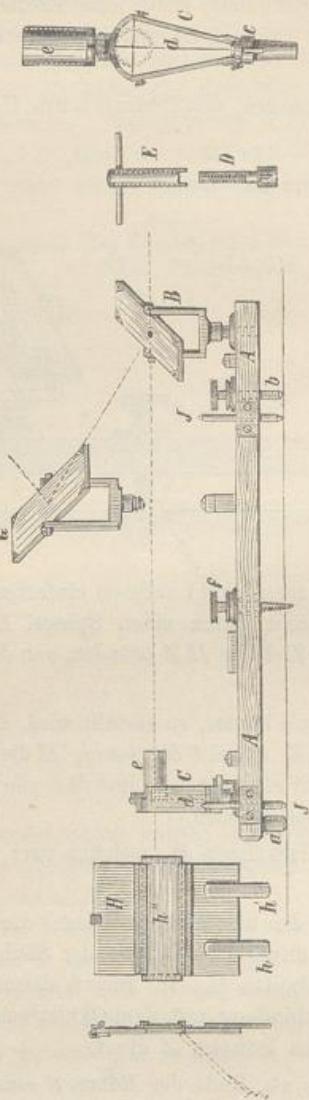
Der Holzrahmen $A A$, auf welchem rechts der beschriebene Spiegel drehbar angebracht ist, trägt auf der anderen Seite links, durch Vermittlung der Säule D , ein kleines Rohr E in gleicher Höhe mit der Spiegelmitte H . Im Innern dieses Rohres ist ein Fadenkreuz E angebracht, welches in Verbindung mit dem Okularloche H des Spiegels als Diopter zum Anzielen eines entfernten Punktes Z dient.

Nachdem dieses geschehen ist, wird links am Ende der Röhre E eine Klappe F , welche vorher geöffnet (in der Lage F') war, vor die Öffnung gebracht, und nun muss der Spiegel G so gestellt werden, dass sein Licht auf die Innenseite der genannten Klappe F fällt, und genauer noch so, dass die Klappe im allgemeinen hell ist, in der Mitte aber einen dunklen Fleck zeigt, herrührend von dem nicht reflektierenden Loche H in der Spiegelmitte.

Das Loche H in der Spiegelmitte dient also zwei verschiedenen Zwecken: erstens ist es Okular beim Zielen längs der Geraden HE , und zweitens dient es zur Bezeichnung der Lichtmitte. Die Bewegung des Spiegels wird in horizontalem und vertikalem Sinn bei K , L , M , N gehandhabt.

Die zwei Schrauben C und B dienen zum Centrieren und zum Einstellen nach der Höhe. (Ältere Konstruktion Fig. 8.)

Fig. 9.
Bertramsches Heliotrop, nach Anordnung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme.
(Massstab 1 : 8.)



Hilfsspiegel (G Fig. 9.).

Wenn die Sonnenstrahlen sehr schief auf einen Heliotropenspiegel auffallen, welcher nach dem entfernten Punkte Licht senden soll, so wird dieses Licht sehr schwach (es ist überhaupt immer nur die Projektion der Spiegelfläche auf eine Ebene rechtwinklig zur Strahlerichtung als wirksam zu betrachten). In diesem Falle hilft man sich dadurch, dass man das Sonnenlicht zuerst mittelst eines günstig gestellten Hilfsspiegels (G Fig. 9.) auffängt und durch dessen Vermittlung dem eigentlichen Heliotropenspiegel zuführt. Dasselbe ist notwendig, wenn der Heliotropenspiegel im Schatten, z. B. im Innern eines Turmes, steht.

Fig. 9. gibt eine Darstellung des Bertram'schen Heliotropes in *neuerer* Anordnung, wie sie zur Zeit bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme im Gebrauch ist.

- A Holzrahmen, 52^{cm} lang, 10^{cm} breit,
- B Leuchtspiegel, 8,2^{cm} lang, 8,2^{cm} breit,
- G Hilfsspiegel bei ungünstiger Sonnenstellung u. s. w., s. o.),
- H Vorsteck-Rahmen für das grüne Glas h'' (selten gebraucht, vgl. Gitterblenden S. 40),
- C Objektivdiopter mit Fadenkreuz d und Leuchtröhre e (in der Nebenfigur rechts ist e aufgeschlagen),
- f Axenschraube zum unmittelbaren Centrieren über Holz,
- b Höhenstellschraube,
- D Leuchttaxe mit Schlüssel E zum schärferen Centrieren statt f (unterhalb D kommt die hier nicht mehr dargestellte „Leuchtschraube“).

V. Das Heliotrop von Reitz.

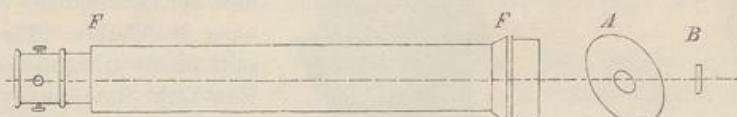
Dieses ist im wesentlichen auf dasselbe Prinzip gegründet wie das Bertram'sche, es wird aber im Gegensatz zu letzterem in Verbindung mit einem Fernrohr gebraucht.

Das Instrument besteht im wesentlichen in einer Verbindung von zwei Spiegeln mit einem Fernrohre. Der grosse Spiegel A lässt sich in jede beliebige Lage bringen und reflektiert das Sonnenlicht nach dem entfernten Zielpunkt. Bei a ist die Folie des Spiegels A abgenommen, der kleine Spiegel B ist rechtwinklig zur Fernrohraxe, b und c sind die Richteschrauben zur Erzielung dieser rechtwinkligen Lage.

In Fig. 11. (s. S. 39) sind die beiden Spiegel A und B gezeichnet nebst dem Ring R, welcher durch Vermittlung von 3 Schrauben S₁ S₂ S₃ zur Befestigung des

Apparates an der Objektivfassung eines Fernrohrs dient. Der grosse Spiegel A ist in Fig. 11. parallel der Fernrohraxe gestellt (wie er beim Gebrauch nicht steht).

Fig. 10.
Grundsatz des Reitzschen Heliotrops.



Ein zu Anfang angezielter, also in der Fernrohraxe liegender Punkt erhält Licht von dem grossen Spiegel A , wenn im Fernrohr (nach Vorschieben eines Blendglases) ein Sonnenbild gesehen wird, das durch den kleinen Spiegel B ins Fernrohr zurückgeworfen wird. Die Sonnenstrahlen, welche nach dem entfernten Punkt gesendet werden, machen also den Weg von der Sonne zum grossen Spiegel A , und von da an dem kleinen Spiegel B vorbei zu dem Zielpunkt; ein Teil der Strahlen aber, welche von dem grossen Spiegel A ausgehen, trifft den kleinen Spiegel B , und wird von diesem zurück ins Fernrohr gebracht.

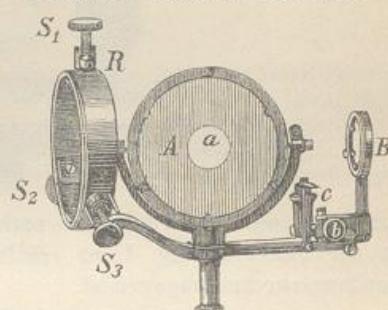
Wenn der Apparat richtig wirken soll, so muss die Ebene des kleinen Spiegels B rechtwinklig zur Fernrohraxe sein. Zur Prüfung und Berichtigung giebt Reitz folgendes Verfahren an:

Man richtet das Fernrohr auf einen nahen (etwa 10^m entfernten) Gegenstand, und dreht den grossen Spiegel A so, dass das Sonnenbild sichtbarlich auf denselben Gegenstand fällt. Man stellt dann das Okular auf unendliche Entfernung ein. Sieht man nun, nachdem ein Sonnenglas vorgeschoben, in das Fernrohr, so lässt sich durch Drehung der Richtetschrauben b und c das Sonnenbild, welches von B reflektiert wird, in das Gesichtsfeld des Fernrohres bringen. Geschieht dies, so sieht man zugleich im Gesichtsfelde auch das von B reflektierte Spiegelbild des Fadenkreuzes, welches nun durch die Schrauben b und c zur Deckung mit dem Fadenkreuz selbst gebracht wird.

Die Thatsache, dass man am Fadenkreuz des Fernrohrs ein Bild dieses Fadenkreuzes selbst wahrnimmt, erklärt sich dadurch, dass bei der Einstellung des Fernrohrs auf Unendlich, die vom Fadenkreuz nach dem Objektiv gehenden Strahlen nach der Brechung parallel austreten, und nach der Reflexion durch den kleinen Spiegel B auf ihrem eigenen Wege wieder zurückkehren. Zugleich wird durch eben diesen kleinen Spiegel B so viel Licht auf das Fadenkreuz geworfen, dass die beschriebene Bild-erzeugung überhaupt wahrnehmbar wird.

Ein ähnliches Instrument wurde von Reitz beschrieben in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“, 1881, S. 338—340. In derselben Zeitschrift 1883, S. 265—268 giebt Reitz auch die Beschreibung und Zeichnung eines „Periheliotrops“, welches rings umher zeitweise jedem Punkte des Horizontes einen Blitz reflektierten Sonnenlichtes zusendet.

Fig. 11.
Ansicht des Reitzschen Heliotrops.



VI. Amerikanisches Heliotrop.

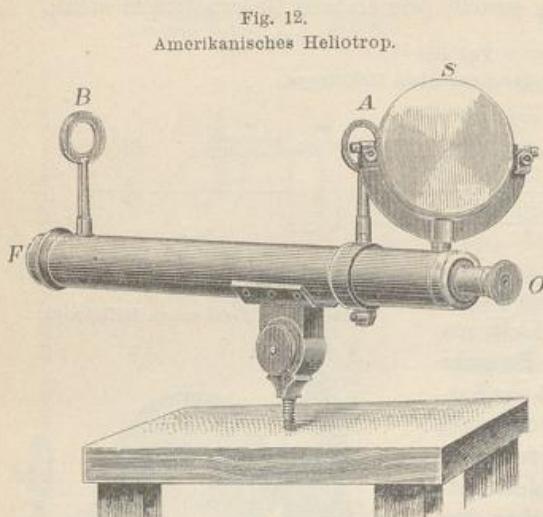


Fig. 12.
Amerikanisches Heliotrop.

wird untersucht durch Leuchten nach einem *nahen* Zielpunkte, indem beobachtet wird, ob der Punkt richtig Licht erhält. Dieses Instrument wird namentlich zu Erkundungszwecken angewendet.

Heliotropen-Telegraphie.

Durch Auf- und Zudecken des Spiegels und Verabredung der Aufeinanderfolge der dadurch erzeugten Lichtblitze wird eine einfache Telegraphie erzielt, welche zur Verständigung zwischen dem Winkelbeobachter und dem Heliotropisten sehr wichtig ist.

Regulierung der Lichtstärke.

Da das Heliotropenlicht unter verschiedenen Umständen sehr *verschieden* stark ist, muss man ein Mittel haben, nach Bedarf das Licht zu verstärken oder namentlich zu schwächen. Die Verstärkung des Lichtes kann durch Anwendung eines grösseren Spiegels oder durch günstigere Stellung eines Hilfsspiegels erzielt werden. Die Verkleinerung des Lichtes machte man früher auch am Heliotrope selbst durch teilweises Decken des Spiegels, oder durch Vorsetzen farbiger Gläser u. s. w. Das hat aber namentlich den Übelstand, dass die Lichtänderung vom Theodolite aus umständlich durch Heliotropen-Telegraphie befohlen werden muss.

In neuerer Zeit ist ein viel einfacheres und besseres Mittel der Lichtschwächung im Gebrauch, welches am Theodolit selbst gehandhabt wird, nämlich das Vorsetzen von *Gitterblenden*, bestehend aus mehreren Lagen eines losen Gewebes, wie Flortuch, Musselin u. s. w. (farbige Gläser dürfen vor dem Theodolit nicht angewendet werden wegen der Gefahr der Lichtablehnung). Professor Bruns berichtet hierüber in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“ 1883, S. 308 mit der Bemerkung, dass dieses Mittel schon vor einem halben Jahrhundert in der astronomischen Praxis Anwendung gefunden hat.

Zum Schluss geben wir noch in Fig. 12. die Zeichnung eines amerikanischen Heliotrops nach der Beschreibung und Zeichnung des Werkes: „The final results of the triangulation of the New-York State survey u. s. w. Albany 1887“ S. 127.

Wie Fig. 12. zeigt, besteht das Instrument aus einem Fernrohr *O F* mit aufgesetztem Spiegel *S* und 2 Ringen *A* und *B*. Der Spiegel soll sein Licht in der Axe der beiden Ringen fortsenden und dabei muss der Schatten des Ringes *A* den Ring *B* decken.

Ob das Ganze richtig wirkt,

ist zu prüfen.

Dauer der Heliotrop-Lichter.

Die Winkelmessung nach Heliotrop-Lichtern ist nur während eines beschränkten Teiles eines Tages möglich, etwa von 3 Uhr Nachmittags bis Sonnen-Untergang, ausnahmsweise auch unmittelbar nach Sonnen-Aufgang. Vormittags und unmittelbar nach Mittag ist die Messung auf weite Entfernung nicht möglich wegen des Schwirrens und der Unruhe der Bilder.

Da auch in der günstigen Tageszeit noch viele Zeit verloren geht wegen mangelnden Sonnenscheins, so ist die Winkelmessung nach Heliotrop-Licht eine langwierige Arbeit. Nach einer von der Landesaufnahme angestellten Vergleichung („Zeitschr. f. Verm.“ 1879, S. 111) ist die mittlere Leistung für 1 Tag und 1 Instrument nur etwa zwischen 12 und 17 Einstellungen (in je zwei Lagen).

Nacht-Beobachtungen.

Man ist in neuerer Zeit wieder teilweise von der Signalisierung durch Heliotrope zur Anwendung nächtlicher Lampensignale zurückgekommen. Im Generalbericht d. Eur. Gr. f. 1875, S. 140—150 wird von Perrier eine „Etude comparative des observations de jour et de nuit“ mitgeteilt, welche den Nacht-Beobachtungen den Vorzug gibt.

Die elektrische Nacht-Signalisierung zwischen Spanien und Algier haben wir bereits auf Seite 22—23 erwähnt.

Eine Abhandlung: „Die Winkelmessungen bei Tage und bei Nacht“ von W. Werner ist in der „Zeitschr. für Instrumentenkunde“ 1883, S. 225—237 erschienen.

§. 5. Anordnung der Winkelmessung.

Die Winkelmessung, das wichtigste Element der Triangulierung, ist in ihrer Anordnung durch zwei wesentlich verschiedene Umstände bedingt, erstens durch die mechanischen und optischen Verhältnisse des Messens selbst, und zweitens durch die Ausgleichung.

In geschichtlicher Beziehung hat sich die Winkelmessung für Triangulierung etwa so entwickelt:

Schon vor der Anwendung des Fernrohrs konnte man an geteilten Kreisen von grossem Halbmesser Winkel auf etwa 1' genau messen (*Snellius* 1615, vgl. unsere Einleitung S. 5), bald stieg die Genauigkeit so, dass man einzelne Sekunden in Rechnung nahm.

Das im vorigen Jahrhundert von *Tobias Mayer* in Göttingen erfundene und von den Franzosen weiter entwickelte Verfahren der Repetitions-Messung mit Nonienablesung galt bis zur Mitte dieses Jahrhunderts im allgemeinen als das beste und die Genauigkeit stieg auf 1".

Das Wesentlichste über Repetitions-Messung haben wir schon in unserem II. Bande „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl. 1893 § 72 mitgeteilt, zugleich sei über die hannoverschen Repetitions-Messungen von *Gauss* verwiesen auf Gädé, „Zeitschr. f. Verm.“ 1885, S. 121 und 205 und „Zeitschr. f. Verm.“ 1882, S. 431. Über den älteren „cercle répétiteur“, vgl. Jordan, Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung, Berlin 1885, S. 219 und S. 206. Eine neuere gründliche Arbeit hiezu ist: Über das Mitschleppen des Limbus und verwandte Fehler bei Repetitionstheodoliten, von Friebe, „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 333—348.

Struve und *Bessel* gingen etwa 1820—1830 zur „Richtungs-Messung“ über, welche später mit Mikroskop-Ablesung (etwa seit 1840, vgl. Küsten-Vermessung S. 51) weiteste Verbreitung fand. Man nahm möglichst viele Sichten in einen Satz zusammen

und wiederholte die Sätze mit verstelltem Limbus. In neuester Zeit ist die reine „Winkelmessung“ (mit nur *zwei* Sichten in einem Satze) mit Vorteil angewendet worden.

Nach dieser allgemeinen Übersicht wollen wir einzelne Verhältnisse näher betrachten:

Richtungs-Messungen.

Die Messung von möglichst vollen Sätzen, wie man sie im einzelnen Falle bekommen kann, wurde von Bessel bei der Gradmessung in Ostpreussen angewendet und seitdem Jahrzehnte lang fortgesetzt. Bessel schreibt (Gr. in Ostpr. S. 69):

„Wenn man immer *alle* auf einem Dreieckspunkt zu beobachtende Richtungen hätte einstellen können, so würde das Resultat aller daselbst gemachten Beobachtungen ganz einfach das Mittel aus allen Ablesungen jeder Richtung gewesen sein. Dieses war aber sehr selten möglich; man musste sich auf die Beobachtung derjenigen Punkte beschränken, welche gerade sichtbar waren und nicht zu unruhig erschienen.“

Für die Messungen selbst scheint nun ein solches Anpassen an die Umstände das beste, allein die Ausgleichungen werden dadurch ungemein verwickelt.

Wir können heute davon absehen, dass es mehrerer Jahrzehnte bedurf hat, bis die formelle Theorie der Ausgleichung von Triangulierungen mit solchen unvollständigen Satzbeobachtungen fertig gestellt, und unbestritten anerkannt war (Bessel, Hansen, Andrä u. A. 1834—1870, man vgl. unseren I. Band „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl. 1895, Kap. II, zusammenhängende Entwicklung aller hierher gehörenden Theorien). Aber auch wenn diese Theorien nun vorliegen und die ganze Ziffernmenge mit den Coefficienten $[\alpha \alpha]$, $[\alpha \beta]$ u. s. w. berechnet ist, ist sie doch in sich kaum konsequent zu nennen, weil die mittleren Fehler *nach* der Ausgleichung immer grösser ausfallen, als *vor* der Ausgleichung, wozu noch andere Übelstände kommen.

Null-Marke.

Um die vorerwähnten Richtungs-Messungen etwas geschmeidiger und von zufälligen Umständen unabhängiger zu machen, hat man in jeden Satz einen naheliegenden Zielpunkt, welcher gar nicht zu der Triangulierung selbst gehört, aufgenommen.

Über dieses Mittel wurde zuerst von Struve (astr. Nachr. 2. Band, 1824, S. 435) berichtet. Die Nullpunktsmarke wurde von Struve in 500 bis 1000 '' Entfernung gesetzt; sie bestand aus einem vertikalen Rechteck von 10 '' Breite und 20 '' Höhe mit weisser Farbe auf schwarzem Grunde angelegt; da der Vertikalfaden des Fernrohrs 6 '' deckte, so blieb links und rechts von dem Rechteck ein Streifen von 2 '' Breite übrig.

Die ausgedehnteste Anwendung fand dieses Mittel der Nullmarke bei den Triangulierungen des geodätischen Instituts, etwa 1870—1880, namentlich bei dem „Rheinischen Dreiecksnetz“; es hat sich aber gefunden, „dass die Beobachtungen der Nullmarke auf den Stationen des Rheinischen Dreiecksnetzes erheblich schlechter sind, als die der übrigen Objekte. („Zeitschr. f. Verm.“ 1879, S. 149.)

Ein Teil dieser Nullmarkenfehler mag jedenfalls darin liegen, dass die Nullmarken nicht immer in genügend gleicher Höhe mit dem Theodolit angebracht werden konnten; wenn indessen eine Nullmarke unter einem starken Neigungswinkel erscheint, so sollte man den Horizontal-Axenfehler (*i tang h* Band II, 4. Aufl. 1893, S. 203) hiefür in Rechnung bringen.

Winkelmessungen in allen Kombinationen.

Dieses Mittel, welches schon von Gauss und Gerling als Ideal gepriesen wurde, ist von General Schreiber etwa seit 1871 angewendet worden und bildet jetzt den Grundton der Haupttriangulierungen der Landesaufnahme.

Die Theorie hiezu haben wir bereits in unserem I. Bande, „Handb. d. Verm.“ 4. Aufl. 1895, § 77 behandelt, auch alle Citate hiezu gegeben.

Hiernach sind die Vorteile der Winkelmessung in allen Kombinationen doppelt: Erstens werden die Messungen selbst so genau als möglich, durch Beschränkung auf kürzeste Dauer (nur *zwei* Zielpunkte) des einzelnen Satzes; zweitens aber werden dadurch alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. gleich Null, und die Netzausgleichung, welche bei unvollständigen zerstreuten Sätzen eine unerfreuliche starre Masse bildet, wird nun, bei Wahrung aller formellen Strenge, so übersichtlich und geschmeidig, wie wenn man es mit unabhängigen Richtungs-Messungen zu thun hätte.

§ 6. Schraubenfehler und Teilungsfehler.

Das Wichtigste über das Schrauben-Mikroskop haben wir schon in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, § 63. mitgeteilt, d. h. alles das, was man unbedingt wissen muss, um mit einem Mikroskop-Theodolit messen zu können. Auch ist da noch an die weiteren Ausführungen zu erinnern, welche im II. Band, 3. Aufl. 1888, S. 150—151 und S. 213—214 gegeben waren.

Nach diesem wollen wir noch die Fehleruntersuchung der Schrauben behandeln.

Man hat zu fragen, ob die Schrauben der Mikroskope durchaus gleichförmige Verschiebungen der Fäden erzeugen, oder im einzelnen:

- 1) ob die verschiedenen Schraubengänge alle gleich sind (fortschreitende Fehler),
- 2) ob in der einzelnen Umdrehung die Drehungswinkel den Fadenverschiebungen proportional sind (periodische Fehler).

Die erste Frage, fortschreitende Fehler betreffend, kann man dadurch beantworten, dass man ein und denselben Teilwert des Kreises an verschiedenen Stellen der Schraube misst. Die Untersuchung wird bei den wenigen Umdrehungen, welche bei Theodolit-Mikroskopen gewöhnlich nur gebraucht werden, selten merkliche Fehler ergeben, und ist jedenfalls nicht schwierig. (Eine sehr feine Untersuchung dieser Art findet man in „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, Tome V, Paris 1886, S. 47—60, erreurs progressives d'une vis micrométrique.“)

Dagegen sind die *periodischen Fehler*, welche von unsicherer Führung der Schrauben u. s. w. herrühren, oft bedeutend und müssen stets untersucht werden.

Man braucht dazu ein Intervall, welches *nicht* einer ganzen Umdrehung oder einem Vielfachen einer Umdrehung entspricht, sondern am besten einen runden Bruchteil, z. B. ein Viertel, ein Fünftel oder dergl. einer Umdrehung giebt.

Die Theodolitkreise haben meist keine Teilstriche für solche Zwecke, und es wäre zu wünschen, dass die Mechaniker bei Herstellung der Teilungen darauf Rücksicht nähmen, indem an irgend welcher Stelle einige Hilfsstriche in Abständen von 1', 2', 3', 4' u. s. w. angebracht würden.

Statt eines Hilfsstriches auf der Teilung kann man auch einen Hilfsfaden (bzw. Doppelfaden) im Gesichtsfelde des Mikroskopes anwenden, indem dann der Haupt-

Faden und der Hilfs-Faden (bzw. die beiden Faden-Mitten) nacheinander auf denselben Strich der Teilung eingestellt werden.

Manchmal kann man auch irgend ein nicht zur Teilung selbst gehöriges Zeichen auf dem Teilkreise als Hilfsstrich benützen; z. B. giebt Reinhertz in der „Zeitschr. f. Vermessungswesen“, 1887, S. 549, an, dass er den Mittelstrich der Ziffer 1 als Hilfsstrich genommen habe. Ähnlich haben wir bei dem nachfolgenden Beispiel die Ziffer 2 benützt, welche im Gesichtsfeld erschien, indem auf das rechts unten an 2 befindliche vertikale Abstossstrichchen eingestellt wurde.

Der Abstand dieses Hilfsstriches von dem nächsten Teilstiche war rund $i = 1'$, und die Mikroskop-Trommel hat $5'$ auf einer Umdrehung. Nun wurde das Hilfsintervall i auf der Schraube 5mal gemessen, indem nach jeder Messung die Althilade wieder um i zurückgedreht wurde. Das Ganze wurde mehrfach hin und zurück wiederholt, doch geben wir hier nur die *Mittelzahlen* s mit ihren Differenzen i , woran sich auch die leichtverständliche Berechnung anschliesst.

Schrauben-ablesungen	Differenzen	Verbesserungen	Schrauben-ablesung rund
s	i	$i_0 - i = v$	Δs
0' 0,00"			0,00"
	1' 6,15"	- 1,06"	
1' 6,15"	1' 8,75"	- 3,66"	- 1,06"
	2' 14,90"		- 4,72"
	1' 3,95"	+ 1,14"	
3' 18,85"	1' 3,75"	+ 1,34"	- 3,58"
	4' 22,60"		- 2,24"
	1' 2,85"	+ 2,24"	
5' 25,45"			0,00"
Mittel $i_0 = 1' 5,09"$	0,00"		5'

Die Trommelteilung geht von $10''$ zu $10''$, einzelne Sekunden werden geschätzt, (Doppelsekunden sind nicht angewendet), die Dezimalen bis auf $0,05''$ bei den Ablesungen s sind nur durch Wiederholungen und Mittelbildung entstanden. Das Mittel i_0 nehmen wir nun als richtig an (obgleich $s = 5' 25''$ statt $5' 0''$ am Schlusse abgelesen ist), berechnen die Differenzen $i_0 - i = v$, deren Summe = 0 sein muss, und dann die Verbesserungen Δs als Summen der v , indem das erste $s = 0,00''$ gesetzt wird, dann $0,00 - 1,06 = 1,06$, $1,06 - 3,66 = 4,72$ u. s. w.

Nach dem Ergebnis dieser Untersuchung ist also jede Schrauben-Ablesung in der Gegend von $2'$ um $4,7''$ zu vermindern u. s. w.

Wenn die Verbesserungen Δs so gross werden, wie in diesem Beispiel, so ist es bedenklich, sie zu vernachlässigen; eine Korrektions-Tabelle anzulegen und alle Ablesungen darnach zu verbessern, wäre sehr mühsam, vielleicht kann man den Grund der Ungleichheit in der mechanischen Lagerung der Schraube u. s. w. finden und verbessern, oder man muss schlechte Schrauben entfernen und durch bessere ersetzen lassen.

Es ist hier zu citieren:

Westphal, Übersicht über die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen von Mikrometer-Schrauben, „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“, 1881, S. 149, 229, 250, 397.

Einige Beispiele hiefür gibt auch die erwähnte Abhandlung von Reinhertz in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1887, S. 545—553, mit der Anordnung, die periodischen Schraubenfehler durch plannässige Anwendung *verschiedener Trommelstellungen* zu eliminieren, was gleichzeitig mit der Verteilung der Richtungen auf verschiedene Kreislagen geschehen kann.

Wir wollen beispielshalber annehmen, man wolle mit unserem Instrumente, dessen Trommel $5' = 300''$ Umdrehung hat, eine Richtungs-Messung in 8 Kreislagen machen; dann muss man nach jedem Satze die Trommelstellung um $300' : 8 = 37,5''$ ändern, oder man bekommt für die 8 Kreislagen folgende Anfangs-Ablesungen:

1. 0° 0' 0"	5. 90° 2' 30"
2. 22° 30' 38"	6. 112° 33' 8"
3. 45° 1' 15"	7. 135° 3' 45"
4. 67° 31' 52"	8. 157° 34' 22"

(2)

Stellt man diese Anfangs-Ablesungen ein, so werden auch alle anderen Ablesungen je um $37,5''$ verschoben, und damit die periodischen Schraubenfehler mit derselben Wahrscheinlichkeit eliminiert, wie man das bei den Kreisteilungs-Fehlern durch die plannässigen Kreisverstellungen erwartet.

Ausgleichung der periodischen Schraubenfehler.

Bei unserem vorstehenden Beispiele ist die ganze Berechnung in der kleinen Tabelle (1) enthalten, und man kann nötigenfalls die erhaltenen Δs auch noch graphisch ausgleichen.

Jedenfalls bietet aber auch die rechnerische Ausgleichung (welche in dieser Form von *Bessel* eingeführt wurde) viele Vorteile; wir wollen eine solche als Beispiel hier vornehmen. Dieses Beispiel bezieht sich nicht auf einen Theodolit, sondern auf den Repsoldschen Komparator der K. Normal-Aichungs-Kommission, und wurde von uns im April 1881 erhalten.

Dieses Beispiel kann indessen auch die Schraubenfehler-Ausgleichung für Theodolit-Messungen veranschaulichen.

In Fig. 1. soll t das Intervall einer Teilung bedeuten, welche durch ein Schrauben-Mikroskop gemessen wird. K sei der optische Mittelpunkt des Mikroskop-Objektives, und s sei der Schraubenwert, den man durch Einstellen auf den linken und rechten Strich des Intervalls t findet.

Hat die Schraube keine Fehler, so wird man immer *denselben* Wert s erhalten, welche Teile der Schraube auch benutzt werden (abgesehen von den unregelmässigen Einstellfehlern), wenn dagegen die Schraube selbst Fehler enthält, so werden die Werte s verschieden ausfallen.

Wir bezeichnen allgemein eine Schrauben-Ablesung mit S und wir nehmen an, die zu S gehörige Schrauben-Verbesserung lasse sich durch folgende Gleichung darstellen:

$$\Delta S = \varphi(S) = r \sin(A + S) = r \sin A \cos S + r \cos A \sin S \quad (3)$$

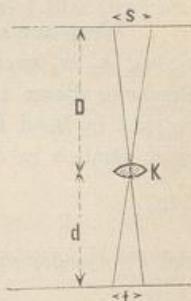
Setzt man hier $r \sin A = \alpha$ und $r \cos A = \beta$

$$\text{oder } \tan A = \frac{\alpha}{\beta}, \quad r = \frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\cos A} \quad (4)$$

so kann man (3) auch in diese Form schreiben:

$$\Delta S = \varphi(S) = \alpha \cos S + \beta \sin S \quad (5)$$

Fig. 1.
Schrauben-Mikroskop.



Zur Bestimmung der Konstanten α und β wird nun die Messung von t , entsprechend Fig. 1., an verschiedenen Stellen der Schraube vorgenommen, so dass verschiedene Werte s entstehen.

Wenn S die Anfangsstellung einer solchen Messung, folglich $S+s$ die Endstellung ist, so hat man für die Anfangsstellung die Gleichung (5) und für die Endstellung die zugehörige Gleichung:

$$\varphi(S+s) = \alpha \cos(S+s) + \beta \sin(S+s) \quad (6)$$

Wenn man aus (5) und (6) die Differenz bildet, so erhält man:

$$\varphi(S+s) - \varphi(S) = -2\alpha \sin\left(S + \frac{s}{2}\right) \sin\frac{s}{2} + 2\beta \cos\left(S + \frac{s}{2}\right) \sin\frac{s}{2}$$

$$\text{Wir setzen: } -2\alpha \sin\frac{s}{2} = x, \quad +2\beta \sin\frac{s}{2} = y \quad (7)$$

$$\text{und } S + \frac{s}{2} = \sigma \quad (8)$$

folglich ist die Verbesserung für den Schraubenwert s :

$$\varphi(S+s) - \varphi(S) = x \sin \sigma + y \cos \sigma \quad (9)$$

Es sollen 4 symmetrisch gelegene Beobachtungen von s gemacht werden mit den Ergebnissen s_1, s_2, s_3, s_4 und wir setzen:

$$\frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{4} = s_0 \quad (10)$$

Dieses ist auch, wie wir nachher sehen werden, der wahrscheinlichste Wert von s überhaupt, indessen wollen wir vorläufig (um die Zahl der Unbekannten sicher zu stellen) den wahrscheinlichsten Wert $= s_0 + \xi$ setzen, und haben daher durch Vergleichung mit (9), nun die Fehlgleichung:

$$v = (s + x \sin \sigma + y \cos \sigma) - (s_0 + \xi)$$

Wir setzen wie gewöhnlich $s_0 - s = l$ und haben dann in 4facher Anwendung:

$$\begin{aligned} -v_1 &= \xi - x \sin \sigma_1 - y \cos \sigma_1 + l_1 \\ -v_2 &= \xi - x \sin \sigma_2 - y \cos \sigma_2 + l_2 \\ -v_3 &= \xi - x \sin \sigma_3 - y \cos \sigma_3 + l_3 \\ -v_4 &= \xi - x \sin \sigma_4 - y \cos \sigma_4 + l_4 \end{aligned} \quad | \quad (11)$$

Wenn nun aber die 4 Beobachtungen symmetrisch liegen, d. h. wenn die 4 Werte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ nach (8) je um 90° gegen einander verschoben sind, so wird die Ausgleichung dieser 4 Fehlgleichungen sehr einfach, wie wir schon an einem ähnlichen Beispiel in Band II. 4. Aufl. § 70. gesehen haben, die Ausgleichung des Systems (11) gibt nämlich in diesem Falle:

$$\xi = 0 \quad x = \frac{[l \sin \sigma]}{2} \quad y = \frac{[l \cos \sigma]}{2} \quad (12)$$

und die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler wird:

$$[v v] = [ll] - \frac{[l \sin \sigma]^2}{2} - \frac{[l \cos \sigma]^2}{2} \quad (13)$$

Rechnet man ausserdem die einzelnen v und v^2 aus, so erhält man in ihrer Summe eine Rechenprobe.

Der mittlere Fehler einer Bestimmung von s wird, weil 3 Unbekannte ξ, x, y vorhanden sind:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{4-3}} = V[v v] \quad (14)$$

Aus x und y kann man nach (12) und (7) auch α und β herstellen, nämlich:

$$\alpha = -\frac{[l \sin \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2}} \quad \beta = +\frac{[l \cos \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2}} \quad (15)$$

und nach (4) kann man auch die ursprünglichen Unbekannten A und r wieder herstellen:

$$\tan A = \frac{-[l \sin \sigma]}{+[l \cos \sigma]}, \quad r = \frac{-[l \sin \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2} \sin A} = \frac{+[l \cos \sigma]}{4 \sin \frac{s}{2} \cos A} \quad (16)$$

Bei unseren Messungen am Repsold schen Komparator (Mikroskop I. rechts, mit 25facher Vergrößerung) war ungefähr $s = 4,6239$ Umdrehungen, (und zwar herrührend von der Beobachtung eines Intervalls = 0,2 Pariser Linien = 0,4511658^{mm}, also 1 Umdrehung = 97,57^μ oder rund 1 Umdrehung = 0,1^{mm} = 100^μ).

Da jedoch hier die ganzen Umdrehungen nicht in Betracht kommen, rechnen wir mit dem Wert $s = 0,6239$ Umdrehungen oder:

$$s = 0,6239 \text{ Umdrehungen} = 0,6239 \times 360^\circ = 224^\circ 36' \quad (17)$$

Es wurde immer mit 0,00 angefangen, folglich sind nun die Werte σ :

$$\sigma_1 = \frac{s}{2} = 112^\circ 18' \quad \sigma_2 = \frac{s}{2} + 90^\circ = 202^\circ 18'$$

$$\sigma_3 = \frac{s}{2} + 180^\circ = 292^\circ 18' \quad \sigma_4 = \frac{s}{2} + 270^\circ = 22^\circ 18'$$

Ein Messungsversuch am Mikroskop I. (rechts) gab folgendes:

1)	$s_1 = 0,6254$	$l_1 = -15$	$l_1^2 = 225$
	$s_2 = 0,6311$	$l_2 = -72$	$l_2^2 = 5184$
	$s_3 = 0,6232$	$l_3 = +7$	$l_3^2 = 49$
	$s_4 = 0,6158$	$l_4 = +81$	$l_4^2 = 6561$
Mittel	$s_0 = 0,6239$	$[l] = +1$	$[l^2] = 12019$
		soll = 0	

Da $s = 1$ rund = 100^μ, also s_1 nahezu = 62,54^μ ist, sind die l hier rund in Einheiten von 100^μ oder 0,1^{mm} gezählt, oder rund $l_1 = 0,15$ ^μ.

Nun rechnet man:

$$\text{nach (12): } x = +18,85 \quad y = +74,955 \quad (12^*)$$

$$\text{nach (13): } [v v] = 12019 - 710,6 - 11236,5 = 71,9 \quad (13^*)$$

$$\text{nach (15): } \alpha = -10,187 \quad \beta = +40,507 \quad (14^*)$$

$$\text{nach (16): } A = 345^\circ 53' \quad r = 41,768 \quad (16^*)$$

Man hat also nun nach (3) die Korrekturenformel:

$$\Delta S = 41,768 \sin(345^\circ 53' + S) \quad (19)$$

Wenn man hier für S die 4 Anfangswerte $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ und dann die 4 Endwerte $s = 224^\circ 36', 90^\circ + s, 180^\circ + s, 270^\circ + s$ einsetzt, so bekommt man:

$$\text{für die Anfangswerte } -10,2 \quad +40,5 \quad +10,2 \quad -40,5 \quad (20)$$

$$\text{" " Endwerte } -21,2 \quad -36,0 \quad +21,2 \quad +36,0$$

$$\text{Differenzen } \Delta S: \quad -11,0 \quad -76,5 \quad +11,0 \quad +76,5$$

$$\text{Beobachtungen (18), } l: \quad -15 \quad -72 \quad +7 \quad +81$$

$$\text{übrig bleibende Fehler } v: \quad +4,0 \quad -4,5 \quad +4,0 \quad -4,5$$

Die Quadratsumme dieser 4 Werte ist $[vv] = 72,5$, was mit (13*) hinreichend stimmt. Nach dieser Bestätigung rechnen wir den mittleren Fehler einer Messung nach (14) :

$$m = \sqrt{72,5} = \pm 8,5 \text{ (nahezu } = 0,085\mu\text{)} \quad (21)$$

Nach der Formel (19) kann man nun eine Korrektionstafel für das betreffende Mikroskop berechnen, deren 4 Hauptwerte schon in (20) enthalten sind. Indessen reduziert man nun alles auf den Anfang, da es sich doch immer nur um Schrauben-Differenzen handelt. So bekommt man (Mikroskop I, rechts):

Schrauben-Ablesungen	Verbesserung	
	nach (20)	reduziert
0,0000·0	- 10·2	0·0
0,2500·0	+ 40·5	+ 50·7
0,5000·0	+ 10·2	+ 20·4
0,7500·0	- 40·5	- 30·3
1,0000·0	- 19·2	0·0

(22)

In gleicher Weise wurde auch das andere Mikroskop behandelt und dann für beide Mikroskope ausführliche Korrektionstafeln berechnet. Die später in § 9. mitzuteilenden Mikroskop-Ablesungen sind nach diesen Reduktions-Tabellen reduziert.

Ein sehr feines Beispiel solcher Bestimmung und Ausgleichung periodischer Schraubenfehler ist mitgeteilt in dem Werke: „travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, tome II, Paris 1883, Seite C 104—C 118“. Es wurden drei Hilfsstriche I, II, III in Abständen von 20μ und zwei Fäden 1 und 2 im Abstande von 30μ angewendet. Damit wurde gemessen:

- 1) Faden-Abstand I—2 = 30μ an einem beliebigen Strich,
- 2) Strich-Abstand I—II = 20μ mit demselben Faden,
- 3) " " II—III = 20μ "
- 4) " " I—III = 40μ "

Alles dieses wurde in den verschiedensten Trommelstellungen sehr oft wiederholt.

Ein weiteres Citat hiezu ist:

Müller. Untersuchungen über Mikrometerschrauben mit besonderer Anwendung auf das Fadenmikrometer des neunzölligen Äquatoreals der Berliner Sternwarte. Berlin, Dümmler.

Kreisteilungsfehler.

Zu den kurzen Angaben über Teilungsfehler diametraler Striche und Bestimmung von Teilungsfehlern durch Repetition, die schon in unserem II. Bande 4. Aufl. 1893, S. 217—218 enthalten sind, können wir hier noch einiges weiteres, was hierüber veröffentlicht worden ist, berichten:

General Schreiber hat in der Abhandlung „Richtungs-Beobachtungen und Winkelbeobachtungen“ („Zeitschr. f. Verm.“ 1879, S. 118 u. ff.) Teilungs-Untersuchungen mitgeteilt. Er sagt:

Nach den Erfahrungen, die sich auf die Untersuchung verschiedener aus unseren ersten Werkstätten hervorgegangener Teilungen stützen, ist der unregelmäßige Teilungsfehler ein sehr bedeutender Teil des Gesamtfehlers einer unter günstigen Beobachtungen gemachten Beobachtung. Es fand sich im Mittel aus 16 Instrumenten der Firmen Pistor und Martins, Repsold u. Söhne, J. Wanschaff, C. Bamberg folgendes:

Mittlerer Gesamtfehler einer beobachteten Richtung $\tau = \pm 0,78''$

Mittlerer unregelmäßiger Teilungsfehler einer beobachteten Richtung $\tau' = \pm 0,50''$

Diese Werte sind aus wirklichen trigonometrischen Gebrauchsmessungen berechnet, und der regelmässige Teil des Teilungsfehlers ist durch einen 8gliedrigen periodischen Ausdruck von τ' abgesondert worden („Zeitschr. f. Verm.“ 1879, S. 120).

Ferner ist von General Schreiber hier zu citieren: „Untersuchung von Kreisteilungen mit zwei und vier Mikroskopen“ („Zeitschrift für Instrumentenkunde“, 1886, S. 1—5, S. 46—55, S. 93—104.)

Die Untersuchungen sind angestellt mit einem Instrument, welches 1879 besonders zu diesem Zwecke von J. Wanschaff konstruiert wurde, dasselbe ist beschrieben und abgebildet in dem „Berichte über die wissenschaftlichen Instrumente auf der Berliner Gewerbe-Ausstellung im Jahre 1879“, herausgegeben von Löwenherz, 1880, S. 74 bis 76, und in der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“ 1881, S. 67, wornach unsere Fig. 2. als Kopie gemacht wurde.

Fig. 2.
Kreisteilungs-Untersucher
nach Angabe von General Schreiber konstruiert von Mechaniker Wanschaff.
(Massstab etwa 1:7,5, Kreisdurchmesser = 42 cm.)

$F_1 F_2 F_3 F_4$ Lampenbeleuchtungen für die Mikroskope.

$S S$ fester Rahmen mit den Mikroskopen M_1 und M_2 .

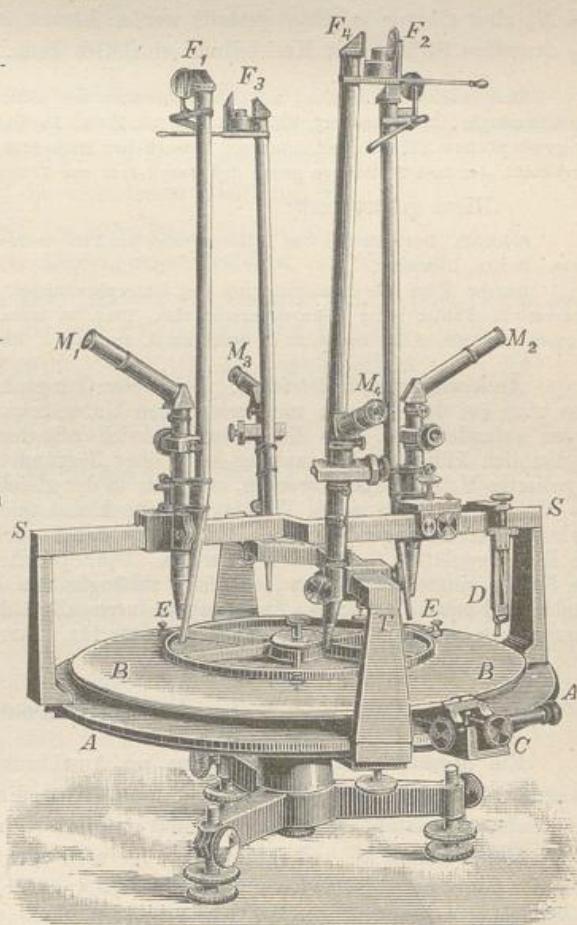
$T T$ drehbarer Rahmen mit den Mikroskopen M_3 und M_4 .

D Fühlhebel.

$E E$ Unterlagsschrauben.

B beweglicher Kreis.

A fester Kreis.



Das Instrument hat unten einen unbeweglichen Kreis *A* und damit fest verbunden eine Schiene *SS* mit zwei Mikroskopen *M₁* und *M₂*.

Eine zweite Schiene *TT* mit zwei Mikroskopen *M₃* und *M₄* ist drehbar gegen den Unterlagskreis *A*, so dass die Schienen *SS* und *TT* unter jedem Winkel gegen einander gestellt werden können.

Auf den beweglichen Kreis *B* kann ein zu untersuchender Teilkreis mit den Unterlagsschrauben *FF* aufgeschraubt werden, und ob der Kreis sich dann beim Um-drehen von *B* richtig in einer *Ebene* dreht, kann mit dem Fühlhebel *D* untersucht werden.

Die 4 Mikroskope *M₁ M₂ M₃ M₄* werden nicht mit Tageslicht, sondern mit künstlicher Lampenbeleuchtung *F₁ F₂ F₃ F₄* abgelesen.

Noch eine Eigentümlichkeit ist zu erwähnen: Man kann zwar die zwei Schienen *SS* und *TT*, und damit auch die Mikroskop-Ebenen *M₁ M₂* und *M₃ M₄* beliebig gegen einander drehen, doch wäre es nicht möglich, den Winkel zwischen *M₁ M₂* und *M₃ M₄* auch = Null zu machen, wegen der Dicke der Mikroskope, wenn nicht besondere Vorsorge getroffen wäre, darin bestehend, dass zwar die Mikroskope *M₁* und *M₂* rechtwinklig zur Kreisebene *B* gerichtet sind, die beiden anderen Mikroskope *M₃* und *M₄* aber ein wenig *schief* gestellt werden können, so dass man z. B. mit *M₁* und *M₃* denselben Strich einer Kreisteilung einstellen kann.

Eine ähnliche Anordnung mit Messungsreihen seit 1872, hat Nagel in Dresden mitgeteilt in der Zeitschrift „Civilingenieur“, 33. Band, 1887, 8. Heft. Es ist an einem Repsold'schen Theodolit mit gewöhnlichen Mikroskopen, noch ein beweglicher *Hilfs-Arm* mit zwei diametralen Mikroskopen angebracht, der in 4 Stellungen gegen den Haupt-Arm zur Teilungs-Untersuchung benutzt wurde.

Hiezu gehört auch:

Schmidt. Bestimmung der Teilungsfehler am Pistorischen Meridiankreise der Berliner Sternwarte. Berlin, Dümmler.

Broch. Über die Etalonnierung der Unterabteilungen eines Stabes, die Bestimmung der progressiven Fehler einer Mikrometerschraube. Trav. et mém. du bureau intern. des poids et mesures. 5. 1886, S. 1. Bespr. in d. Beibl. zu d. Annalen d. Physik u. Chemie 1887, S. 487.

Änderung von Teilstrichen. Bei dieser Gelegenheit mag auch erwähnt werden, dass man bei den feinsten metronomischen Untersuchungen an Strichmassen Andeutungen gefunden hat, dass die Teilstriche sich mit der Zeit ändern. Diese zunächst unglaublich klingende Behauptung kann aber begründet sein, denn die Striche, welche in poliertes Metall gerissen werden, erzeugen in der gleichförmigen molekularen Struktur des Metalls gewissmassen Wunden, welche kleine molekulare Änderungen als Nachwirkung hervorbringen können. Es kommt dabei auch darauf an, ob und wie weit die Risse geglättet („ebarbiert“) werden. Die optische Strichmitte, auf welche man die Fäden einstellt, ist nun jedenfalls abhängig von der Beschaffenheit der Strichränder, und wenn hier kleine Änderungen durch allmähliche Ausgleichung molekularer Spannungen eintreten, so kann die Strichmitte für mikroskopisches Ablesen sich ändern.

§ 7. Normal-Masse.

Ein *Massstab* ist ein Werkzeug zur Ausführung von Längenmessungen. Ein Massstab, welcher diesem Zwecke nicht unmittelbar dient, sondern mittelbar dadurch, dass andere Massstäbe nach ihm reguliert werden, heisst ein *Normal-Massstab*.

Ein Massstab an und für sich genügt noch nicht zur Festsetzung eines Masses, weil der Stab bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Länge hat, es muss deswegen noch angegeben werden, bei welcher Temperatur der Massstab die normale

Länge hat, und damit der Massstab auch bei anderen Temperaturen brauchbar ist, muss die Ausdehnung bekannt sein.

Die Normal-Temperatur ist bei verschiedenen Massen verschieden; insbesondere haben wir:

beim Metermass	Normal-Temperatur	$= 0^\circ \text{C} = 0^\circ \text{R}$,
beim alten Pariser Mass	"	$= 13^\circ \text{R} = 16,25^\circ \text{C}$,
beim englischen Mass	"	$= 62^\circ \text{F} = 16,67^\circ \text{C} = 13,33^\circ \text{R}$.

Der Ausdehnungs-Coëfficient.

Wenn ein metrischer Stab bei der Temperatur 0° die Länge L_0 hat und bei der Temperatur t° die Länge L_t , so setzt man eine Gleichung fest von der Form:

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t) \quad (1)$$

und man nennt α den Ausdehnungs-Coëfficienten des Stabes.

Dieses ist die gewöhnliche Annahme, und wenn für alle Gebrauchs-Temperaturen t , der Coëfficient α denselben Wert hat, so ist hiezu nichts weiteres zu bemerken. Für die feineren Untersuchungen ist aber die Annahme eines *konstanten* α nicht mehr genügend, und man nimmt dann statt (1) eine quadratische Funktion:

$$L_t = L_0 (1 + \alpha t + 2\beta t^2) \text{ oder } L_t = L_0 (1 + (\alpha + 2\beta t) t) \quad (2)$$

Um in solchen Fällen eine unzweideutige Definition zu haben, citieren wir nach dem Werke: „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures“, Tome II, Seite C. 30 und Tome III, Seite C. 19 folgendes:

Man nennt in Bezug auf die vorstehende Gleichung (2):

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta t &\text{ wahrer Ausdehnungs-Coëfficient bei } t^\circ \\ \alpha + \beta t &\text{ mittlerer Ausdehnungs-Coëfficient von } 0^\circ \text{ bis } t^\circ. \end{aligned}$$

Als Beispiel nehmen wir aus: „travaux et mémoires“ III, Seite C. 19 für einen Platin-Iridium-Stab, der an und für sich mit I₂ bezeichnet wurde:

$$\begin{array}{ll} \alpha = 0,000\,008\,594\,6 & \beta = 0,000\,000\,001\,26 \\ \pm & \pm \\ 13\,5 & 56 \end{array}$$

es ist also der mittlere Ausdehnungs-Coëfficient von 0° bis t° :

$$\text{Stab I}_2: \quad \alpha_{(t)} = 10^{-9} (8\,594,6 + 1,26 t) \quad (3)$$

und der wahre Ausdehnungs-Coëfficient bei t° :

$$\text{Stab I}_2: \quad \alpha_t = 10^{-9} (8\,594,6 + 2,52 t) \quad (4)$$

Bei weniger scharfen Messungen lässt man das zweite Glied (mit β) fort, und redet dann von dem Ausdehnungs-Coëfficienten α schlechthin, doch muss man denselben für jeden Stab besonders bestimmen, weil verschiedene Stäbe aus demselben Metall oder derselben Legierung doch nicht genau gleiche Ausdehnungen haben, z. B. hat ein anderer in „travaux et mémoires“ III. Seite C. 43 erwähnter Platin-Iridium-Stab, der mit I bezeichnet ist, statt des obigen (3) den Wert:

$$\alpha_{(t)} = 10^{-9} (8\,602,9 + 2,09 t).$$

Da man aber durchaus nicht immer in der Lage ist, Ausdehnungs-Coëfficienten zu bestimmen, nimmt man für viele Zwecke die *Mittelwerte*, welche bereits bestimmt worden sind. Namentlich ist es wichtig, Ausdehnungs-Coëfficienten, die einmal an-

genommen sind, in demselben Falle unverändert beizubehalten, damit wenigstens die Differenzen von Ausdehnungen in der Rechnung richtig bleiben.

Die Kaiserl. Normal-Aichungs-Kommission hat in den metronomischen Beiträgen Nr. 1, herausgegeben von Foerster, Berlin 1870, Seite 17, folgende Werte angenommen:

Kupfer	Ausdehnungs-Coëfficient	$\alpha = 0,000\ 017\ 17$	(5)
Messing	"	$0,000\ 018\ 86$	
Zinn	"	$0,000\ 024\ 83$	
Eisen	"	$0,000\ 011\ 26$	

Aus den „travaux et mémoires“, III. Seite C. 43—C. 44 entnehmen wir folgende Mittelwerte:

Platin-Iridium	Ausdehnungs-Coëfficient	$\alpha = 0,000\ 008\ 573$	(6)
Platin	"	$0,000\ 008\ 898$	
Silber	"	$0,000\ 018\ 340$	
Eisen	"	$0,000\ 011\ 063$	
Stahl	"	$0,000\ 010\ 420$	

Glas " " $0,000\ 008\ 392$

Einige andere zuweilen in Frage kommende Mittelwerte sind:

Blei	Ausdehnungs-Coëfficient	$\alpha = 0,000\ 028$	(7)
Bronce	"	$0,000\ 018$	
Gold	"	$0,000\ 014$	
Guss-Eisen	"	$0,000\ 011$	
Zink	"	$0,000\ 033$	
Tannenholz	"	$0,000\ 004$	

Endmasse und Strichmasse.

Die Längenmasse werden in zwei wesentlich verschiedene Gattungen eingeteilt, die man Endmasse und Strichmasse nennt.

Ein Endmass bestimmt eine Länge als äussersten Abstand seiner Teile in der Axrichtung.

Ein Strichmass bestimmt eine Länge als Querabstand zweier auf seiner Oberfläche eingerissener Parallelstriche.

Verschiedene Mass-Systeme.

Jedes Einheitsmass ist ursprünglich willkürlich, und deshalb ist die grosse Mannigfaltigkeit der Masse erklärlich. Die älteren Masse sind meist vom menschlichen Körper hergenommen, z. B. der Fuss, die Elle u. s. w. und insofern willkürlich.

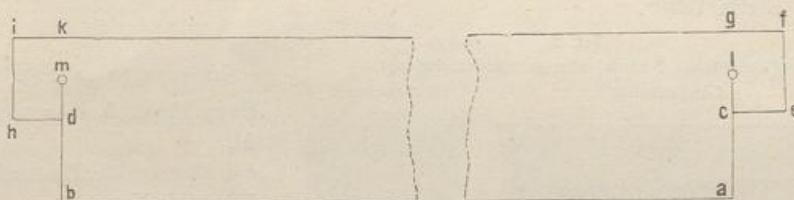
Auch das Meter, welches die früheren Masse jetzt fast verdrängt hat, ist ursprünglich willkürlich, und der Umstand, dass 1 Meter nahezu der zehnmillionste Teil des Erdquadranten ist, ist metronomisch gleichgültig.

Wir geben in Folgendem einen Abriss der Geschichte der französischen Masse, aus welchen das heutige internationale Metersystem hervorgegangen ist. (Zunächst nach Nr. 5 der metronomischen Beiträge, zur Geschichte und Kritik der Toisenmassstäbe, von C. F. W. Peters, herausgegeben von der K. Normal-Aichungs-Kommission, Berlin 1885.)

Am Anfang des 18. Jahrhunderts befand sich in Paris am Fuss der Treppe des Grand Chatelet als Normalmass für öffentlichen Gebrauch eine eiserne Schiene mit zwei Vorsprüngen, zwischen welche ein Massstab von der Länge einer Toise hindurchgeschoben werden konnte.

Etwa um 1735, vor dem Abgang der Gradmessungs-Expedition nach Peru, wurden nach dem rohen Chatelet-Normal zwei feinere Toisen angefertigt in der Form der nachstehenden Fig. 1.

Fig. 1.
Die Peru-Toise (Toise du Pérou).



Die beiden Toisen bestanden aus eisernen Stangen, an den Enden b d und a e hälftig eingeschnitten, so dass a b = c d die Toisenlänge vorstellt. Die eine dieser Stangen, später unter dem Namen „Toise du Pérou“ bekannt, hatte auch noch zwei Punkte m und l , deren Abstand als Toise in Wirklichkeit in Peru gedient hat. Die andere Toise, später „Toise du Nord“ genannt, sollte ursprünglich als Kontroll-Normal in Paris zurückbleiben, während die erste nach Peru abging, indessen nach dem Abgang der Peru-Expedition entschloss man sich rasch auch zu der Polar-Expedition, welcher man 1736 die zweite Toise mitgab.

Diese kam schon 1737 wieder nach Paris zurück, während die Peru-Toise erst 1748 wieder ankam.

Die Vergleichung ergab im Jahr 1752, dass die Peru-Toise um 0,04 Linien länger war, als die nordische; man erklärte das durch Rosten der letzteren bei einer Havarie im bottnischen Meerbusen.

Im Jahre 1766 erschien eine Verfügung des Königs Ludwig XV, nach welcher die Toise du Pérou an Stelle der Toise du Chatelet als Normalmass in Frankreich eingeführt wurde. (1 Toise = 6 Pariser Fuss = 72 Pariser Zoll = 864 Pariser Linien.) Von 1813—1831 wurden verschiedene Kopien der Toise genommen.

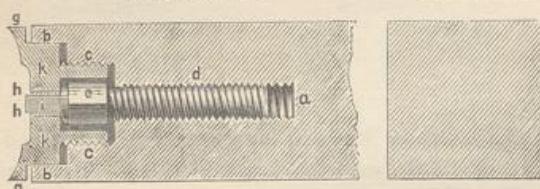
Die Toise kam später in Vergessenheit, und ob die im Jahre 1854 neu gereinigte, jetzt als „Toise du Pérou“ betrachtete Stange wirklich die Stange von 1735 oder nur eine Kopie derselben ist, blieb eine Zeit lang zweifelhaft, ist aber jetzt durch die Ermittelungen von Wolf in Paris als erwiesen anzusehen. Jedenfalls sind die vorhandenen Kopien der ursprünglichen Peru-Toise von Wichtigkeit. C. F. W. Peters hat 14 solcher Kopien in Betracht gezogen und durch Zusammenstellung dessen, was über die Vergleichung dieser Stäbe mit der alten Peru-Toise oder der Kopien unter sich bekannt ist, Endergebnisse gefunden, z. B. diese:

Ursprüngliche Peru-Toise	= 864,00000 Pariser Linien
Dänische Toise, Fortin = D	= 864,00238 "
Besselsche Toise = B	= 863,99920 "
Dänische Toise Gambey = G	= 863,99493 "
Englische Ordnance-Toise = T^2	= 864,06228 "

Die Normal-Temperatur des Toisen-Masses ist $13^{\circ} R. = 16,25^{\circ} C.$; dieses stammt von der Gradmessung in Peru 1735 her, wo die Mittel-Temperatur = $13^{\circ} R.$ angenommen wurde.

Die Besselsche Toise, welche hier mit genannt ist, wurde von Bessel dazu benutzt, um ein preussisches Normalmass in einem Stabe von 3 preussischen Fuss herzustellen. Unsere Fig. 2 zeigt die Einzelheiten desselben nach Tafel II des Werkes: „Darstellung der Untersuchungen und Massregeln, welche in den Jahren 1835—1838 durch die Einheit des preussischen Längenmasses veranlasst worden sind, von F. W. Bessel, Berlin 1839“.

Fig. 2.
Besselsche Normal-Stange (natürl. Grösse).
Längenschnitt. Querschnitt.



Erklärungen zu Fig. 2.:
Hauptkörper *b*, *c*, *a* von Gussstahl,
e d eingedrehte Eisenschraube,
i Sapphir-Kegel,
h Goldbettung,
g k Pressschraube.

Bessel hielt ein Endmass für sicherer als ein Strichmass, indem er die massgebenden Enden möglichst hart machte, nämlich von Sapphir (*i* Fig. 2.), und die Verbindung durch Gold vor Rost schützte.

Der Stahlstab hat die Aufschrift:

„Urmass der preussischen Längeneinheit 1837. Dieser Stab, in der Wärme von $16,25^{\circ}$ des hundertteiligen Thermometers, in seiner Axe gemessen, ist 0,00063 Linien kürzer als drei Fusse.“

Dieser Stab wurde durch das Gesetz vom 10. März 1839 als preussisches Urmass bestimmt.

Die Temperatur-Ausdehnung des Normalmasses fand Bessel = 0,004375 preuss. Linien für $1^{\circ} C.$, oder da der Stab 432 preuss. Linien lang ist, Ausdehnung = 0,000010127 der Länge für $1^{\circ} C.$

Der preussische Fuss selbst ist dadurch = 139,13 Pariser Linien bestimmt.

Ausser der schon oben genannten „Darstellung“ u. s. w. sind hier noch weitere Besselsche Schriften zu citieren: „Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels“, Berlin 1828, S. 126. „Gradmessung in Ostpreussen“, S. 22. „Populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände“, Hamburg 1848, S. 307—325.

Nach dieser Abschweifung, betreffend das preussische Normalmass von 1837, kehren wir zur Geschichte des Toisen- und Metermasses zurück:

Das neue französische Masssystem vom Jahr 1791 bestimmte als Einheit das Meter, welches möglichst genau der zehnmillionste Teil des Erdmeridian-Quadranten sein sollte. Das Dekret, welches den von der Akademie vorgeschlagenen Plan annahm, ist vom 26. März 1791 und die Genehmigung erfolgte 4 Tage nachher („Delambre, Base du système métrique“ I. S. 19).

Nach vorübergehender Anwendung eines provisorischen Meters von 443,44 Par. Linien wurde auf Grund der Delambreschen Gradmessung das „wahre und definitive“ Meter (mètre vrai et définitif) = 443,296 Pariser Linien festgesetzt. Die Normal-

temperatur für das Metermass wurde anders gewählt als bei dem alten Pariser Mass. Während nämlich letzteres die Normaltemperatur 18° R. = $16,25^{\circ}$ C. hat, ist die Normaltemperatur des Metermasses = 0° R. = 0° C., d. h. gleich der Temperatur des schmelzenden Eises.

Demzufolge wurde ein Platinstab hergestellt, dessen Länge bei 0° ist = $\frac{443,296}{864}$

derjenigen Länge, welche die Peru-Toise bei 13° R. hat. (Base du système métrique Band III. S. 622.) Der genannte Platinstab, dessen Querschnitt (Fig. 3.) ein Rechteck von 25^{mm} Breite und 4^{mm} Höhe ist, befindet sich noch in Paris, Fig. 3.
er heißt gewöhnlich „mètre des archives“. Querschnitt des „mètre des archives“ in natürlicher Größe.

Obgleich hiernach das Metermass längst sicher gestellt zu sein scheint, so sind doch erst in neuerer Zeit die nötigen Vorkehrungen zu einer befriedigenden Sicherstellung desselben in Angriff genommen worden. Das französische Urplatinmeter (mètre des archives) entspricht nämlich in mehrfacher Beziehung nicht den heutigen wissenschaftlichen Anforderungen.

Um die damit verbundenen Übelstände zu heben, versammelte sich im Sommer 1870 eine internationale Kommission, welche jedoch wegen des Krieges zu keinen Resultaten kam. Die Kommission ist zum zweitenmale im Herbst 1872 in Paris zusammengetreten, jedoch erst im Jahr 1875 kamen die Verhandlungen zum Abschluss. Dieselben haben eine internationale Meter-Konvention ergeben, woran sich allmählich fast alle Kulturstaaten der Erde angeschlossen haben.

Der Wortlaut der Konvention ist mitgeteilt in dem Deutschen Reichsgesetzblatt Nr. 19 vom 5. Sept. 1876, S. 191—212, derselbe ist abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1877, S. 280—290. Die neuesten Bestimmungen für das metrische Massensystem in Deutschland sind enthalten in dem Gesetze vom 11. Juli 1884 (Reichsgesetzblatt 1884, Nr. 20).

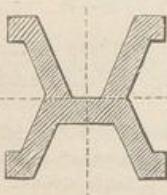
Die Verhandlungen der internationalen Kommission, welche vom 24. Sept. bis 12. Okt. 1872 in Paris stattfanden, sind mitgeteilt in den „Annales du conservatoire des arts et métiers“, Nr. 37, Tome X, 1^{er} fascicule. Paris 1873. Wir entnehmen hieraus folgendes:

Es sollen 30 Meterstäbe hergestellt werden, welche möglichst gleich dem Pariser Archiv-Meter zu machen und unter sich zu vergleichen sind, worauf sie unter die beteiligten Staaten verteilt werden, und künftig die Grundlage aller Massvergleichungen bilden werden.

Als Material für diese Normalmeter ist eine *Legierung* von 90% Platin mit 10% Iridium gewählt. Das aus reinem Platin bestehende mètre des archives hat eine sehr poröse Struktur, dagegen hat die erwähnte Legierung von Platin und Iridium folgende Vorteile: 1) Diese beiden Metalle krystallisieren in demselben System, nämlich dem regulären, und haben die gleiche Dichte 21,15. 2) Die Legierung hat noch nahezu dieselbe Dichte wie die einzelnen Metalle, wodurch eine innige Verbindung gesichert ist. 3) Von allen Metallen (mit Ausnahme des hier nicht in Betracht kommenden Arsen und Osmium) haben Platin und Iridium die geringste Ausdehnung durch die Wärme, nämlich etwa 0,000009 für 1° C.

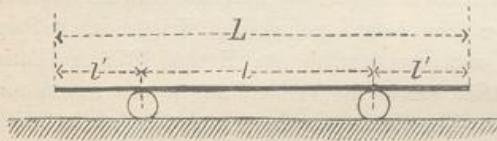
Die Stäbe werden prismatisch hergestellt mit einem in Fig. 4. (S. 56) in natürlicher Größe gezeichneten Querschnittsprofil. Die Wahl dieses Profils ist das Ergebnis vieler Erwägungen, es fand sich nämlich für dasselbe das günstigste Verhältnis des Träg-

Fig. 4.
Querschnitt der internationalen Platin-Iridium-Meterstäbe, natürliche Grösse.



Die Unterlage der neuen Normalmeter soll nicht eine kontinuierliche sein, sondern aus zwei Rollen bestehen, damit der Temperatur-Ausdehnung keinerlei Hindernis bereitet wird.

Fig. 5.
Rollen-Unterlage der internationalen Massstäbe.



Allerdings findet bei dem Auflager auf zwei Rollen ein Einschlagen durch das Eigengewicht des Stabes statt, doch ist dasselbe sehr klein. Die Verteilung der Stützen ist am günstigsten, wenn (entsprechend Fig. 5.) die Beziehung stattfindet:

$$l' = 0,394 l \text{ oder } l = 0,559 L$$

Wenn diese Verhältnisse eingehalten werden, so beträgt für das in Fig. 4. gezeichnete Profil die Einschlagtiefe nur $0,008\,63\text{mm}$ und die entsprechende Verkürzung des Stabes nur $0,000\,000\,4\text{mm}$.

Über den neuesten Stand dieser Sache wird Auskunft gegeben in folgenden Schriften:

Mitteilungen der Kaiserl. Normal-Aichungskommission, 1. Reihe, Berlin 10. Dezember 1890 Nr. 10. Die Beziehungen der metrischen, der altfranzösischen und der englischen Längeneinheit zu einander, abgedruckt in „Zeitschr. f. Vermessungsw.“ 1890, S. 265—269.

Die internationale Organisation des Mass- und Gewichtswesens und die neuen Prototype. Mitt. d. K. Norm.-Aich.-Komm. 1890, Nr. 11, S. 139. Bespr. in d. „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“ 1890, S. 296—298; d. „Zeitschr. f. Vermessungsw.“ 1890, S. 506—508.

Weitere Litteraturangaben s. „Zeitschr. f. Verm.“ 1892, S. 473, Normal-Aichungs-Kommission, und „Zeitschr. f. Verm.“ 1895, S. 433, Bureau international des poids et mesures.

§ 8. Komparatoren.

Ein Komparator ist ein Apparat zur Vergleichung zweier Längenmasse. Entsprechend der Einteilung der Längenmasse in Endmasse und Strichmasse hat man verschiedene Komparatoren.

Ein Komparator für Strichmasse, welcher aber zugleich auch zur Vergleichung von Endmassen eingerichtet werden kann, ist in Fig. 1. und Fig. 2. S. 57, gezeichnet. Derselbe ist von Mechaniker Reichel in Berlin konstruiert, und gehört dem Gr. bad. Oberaichungsamt Karlsruhe. (Mit ähnlichen Komparatoren sind alle deutschen Oberaichungsämter ausgerüstet.)

Fig. 1. zeigt den eigentlichen Komparator in Längs- und Queransicht.

Fig. 1.
Komparator des Gr. Ober-Aichung-Antes Karlsruhe (von Mechaniker Reichel in Berlin).
(Massstab 1 : 8, Länge E E = 1 Meter.)

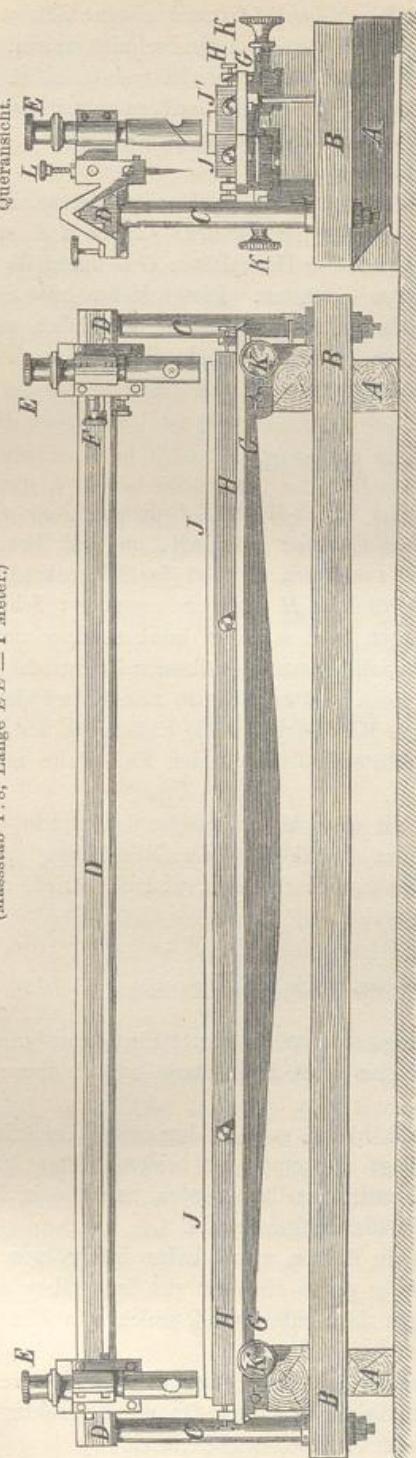
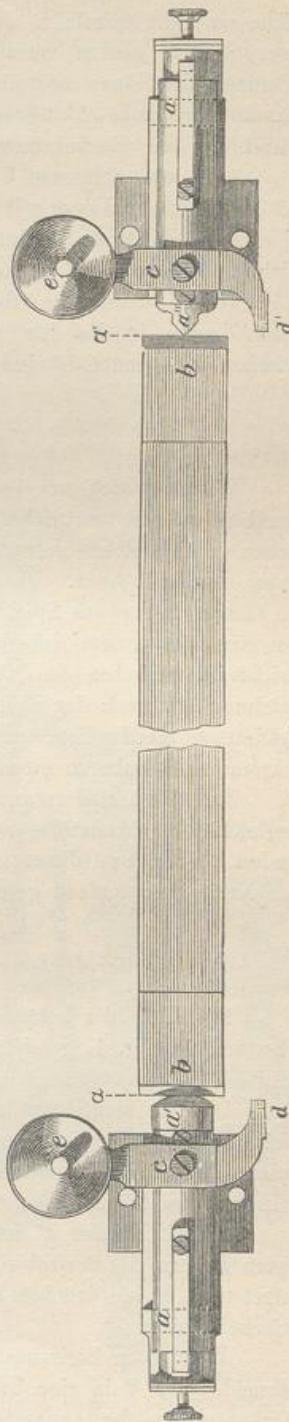


Fig. 2.
Besondere Einrichtung zum gegenseitigen Vergleichen von Strichmassen und Endmassen.
(Massstab 1 : 2, 4 fach von Fig. 1.)

Anschlag-Cylinder $a' a''$



Auf der hölzernen Unterlage *AA BB* erheben sich zwei eiserne Säulen *CC*, welche eine gut gehobelte eiserne Schiene von \perp -förmigem Querschnitt tragen. Auf dieser Schiene gleiten vermittelst zweier Schlitten die zwei Mikroskope *EE*. Das Fadennetz des einen (rechtseitigen) Mikroskops ist nicht fest, sondern vermittelst einer Mikrometerschraube *F* beweglich. Dieses Mikroskop hat im wesentlichen dieselbe Einrichtung wie die bekannten Theodolit-Mikroskope.

Auf dem hölzernen Untergestell sind ferner zwei tischartige eiserne Platten *GG* aufgesetzt, und zwar mit Zwischenlage je zweier horizontaler Cylinder *KK*, welche um excentrische Axen drehbar sind, und dadurch die Tischplatten *GG* innerhalb eines Spielraums von 1—2^m zu heben oder senken gestatten. Dieses Heben oder Senken ist notwendig, damit die Oberflächen der Massstäbe *JJ'*, welche verglichen werden sollen, immer in die deutliche Sehweite der Mikroskope gebracht werden können. Zwischen *JJ'* und *GG* sind noch Unterlagsplatten *HH* angebracht.

Vergleichung zweier Strich-Masse.

Wenn es sich um Vergleichung zweier Strich-Masse *JJ'* handelt, so werden dieselben in der beschriebenen Weise neben einander aufgelegt, so dass ihre Oberflächen in eine Ebene zusammenfallen, und zusammen mittelst der Mikroskope beobachtet werden können. Da die Unterlagsplatten *HH* mittelst besonderer Schrauben der Länge nach etwas Spielraum haben, kann man es dahin bringen, dass man mit dem einen (etwa dem linkseitigen) Mikroskop die zusammenfallenden Nullstriche beider Strichmasse zwischen den Mikroskopfäden sieht. Dann hat man zum Zweck der Vergleichung nur noch das andere (rechtseitige) Mikroskop auf die Endstriche der beiden Strichmasse einzustellen, und dabei den Abstand dieser beiden Endstriche mit der Mikrometerschraube zu messen.

Hiebei ist also vorausgesetzt, dass die einander entsprechenden Striche der zu vergleichenden Massstäbe *gleichzeitig* in das Gesichtsfeld der Mikroskope gebracht werden können, und dieses ist deswegen gewöhnlich thunlich, weil die Striche auf die eine Kante ausmündend gezogen sind.

Vergleichung eines Strich-Masses mit einem Endmass.

Mit Hilfe der besonderen Einrichtung, welche in Fig. 2. in 4 mal grösserem Massstab als Fig. 1. gezeichnet ist, kann man auch Strichmasse und Endmasse vergleichen.

Das zu vergleichende Endmass wird hiebei ganz in der vorher beschriebenen Weise behandelt, es ist *J* oder *J'*, und liegt auf einer der beiden Platten *H*. Die andere Platte *H* wird weggenommen, und statt derselben werden nun die in Fig. 2. links und rechts gezeichneten Anschlag-Cylinder aufgeschraubt.

Diese Cylinder *a'* und *a''* stecken in Hülsen *a* und haben infolge von eingelagten Federn das Bestreben, in der Richtung gegen einander aus den Hülsen herauszutreten, d. h. sie drücken beiderseits gegen das Endmass *bb*, welches in Fig. 2. dazwischen gelegt ist.

Wenn *b* in horizontale Schneiden endigt, so wird man *a''* in eine vertikale Schneide oder *a'* in eine Rundung endigen lassen u. s. w.; für die Betrachtung der Wirkungsweise des Apparates ist diese Unterscheidung unwesentlich.

Auf den Cylindern a' und a'' sind Platten c aufgesetzt, welche nach vorn vorgebogen und mit feinen Strichen d und d' versehen sind. (Die auf der anderen Seite befindlichen Schrauben e dienen zur Höhenregulierung für die Striche d .)

Man denke sich nun die Cylinder a' und a'' auf der einen Tischplatte G befestigt, und ein Endmass bb zwischen die Cylinder-Enden a' und a'' eingelegt. Auf der anderen Tischplatte G (bzw. auf der Zwischenplatte H) liegt ein Strich-Massstab J , und man bringt es nun dahin, dass die Indexstriche d und d' der Cylinder an der Kante des Strichmasses anliegen und gleichzeitig mit den benachbarten Strichen des Strichmasses in den Mikroskopen erscheinen. Man behandelt dann die Striche d und d' wie die Anfangs- und Endstriche eines Strichmasses und macht die Strichmass-Vergleichung in der früher angegebenen Weise.

Es handelt sich noch darum, die Länge $d d'$ auf die Länge $\alpha \alpha'$ zwischen den Enden der Anschlag-Cylinder zu reduzieren, und dieses geschieht dadurch, dass man nach Entfernung des Massstabes bb den einen Cylinder abnimmt und ihn unmittelbar an den anderen Cylinder anstossend wieder befestigt. Es stossen dann die Cylinder-Enden α und α' zusammen, während die Indexstriche d und d' einen kleinen Zwischenraum zwischen sich lassen, den man misst und an der vorhergehenden Vergleichung in Rechnung bringt.

Einige andere, zum Teil sehr sinnreiche und doch einfache Verfahren zur gegenseitigen Vergleichung von Endmassen und Strichmassen berichtet „Zachariae, Die geodätischen Hauptpunkte“, deutsch von Lamp, Berlin 1878, S. 96–98.

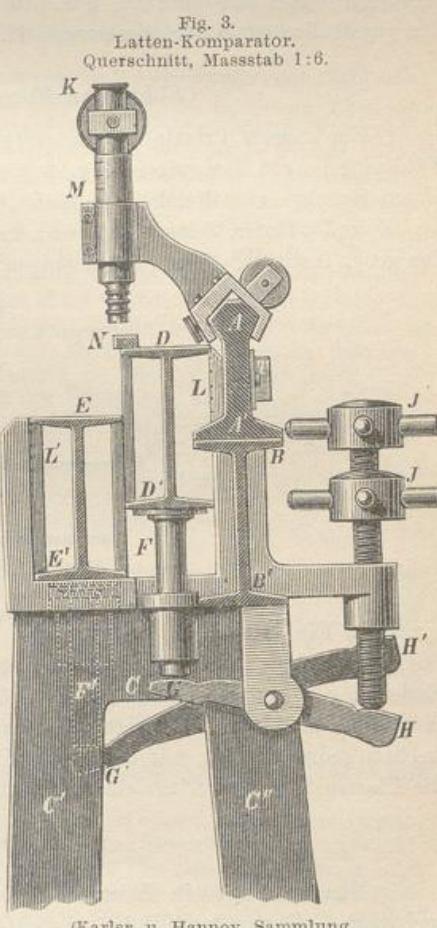
Komparator für hölzerne Latten.

Im wesentlichen nach demselben Grundgedanken wie der vorher beschriebene aichamtliche Meter-Komparator, jedoch länger und stärker, ist der Komparator für Nivellierlatten und ähnliche Massstäbe, dessen Querschnitt in Fig. 3. gezeichnet ist.

Der Hauptteil ist eine Eisenschiene $A A'$ (aus einer Eisenbahnschiene hergestellt), 3,5" lang und mit einer durchlaufenden Millimeterteilung versehen. $D D'$ und $E E'$ sind zwei Träger, welche durch die auf der anderen Seite angebrachten Schrauben J und J' durch Hebel $H G$ und $H' G'$ der Höhe nach gestellt werden können.

N ist ein aufgelegter Massstab, der durch das Mikroskop M verglichen wird.

Weiteres hierüber haben wir früher in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde“, 1881, S. 41–47 mitgeteilt.



(Karlsr. u. Hannov. Sammlung.
Mechaniker Sickler.)

Normalstellung der Mikroskop-Axen.

Wenn man bei einem Längen-Komparator der bisher beschriebenen Art die Laufschiene der Mikroskope und die Unterlagsplatten mit Libellen gut horizontal stellt, so ist nur noch die Frage zu beantworten, ob die Mikroskop-Axen vertikal sind. Wenn letzteres nur wenigstens genähert der Fall ist, so kann man bereits Vergleichungen machen, weil kleine Neigungen der Mikroskop-Axen bei den immer nahezu gleichen Höhen-Einstellungen wenig ausmachen.

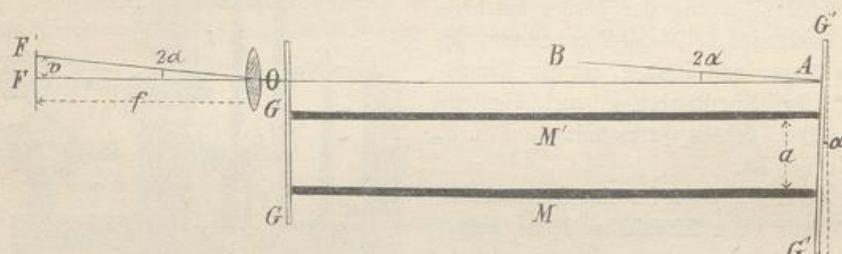
Um jedoch die Mikroskop-Axen genau vertikal zu stellen, hat man das Mittel des Quecksilber-Horizontes; man stellt nämlich unter ein Mikroskop ein Gefäß mit Quecksilber und beobachtet darin das Spiegelbild der Fäden, welches sich mit den Fäden selbst decken soll. Jedoch muss man dazu die Fäden *beleuchten*; das geschieht durch einen kleinen seitwärts angebrachten Spiegel, den wir aus anderer Veranlassung beschrieben haben in „Grundzüge der astr. Zeit- und Ortsbestimmung“, Berlin 1885, S. 225.

Eine andere Untersuchung über Mikroskop-Axen-Neigung u. s. w. gab die fröhre, 3. Auflage dieses Bandes, 1890, § 9. Auch ist hier zu citieren: „Weinstein, Handbuch der physikalischen Massbestimmung“, II. Band, Berlin 1888, S. 72—89.

Fühlspiegel-Komparator von Steinheil.

Ein anderes Prinzip der Massvergleichung, für Endmasse geeignet, ist das des Fühlspiegels, von dem wir in Fig. 4. wenigstens den Grundgedanken darstellen (nach einem Berichte von Steinheil in dem „Gen. Ber. d. Europ. Gradm. für 1869“, S. 76 bis 80 und „Tinter, Zeitschr. d. österr. Ing.-u. Arch.-Vereins“, 1871, S. 40, und „Publ. des geod. Instituts. Massvergleichungen“, II. 1876).

Fig. 4.
Fühlspiegel-Komparator von Steinheil.



In Fig. 4 sind M und M' zwei Endmasse, welche verglichen werden sollen. Dieselben befinden sich in paralleler Lage im Abstand a , und stossen links mit ihren Enden gegen eine ebene Glasplatte GG an. Wenn diese Masse M und M' gleich lang sind, so wird eine zweite Glasplatte $G'G'$, welche gegen die anderen Enden (rechts) gedrückt wird, mit der ersten Platte GG parallel sein; andernfalls machen die Platten GG und $G'G'$ einen kleinen Winkel α , entsprechend der Gleichung:

$$\sin \alpha = \frac{M' - M}{a}$$

Nun hat man ein Fernrohr FO , rechtwinklig zur Glasplatte GG gerichtet; und wenn $G'G'$ parallel GG ist, so wird FOA mit FO gemeinsam nach F reflektiert. Wenn dagegen der erwähnte kleine Winkel α vorhanden ist, so bekommt man zwei

Reflexionspunkte F und F' , deren Abstand $v = 2f \sin \alpha$ ist, also in Verbindung mit der ersten Gleichung:

$$M' = M = \frac{\alpha v}{2f}$$

Insofern α erheblich kleiner ist als f , giebt ein Fehler an v einen entsprechend kleinen Einfluss auf die Massvergleichung $M' - M$.

Man hat die Fühlspiegel-Vergleichung von Endmassen früher namentlich deswegen gewählt, weil man dabei die Stäbe in einer *Flüssigkeit* vergleichen kann, was das beste Mittel zur sicheren und gleichmässigen Temperatur-Bestimmung ist; indessen in neuer Zeit macht man auch mikroskopische Strich-Vergleichungen in der Flüssigkeit, wie aus dem Nachfolgenden zu ersehen ist.

Mass-Vergleichungen des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus.

Zum Abschluss unserer Betrachtungen über Massvergleichung wollen wir noch einen Auszug vorführen aus dem Werke: „Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures“, Tome II, Paris 1883, Seite C 3 — C 147, und Tome III, 1884, Seite C 3 u. ff. mesures de dilatation et comparaisons des règles métriques.

1. Verfahren im Allgemeinen. Die Messungen der Ausdehnungen der metrischen Strichmasse wurden nach dem von dem schwedischen General Wrede, Mitglied des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus angegebenen Verfahren ausgeführt, welches im wesentlichen in der aufeinander folgenden Vergleichung zweier Stäbe besteht, welche nach einander unter die Objektive zweier vertikaler im Abstand von 1^m befestigter Mikrometer-Mikroskope gebracht werden. Die Messungen werden wie bei gewöhnlichen Vergleichungen zweier Meter gemacht, mit dem einzigen Unterschied, dass jeder der Stäbe in einen besonderen Trog mit Flüssigkeit eingeschlossen ist, und dass die Stäbe hierin im allgemeinen verschiedene Temperaturen haben, welche nach Umständen reguliert werden können. Auch kann die Temperatur des einen Stabes während der Dauer der Vergleichungen konstant erhalten werden, und man erhält dadurch die Ausdehnung des anderen Stabes unmittelbar. Der Vorteil der Methode besteht darin, dass ihre Ergebnisse unabhängig von dem absoluten Abstand der Mikroskop-Axen sind, dieser Abstand braucht nur während der kurzen Zeit des Übergangs von einem Stab zum anderen als konstant oder während abwechselnden Übergangs als gleichförmig veränderlich angenommen zu werden.

Der Vergleich-Apparat besteht hiernach im wesentlichen aus zwei fest aufgestellten Mikroskopen und einer zwischen beiden befindlichen Schienen-Wagen-Einrichtung, mittelst welcher die in Tröge eingeschlossenen Meterstäbe rasch unter die Mikroskope geschoben werden können.

2. (C. 4.) Der Komparator besteht aus zwei Mikroskopen, welche auf Steinpfeilern im Abstand von 1^m gut fundiert sind; dazwischen bewegt sich ein Wagen auf Schienen, welcher die Vergleichs-Stäbe mit ihren Trögen unter die Mikroskope bringt.

3. (C. 12.) Richtigstellung aller Teile.

4. (C. 13.) Die Mikroskope. Objektiv von 36^{mm} Brennweite, Ganghöhe der Schraube = 0,75^{mm}, 1 Umdrehung giebt 0,1^{mm}, die Trommel ist in 100 Teile geteilt, giebt also sehr nahe 0,001^{mm} = 1^u, Gesichtsfeld = 1,1^{mm}, Okular Ramsden, Vergrösserung 90- bis 95fach.

5. (C. 14.) Neben-Apparate zur Regulierung der Temperatur in den Trögen mit Hilfe von Wasser-Zirkulation.

6. (C. 16 und Tome III C. 11.) Als Flüssigkeit wurde zuerst Glycerin genommen, aber wieder aufgegeben, weil die Klebrigkeits sich als Hindernis gleichförmiger Temperatur-Verteilung zeigte; ähnlich verhält es sich mit vegetabilischen Öfen. Petroleum stört durch die gesundheitsschädlichen Dämpfe. Reines Wasser wurde schliesslich ausreichend gefunden für Platin, Messing und Bronze, dagegen für Eisenstäbe wurde als nicht angreifende Flüssigkeit nach verschiedenen Versuchen, gesättigte Borax-Lösung genommen.

Die Stäbe sind in der Regel 25^{mm} tief in die Flüssigkeit eingetaucht, und die mikrometrische Messung durch eine 25^{mm} tiefe Flüssigkeits-Schicht geschieht nahezu mit derselben Genauigkeit wie durch Luft.

7. (C. 20 und Tome III. C. 6.) Künstliche Beleuchtung in der Axe der Mikroskope, durch einen Spiegel unter 45°.

8. (C. 26.) Einstellen auf deutliche Schweite, nach Foersters Theorie „l'influence de la mise au foyer sur les mesures mikrométriques“.

9. (C. 30.) Ausdehnungs-Coëfficienten (vgl. unseren früheren § 7. S. 53—54).

10. u. ff. (C. 30) Thermometer und (C. 62) Barometer.

30. (C. 104 und Tome III. C. 7.) Periodische Schraubenfehler (vgl. unseren früheren § 6. S. 48—50).

31. (C. 118 und Tome V. Seite 47) Fortschreitende Schraubenfehler.

§. 9. Ältere Basis-Messungen.

Die ersten Basis-Messungen waren nichts anderes als Linien-Messungen im wesentlichen von ähnlicher Art, wie sie der Landmesser mit Messlatten heute noch macht, jedoch mit besonderer Sorgfalt ausgeführt.

So begann Snellius 1615 (vgl. unseren Band I. 4. Aufl. 1895, S. 478); und auch die Franzosen massen im 17. und auch noch im 18. Jahrhundert mit hölzernen Latten.

Ähnliche Messungen kamen in Deutschland auch noch in diesem Jahrhundert vor; so berichtet z. B. Benzenberg aus dem Jahre 1805 in dem Buche „Über das Cataster“, Bonn 1818, S. 20—21: „Die Standlinien wurden mit hölzernen Messstangen gemessen, die 12 Fuss lang waren, mit Ölfarbe angestrichen und an beiden Seiten mit Kupfer beschlagen. Diese wurden über kleine Brücken gelegt, die in eine Länge von 1000 Fuss durchs Feld gebaut wurden, und auf denen sich eine viermalige Messung fortsetzte, während dass hinten die Brücken abgebrochen und vorne wieder angebaut wurden. 22 Feldmesser wurden bei der Messung der Standlinien gebraucht.“

Folgendes sind Benzenbergs Angaben für die 4malige Messung bei Mündelheim, wobei wir sogleich die Reduktion in Metermass und eine Genauigkeits-Berechnung zufügen:

	Fuss	Zoll	Linien	Meter	v	v^2
1.	24062	1	8,1	= 7551,9867	+ 14,9 ^{mm}	222
2.	24062	1	5,0	= 7551,9799	+ 21,7	471
3.	24062	3	3,6	= 7552,0292	- 27,6	762
4.	24062	2	7,1	= 7552,0107	- 9,1	83
Mittel	24062	2	3	= 7552,0016		1538 = [v ²]

Man berechnet hieraus:

Mittlerer Fehler einer Messung:

$$m = \sqrt{\frac{1538}{3}} = \pm 22,6\text{mm}$$

Mittlerer Fehler des Mittels aus allen 4 Messungen:

$$M = \frac{m}{\sqrt{4}} = \pm 11,3\text{mm}$$

Mittlerer Fehler einer Messung von 1^{km} Länge:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{7,552}} = \pm 8,2\text{mm} \quad (1)$$

Diese Genauigkeits-Angaben beziehen sich *nur* auf die unregelmässigen, durch die Handhabung der Stangen und etwaige Änderungen derselben während der Messungen erzeugten Fehler; einseitig wirkende Fehler und namentlich die Unsicherheiten der Latten selbst sind hier *nicht* mitgerechnet.

Trotzdem schien es nicht unzweckmässig, an diesem, wie es scheint, zuverlässigen Beispiele zu zeigen, wie genau man mit den einfachsten Mitteln im Felde messen kann, wenn man gute Messungs-Unterlagen hat.

Die Schweizer Basis bei Aarberg von 1880 ist von *Koppe* auch mit gewöhnlichen 5 Meter-Latten längs gespannter Schnüre gemessen worden, wobei sich für 1^m der mittlere unregelmässige Fehler $\pm 0,28^{\text{mm}}$ fand, also für eine Messung von 1^{km} der mittlere Fehler:

$$m_1 = 0,28 \sqrt{1000} = \pm 8,9^{\text{mm}} \quad (2)$$

(vgl. Koppe: „Der Basis-Apparat des General Ibanez und die Aarberger Basis-messung“, Zürich 1881, S. 7—8).

In jüngster Zeit ist eine wertvolle Untersuchung dieser Art gemacht worden, indem *Reinhertz* die Bonner Basis mit gewöhnlichen Messlatten und Stahlbändern nachgemessen hat. Die Vergleichungen der so erhaltenen Ergebnisse unter sich und mit den feinen geodätischen Messungen des geodätischen Institutes und der Landesaufnahme (welche bereits in unserem I. Band. 4. Aufl. 1895, S. 514 kurz erwähnt sind) gaben sehr überraschende Resultate betreffs der verhältnismässig grossen Genauigkeit der gewöhnlichen Latten- und Band-Messung, und betreffs der im wesentlichen proportional den Längen auftretenden Fehler-Fortpflanzung. Reinhertz hat über seine Messungen berichtet auf der 19. Hauptversammlung des deutschen Geometervereins in Bonn 1895 („Zeitschr. f. Verm.“ 1895, S. 508) und der ausführliche Bericht wird in der „Zeitschr. f. Verm.“ Anfang 1896 gegeben.

Nach diesen Bemerkungen über das Messen mit gewöhnlichen Messlatten, geben wir eine kurze Darlegung der Entwicklung der Basismessungs-Verfahren zunächst von den französischen Messungen im 17. und 18. Jahrhundert bis zum Anfang dieses Jahrhunderts.

Picard wandte 1669 4 hölzerne je 2 Toisen lange Massstäbe an, die er mit Hilfe von Schrauben zu 2 je 4 Toisen langen Messlatten verband. Diese legte er unmittelbar eine vor die andere auf den (horizontalen) Boden. Da sie im Querschnitt rund, und leicht von Gewicht waren, so war eine Verschiebung auf dem Boden kaum zu vermeiden. (La Condamine, Mesure des trois premiers degrés u. s. w. S. 249).

Bei den Gradmessungen in Peru und Lappland (1736) wurden ebenfalls hölzerne Latten, und zwar deren *drei* zusammen angewendet. Dieselben waren 15 oder 20 Fuss lang, 2 Zoll breit, $1\frac{1}{2}$ Zoll dick und mit Eisen beschlagen; sie wurden auf je zwei Stützen, jede einzeln horizontal, gelegt. (La Condamine S. 250.)

Bei der im Jahre 1739 vorgenommenen Nachmessung der Picardschen Basis von Juvisy bediente sich Cassini zum erstenmal metallener Massstäbe, nämlich 4 eiserner Stäbe, deren Temperatur-Ausdehnung er aus Quecksilber-Thermometerangaben ermittelte. (La Condamine S. 251.)

Der englische General *Roy* mass im Jahre 1784 eine Grundlinie bei Hounslow-Heath, zwischen London und Greenwich, 7 530^m lang, mehrmals mit verschiedenen Hilfsmitteln:

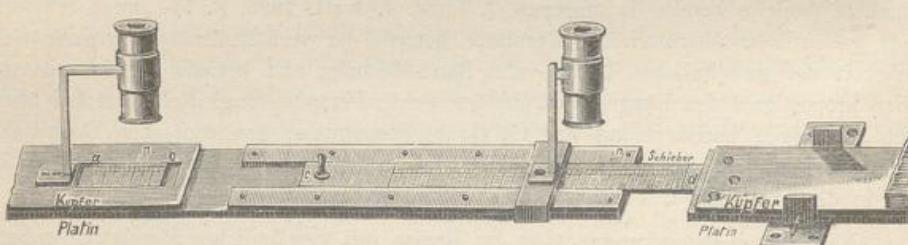
erste Messung mit einer Kette . . .	27 408,22 Fuss
zweite " " Holz-Massstäben . .	27 406,60 "
dritte " " Glasröhren . . .	27 404,72 "

Ferner im Jahre 1787 eine Basis bei Romney-Marsh wieder mit der Kette, 28 532,92 Fuss, und 1794 bei Salisbury 36 574,4 Fuss.

Doppelmetall-Stange von Borda.

Den Übergang von der unvollkommenen Temperatur-Bestimmung Cassinis („le thermomètre à la main“) zu der heute noch in Gebrauch befindlichen Verbindung zweier *verschiedener* Metalle zu einer Messstange fand *Borda*, dessen aus Platin und Kupfer zusammengesetzte Stäbe bei der grossen französischen Gradmessung von 1792 u. ff. von Delambre und Méchain angewendet wurden.

Fig. 1.
Platin-Kupfer-Stange von Borda.
(Platinstab 12 Fuss lang, 6 Linien breit, 1 Linie dick.)



Wir geben in Fig. 1. die Zeichnung der Borda'schen Stangen nach „Puissant, traité de géodésie“, 2^{me} édition, Paris 1819, I. S. 203—207. Die eigentliche Messstange ist von Platin, 2 Toisen = 12 Fuss = 3.898^m lang, 6 Linien = 13,5^{mm} breit und 1 Linie = 2,3^{mm} dick. Auf dieser Platinstange befindet sich eine Kupferstange, und zwar am linken Ende mit der Platinstange fest verbunden, während das rechte Kupfer-Ende sich frei ausdehnen kann, und etwa 0,16^m vom rechten Ende entfernt, mit einer Teilung *a b* und Nonius *n* in seiner Stellung gegen das Platin abgelesen wird. Die so gemachten Ablesungen geben nun das Mass für die Ausdehnung, denn da Platin den Ausdehnungs-Coëfficient $\alpha = 0,000\,0089$ und Kupfer $\alpha' = 0,000\,0172$ (für 1° C.) hat, also α' etwa das Doppelte von α ist, lässt sich aus der Ausdehnungs-Differenz die Ausdehnung des Platins selbst berechnen. (Wir werden dieses bei den Besselschen Stangen mit Eisen und Zink in § 11.—12. ausführlicher behandeln.)

Ausser dem Temperatur-Massstab *a b* zeigt Fig. 1. noch einen Massstab an dem Schieber *c d*, welcher dazu dient, den Zwischenraum je zweier aufeinander folgender Stangen ohne Stoss zu messen.

Solcher Stangen wie die hier beschriebene wurden je 4 zusammen auf Stativen mit Mikrometer-Schrauben eingerichtet; die Stangen-Neigungen wurden durch Libellen und Gradbogen bestimmt, und in Rechnung gebracht.

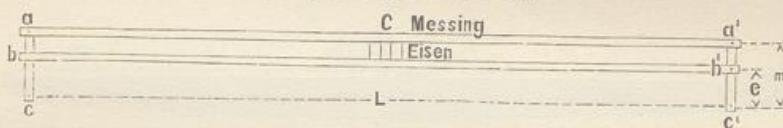
Mit diesen Borda schen Stangen sind (nach den Verh. d. 5. allg. Konf. d. Eur. Gr., Gen.-Ber. für 1877, S. 40) 7 Grundlinien gemessen worden, nämlich:

1798	Grundlinie	bei Melun	11 842 ^m
"	"	Perpignan	11 706
1804	"	Ensisheim	19 044
1818	"	Brest	10 527
1826	"	Bordeaux	14 119
1827	"	Gourbera	12 220
1828	"	Aix	8 067

Colby's Kompensations-Stangen.

Eine sinnreiche Anwendung des Grundgedankens der aus zwei verschiedenen Metallen zusammengesetzten Basismessstangen hat der englische General *Colby*, etwa um 1827, gemacht, indem er zwei Ausdehnungen von Eisen und Zink einander gegenseitig aufheben liess, so dass der Apparat selbstthätig kompensierend wird.

Fig. 2.
Colby's Kompensations-Stange.
(Länge = 10 Fuss = 3,048 m.)



Nach Andeutung von Fig. 2. hat man eine Messing-Stange und eine Eisen-Stange in der Mitte bei *C* fest verbunden, so dass sich die Enden links *a* und *b*, rechts *a'* und *b'* frei ausdehnen können. Nun sind Hebel *a b c* und *a' b' c'* angebracht in den Verhältnissen:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a'c'}{b'c'} = \frac{m}{e}$$

wo *m* und *e* die Ausdehnungs-Coefficienten für Messing und Eisen sind (etwa *m* = 0,000 019 und *e* = 0,000 011 für 1° C.). Nun ist leicht einzusehen, dass der zwischen *c* und *c'* gemessene Abstand *L* unabhängig von den Ausdehnungen ist.

Solcher Stangen in Holzkästen wurden 6 zusammen angewendet, und die Zwischenräume der Stangen wurden mikroskopisch gemessen.

Mit diesem Apparat wurden 2 Linien in England gemessen: Longh Foyle, nördl. Irland, 1827, 41 641 Fuss, und Salisbury, westl. von London, 1849, 34 841 Fuss; ferner 10 Linien in Indien.

Näheres hierüber giebt „Ordnance trig. survey“ (vgl. S. 10) S. 200 u. ff. mit Plate II, sowie im Auszug Clarke, Geodesy (vgl. S. 14) S. 163 u. ff.

Für die *Bayerische Landesvermessung* lieferte das mechanische Institut von *Utzschneider* und *Reichenbach* im Anfang dieses Jahrhunderts einen Apparat, welcher aus fünf in hölzernen Kästen eingelegten je 4 Meter langen in polierte Stahlkanten auslaufenden eisernen Stangen bestand. Die Zwischenräume der bei der Messung sich nicht berührenden Stäbe wurden durch stählerne Keile (12^m lang, hinten 6,5^{mm}, vorn 0,5^{mm} dick), die Neigungswinkel durch Libellen, und die Temperatur durch auf den Stangen ruhende Thermometer bestimmt (Generalbericht der Europ. Gradmessung 1867, S. 25). Die genaue Beschreibung und Zeichnung dieses Reichenbach schen Apparates

findet sich in dem Werke: „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage“, München 1873, S. 3—65.

Ähnlich diesem Reichenbach schen Apparat, in einzelnen Teilen noch sinnreicher ausgedacht, war Schwerds Apparat, den er beschrieben hat in dem Werke: „Die kleine Speyerer Basis“ u. s. w. Speyer 1822.

Der Württembergische Basis-Apparat von Bohnenberger.

Auch dieser Apparat ist grösstenteils nach dem Reichenbach schen Muster unter Bohnenbergers Leitung im Jahr 1818 gearbeitet (s. „Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg“, herausgegeben von Kohler. Stuttgart 1858, S. 45).

Die schon 1792 von Borda erfundene Verbindung zweier Metalle zur Bestimmung der Temperatur-Ausdehnung kam bei dem Reichenbach schen und Bohnenberger schen Apparat nicht zur Verwendung, sondern es wurden nur gewöhnliche Thermometer benützt.

Die Messstangen sind je 2 Toisen lang, 32 Pfund schwer und „genau nach der Peru-Toise auf 13° R. reguliert“ (hierüber haben sich später Bedenken erhoben).

Fig. 3.
Eiserne Messstange in einem Holzkasten.

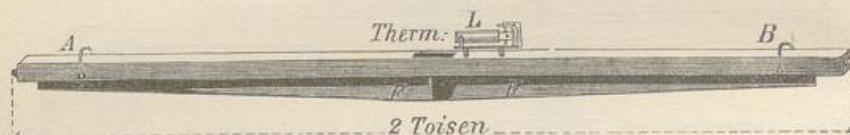


Fig. 4.
Eiserne Stange mit Thermometer im Holzkasten.

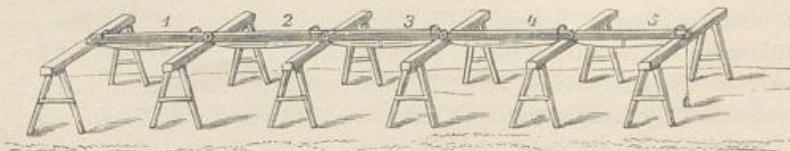


Gehäuse haben unten Verstärkungsrippen *F* und oben Handhaben *A B* (Fig. 3.). In jede Stange ist ein Thermometer eingelassen (Fig. 4.), welches mittelst einer durch Glas verschlossenen und beim Nichtgebrauch bedeckten Öffnung in dem Holzgehäuse beobachtet werden kann. Bei *L* ist eine Libelle mit Gradbogen angebracht.

Der Messkeil ist von gehärtetem Stahl, abgesehen von der Handhabe ist er 12^{cm} lang, 5^{mm} breit, vorn $0,5^{\text{mm}}$ und hinten $6,2^{\text{mm}}$ dick.

Die Messungsbrücke bestand aus einfachen hölzernen Böcken.

Fig. 5.
Messungs-Brücke.



Die Basis Solitude-Ludwigsburg von 6687 Toisen oder rund 13 Kilometer Länge wurde in der Zeit vom 18. September bis 12. Oktober 1820 in 19 Arbeitstagen einmal gemessen.

Weiteres und Ausführlicheres über die älteren Basismess-Apparate giebt Westphal „Basisapparate und Basismessungen“, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1885, S. 257—274, S. 333—345, S. 373—385, S. 420—432. Ferner 1888, S. 189—203, S. 225—236, S. 337—346.

Reduktion einer Basislänge auf den Meereshorizont.

Ausser den Reduktionen für Temperatur, Stangenneigung, Zwischenräume u. s. w., welche bisher erwähnt worden sind, hat man bei Basismessungen, um sie unter sich trigonometrisch vergleichbar zu machen, auch noch die Reduktion auf dem Meereshorizont (bzw. auf *N. N.*) anzubringen.

Wenn h das arithmetische Mittel der Höhen der einzelnen Stangenlagen über dem Vergleichs-Horizont ist, und r der Erdkrümmungs-Halbmesser, wenn ferner B die Summe der horizontalen Stangenlagen und B_0 deren centrale Projektion auf den Horizont ist, so besteht die Beziehung:

$$\frac{B}{B_0} = \frac{r+h}{r} = 1 + \frac{h}{r}$$

oder auch hinreichend genähert:

$$B - B_0 = B \frac{h}{r}$$

Zur Übersicht geben wir hiezu einige Zahlenwerte:

h	$\log \left(1 + \frac{h}{r}\right)$	h	$\log \left(1 + \frac{h}{r}\right)$	Differenz
0 ^m	0.0000000	500 ^m	0.0000340·3	68·1
100	68·1	600	408·4	
200	136·1	800	544·5	für 100 ^m
500	340·3	1000	680·6	

Für die Basislänge $B = 1000^m$ und die Höhe $h = 100^m$ beträgt die Reduktion — 0,0157^m.

§ 10. Der Besselsche Basis-Mess-Apparat.

Als Bessel im Jahre 1834 zu seiner „Gradmessung in Ostpreussen“ einen Basis-Mess-Apparat bauen liess, standen ihm die Erfahrungen von Borda, Reichenbach, Repsold, Schwerd u. A. zu Gebote (Platin und Kupfer, Messkeil u. s. w.).

Bessel hat zu diesen Erfahrungen sein eigenes Verständnis hinzugefügt, er hat alle Einrichtungen und Berechnungen so scharfsinnig erdacht und so folgerichtig durchgeführt, dass der Apparat immer als klassisches Beispiel gelten wird, obgleich er natürlich jetzt nach 60 Jahren nicht mehr der beste sein kann.

Mit dem Besselschen Apparat sind bis jetzt 14 Grundlinien gemessen worden, nämlich 1) bei Königsberg 1834, 2) Kopenhagen 1838, 3) Upsala 1840, 4) Berlin 1846, 5) Bonn 1847, 6) Lommel in Belgien 1851, 7) Ostende 1853, 8) Strehlen in Schlesien 1854, 9) Braak in Holstein 1871, 10) Grossenhain in Sachsen 1872, 11) Ensisheim im Elsass 1877, 12) Göttingen 1880, 13) Meppen 1883, 14) Bonn, Neumessung 1892.

Obgleich der Apparat bei allen diesen Messungen in seinen Hauptteilen der selbe geblieben ist, und obgleich damit die Art der Basismessung einen gewissen konservativen Charakter angenommen hat, ist doch auch hier die Wissenschaft nicht stehen geblieben; seit der Braaker Basis ist die Art der Massvergleichung und die Ausführung der Messung (z. B. die Ablotung) gegen früher stetig vervollkommen worden, und vor der Göttinger Messung hat der Chef der trigonometrischen Abteilung, *Schreiber*, den (1830 mit den rohesten technischen Hilfsmitteln hergestellten) Apparat und alle Einzelheiten seiner Anwendung eingehender Kritik unterworfen, woraus die drei letzten Messungen bei Göttingen, Meppen und Bonn hervorgegangen sind, welche zur Zeit als die beste Ausnutzung des Bessel'schen Gedankens zu betrachten sind.

Wir geben im Folgenden die Beschreibung und die wichtigsten Zeichnungen des Apparates, teils nach der ersten Mitteilung von Bessel selbst („Gradmessung in Ostpreussen“, S. 1—51 und Tafel I—V), teils nach den vor Göttingen angebrachten Verbesserungen.

Der Besselsche Basis-Mess-Apparat.

(Darstellung in natürlicher Grösse.)

Fig. 1.

Ansicht der Stangen-Enden (Anordnung von 1834).

E = Eisen, *Z* = Zink, *St* = Stahl, *T* = Tragstange, *R* = Rollen.

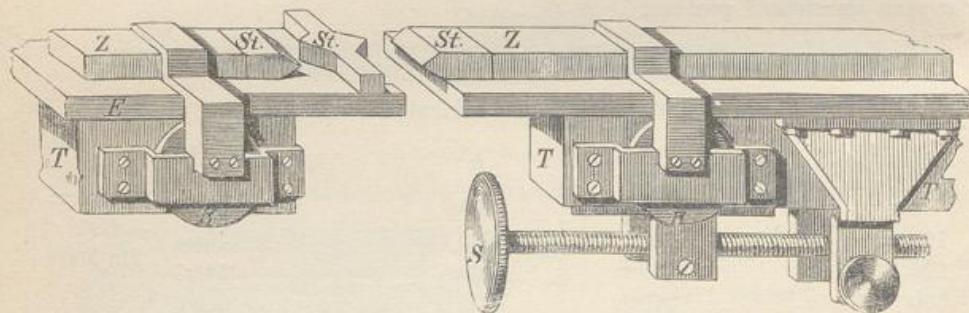


Fig. 2.

Querschnitt der Stangen mit Massen in Pariser Linien
(1 Par. Linie = 2,26 mm).
(Anordnung von 1834.)

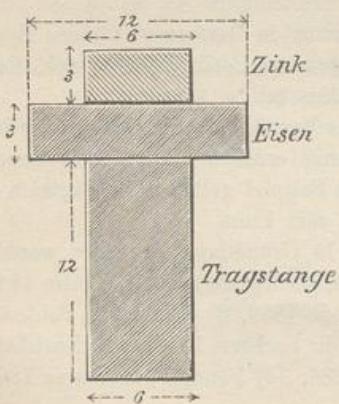


Fig. 3.

Einweis-Scheibe *E E*
mittelst des Rahmens *R* auf das vordere
Stangenende aufgeschraubt.
(Anordnung von 1880.)

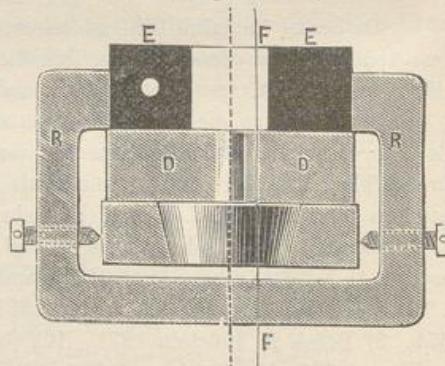


Fig. 4.

Vorderes und hinteres Stangen-Ende (Anordnung von 1880)
im Längsschnitt und im Grundriss (natürl. Grösse).

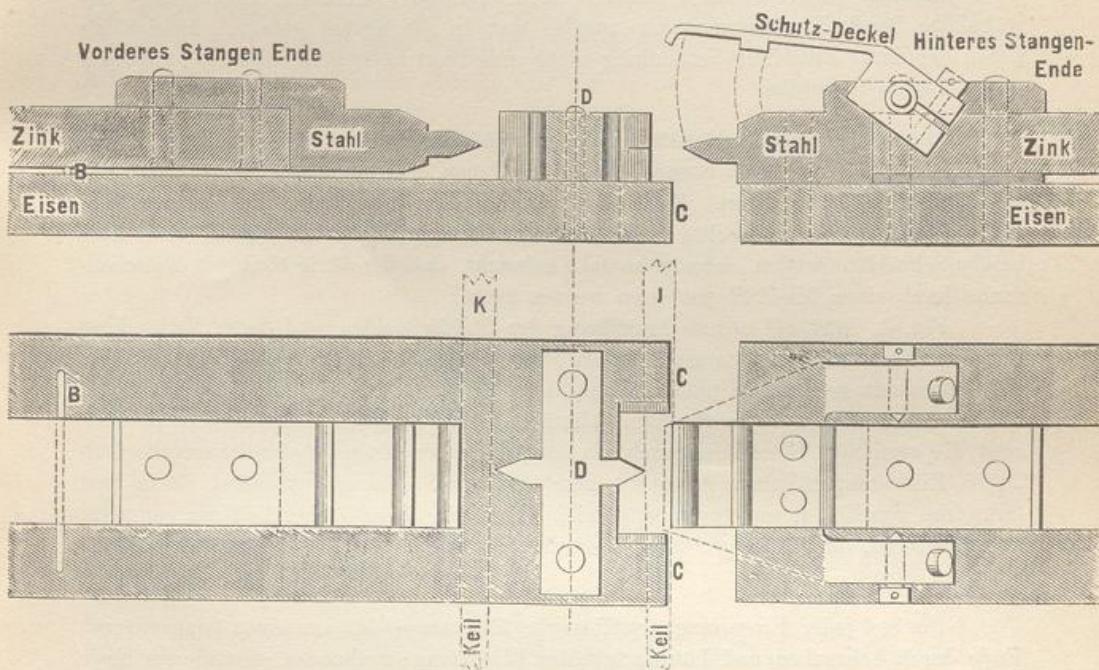
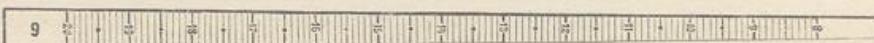


Fig. 5.

Der gläserne Messkeil (natürl. Grösse).

(20 = 2 Par. Linien = 4,5 mm 8 = 0,8 Par. Linien = 1,8 mm)



(Ordinaten-Differenz, zwischen 2 Strichen, = 0,01 Par. Linien = 0,0226 mm.)

I. Die Messstangen.

Es werden 4 Messstangen zusammen gebraucht, jede Messstange ist 3,898" (= 2 Toisen) lang, 27^{mm} breit und 7^{mm} dick. Dieses bezieht sich auf die eigentliche *eiserne* Messstange, auf welcher aber eine zweite, halb so breite *Zink*-Stange aufliegt, wie aus dem Querschnitt Fig. 2. zu ersehen ist.

Die Zinkstange ist an dem einen Ende mit der Eisenstange fest verbunden, im übrigen liegt sie frei auf und kann sich gegen die Eisenstange ausdehnen. Die horizontale Fuge zwischen Eisen und Zink gab aber zu Reibungen Veranlassung, und deswegen wurde diese Fuge später auf etwa 1^{mm} erweitert, und durch kleine Rollen ausgefüllt, welche in Fig. 4. links durch *B* angedeutet sind.

Da die flachen Eisen- und Zinkstangen sich auf eine Länge von nahe 4" nicht freitragen könnten, ist ihnen eine Tragstange hochkantig unterlegt, jedoch durch Vermittlung von mehreren Rollenpaaren, nach Andeutung von Fig. 1. Die Bewegung auf den Rollen ist aber nur eine geringe, und wird durch die Mikrometer-Schraube *S* (wie an der Alhidade eines Theodolits) geregelt.

Die Holzkästen, in welche die Stangen eingelegt werden, sind in unseren Figuren S. 68 und 69 nicht gezeichnet, sie sind etwa 28^{cm} breit und ebenso hoch.

Libellen sind auf den 4 Stangen zur Neigungs-Bestimmung angebracht. Gewöhnliche Quecksilber-Thermometer wurden mit in die Kästen gelegt, obgleich sie neben der Zink- und Eisen-Verbindung nicht unbedingt nötig sind, und nur ausnahmsweise abgelesen wurden.

Aus den erwähnten Holzkästen ragen nun die Stangen nur mit ihren Enden hervor. Fig. 1. zeigt zwei Stangen-Enden und man erkennt daraus die Art des Aneinanderlegens der Stangen. Es endigt nämlich die linke Stange in eine vertikale Stahlschneide, und die rechte Stange in eine horizontale Stahlschneide, und diese beiden Schneiden werden einander so nahe gebracht, dass der übrig bleibende Zwischenraum durch einen Messkeil gemessen werden kann.

Fig. 4. zeigt die neuere Anordnung der Stahlschneiden und deren Verbindung mit den Eisen- und Zinkstangen. Dabei wurden auch die horizontalen Schneiden der 4 Stangen mit gelenkartig niederzuklappenden Schutzdeckeln versehen, wodurch dem früher nicht seltenen Falle von Beschädigung dieser Schneiden vorgebeugt wird, während die vertikalen Schneiden durch die vorspringenden Enden C der darunter befindlichen Eisenstangen schon genügend geschützt sind. (Der Schutzdeckel ist in dem Grundriss von Fig. 4. nur teilweise gezeichnet, indem dessen linker Teil nur punktiert angedeutet ist, damit die darunter liegende horizontale Schneide nicht dem Anblick entzogen wird.)

Die auf jeder Eisenstange aufliegende *Zinkstange* ist am einen (linkseitigen) Ende durch Schrauben und Lötung mit der Eisenstange verbunden, von diesem Ende bis zum andern Ende ist sie ohne Verbindung mit der Eisenstange. Auf der entgegengesetzten (rechten) Seite endigt die Zinkstange in eine horizontale Stahlschneide, deren jeweiliger Abstand von einer vertikalen, auf der Eisenstange befestigten Stahlschneide durch einen horizontal eingeschobenen Keil gemessen wird.

Hier ist auch noch die kleine Einweis-Scheibe E E Fig. 3. S. 68, zu erwähnen, welche mittelst eines umgreifenden Rahmens R an dem rechtseitigen Ende D jeder Stange befestigt ist. Von dieser Scheibe mit ihren drei schwarzen und weissen Feldern wird bei der Geradrichtung der Basis weiter die Rede sein.

II. Die Messkeile.

Die bei der Göttinger Messung 1880 gebrauchten Glaskeile sind in Fig. 5. S. 69 in natürlicher Grösse gezeichnet.

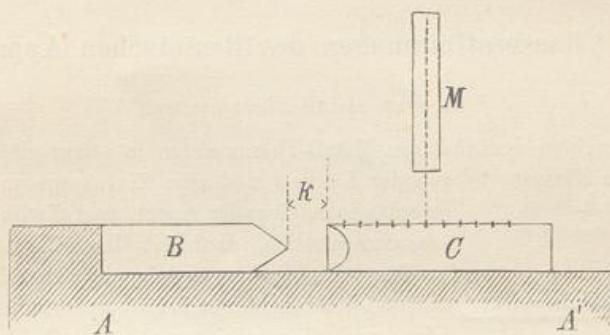
Die Zunahme der Keildicke von einem Strich zum folgenden ist = 0,01 Pariser Linien, und da man noch 0,1 des Intervalls schätzen kann, so hat man Ablesungen von 0,001 Linien für die Keildicken (0,001 Par. Linien = 2,256^μ).

Die Bestimmung der Keildicken geschah durch eine Einrichtung, welche durch die schematische Fig. 6. S. 71 angedeutet ist.

Auf einer festen Unterlage A A' befindet sich ein Cylinder B mit horizontaler Schneide befestigt, und ein zweiter Cylinder C, welcher der horizontalen Schneide des Cylinders B eine vertikale Schneide gegenüberstellt, ist auf dieselbe Unterlage A A' beweglich aufgelegt. Dieser bewegliche Cylinder C trägt auf seiner oberen Fläche eine Teilung, welche durch ein lotrecht darüber angebrachtes Mikroskop M abgelesen

werden kann. Man schiebt den Cylinder *C* mit seiner Schneide gegen den Cylinder *B* berührend an und liest die Teilung auf *C* am Faden des Mikroskopes ab; zieht man dann den Cylinder *C* ein wenig zurück, und füllt den Zwischenraum *k* zwischen den beiden Schneiden durch den zu untersuchenden Messkeil aus, wobei eine zweite Ablesung auf *C* gemacht wird, so ist die Differenz der Ablesungen auf *C* gleich der betreffenden Keildicke *k*.

Fig. 6.
Bestimmung der Keildicken *k*.



Auf diese Weise wurde jeder Keil an mehreren Stellen in Bezug auf seine Dicke untersucht, es zeigte sich, dass die Keildicken auf 0,01 Linien genau proportional den Keillängen waren, dass also die Keilflächen bis zu dieser Genauigkeit eben geschliffen waren. Nach diesen Bestimmungen, welche in Fig. 6. angedeutet sind, wurden Tabellen angelegt, aus denen für jede Keilablesung die zugehörige Keildicke entnommen werden kann.

Die Messkeile dienen zwei verschiedenen Zwecken: erstens werden damit die Zwischenräume zwischen je zwei Stangen-Enden gemessen (Keil *J* Fig. 4. S. 69) und zweitens werden damit die Verschiebungen der Zinkstangen gemessen (Keil *k* Fig. 4. S. 69.)

Die ganze Einrichtung von Zink und Eisen mit Keilmessung ihrer Differenz nennt man auch „Metall-Thermometer.“

III. Die Messungs-Brücke.

Als Auflager für die Stangenkästen benützte Bessel kleine hölzerne Böcke, welche jedoch nicht geradezu auf den Boden gestellt wurden, sondern es wurden zuerst je drei 20^{cm} lange eiserne Nägel in den Boden geschlagen, darauf ein Brett gelegt und darauf ein Bock gestellt, der außerdem mit etwa 50^{kg} belastet wurde, um seine Standfestigkeit zu erhöhen.

Auf je zwei Böcke wurden dann die einzelnen Stangenkästen aufgelegt und sowohl nach der Höhe, als der Quere nach, eingerichtet. Dieses Einrichten geschah von der Königsberger Messung 1834 bis zur Braaker Messung 1871 von freier Hand, und war daher sehr mühsam. Nach den Erfahrungen von Braak wurden die hölzernen Böcke mit Kurbelschrauben versehen, zum raschen mikrometrischen Regulieren der Höhen sowohl als auch der Geradrichtung. Diese verbesserten Böcke sind seitdem bei Grossenhain in Sachsen und bei Oberhergheim im Elsass mit Vorteil gebraucht, zur Basismessung bei Göttingen und Meppen aber durch neue, aus Schmiedeeisen kon-

struierte Böcke ersetzt worden. Die hölzernen Unterlagsbretter und die eisernen 20^m tief in den Boden einzuschlagenden Nägel, auf welchen diese Bretter ruhen, blieben dieselben wie bei Bessel. („Gradm. i. Ostpr.“ Tafel IV.)

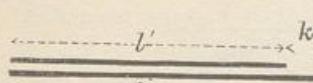
Wegen der Standfestigkeit ist die Auflegung der Stangen so *nieder* als möglich gehalten. Die Böcke sind nur 0,63^m hoch, so dass mit Zurechnung der Unterlagsbrettdicke und der halben Kastenhöhe die Stangenschneiden nur 0,77^m über dem Erd-
boden zu liegen kommen, was gerade noch Handhabung und Ablesung der Keile ohne zu unbequeme Körperlage gestattet.

§ 11. Massbestimmungen des *Besselschen Apparates*.

I. Das Metall-Thermometer.

Wir betrachten zunächst das Metall-Thermometer in seiner einfachsten Gestalt (Fig. 1.). Eine Eisenstange von der Länge l und eine Zinkstange von der Länge l'

Fig. 1.
Metall-Thermometer.



werden so aufeinander gelegt, dass die linkseitigen Enden zusammentreffen, dann ist der Abstand k der beiden rechten Enden die Angabe des Metall-Thermometers.

Bei irgend welcher Temperatur wird $l = l'$ werden, und die gemeinsame Länge beider Stäbe sei in diesem Falle = L . Zählt man nun die Temperatur t' von jenem Stand rückwärts, nennt e und z die Ausdehnungs-Coëfficienten von Eisen und Zink, so ist:

$$l = L(1 - e t') \quad l' = L(1 - z t') \quad (1)$$

Die Differenz ist:

$$l - l' = L(z - e) t' = k \quad (2)$$

Durch Elimination von t' erhält man:

$$l = L - \frac{e}{z - e} k \quad (3)$$

Den relativen Ausdehnungs-Coëfficienten, welcher hier Coëfficient von k ist, bezeichnen wir mit m , d. h.:

$$\frac{e}{z - e} = m \quad (4)$$

und damit haben wir:

$$l = L - m k \quad (5)$$

Eine Gleichung von der Form (5) gilt für jede der 4 Stangen.

Dürfte man auf die *Gleichheit* der Ausdehnungen bei allen 4 Stangen (die aus einem Stück geschnitten sind) rechnen, so wären die Ausdehnungs-Coëfficienten e und z , für Eisen und Zink als konstant zu betrachten. Bessel nimmt jedoch für jede Stange besondere Werte e und z , also auch einen besonderen Wert m an, und demnach bestehen entsprechend (5) für die 4 Stangen folgende 4 Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = L_1 - k_1 m_1 \\ l_2 = L_2 - k_2 m_2 \\ l_3 = L_3 - k_3 m_3 \\ l_4 = L_4 - k_4 m_4 \end{array} \right\} \quad (6)$$

wo k_1, k_2, k_3, k_4 die Keilmasse der Metall-Thermometer der 4 Stangen bedeuten.

Für die Längen L_1, L_2, L_3, L_4 werden andere Formen eingeführt:

$$\begin{aligned} L_1 &= L + x_1 \\ L_2 &= L + x_2 \\ L_3 &= L + x_3 \\ L_4 &= L + x_4 \end{aligned} \quad (7)$$

dabei sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Korrekturen, welche an einem gemeinsamen Wert L noch anzubringen sind. Dieser Wert L ist willkürlich; man kann deswegen z. B. L als arithmetisches Mittel der 4 Werte L_1, L_2, L_3, L_4 annehmen, also:

$$L = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{4} \quad (8)$$

und damit wird für die Korrekturen x die Bedingung erhalten:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad (9)$$

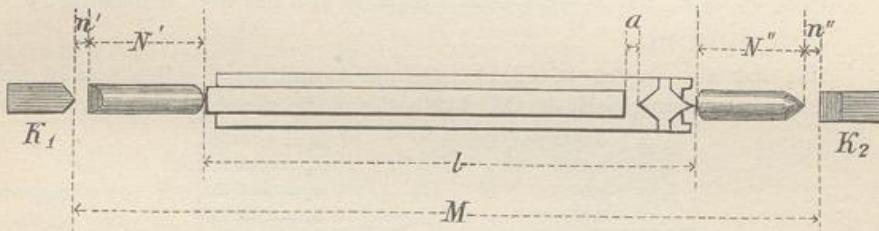
damit gehen die Gleichungen (6) über in die folgenden:

$$\begin{aligned} l_1 &= L + x_1 - k_1 m_1 \\ l_2 &= L + x_2 - k_2 m_2 \\ l_3 &= L + x_3 - k_3 m_3 \\ l_4 &= L + x_4 - k_4 m_4 \\ \text{Mittel: } l &= L - k m \end{aligned} \quad (10)$$

Hier hat L für das Mittel aus allen 4 Stangen dieselbe Bedeutung, wie L_1, L_2, L_3, L_4 nach (6) für die einzelnen Stangen.

II. Gegenseitige Vergleichung der 4 Stangen. Bestimmung der x und m .

Fig. 2.
Stangen-Vergleichung.



In Fig. 2. bedeuten K_1 und K_2 zwei möglichst unveränderliche, auf gemeinsamer Unterlage befestigte Stahlkeile, welche zum Zweck des scharfen Anstoßens in Schneiden endigen. Der Abstand M der Schnieden ist etwas grösser als die Stangenlänge l , so dass zum Ausfüllen außer der Stange l noch zwei Cylinder N' und N'' und die Keilmasse n' und n'' nötig sind. (Die Ausfüll-Cylinder N' und N'' sind nur aus Gründen der Bequemlichkeit angebracht und für das Prinzip des Apparates unwesentlich.) Denkt man sich nun die Stange Nr. 1 in den Vergleich-Apparat Fig. 2. eingelegt, so erhält man eine Gleichung:

$$M = l_1 + (N' + N'') + (n'_1 + n''_1) \quad (11)$$

Es ist aber nach (10):

$$l_1 = L + x_1 - k_1 m_1 \quad (12)$$

Nun wird, um alles Gleichartige zusammenzufassen, gesetzt:

$$\begin{aligned} M - (N' + N'') - L &= C \\ n_1' + n_1'' &= n_1 \end{aligned} \quad (13)$$

Damit erhält man aus den zwei vorhergehenden Gleichungen (11) und (12) die folgende:

$$n_1 = C - x_1 + k_1 m_1 \quad (14)$$

Wenn man nach einander die 4 Stangen einlegt, so erhält man entsprechend (14) folgende 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= -n_1 + C - x_1 + k_1 m_1 \\ 0 &= -n_2 + C - x_2 + k_2 m_2 \\ 0 &= -n_3 + C - x_3 + k_3 m_3 \\ 0 &= -n_4 + C - x_4 + k_4 m_4 \end{aligned} \quad (15)$$

Z. B. gaben die 4 ersten solchen Vergleichungen folgende erste Gruppe von Gleichungen dieser Art, mit eingesetzten Beobachtungswerten:

$$\begin{aligned} 0 &= -3,9693 + C_1 - x_1 + 1,8960 m_1 \\ 0 &= -3,8600 + C_1 - x_2 + 1,9957 m_2 \\ 0 &= -3,4875 + C_1 - x_3 + 1,3387 m_3 \\ 0 &= -3,4506 + C_1 - x_4 + 1,8377 m_4 \end{aligned} \quad (16)$$

Alle Keilmasse, z. B. 3,9693 und 1,8960, sind hier in Pariser Linien ($= 2,2558^{\text{mm}}$) gezählt.

Ähnlich wie (16) wurden noch 8 andere Gruppen von Vergleichungen unter möglichst verschiedenen Umständen gewonnen, und die 36 Gleichungen nach der M. d. kl. Q. aufgelöst. Dabei sind folgende Unbekannte zu bestimmen:

- 1) $C_1 C_2 \dots C_9$. für jede Gruppe ein *besonderes* C (nach 13), damit den Änderungen des Apparates von Gruppe zu Gruppe Rechnung getragen wird,
- 2) $x_1 x_2 x_3 x_4$ mit $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, also nur *drei* unabhängige x ,
- 3) $m_1 m_2 m_3 m_4$.

Man hat also in den 36 Gleichungen die Anzahl von $9 + 3 + 4 = 16$ Unbekannten. Die Auflösung nach der M. d. kl. Q. gab die verschiedenen C und ferner:

$$\begin{array}{lll} x_1 = -0,3015 \text{ Par. Linien} & m_1 = 0,54033 \\ x_2 = +0,3986 & m_2 = 0,55976 \\ x_3 = -0,0718 & m_3 = 0,57575 \\ x_4 = -0,0258 & m_4 = 0,58108 \\ \hline \text{Summe } = 0,0000 & \text{Mittel } m = 0,56422 \end{array} \quad (17)$$

und den mittleren Fehler einer Vergleichung:

$$m = \pm 0,00353 \text{ Par. Linien} = \pm 0,0080^{\text{mm}} \quad (18)$$

oder relativ:

$$\frac{m}{l} = \frac{0,00353}{1728} = 0,000\,002 = 2 \text{ Milliontel} \quad (18a)$$

Diese mittleren Fehler sind hier zunächst reine Rechnungsgrößen, welche nicht alle Fehlerquellen zum Ausdruck bringen.

III. Vergleichung der Stangen mit dem Normalmass.

Da durch die $x_1 x_2 x_3 x_4$ die 4 Stangen bereits unter sich verglichen sind, genügt es, *eine* der 4 Stangen mit dem Normalmass zu vergleichen. Das Normalmass

war eine von *Arago* und *Zahrtmann* in Paris mit der Peru-Toise verglichene Toise, deren Gleichung ist:

$$T = 863,835\,384 (1 + 0,000\,014\,588 R) = 863,999\,205 (1 + 0,000\,014\,588(R - 13)) \quad (19)$$

wo die Länge in Pariser Linien und die Temperatur R in Réaumur-Graden gemessen ist.

Hiezu nimmt man die Stange Nr. 1, welche nach (10) und (17) die Gleichung hat:

$$l_1 = L - 0,3015 - 0,54033 k_1 \quad (20)$$

Legt man diese Stange Nr. 1. und die Toise T nach einander in den Vergleich-Apparat Fig. 2., so erhält man durch die verschiedenen Keilmasse n eine Vergleichung, und eine Beziehung zwischen den Gleichungen (19) und (20), aus welcher eine Bestimmung von L hervorgeht.

Es wurden 12 solcher Bestimmungen gemacht, und im Mittel erhalten:

$$L = 1729,1167 \pm 0,000\,984 \text{ Pariser Linien} \quad (21)$$

und der mittlere Fehler einer solchen Vergleichung

$$\mu_1 = \pm 0,003\,407 \text{ Par. Linien} = \pm 0,0077 \text{ mm} \quad (22)$$

oder relativ:

$$\frac{\mu_1}{L} = 0,000\,0020 = 2 \text{ Milliontel} \quad (23)$$

$$\frac{0,000984}{L} = 0,000\,000\,6 = 0,6 \text{ Milliontel} \quad (23a)$$

Nun kann man für jede der 4 Stangen ihre Gleichung bilden, nämlich nach (10), (17) und (21):

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = 1728,8152 - 0,54033 k_1 \\ l_2 = 1729,5153 - 0,55976 k_2 \\ l_3 = 1729,0454 - 0,57575 k_3 \\ l_4 = 1729,0909 - 0,58103 k_4 \\ \text{Mittel} \quad \bar{l} = 1729,1167 - 0,56422 \bar{k} \\ \text{Allgemein} \quad l = L - m k \end{array} \right\} \quad (24)$$

IV. Vergleichung der Metall-Thermometer und der Quecksilber-Thermometer.

Obgleich die Kenntnis der Temperatur der Messstangen und der Einzel-Ausdehnungen des Eisens und des Zinks, aus welchen sie zusammengesetzt sind, nicht durchaus nötig ist, da ja jede Stangenlänge l nach einer Gleichung von der Form (24) sich als Funktion des inneren Keilmassen k ergibt, war es doch erwünscht, auch eine Beziehung zwischen den Metall-Thermometer-Keilmassen k und den gewöhnlichen in die Kästen mit eingelegten Quecksilber-Thermometern zu erhalten. Es wurden hiezu bei möglichster Temperatur-Ruhe 160 Vergleichungen angestellt, welche im Mittel für die 4 Stangen gaben:

$$k = 2,1249 - 0,045489 R \quad (25)$$

$$\text{oder } R = 46,712^\circ - 21,983 k \quad (25a)$$

Dabei ist k das Keilmass, welches für die 4 Stangen einzeln mit k_1, k_2, k_3, k_4 bezeichnet wurde, und R die Angabe des Quecksilber-Thermometers in Réaumur-Graden.

Diesem entspricht folgendes:

$$\left. \begin{array}{llllllllll} R & = 0^\circ & 5^\circ & 10^\circ & 15^\circ & 20^\circ & 25^\circ & 30^\circ & 46,71^\circ \\ k & = 2,125 & 1,897 & 1,670 & 1,443 & 1,215 & 0,988 & 0,760 & 0,000 \text{ Par. L.} \end{array} \right\} \quad (25b)$$

V. Bestimmung der Einzel-Ausdehnungen von Eisen und Zink.

Wenn man eine Beziehung zwischen dem Keilmass k und der Temperatur t (z. B. in R° oder C°) gefunden hat, von der Form (25) oder allgemeiner geschrieben

$$k = k_0 - p t \quad (26)$$

so kann man auch den relativen Ausdehnungs-Coëfficienten m in seine Bestandteile e und z zerlegen. Wir haben nämlich nach (4), (5) und (24):

$$m = \frac{e}{z - e} \quad l = L - m k$$

also wegen (26):

$$l = L - m k_0 + m p t = (L - m k_0) \left(1 + \frac{m p}{L - m k_0} t \right) \quad (26a)$$

Daraus zieht sich zu erkennen, dass der Ausdehnungs-Coëfficient e der Eisenstange l ist:

$$e = \frac{m p}{L - m k_0} = \frac{m p}{l_0} \quad (27)$$

und da $z - e = e : m$ ist, hat man nun auch:

$$z - e = \frac{p}{L - m k_0} = \frac{p}{l_0} \quad (28)$$

Hiebei ist $L - m k_0 = l_0$ diejenige Stangenlänge l , welche für $t = 0$ stattfindet.

Für die Mittelwerte der Besselschen Stangen haben wir $k_0 = 2,1249$ (für t in R°), $m = 0,56422$, womit berechnet wird $l_0 = 1727,9178$ und insbesondere:

$$e = 0,000\,014\,854 \quad \text{und} \quad z = 0,000\,041\,180$$

Die letzten Stellen dieser Zahlen sind nur genähert richtig, wegen des Einflusses der in Fig. 1, S. 72 vernachlässigten Zwischenstücke D in Fig. 4, S. 69 u. w. vgl. unsere 2. Auflage 1878, S. 89–90 Gleichungen (1)–(6).

Nun hat man für die Messstangen *zwei* Arten von Längen-Bestimmungen, erstens mit den Metall-Thermometern nach der Gleichung (24) und zweitens mit den eingelegten Quecksilber-Thermometern nach (26a).

Bessel hat die Königsberger Basis nach *beiden* Arten berechnet, und gefunden, dass die Quecksilber-Thermometer mehr gaben, nämlich:

$$\begin{aligned} \text{für die erste Messung: } & + 16,346^t = 20^{\text{mm}} \text{ für } 1^{\text{km}} \\ \text{für die zweite Messung: } & + 7,406^t = 9^{\text{mm}} \text{ für } 1^{\text{km}} \\ \text{Mittel: } & + 11,876^t = 15^{\text{mm}} \text{ für } 1^{\text{km}} \end{aligned} \quad (29)$$

Der Grund dieser erheblichen Unterschiede wurde darin gefunden, dass die eingelegten Quecksilber-Thermometer den Temperatur-Änderungen Morgens und Abends viel rascher folgen, als die massiven und tragen Eisen- und Zinkstangen. Insofern nun diese Stangen ihr eigenes Thermometer sind, wurde ihren Angaben der Vorzug gegeben und die Quecksilber-Thermometer nicht weiter berücksichtigt.

Die Basis wurde in zwei Abschnitten je zweifach hin und her gemessen, und die Berechnung nach den Metall-Thermometern gab folgendes:

Abschnitt	Messung I.	Messung II.	Differenz $d = I - II$
s_1	441,1852 ^{mm}	441,1839 ^{mm}	+ 1,3 ^{mm}
s_2	1381,1571 ^{mm}	1381,1632 ^{mm}	- 6,1 ^{mm}
Summe	1822,3423 ^{mm}	1822,3471 ^{mm}	- 4,8 ^{mm}

(30)

VI. Fortgesetzte Mass-Bestimmungen für den Bessel'schen Apparat.

In ähnlicher Weise, wie wir im Vorstehenden von der Königsberger Messung beschrieben haben, wurden auch später Mass-Bestimmungen zu den in § 10. S. 67 erwähnten Basis-Messungen gemacht, z. B.:

$$\left. \begin{array}{ll} 1834 & \text{Königsberg } l = 1729,1167^{\prime\prime} - 0,56422 k \\ 1846 & \text{Berlin } l = 1729,0999^{\prime\prime} - 0,55228 k \end{array} \right\} \quad (31)$$

Die nicht unerheblichen Änderungen in diesen Zahlen haben zu der Anschauung geführt, dass die Stangen im Laufe der Jahre ihre molekulare Struktur geändert hätten. („Publik. d. geod. Inst. Massvergleichungen“ I, 1872, S. 38—46, Bericht von General Baeyer). Doch hat sich das bei näherer Untersuchung nicht bestätigt.

Um das Wesentliche der hierauf bezüglichen Fragen anzuführen, reduzieren wir die verschiedenen Formeln (31) auf den *Mittelwert* $k = 1,4$, d. h. wir formen so um:

$$\left. \begin{array}{ll} 1834 & \text{Königsberg } l = 1728,3268^{\prime\prime} - 0,56422 (k - 1,4) \\ 1846 & \text{Berlin } l = 1728,3267^{\prime\prime} - 0,55228 (k - 1,4) \end{array} \right\} \quad (32)$$

entsprechend der Formel $l = L' - m (k - 1,4)$

Nun sind die Absolutglieder fast gleich geworden, während sie vorher bei (31) um 0,0168 Par. Linien = 0,038^{mm} verschieden waren.

Die Absolutglieder in (31) gelten für $k = 0$, was einer Temperatur von etwa 47° R. entspricht, welche beim Gebrauche nie vorkommt, und deswegen ist die Form (32) mit dem Mittelwert $k = 1,4$, entsprechend einer Temperatur von etwa 16° R., zur sachlichen Vergleichung viel mehr geeignet.

Auch die Änderung der Ausdehnungs-Coefficienten m, e, z , welche sich z. B. zwischen den Jahren 1834 und 1846 als Verkleinerung von e und z zeigt, kann ohne die Annahme molekulärer Änderungen erklärt werden.

Eine Eigentümlichkeit des Apparates besteht auch darin, dass die Abnutzung der äusseren Schneiden die Stangen verkürzt, wie immer bei Abnutzung von Endmassen, dass aber eine Abnutzung der inneren Schneiden, zwischen welchen der Temperaturkeil k (Fig. 4. S. 69) eingelegt wird, die Stangen scheinbar verlängert. Wenn nämlich dieselbe Stangenlänge l nach der Formel (32) zweifach dargestellt ist

$$l = L' - m (k - 1,4) \quad \text{oder} \quad l = L'' - m (k' - 1,4)$$

und wenn durch Abnutzung der inneren Schneiden, k' grösser als k ist, so muss auch L'' grösser als L' sein. Wenn also z. B. in (32) die beiden Werte $L' = 1728,3268$ und $1728,3267$ nach Verlauf von 12 Jahren fast gleich sind, so kann doch die wirkliche Länge l bei einer bestimmten Temperatur durch Abnutzung der äusseren Schneiden kürzer geworden sein, wenn gleichzeitig eine noch stärkere Abnutzung oder Auseinandertreibung der inneren Schneiden stattgefunden hat.

Man vgl. hierüber „Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft“ 1877, S. 150—152, und eine Abhandlung von A. Börsch, „astr. Nachr.“ 99. Band (1881), Nr 2364. Hierauf bezieht sich auch eine Publikation des königl. preuss. geodätischen Instituts, „die Ausdehnungs-Coefficienten der Küsten-Vermessung“ von Dr. Alfred Westphal, Berlin 1881.

§ 12. Die Göttinger Basismessung.

Wie schon früher in § 10. S. 68 berichtet wurde, zeichnet sich die Göttinger Basismessung vom Jahre 1880 vor den früheren mit dem Bessel'schen Apparat ge-

machten Messungen dadurch aus, dass hier zum erstenmal die von General Schreiber vorgenommenen Verbesserungen des Apparates und des Messungs-Verfahrens zur Anwendung kamen.

Verfasser hat damals aktiv an der Basismessung teilgenommen (als Keilleger und Abloter) und hat dadurch umso mehr Veranlassung, diese Messung hier genau zu beschreiben, entsprechend einem bereits in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 377—403 veröffentlichten Berichte.

Der amtliche Bericht über die Göttinger Basismessung ist enthalten in dem Werke: Die königliche Landestriangulation, Hauptdreiecke VI. Teil, gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, Berlin 1894 (Hofbuchhandlung Mittler u. Sohn, Kochstr. 68/70) S. 179 u. ff.

I. Gesamt-Anordnung der Basis.

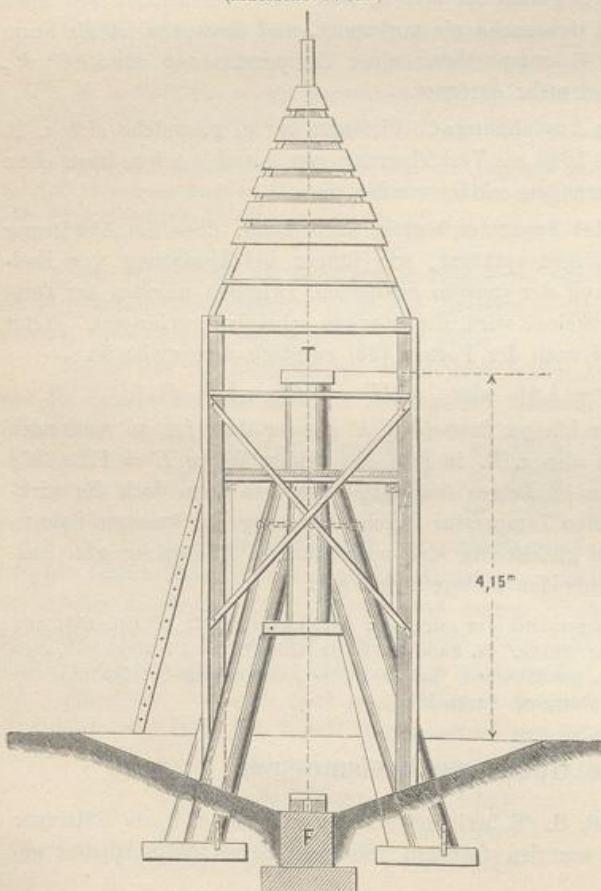
Das Leinethal, in der Gegend von Göttingen, bildet südlich von dieser Stadt genügend festen und horizontalen Boden östlich der Landstrasse. Nach mehrfachen Erkundungen, welche sich namentlich auf ein günstig zu gestaltendes Basisnetz bezogen, wurde diese Gegend gewählt mit einer 5^{km} langen Linie. Weitere südliche

Erstreckung der Basis wäre wohl wünschenswert gewesen, wurde aber durch die Boden-Verhältnisse verhindert.

Das Längenprofil der Basis hat in den ersten zwei Dritteln ziemlich horizontale Erstreckung, während im letzten südlichen Drittel eine Ansteigung bis 31^m über dem Anfang stattfindet. Dort betrugen die Steigungen mehrfach bis zu 3°.

Der nördliche und der südliche Endpunkt werden hinsichtlich ihrer Festlegung und trigonometrischen Bezeichnung durch Fig. 1. veranschaulicht. Die Ablotungen des Instrumenten-Standpunktes *T* auf den Basispunkt *F*, beziehungsweise die betreffenden Centrierungen, wurden durch seitlich aufgestellte Theodolite bewirkt, wodurch auch 4 äussere Fundament-Versicherungen beigezogen wurden. Die Länge der Basis wurde vorläufig zu 5193^m bestimmt und dann in 33 meist

Fig. 1.
Endpunkts-Pyramide mit Hänge-Pfeiler.
(Massstab 1 : 100.)



gleiche Teile geteilt durch Anlage von 32 Zwischen-Festlegungen. Hiezu dienten kupferne Bolzen, mit einzusetzenden stählernen in Nadeln endenden Pinnen mit Fundierung in Cement, wie in Fig. 1. unten bei F angedeutet ist. Hieraus ergiebt sich der mittlere Wert einer Teilstrecke = $156^m = 10$ Stangenlagen, während die erste und letzte Strecke etwas länger waren.

II. Gerad-Richtung.

Um die 32 Zwischen-Festlegungen in die Basisrichtung zu bringen, überhaupt um die Basis für die Messung gerade zu stecken, hatte man nach erster vorläufiger Absteckung eine ebenso grosse Zahl von „Galgen“ aufgestellt, je $15,6^m = 1$ Lage, nach Süden von den Festlegungen entfernt. Die technische Rüstung dieser Galgen, mit $1,5^m$ tief eingebrochenen und eingerammten Pfählen von 20^cm Dicke, zeigt Fig. 2. Die 35^cm breiten und 9^cm dicken Deckbohlen dieser Galgen dienten bei der durchlaufenden Geradrichtung zum Aufstellen der Theodolite, beziehungsweise der Signalscheiben, beide centrisch über eingeschlagenen Messingpinnen. Zur Auffindung der Lagen für diese Pinnen, d. h. für die eigentliche Geradrichtung wurde im wesentlichen das Verfahren angewendet, Zwischenpunkte durch Messung von 180° -Winkeln einzuschalten, wie wir schon in Band II, 4. Aufl. 1893, S. 693, gezeigt haben.

Es wurde zuerst die Mitte gegen die beiden Endpunkte eingerichtet, dann der erste Viertelpunkt gegen den Anfang und die Mitte u. s. w.

Nach dieser Einrichtung aller Galgenpinnen wurde nochmals zur unabhängigen Versicherung eine durchlaufende Winkelmessung über alle Galgen hinweg, je mit Sichtung auf den vorhergehenden und den nachfolgenden Galgen, vorgenommen, woraus sich durch Rechnung ein Polygon von 32 Brechungspunkten zwischen dem 0^{ten} und dem 33^{ten} Punkte ergab, welches eine grösste (westliche) Abweichung von 25^{mm} ergab, was auf 5193^m Länge ausser Betracht bleibt.

Zwischen je 2 Galgen wurden noch 4 Pflocke (in Abständen von $33,2^m$) geschlagen, zum Spannen einer Schnur, längs welcher die Stangen-Unterlagen vorläufig eingerichtet werden konnten, während die endgültige Einweisung der Stangen selbst von den Galgen aus, beziehungsweise von Zwischenstationen aus, durch Theodolite besorgt wurde. Dabei dienten Zelte von der Form Fig. 3. zum Schutz gegen die Sonne.

Zum Einweisen der einzelnen Stangen dienten die schon früher in § 10. S. 70 erwähnten, in Fig. 3. Seite 68 rechts gezeichneten Aufsatz-Scheibchen. Wir denken uns, der Einweise-Theodolit sei auf einem Galgen (Fig. 2.) oder einer Zwischenstation aufgestellt, und das vordere Ende einer Stange sei bereits durch Fahnenwinken so genau eingewiesen, dass der Faden des Fernrohrs in das mittlere weisse, 1^m grosse Feld der Scheibe fällt. Genauer wird nicht eingewiesen, sondern der noch übrige Rest des Einweisungs-Fehlers wird geschätzt, aufgeschrieben und später in Rechnung ge-

Fig. 2.
Geradrichtungs-Galgen.
(Massstab 1:100.)

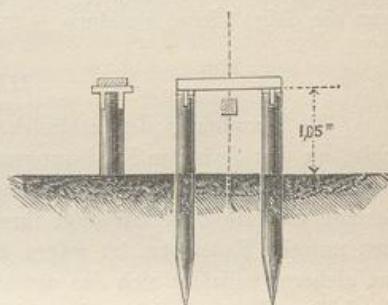
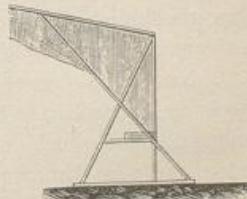


Fig. 3.
Schutz-Zelt.
(Massstab 1:100.)



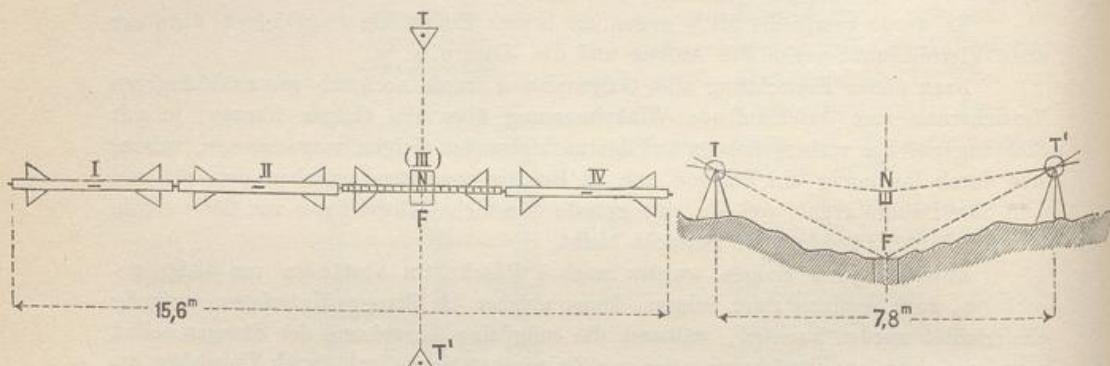
bracht. Wenn zwei aufeinander folgende Stangen-Enden die Ablesungen d und d' geben, so ist die zugehörige Geradstreckungs-Reduktion bekanntlich $= \frac{(d - d')^2}{2l}$, wenn l die Stangenlänge selbst ist ($l = 3,95^m$).

Diese Beträge sind immer sehr klein, sie dürfen aber nicht vernachlässigt werden, weil sie sich niemals gegenseitig aufheben, sondern alle in *dieselben* Sinne, nämlich vergrößernd wirken. Die ganze Basis hat etwa 1315 Stangen, folglich, wenn man den Wert $\pm 2^{mm}$ als mittlere Stangen-Ausweichung und $0,0005^{mm}$ als mittlere Reduktion annimmt, eine Gesamtreduktion etwa $= 1315 \times 0,0005 = 0,66^{mm}$ oder etwa 0,13 Milliontel der Länge, ein Betrag, der sich aber sofort auf das Vierfache erhöht, wenn die obige kleine Annahme $\pm 2^{mm}$ für 1 Stange auf den doppelten Wert kommt.

III. Ablotungen.

Die Anordnung der zahlreichen Ablotungen, welche an den Endpunkten der Basis, an den Zwischen-Festlegungen und an den Unterbrechungen über Nacht und über Mittag nötig werden, ist von wesentlichem Einfluss auf den Gesamtverlauf der Messung und die Zuverlässigkeit ihrer Resultate. Das unmittelbare mechanische Abloben mittelst Fadenlotes ist wegen der Pendelschwingungen unbequem und ungenau. Viel sicherer vollzieht sich das *optische* Abloten mit Hilfe eines seitlich aufgestellten Theodolits. Dieses wurde schon bei der Braaker Basis angewendet und ist für die Göttinger Basis in die Form gebracht worden, welche wir nun im Anschluss an Fig. 4. beschreiben.

Fig. 4.
Abloten.



Man hat zu unterscheiden, ob ein Stangenende oder ein Zwischenpunkt einer Stange auf eine Boden-Festlegung abgelotet werden soll; der letztere Fall ist durch Fig. 4. angedeutet.

Es stellt I, II, (III), IV eine Stangenlage vor, es ist aber in diesem Falle (III) keine gewöhnliche Stange, sondern die besondere, mit einer oberen Teilung versehene Festlegungs-Stange, welche hier zur Ablotung auf den Punkt F' dient.

Nachdem die gewöhnliche Messung bereits über F hinweggegangen ist, während jedoch die benachbarten Stangen II und IV noch *unverrückt* liegen, wird III vorsichtig herausgenommen und durch (III) ersetzt. Durch Ausziehen von Schlitten-Schiebern hinten und vorn kann man mit dieser Stange (III) die *ganze* Länge zwischen II und IV (nämlich die Länge der Stange III samt den 2 Keilmassen) ausfüllen, und folglich

den Punkt F als Projektion N auf der Teilung von (III) angeben. Das hiezu nötige Herauf-Loten von F geschieht durch 2 seitlich aufgestellte Theodolite T und T' . Es empfiehlt sich jedoch, nicht direkt den Auflote-Punkt N auf der Stange (III) zu bestimmen, sondern durch vorläufiges Herauf-Projizieren einen anderen genäherten Punkt N' zu ermitteln und dann noch den kleinen Horizontalwinkel zwischen F und N genau zu messen und das ihm entsprechende lineare Mass in Rechnung zu bringen.

(Einige dabei zu beachtende Einzelheiten s. „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 385 bis 386.)

Da alle diese Ablotungen doppelt, nämlich durch *zwei* symmetrisch seitwärts gestellte Theodolite ausgeführt wurden, ergab sich eine Versicherung unmittelbar. Die 34 Ablotungen der ersten Basismessung gaben eine mittlere Differenz von nur $1,51''$, also für das Mittel aus beiden Messungen nur einen mittleren Fehler von $0,76''$, was auf $3,90^m$ Theodolit-Abstand einen mittleren linearen Fehler von nur $0,014^{mm}$ giebt. Die Instrumente waren 21^{cm} -Mikroskop-Theodolite, sonst zu Triangulationen zweiten Rangs gebraucht.

Zwar sind nicht alle bei den fraglichen Ablotungen mitwirkenden Verrichtungen, Ablesungen an der Stange (III) u. s. w. ebenso genau, doch sind die Ablotungen im Ganzen auf $0,1^{mm}$ sicher, wobei noch zu beachten ist, dass diese Fehler der Zwischenpunkte sich nicht fortpflanzen und in das Gesamtbasis-Resultat überhaupt nicht eingehen.

In ähnlicher Weise wie diese Ablotungen an den regelmässigen Festlegungen wurden auch die Unterbrechungs-Ablotungen Mittags und Abends gemacht.

IV. Die Keilmessung.

Das Einlegen eines gläsernen Messkeiles (vgl. Fig. 4. und Fig. 5. § 10. S. 69) zwischen die Schneiden, und das Ablesen der Teilung ist nicht so einfach, als dieses auf den ersten Blick scheinen könnte; es ist eine gewisse Übung dazu erforderlich. Vor allem muss man sich hüten, den Keil zu stark „einzuschieben“, er soll nur „eingelegt“ werden, wobei die erste Berührung mehr wie eine Art Kleben als wie ein Druck gefühlt werden soll. Wird zu stark eingedrückt, so entstehen erhebliche konstante Fehler, deren Existenz schon die Brüsseler Kommission 1854 fand.

In der Landesaufnahme hat sich eine feine Art der Keillegung seit Bessel und Baeyer durch Tradition erhalten, und die besonderen bei Göttingen angestellten Versuche, über welche wir nachher berichten werden, haben ergeben, dass bei Befolgung dieser vorsichtigen Keillegung die konstanten Fehler äusserst kleine Beträge haben. (S. 82.)

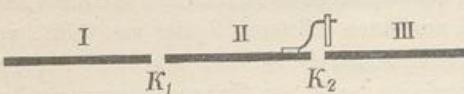
Was zunächst den mittleren unregelmässigen Keillege- und Ablesefehler betrifft, so fand man denselben aus Wiederholungen der Metall-Thermometer-Messungen $= \pm 1,8'$ und aus Wiederholungen der Intervallen-Messungen $= \pm 2,3'$. Hierbei soll mit t der Wert 0,001 Par. Linie bezeichnet werden; es ist nämlich $1'$ die letzte noch wahrzunehmende Grösse, welche dem geschätzten Zehntel der Keilteilung entspricht. Diese Genauigkeit von etwa $\pm 2' = \pm 0,005^{mm}$, mit freier Hand und mit blossem Auge erreicht, ist sehr überraschend.

Die Metall-Thermometer-Fehler gehen in die Basislänge nur etwa mit ihrem halben Betrag ein, man hat also für eine Stangenlänge nur etwa $\sqrt{0,92 + 2,3^2} = \pm 2,5' = \pm 0,0056^{mm}$ in Rechnung zu nehmen, oder für 1^{km} Länge mit rund 250 Stangen den mittleren Messungsfehler $= \pm 0,0056 \sqrt{250} = \pm 0,09^{mm}$. Thatsächlich ist der

mittlere unregelmässige Basismessungs-Fehler, aus Doppelmessungen berechnet, etwa $\pm 1^{\text{mm}}$ für 1^{km} , d. h. 10mal so gross, als der soeben *a priori* gefolgerte. D. h. der nackte mittlere unregelmässige Keilmessungs-Fehler bildet nur einen verschwindend kleinen Teil der wirklichen Fehler. Erheblichere Beträge werden erzeugt durch Gleiten der Stangen auf ihren Böcken, sowie durch Ungleichheit der Temperaturen in den Eisen- und Zinkstangen.

Zur Bestimmung des Keildrucks wurde die in Fig. 5 angedeutete Einrichtung getroffen, es ist nämlich auf dem rechten Ende der Stange II ein Schrauben-Mikroskop

Fig. 5.



festigt, dessen Gesichtsfeld auf das linke Ende der Stange III hinüberreicht, und eine dort angebrachte feine Teilung einzustellen gestattet. Jede relative Bewegung der zwei Stangen

II und III kann mit dieser Vorrichtung leicht auf $\pm 0,1^{\circ}$ genau gemessen werden.

Es wurde dadurch gefunden, dass *stärkere* absichtliche Keildrücke zweierlei Wirkung haben, erstens grösstenteils elastisches Zurückgehen, zweitens aber eine dauernde Verschiebung von etwa $0,4^{\circ}$.

Die schwachen Keildrücke, wie sie bei der eigentlichen Basismessung vorkamen, hatten eine dauernde Wirkung von nur im Mittel $0,29^{\circ}$ oder $0,17$ Milliontel der Länge.

V. Temperatur-Verhältnisse.

Temperatur-Bestimmung mit dem Quecksilber-Thermometer findet bei der Besselschen Messmethode unmittelbar nicht statt. Indessen besteht doch ein gewisses Interesse, auch die eigentlichen Stangen-Temperaturen zu kennen, und zu diesem Zweck zuerst eine Beziehung zwischen dem Keilmass k und dem Temperaturgrad R eines Quecksilber-Thermometers herzustellen; so hat Bessel in der „Gradm. in Ostpreussen“ S. 29 (vgl. unseren § 11. Gleichung (25) S. 75) für das Mittel der vier Stangen die Beziehung gegeben:

$$k = 2,1249 - 0,045489 R, \quad \text{oder} \quad R = 46,712^{\circ} - 21,983 k$$

wo k das Keilmass in Par. Linien und R die entsprechende Quecksilber-Thermometer-Angabe in R° bedeutet.

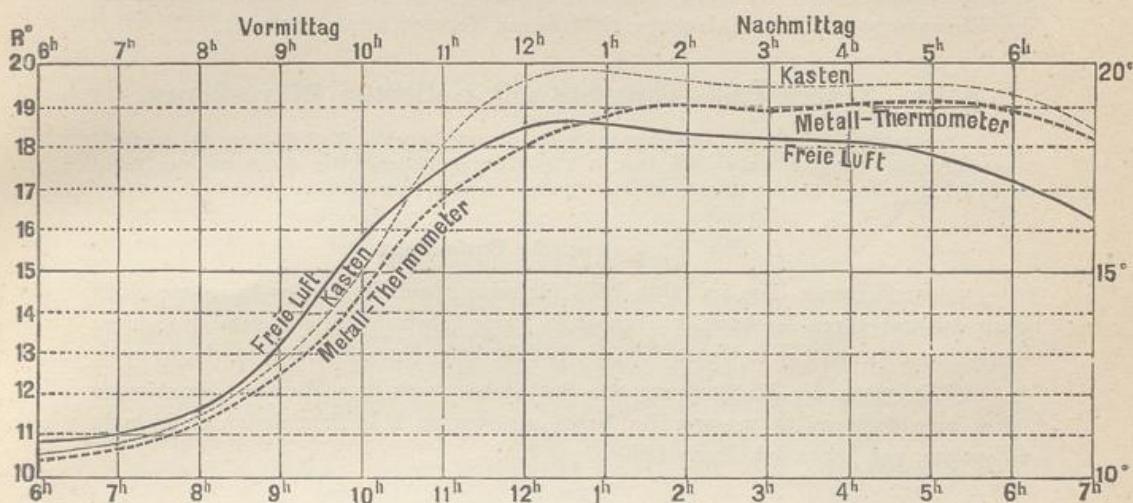
Bei Göttingen machte ich an den 2 Tagen der intensivsten Messung, 17. und 18. August, einige Versuche zur Vergleichung mit Quecksilber-Thermometern.

Es wurden etwa halbstündlich folgende 3 Aufzeichnungen gemacht:

1. Temperatur der freien Luft durch Schleuder-Thermometer.
2. Temperatur des Innenraums der Kästen, an den eingelegten Thermometern durch die Glasverschlüsse abgelesen.
3. Metall-Thermometer-Keilmasse für die 4 Stangen.

Die Verhältnisse waren auch insofern andere, als bei der ersten Königsberger Vergleichung von 1834, als damals die mit heller Ölfarbe angestrichenen hölzernen Stangenkästen unmittelbar den Sonnenstrahlen ausgesetzt wurden, während bei Göttingen die Kästen noch Überzüge von weissem Schirring hatten, welche durch die Erfahrungen bei der Braakschen Messung, 1871, als nützlich erkannt, in der That einen erheblichen Schutz gegen strahlende Wärme gewähren.

Fig. 6.
Gang der Temperaturen bei der Göttinger Basismessung:
(Mittel vom 17. und 18. August 1880.)



Die Ergebnisse dieser Vergleichungen sind in vorstehender Fig. 6. dargestellt. Die Original-Beobachtungen hiezu wurden in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 394 veröffentlicht, und zwar 17. und 18. August 1880 im allgemeinen halbstündlich. Die Beobachtungen dieser zwei Tage wurden zuerst gemittelt und wenig ausgeglichen, wodurch folgende Zusammenstellung erhalten wurde:

Göttingen 17.—18. August 1880.			
Tageszeit	Luft	Kasten	Metall-Thermometer
Morgen	10,7° C	9,9° C	10,0° C
	10,8	10,8	10,6
	11,6	11,6	11,2
	13,1	12,6	12,2
	15,8	14,8	14,2
	17,4	17,8	16,6
Mittag	18,4	19,5	17,8
	18,5	19,7	18,6
	18,3	19,5	19,0
	18,1	19,4	18,9
	18,0	19,5	19,0
	17,7	19,4	19,0
Abend	17,1	19,2	18,8
	16,0	18,4	18,2

Diese Werte wurden nochmals ein wenig graphisch ausgeglichen, und dann wurde die obenstehende Fig. 6. darnach aufgetragen.

Der Gang der Temperaturen ist im wesentlichen dieser: Unmittelbar vor dem Erscheinen der Sonne haben die Luft, der Kasten und die Stangen infolge der nächtlichen Ausgleichung nahezu gleiche Temperatur; sobald die Sonne zu wirken beginnt, hebt sich die Lufttemperatur und *nachfolgend* auch allmählich die Temperatur des Kastens und der Metallstangen; dann beginnt der Kasten nach und nach als Wärmebehälter zu wirken und teilt auch den Stangen seinen Wärmeverrat mit, so dass Nach-

mittags und Abends der Kasten und die Stangen wärmer als die Luft sind. Die Unterschiede zwischen dem Quecksilber-Thermometer und dem Metall-Thermometer, welche über 1° gehen, zeigen sich hier deutlich; dagegen über den Temperatur-Unterschied der Eisenstange und der Zinkstange giebt dieser Versuch keine Auskunft.

§ 13. Neuere Basis-Apparate mit isolierten Mikroskopen.

Zur Geschichte und zur Vorgeschichte dieser Apparate berichtet Wolf, *Histoire de l'appareil Ibanez-Brunner*, *Comptes rendus* 112, 1891, S. 370—371 und Hammer, *Zur Geschichte der Basismessung*, „*Zeitschr. f. Verm.*“ 1891, S. 446—448 (Tralles, Hassler, Porro, d'Aubuisson.)

I. Der ältere spanische Basis-Apparat.

General Ibanez liess im Jahre 1856 für seine spanische Landes-Aufnahme einen Basis-Apparat durch Mechaniker Brunner in Paris konstruieren, mit dem er mehrere Grundlinien, namentlich im Jahre 1858 die 14 663^m lange Grundlinie bei Madridejos mass.

Wir geben die Beschreibung des Basisstabes nach dem Werke: „*Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases appartenant à la Commission de la carte d'Espagne*, par Laussedat, Paris 1860“.

Fig. 1.
Brunner's Basis-Messstange.
Querschnitte in natürlicher Grösse.

Fig. 1a.
Feste Verbindung in der
Mitte.

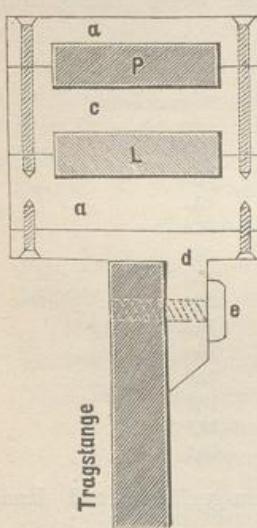


Fig. 1 b.
Allgemeiner freier
Querschnitt.

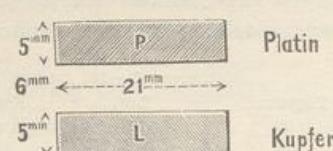
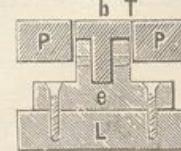


Fig. 1 c.
Ausdehnungsbestim-
mung an den Enden.



Die beiden Stäbe von Platin und Kupfer haben gleiche Dimensionen, nämlich wie in Fig. 1 b. angegeben ist, je 21^{mm} Breite und 5^{mm} Höhe, mit einem Zwischenraum von 6^{mm}. Fig. 1 b. zeigt den normalen Querschnitt, wie er überall der Länge nach ist, wo keine Berührung der beiden Stäbe stattfindet.

In der Mitte sind beide Stäbe fest verbunden, wie in Fig. 1 a. angegeben ist; zwei Rahmen *a* mit einem Mittelstück *c* sind seitlich fest zusammengeschraubt und halten damit die Platinstange *P* und die Kupferstange *L* fest zusammen. Fig. 1 a. zeigt auch eine Tragstange, welche der ganzen Länge nach durchgeht, mit einem Querschnitt von umgekehrter **T**-Form, ebenso wie in der späteren Fig. 4. S. 87.

Endlich zeigt noch Fig. 1 c. den Querschnitt an dem einen Ende, wo die gegenseitige Ausdehnung zwischen Platin und Kupfer gemessen wird.

Hier ist der Platinstab in seinem mittleren Drittel durchbrochen und durch ein besonderes **T**-förmiges Platinstück *b* ausgefüllt, das zwischen *P* und *P* lose gleitet, dagegen nach unten fest mit *e* und *L* verbunden ist.

An der Fuge zwischen b und P befindet sich auf der horizontalen Oberfläche von b und von P eine Teilung T , an welcher man die relative Ausdehnung der Stäbe L und P mikroskopisch ablesen kann.

II. Basis-Apparat des geodätischen Instituts.

Etwa im Jahre 1876 hat das geodätische Institut einen Basis-Apparat von Mechaniker Brunner in Paris bestellt und 1878 geliefert erhalten. Dieser Apparat hat im wesentlichen dieselbe Konstruktion, wie der soeben beschriebene spanische Apparat von General Ibanez. Der Apparat des geodätischen Instituts hat einen Stab, der aus Platin-Iridium und Messing zusammengesetzt ist. Die erste Mitteilung hierüber giebt der Generalbericht der Europ. Gradm. für 1878, S. 99, mit einem Anhange „Sur la construction de la règle géodésique internationale, par M. M. H. Sainte-Claire Deville et E. Mascart“ und Fortsetzung in dem Gen.-Ber. d. Europ. Gr. für 1879, Anhang.

Mit diesem Apparate wurden vom geodätischen Institute bis jetzt 3 Grundlinien-Messungen ausgeführt, nämlich 1879 Nachmessung der 2763 Meter langen Basis von Strehlen in Schlesien, welche früher 1854 mit dem Besselschen Apparate gemessen worden war, ferner 1880 Nachmessung der 2336 Meter langen, früher 1846 für die Küstenvermessung angelegte Grundlinie bei Berlin und 1892 Nachmessung der Bonner Basis. Im Anschluss an diese letztere Messung sind auch weitergehende Untersuchungen auf der Versuchsstrecke des geodätischen Institutes auf dem Telegraphenberge bei Potsdam ausgeführt worden. (Probemessungen mit dem Repsold'schen Ablotungs-Apparat von Schumann, Mitteilung des Geodätischen Instituts, s. „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“, 1894, S. 18—20.)

III. Der neue, vereinfachte spanische Basis-Apparat.

Während die Genauigkeit der Messungen mit dem Brunnerschen Apparat genügend war, fand man in Spanien die Geschwindigkeit, nämlich etwa 70 Meter für 1 Stunde nicht befriedigend.

Es wurde deswegen nach Angabe von General Ibanez im Jahre 1864 ein neuer einfacherer Apparat, jedoch im wesentlichen nach dem ersten Grundgedanken konstruiert, mit dem nicht nur von 1865—1879 acht weitere spanische Grundlinien, sondern dann auch von 1880—1881 drei Linien in der Schweiz gemessen wurden, 2,4^{km} bei Aarberg, 2,54^{km} bei Weinfelden und 3,2^{km} bei Bellinzona.

Wir beschreiben zuerst im Anschluss an Fig. 2. und Fig. 3. S. 86 die Anordnung des Apparates und den Gang der Messung im allgemeinen, und benützen dabei zunächst die Broschüre von Dr. Koppe: „Der Basis-Apparat des Generals Ibanez und die Aarberger Basismessung, Zürich 1881“, nebst einigen dankenswerten Privatmitteilungen von Koppe.

Es wird ein Massstab von 4^m Länge angewendet, welcher in Fig. 3. durch $a b$ angedeutet ist und auf 2 Stativen S_1 und S_2 aufliegt.

Unabhängig von dem Massstab und seinen Stativen S_1 S_2 sind zwei Mikroskope M_1 und M_2 auf besonderen Stativen T_1 und T_2 an den Enden des Massstabes aufgestellt. Die Mikroskope M_1 und M_2 werden auf die Endstriche a und b (oder nahe den Endstrichen) eingestellt, dann wird der Massstab um seine eigene Länge von

Fig. 2.
Basismessung bei Aarberg in der Schweiz,
ausgeführt im August 1880 mit dem vereinfachten spanischen Basis-Apparat.
Darstellung des Messungs-Vorfahrens.

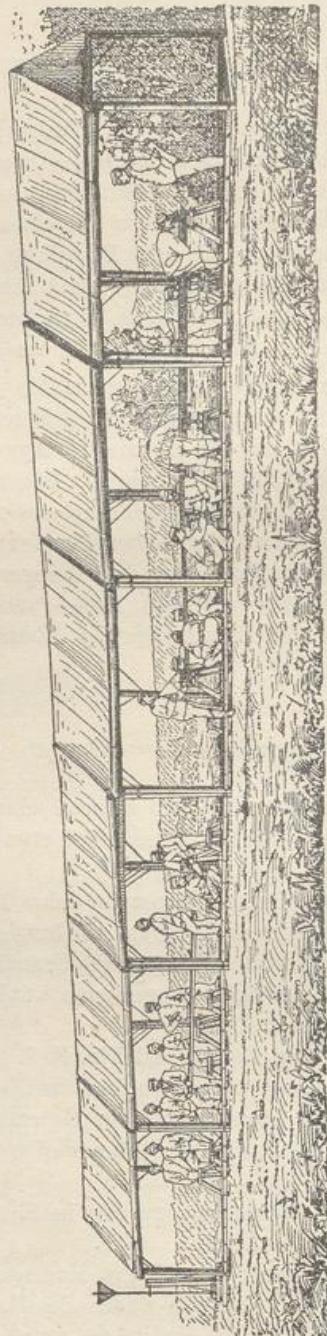
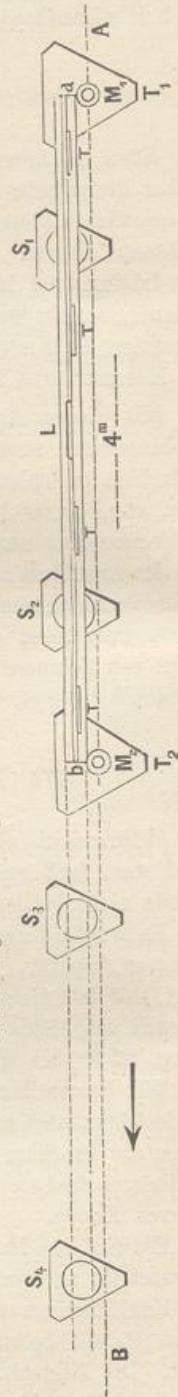


Fig. 3.
Darstellung des Grundgedankens der Messung (Massstab $a:b = 4$ Meter).



rechts nach links vorgerückt, so dass a nach b kommt und die Stativen S_3 und S_4 in Anwendung kommen; M_2 bleibt stehen, und M_1 rückt um die zweifache Massstabslänge vor, so dass es nun vorderes Mikroskop wird u. s. w.

Der Massstab ab bewegt sich hiebei nicht in der abgesteckten und festgelegten Geraden AB selbst, sondern in einer Parallelen ab zu AB , was offenbar gleichgültig ist.

Die Messstange ab besteht aus Eisen, und ist der freien Luft ausgesetzt, ohne Schutz durch einen hölzernen Kasten. Dagegen wird der Apparat im Ganzen durch Zelte geschützt, welche mit Leinwand bespannt gegen direkte Sonnenstrahlen und auch gegen leichten Regen Schutz gewähren. Die Zelte sind tragbar, und werden dem Fortschritte der Messung entsprechend stets hinten abgenommen und vorne wieder angesetzt.

Die Anordnung im Ganzen zeigt Fig. 2. S. 86.

Übergehend zu den Einzelheiten betrachten wir in Fig. 4. zuerst den Querschnitt der Stange; derselbe hat umgekehrte T-Form, so dass ein breites Auflager entsteht. Der Stab ist 4^m lang und 50^{kg} schwer.

Zur Temperatur-Bestimmung dienen gewöhnliche Quecksilber-Thermometer, welche in Fig. 4. rechts oben durch T veranschaulicht sind und auch in Fig. 3. S. 86 der Länge nach an 4 Stellen durch T, T, T, T angedeutet wurden.

Die mit Quecksilber gefüllten Glaskugeln dieser Thermometer sind mit dem Eisen der Stange in unmittelbarer inniger Berührung und sind ganz in Eisenfeilspähne eingebettet. Die Glasröhren der Thermometer werden durch übergedeckte Glasplatten von Aussen abgelesen.

Zur Neigungs-Bestimmung der einzelnen Stangenlagen dient eine in der Mitte angebrachte Libelle L (Fig. 3. S. 86).

Die Messstange ist auf ihrer oberen schmalen Fläche mit einer *Teilung* versehen, früher der ganzen Länge nach in Centimeter, bei der neueren vereinfachten Anordnung nur noch von 0,5 zu 0,5 Meter, und zwar durch feine Striche auf eingelegten Platin-Plättchen.

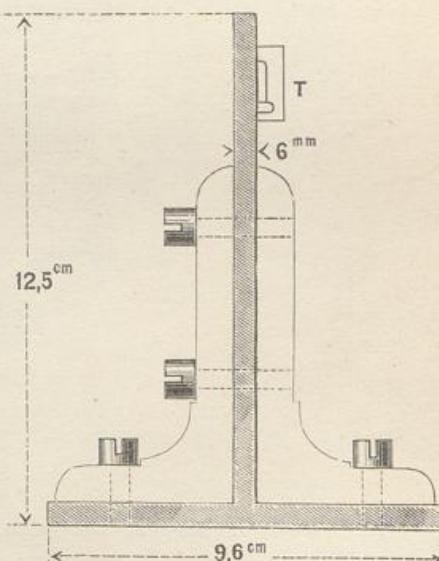
Nun haben wir das in Fig. 5. S. 88 abgebildete Instrument „Mikroskop-Theodolit“ genannt, zu betrachten, welches drei Zwecken gemeinsam dient, nämlich:

- 1) Ablotung auf die Festlegungs-Bolzen im Erdboden,
- 2) Einrichtung in die abgesteckte Basis-Gerade,
- 3) Mikroskopische Einstellung oder Ablesung auf den Stangen-Enden.

Zu diesen drei Zwecken, denen der Mikroskop-Theodolit zu dienen hat, ist im Einzelnen zu bemerken:

- zu 1) Wenn der Mikroskop-Theodolit als Abloter dienen soll, so wird statt des horizontalen Fernrohrs F Fig. 5. ein vertikales Fernrohr eingelegt, welches

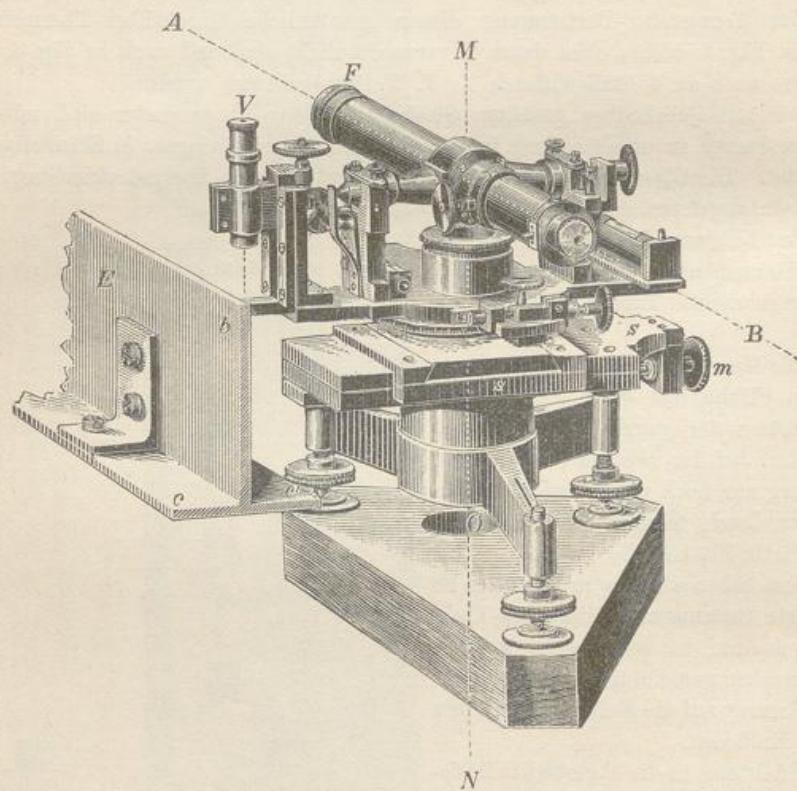
Fig. 4.
Querschnitt des Massstabes
in halber natürlicher Grösse.



durch das Loch O im Stativen nach der Vertikalen MN eingerichtet werden kann, mit Schlittenführungen s und Schraubenbewegungen m nach zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen.

- zu 2) Wenn es sich um Einrichtung in die Gerade in horizontalem Sinne handelt, so wird das horizontale Fernrohr F Fig. 5. vor- oder rückwärts nach A oder B eingerichtet. Soll die Mitte M selbst Zielpunkt werden, so wird das Fernrohr F ausgehoben und eine Zielmarke in die Axenlager eingelegt.
- zu 3) Die mikroskopische vertikale Einstellung auf die Messstange ist in Fig. 5. bei V und b angedeutet. V ist ein vertikales Mikroskop, welches auf die schmale Oberfläche b des eisernen Massstabes E eingestellt werden kann. Den Massstab E haben wir mit seinem Querschnitt bcc' in Fig. 5. ohne Stativen angedeutet.

Fig. 5.
Mikroskop-Theodolit (Massstab etwa 1:5).



Der Gang der Messung lässt sich nun vollends leicht beschreiben:

Die Aarberger Basis von 2400^m Länge war durch drei grosse dreieckige Scheibenbäcken (s. Fig. 2. S. 86 links) über der Erde bezeichnet, und wurde durch Messingbolzen in Quadern unterhalb festgelegt. Die Linie befand sich auf gerader und ebener Landstrasse, die Stativen wurden auf den Strassenboden gestellt. Der Strassenverkehr wurde während der Dauer der Messung gesperrt.

Zu gleichzeitiger Verwendung kamen:

- 4 Mikroskop-Theodolite,
- 4 Auflagdreifüsse für die Messstange,
- 6 grosse Holzstative (T Fig. 3. S. 86) für die Mikroskop-Theodolite,
- 10 kleine Holzstative (S Fig. 3. S. 86) für die Messstange,
- 2 hölzerne je 4 Meter lange Latten zum Vor-Messen.

Das Personal war:

- 2 Beobachter mit Gehilfen zum Vorwärtsstragen und vorläufigen Stellen der Holzstativen,
- 2 Beobachter mit Gehilfen zum endgültigen Stellen der Holzstativen,
- 4 Beobachter an der Messstange zum Einstellen der Null- und Endstriche unter die Mikroskope, zum Ablesen der 4 Thermometer und der Libelle,
- 2 Gehilfen zum Vorwärtsstragen der Stange (die Fig. 2. S. 86 zeigt 15 Mann).

Über die Messungs-Geschwindigkeit ist folgendes mitgeteilt:

Am 22. August 1880 begann die Messung 5 Uhr 48 Minuten und wurde bis 800^m durchgeführt. Nach drei Tagen war die erste Messung der Basis beendigt; gleichzeitig wurden in Entfernung von 400^m zu 400^m feste Punkte errichtet.

Am Nachmittage des 24. August wurden die Instrumente und sämtliche Gerätschaften nach dem Basisanfang zurücktransportiert; alle Apparate einer sorgfältigen Prüfung unterworfen. Am 25., 26. und 27. August wurde, wie an den drei vorhergehenden Tagen, in der Zurückmessung um je 800^m vorgerückt, alle Fixpunkte eingesessen und so auch die zweite Messung in drei Tagen beendigt. Die Zeiten, welche auf die Messung der einzelnen Sektionen verwandt wurden, sind:

Sektion	I. Messung		II. Messung	
1. = 400 Meter	2	Stunden 47 Min.	2	Stunden 6 Min.
2. = 400	"	2	"	59 "
3. = 400	"	1	"	24 "
4. = 400	"	2	"	8 "
5. = 400	"	2	"	31 "
6. = 400	"	2	"	49 "
<hr/>				
Mittel:	400 Meter	2 Stunden 36 Min.	2 Stunden 20 Min.	

Die zweite Messung ging etwas rascher vor sich als die erste, weil das Setzen der Fixpunkte bei der ersten Messung einige Zeit in Anspruch nimmt.

Die grösste Neigung der Messstange während dieser Messungen betrug 1,5°, die Korrektion für die Neigung im Mittel nahe 1^m für 1 Sektion. Ausgesprochen ungünstig für die Messung war der erste Beobachtungstag, namentlich während der Messung der zweiten Sektion, indem der Regen die Zelte durchweichte. Die Differenz ist bei dieser Sektion die grösste.

General Ibanez selbst hat über seine Basis-Apparate folgendes als Gesamturteil ausgesprochen:

„Die einfache Einrichtung meines Apparates und die Art seiner Anwendung ist das Ergebnis der Erfahrungen, welche ich bei *neun* in Spanien ausgeführten Basis-Messungen zu machen Gelegenheit hatte. Bei meinem ersten Apparate waren alle denkbaren Korrektions-Vorrichtungen angebracht. Die Messstange bestand aus zwei Metallen, deren Längen-Unterschied infolge verschiedener Ausdehnung durch die Wärme mit einer Mikrometer-Schraube gemessen wurde. In gleichen Intervallen eingelassene Quecksilber-Thermometer liefern eine zweite, von der ersten unabhängige Bestimmung

der Temperatur. Es zeigte sich schliesslich, dass die Quecksilber-Thermometer die Temperatur der Messstange leichter und besser bestimmen lassen, als das Metall-Thermometer und deshalb habe ich erstere allein beibehalten. Die Sucht, jedes Mass und jede Korrektion gesondert mit der Mikrometer-Schraube messen zu wollen, wie wir es erstmals thaten, führt zu grossem Zeit- und Arbeits-Aufwande ohne reellen Gewinn an Genauigkeit; und grössere erreichbare Vorteile gehen durch die komplizierte Art und längere Dauer der Messung verloren. Das beste Mittel, dem Anhäufen der Beobachtungs-Fehler in ausgedehnten Dreiecksnetzen entgegen zu arbeiten, ist die Messung einer ausreichenden Zahl von Grundlinien. Dieses Mittel kann aber um so eher in Anwendung gebracht werden, je mehr der Messapparat mit einfacher Einrichtung und Handhabung ausreichende Genauigkeit der Resultate verbindet.“

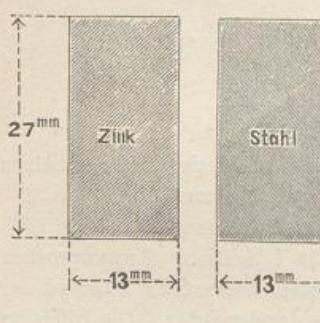
IV. Der amerikanische Basis-Apparat von Repsold.

Die nord-amerikanischen Vermessungen im neueren Sinne begannen etwa 1841; von da bis 1874 wurden 9 Grundlinien gemessen und im Jahre 1876 wurde ein neuer Basis-Apparat von Repsold in Hamburg angeschafft, mit welchem unter Leitung von Comstock dann drei Grundlinien, bei Chicago 1877, Sandusky 1878, und Onley 1879 gemessen wurden.

Nachricht hierüber giebt das grosse amtliche Werk: „Professional papers of the corps of engineers, U. S. Army, Nr. 24. Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Lieut. Col. C. B. Comstock, Corps of Engineers,

Fig. 6.
Repsold-Comstocks Messstange,
Querschnitt in natürlicher
Grösse.

Brevet Brigadier-General, U. S. A., aided by the Assistants on the survey. Washington: Governement printing office. 1882.“ (vgl. auch „Zeitschr. f. Verm. 1884“, S. 533—547 und 1888, S. 385—395.)



Der Grundgedanke des Repsold-Comstock schen Apparates ist derselbe wie beim Brunner schen (S. 84), nämlich eine Messstange, deren Enden zwischen festen Mikroskopen abgelesen werden.

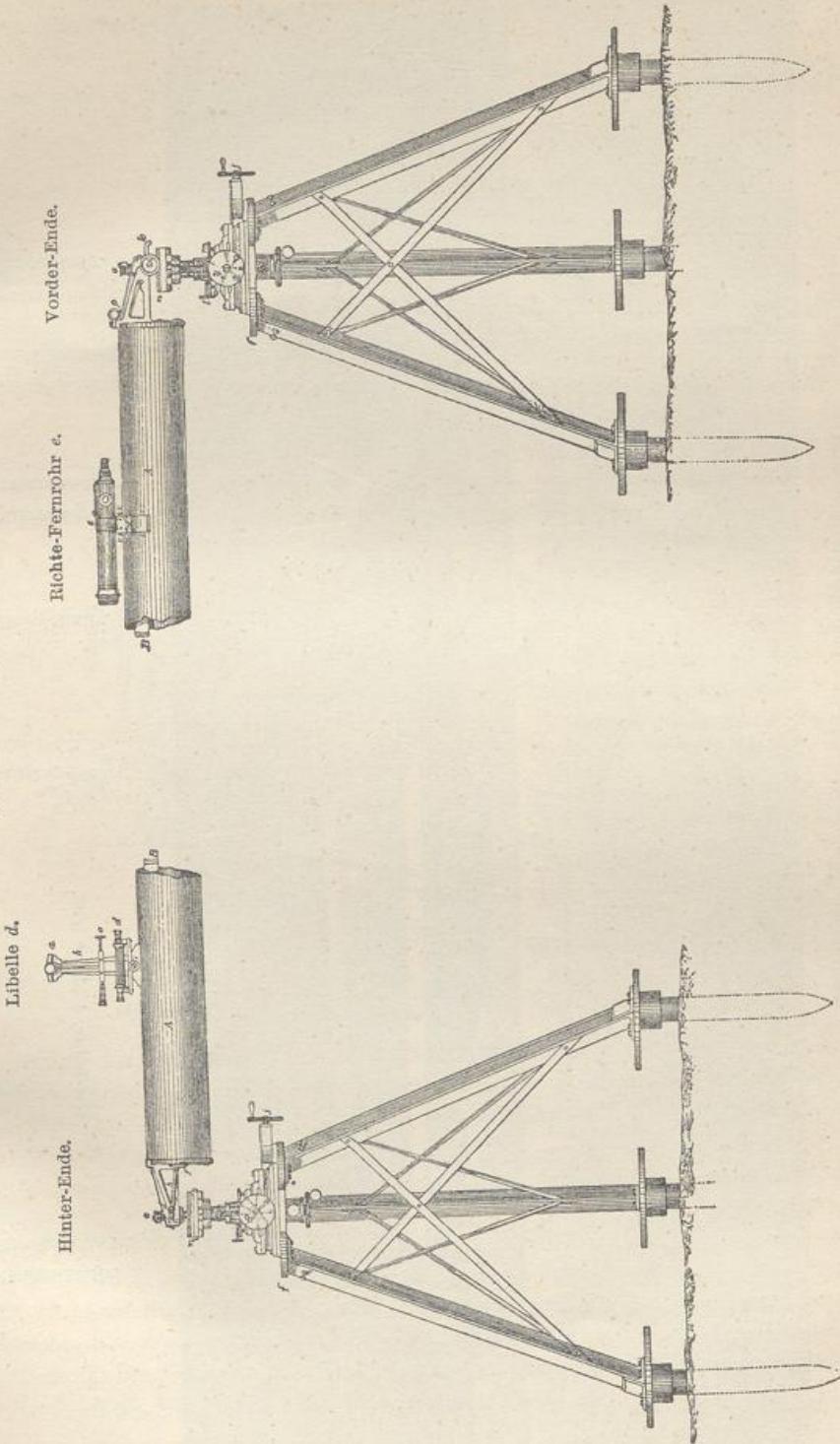
Die Messstange besteht aus der Verbindung von Zink und Stahl, wie in Fig. 6. angegeben ist. Die aus Zink und Stahl zusammengesetzte Messstange ist in eine Röhre von 12,5 cm Durchmesser eingeschlossen und ragt an den Enden derselben hervor, wie durch die nachfolgenden Fig. 7. bis 12. S. 91—93 dargestellt ist.

Die zwei Platinplättchen *ee* in Fig. 9. S. 93 sind mit feinen Teilungen versehen, welche durch die isoliert aufgestellten Mikroskope abgelesen werden.

Fig. 12. (S. 93) zeigt den Röhren-Querschnitt und zugleich die Queransicht eines mit der Röhre parallelen Richte-Fernrohrs *b*, welches in der grossen Fig. 7. (S. 91) rechts oben in Seiten-Ansicht dargestellt ist. Dieses Richte-Fernrohr lässt sich durchschlagen, also auf eine vordere oder eine hintere Richte-Bake der Geraden einstellen.

Im übrigen ist durch die zahlreichen Figuren alles wesentliche erklärt. Die photographische Aufnahme des Gesamt-Apparates mit den Schutz-Zelten, welche wir

Fig. 7.
Repsold-Comstock's Basismess-Apparat,
angewendet bei den Grundlinien von Chicago 1877, Sandusky 1878, Olney 1879.
(Massstab 1:16.)



Länge der Röhre = 4 m, Durchmesser der Röhre = 0,125 m.
Im Innern der Röhre befindet sich der aus Zink und Stahl bestehende Massstab, welcher an den Enden hervorragt, und durch isoliert aufgestellte Mikroskope abgelesen wird.

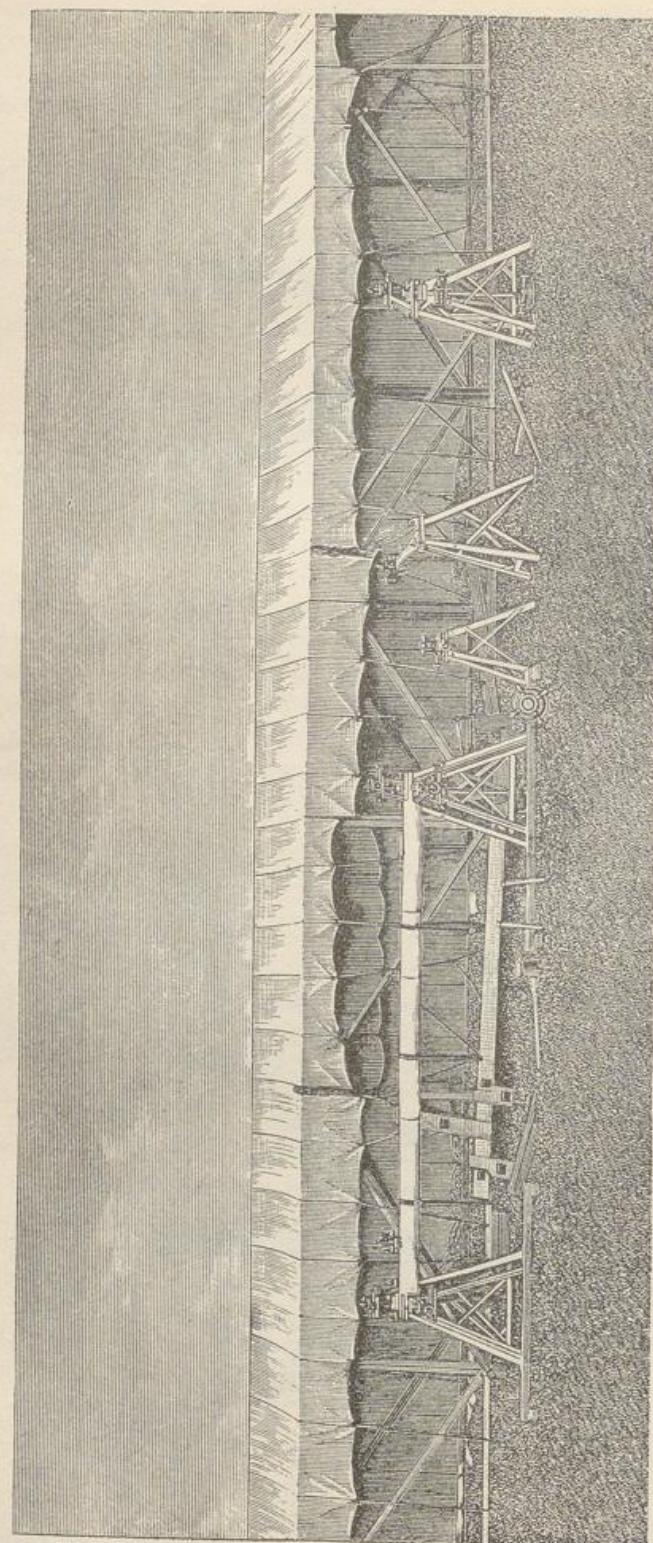


Fig. 8.
Repsold-Comstock's Basismess-Apparat, photographische Ansicht.

auf S. 92 nachgebildet haben, zeigt auch rechts die Mikroskope, welche von ihren Stativen übergeneigt, einen etwas unstabilen Eindruck machen.

Fig. 9.

(Massstab 1:4.)

Hinteres Ende der Messstange aus der Röhre hervorragend.
e e Platinplättchen.

Fig. 10.

Querschnitt der Röhre mit den

Stäben Z und S.

Röhren-Durchmesser = 12,5 cm.

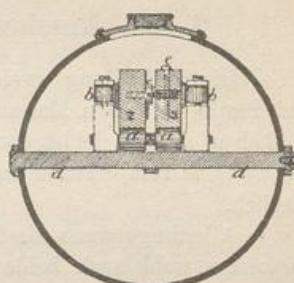
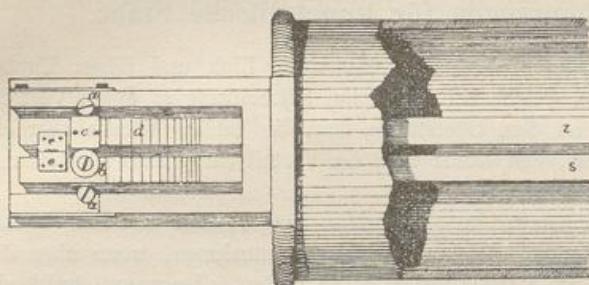


Fig. 11.

Stativ für die Röhre mit der
Messstange.
(Massstab 1:8.)

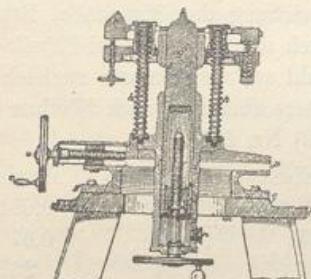
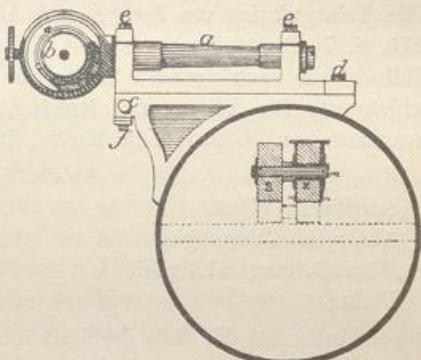


Fig. 12.

Querschnitt der Röhre und des
Richte-Fernrohrs b.
(Massstab 1:4.)

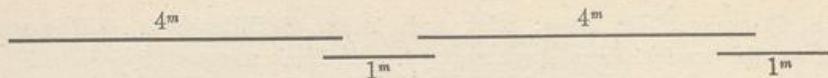


V. Der niederländisch-ostindische Basis-Apparat von Repsold.

Schon vor dem soeben beschriebenen amerikanischen Apparat (welcher 1876 hergestellt wurde), haben Repsold und Söhne einen auf ähnlichen Prinzipien beruhenden Apparat konstruiert, welcher teilweise nach Angaben von Oudemans schon von 1865, zur Triangulierung von Java, 1873, gedient hat.

Eine erste Beschreibung wurde im September 1876 von Repsold selbst gegeben in Nr. 1661 der „astr. Nachr.“ 70. Band, S. 65—80, die Hauptbeschreibung mit Zeichnungen ist enthalten in dem Werke: „Die Triangulation von Java, erste Abteilung, von Oudemans, Batavia 1875“.

Das Prinzip ist das bimetallische, ein Zinkstab und ein Stahlstab, 11,5^{mm} und 13,5^{mm} breit und beide 22^{mm} hoch, liegen neben einander und sind in eine Röhre eingeschlossen, aus welcher nur die Stab-Enden hervorragen, wie bei Repsold-Comstock Fig. 10. s. o. Im übrigen aber ist die Anordnung eine andere; es sind 4 Stäbe von 4^m und 1^m Länge vorhanden nach Andeutung folgenden Schemas:



Die kurzen 1^m langen Stäbe tragen an ihren Enden Mikroskope, welche auf die 4^m langen Stäbe hinüberreichen und so die Messung ermöglichen.

§ 14. Massbestimmungen für bimetallische Stäbe.

Die Verbindung zweier verschiedener Metalle, z. B. Zink und Eisen, Kupfer und Platin, zu einem Massstäbe, welche bei der ersten Betrachtung so grosse Vorteile zu haben scheint, leidet doch an dem Übelstande, dass die beiden Metalle sehr oft nicht gleiche Temperaturen haben, und damit wird der Vorteil der ganzen Einrichtung fraglich.

Allerdings wenn die Temperatur im allgemeinen längere Zeit *konstant* bleibt, so werden wohl auch beide Metalle gleiche Temperatur annehmen, wenn aber die Temperatur der umgebenden Luft sich ziemlich rasch ändert, oder wenn strahlende Wärme einwirkt, so werden zwei verschiedene Metallstangen, je nach ihrer Masse, ihrer spezifischen Wärme u. s. w., den äusseren Wärme-Einflüssen mehr oder weniger rasch folgen, und deswegen zu gleichen Zeiten verschiedene Temperaturen haben.

Eine hierauf bezügliche Rechnung hat Oudemans angestellt in dem Werke: „Die Triangulation von Java“, erste Abteilung Vergleichung der Massstäbe, Batavia 1875, S. 7—8. Oudemans nimmt nach dem „Lehrbuch der Experimental-Physik von Wüllner“ die nachfolgenden Zahlen für Zink und Stahl an, welchen wir zugleich die Zahlenwerte für Platin und Messing beifügen (letztere ebenfalls nach Wüllner angenommen von Fischer, astr. Nachr., 103. Band (1882) Nr. 2451):

		Zink	Stahl, Eisen	Platin	Messing
Spezifische Wärme	w	0,089	0,109	0,034	0,094
Absorptions-Vermögen	α	0,19	0,175	0,17	0,07
Wärmeleitungs-Fähigkeit	λ	363	374	84	231
Dichte	Δ	6,86	7,82	21,51	8,00

Ferner sei die freie der Luft ausgesetzte Oberfläche eines Stabes = F

Das Volumen eines Stabes = V

Damit ist die Wärmemenge, welche einem Stab von seiner freien Oberfläche ins Innere zugeführt wird, proportional dem Produkt:

$$F \alpha \lambda$$

Andererseits ist die Temperatur-Zunahme des Stabes umgekehrt proportional dem Produkt:

$$V \Delta w$$

Im Ganzen ist also die Temperatur-Zunahme eines Stabes proportional zu setzen der Grösse:

$$(Δt) = \frac{F}{V} \frac{\alpha \lambda}{\Delta w} \quad (1)$$

Der erste Quotient $F : V$ ist rein geometrischer Natur; jedenfalls wird die Länge beider in Frage kommender Stangen gleich sein, etwa = l; dann seien ferner die Breiten und Höhen beider Stangen = b und h, bzw. = b' und h'. Wenn die Stangen von allen Seiten der Luft (bzw. der Wärme-Einwirkung) ausgesetzt sind, so ist:

$$F = 2(b + h)l \quad V = bhl$$

$$\text{also: } (\Delta t) = \frac{2(b + h)}{bh} \frac{\alpha \lambda}{\Delta w}$$

Die Oudemanschen Stangen lagen scharf *nebeneinander*, hatten gleiche Höhen $h = 22\text{mm}$ und die Breiten $b = 13,5\text{mm}$ für Stahl und $b' = 11,5\text{mm}$ für Zink, es ist also zu setzen: $F = (2b + h)l$ oder $= (2b' + h)l$, folglich:

$$(\Delta t)_s = \frac{27 + 22}{13,5 \times 22} \frac{\alpha \lambda}{\Delta w}, \quad (\Delta t)_z = \frac{23 + 22}{11,5 \times 22} \frac{\alpha' \lambda'}{\Delta w'}$$

Die Ausrechnung giebt 12,7 und 20,1 oder das Verhältnis 0,63 : 1, d. h. die Stangen entsprechen nicht genügend den Wärme-Verhältnissen.

Auch bei Bessels Stangen (vgl. Fig. 2. S. 68) sind diese Verhältnisse nicht eingehalten, die Stangen liegen *aufeinander* und geben, wenn man die Tragstange als nicht vorhanden annimmt:

alles rund in Millimetern:

Eisen: $F = 55l$	$V = 189l$	Zink: $F' = 27l$	$V' = 91l$
$\alpha = 0,175$	$\lambda = 374$	$\alpha = 0,19$	$\lambda = 363$
$\Delta = 7,82$	$w = 0,11$	$\Delta = 6,86$	$w = 0,089$

Die Ausrechnung giebt hiefür nach der Formel (1):

$$(\Delta t)_s : (\Delta t)_z = 22 : 34$$

Hier ist die Zinkstange offenbar zu schwach, und das Verhältnis ist deswegen nicht richtig.

Dagegen berichtet Fischer für den Platin-Messing-Basismessstab des geodätischen Instituts, wobei beide Teile je 21 mm breit und 5 mm dick, durch einen Zwischenraum von 7 mm von einander getrennt sind, dass das thermische Verhältnis nach der Formel (1) sich = 1,00 : 1,08 ergab. („Astr. Nachr.“ 103. Band, 1882, Nr. 2451, S. 43.)

Zugleich teilt Fischer eine Bestimmung des Temperatur-Unterschiedes beider Stäbe durch Thermo-Elemente mit, welche am 25. Mai 1882 in dem Beobachtungsraum zu Steglitz bei Berlin eine mittlere Differenz von nur = 0,05° ergab, von 0,01° bis 0,12° anwachsend und bis 0,02° wieder abnehmend, mit Schlusswert 0,04°.

In Bezug auf die vorerwähnte thermische Theorie der Formel (1) besteht natürlich eine grosse Unsicherheit, wie auch Oudemans selbst hervorhebt. Trotzdem handelt es sich hier um Überlegungen, welche nicht zu umgehen sind.

Neue Massbestimmungen für den Besselschen Apparat, von General Schreiber.

Die Massbestimmungen, welche zuerst 1834 von Bessel mit den Zink- und Eisenstangen vorgenommen wurden, haben wir bereits in § 11 S. 74—76 beschrieben.

Vor der Braaker Basismessung (welche 1871 stattfand) wurde jedoch der Vergleichs-Apparat neu und besser eingerichtet, statt der früheren Holzgerüste in Königsberg wurden in dem Untergeschoss des Generalstabs-Gebäudes in Berlin Zementpfeiler aufgebaut, und die Keilmessung für die Konstanten-Bestimmung durch Mikroskop-Ablesung ersetzt. Zur Temperatur-Regulierung wurden Holzkästen mit Doppelwänden zur Aufnahme von Wasser konstruiert.

Dieses ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation, Haupt-Dreiecke, II. Teil, erste Abteilung“, Berlin 1873, S. 1—37 mit Tafel II. und III., und die Ergebnisse der Vergleichungen in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, VI. Teil“, Berlin 1894, S. 181—213.

Auch in anderer Hinsicht wurden die Vergleichungen gegen früher abgeändert, so dass nicht mehr blass *eine* der 4 Stangen, nämlich die erste l_1 , mit dem Normalmass verglichen wurde, sondern alle 4 Stangen l_1, l_2, l_3, l_4 jede für sich.

Dabei wurde zuerst die Formel zu Grunde gelegt nach (32) § 11 S. 77 (wobei wir jedoch wieder L statt L' schreiben):

$$l = L - (k - 1,4) m \quad (2)$$

Dabei ist l die Stangenlänge, k das innere Keilmass, m der relative Ausdehnungs-Coëfficient und L das Absolutglied, d. h. die Länge l , welche zu $k = 1,4$ gehört.

Als erste Verbesserung der Formel (2) wurde von General Schreiber ein quadratisches Glied hinzugefügt, und gesetzt:

$$l = L - (k - 1,4) m - (k - 1,4)^2 \varrho \quad (3)$$

Eine wichtigere Neuerung wurde ferner gemacht durch Zufügung eines Gliedes αh , welches die Temperatur-Änderung berücksichtigt. Um dieses begreiflich zu machen, erinnern wir zuerst an das, was schon vorher bei (1) S. 94 über die Wärme-Verhältnisse in bimetallicischen Stäben gesagt wurde. Die Eisen- und Zinkstangen folgen der allgemeinen Temperatur-Änderung nur langsam nach, und noch mehr: Die Eisenstange und die Zinkstange folgen den Temperatur-Änderungen nicht *gleich*, sondern die schwächere Zinkstange eilt bei dem Besselschen Apparat der Eisenstange immer voraus. Diese Erscheinung findet ihren Ausdruck in dem Glied αh der dritten Schreiberschen Formel:

$$l = L - (k - 1,4) m - (k - 1,4)^2 \varrho + \alpha h \quad (4)$$

Dabei bedeutet α die *einstündige* Änderung des Temperatur-Keilmasses k , und h ist ein durch Versuche bestimmter Coëfficient, in runder Zahl $h = 0,05$. Um die Wirkung des letzten Gliedes (Folge-Korrektion) beurteilen zu können, berechnen wir eine kleine Übersichts-Tabelle:

Zeit	Keilmasse		Temperaturen in R°	Folge-Korrektion $h \alpha = 0,05 \alpha$	}
	k	α			
0 ^h	1,30		18,13°		
1 ^h		+ 0,10	— 2,19°	+ 0,005 ^l = + 0,011 ^{mm}	
1 ^h	1,40		15,94		
1 ^h		+ 0,10	— 2,20°	+ 0,005 ^l = + 0,011 ^{mm}	
2 ^h	1,50	—	13,74		

Wenn also die Temperatur im allgemeinen um rund 2° in 1 Stunde abnimmt, so zeigt das Keilmass k die Stange um rund 0,01^{mm} zu klein, weshalb die Korrektion $\alpha h = + 0,01^{\text{mm}}$ zugesetzt werden muss. Nimmt die Temperatur im allgemeinen zu, so erscheint die Stange vermöge des Keilmasses k zu lang. Alles dieses lässt sich vollständig durch das schon erwähnte Voraneilen des Zinks (oder Zurückbleiben des Eisens) erklären, denn dieses gibt bei Temperatur-Zunahme eine Verkleinerung von k , also in $l = L - (k - 1,4) m$ eine Vergrösserung von l .

Endlich ist noch eine vierte Formel durch Zufügung eines quadratischen Folge-Gliedes gebildet worden:

$$l = L - (k - 1,4) m - (k - 1,4)^2 \varrho + \alpha h + \alpha^2 k \quad (6)$$

Durch diese neuen Formeln, namentlich (4), sind nicht bloss die auf dem Komparator gemachten Stangen-Vergleichungen in bessere Übereinstimmung gebracht, sondern auch die bei den Basismessungen selbst auftretenden Differenzen der metronomischen Rechnung zugänglich gemacht.

Trotzdem haben die Stangen-Vergleichungen noch erhebliche Schwankungen und Unsicherheiten gezeigt; während in den einzelnen Gruppen bessere Übereinstimmung war, zeigten die Gruppen-Mittel bis zu 0,01 Par. Linien = 0,026^{mm} gehende Abweichungen.

Diese Erscheinung, welche auch in anderen Fällen beobachtet ist, giebt die Warnung, dass mittlere Fehler, welche aus einzelnen Gruppen von Messungen im wesentlichen unter gleichen Umständen erlangt wurden, nicht ohne weiteres als reelle Genauigkeits-Masse anzusehen sind, und es scheint, dass die sehr kleinen mittleren Fehler der Besselschen Vergleichungen von 1834, welche wir auf S. 74 erwähnt haben, aus solchen Gründen zu klein ausgefallen sind.

General Schreiber hat die vorstehenden Angaben in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1882, S. 1—17 veröffentlicht, und dazu noch folgendes bemerkt: „Es ist nicht gelungen, die Ursachen der enormen Schwankungen (bei den verschiedenen Vergleichungen) dergestalt festzustellen, dass sie in Zukunft vermieden werden können. Man wird vielmehr Unsicherheiten bis zu etwa einer hundertel Linie oder 0,02 Millimeter, auch bei ferneren mit den Besselschen Messstangen auszuführenden Vergleichungen und Basismessungen gewärtigen müssen.“

Massvergleichungen für den Repsoldschen Stahl-Zink-Apparat von Comstock.

Ähnliche Verhältnisse wie General Schreiber mit den Besselschen Zink-Eisen-Stangen fand auch General Comstock in Washington mit Zink-Stahl-Stangen. Aus dem „Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey by Comstock etc. Washington 1882“, S. 223—230, entnehmen wir hierüber folgendes:

Die Zink-Stahl-Stange, deren mechanische Einrichtung wir schon in § 13. S. 90 bis 93 beschrieben haben, wurde in gleichen Umständen wie bei der Basismessung selbst, d. h. in einer Röhre eingeschlossen, im freien Felde, unter Zelt-Schutz, in folgender Weise besonders untersucht:

Eine Messing-Stange diente in einer Verpackung von schmelzendem Eis zur Vergleichung, indem diese durch Eis auf 0° erhaltene Stange und die Zink-Stahl-Stange in ihrer jeweiligen Temperatur, abwechselnd unter dasselbe Mikroskop-Paar zur Ablesung gebracht wurden. Dabei wurde an der Zink-Stahl-Stange die jeweilige Differenz $Z - S$ mikroskopisch *beobachtet*, außerdem konnte aber auch ein Wert $Z - S$ berechnet werden aus der gleichzeitigen Vergleichung mit der in Eis verpackten Messing-Stange und aus der früher vielfach und genau bestimmten Differenz $z - s$ der einzelnen Ausdehnungs-Coëfficienten für Zink und Stahl.

Die Differenzen zwischen berechneten $Z - S$ und beobachteten $Z - S$ zeigten einen regelmässigen Tagesverlauf, dessen Hauptwerte nachstehende Tabelle zeigt. Dabei ist gesetzt:

$$(Z - S) \text{ Rechnung} - (Z - S) \text{ Beobachtung} = \Delta$$

$$\frac{e}{z - e} \Delta = 0,6522 \Delta = \delta$$

Folgendes ist eine Reihe von Mittelwerten solcher Beobachtungen:
8 Tage zwischen 23. August und 3. September 1881 (Report S. 228—230)

Tageszeit	Temperatur	Δ	δ
Morgen	8 ^h 20,6° C	— 5,9 μ	— 3,8 μ
	10 22,8	— 2,4	— 1,6
Mittag	12 25,4	+ 4,7	+ 3,1
	2 26,6	+ 14,5	+ 9,4
	4 26,3	+ 14,6	+ 9,5
Abend	6 25,2	+ 6,5	+ 4,2
	8 23,9	— 1,6	— 1,0
	10 22,5	— 10,0	— 6,5
Nacht	12 21,4	— 16,7	— 10,9
	2 20,7	— 15,1	— 9,8
	4 20,3	— 12,1	— 7,9
Morgen	6 19,9	— 15,1	— 9,8

Die hier mit δ bezeichneten Werte entsprechen dem Schreiber schen Gliede $h\alpha$ (s. o. (4) und (6) S. 96), jedoch mit anderen Vorzeichen, was darin seinen Grund hat, dass die Massen-Verhältnisse von Zink und Eisen bei Repsold (Fig. 6. S. 90) ganz andere sind als bei Bessel (Fig. 2. S. 68). Auf Grund von solchen Versuchen wurden für die amerikanischen Basismessungen von Chicago kleine Korrekturen δ in Rechnung gebracht, in ähnlicher Weise wie durch αh und $\alpha^2 k$ in den Schreiber schen Formeln für die Göttinger und Meppener Messungen. (Formeln (4) und (6) S. 96 und 97).

Hiezu ist noch im Anschluss an S. 84 zu citieren Hammer: Von der neuen französischen Basismessung, „Zeitschr. f. Verm.“ 1892, S. 26—29.

§ 15. Verschiedene Projekte zur Basismessung.

Die Konstruktion von Basismess-Apparaten bietet dem Erfindungsgeist ein weites Feld, und obgleich nicht anzunehmen ist, dass wirklich leistungsfähige Apparate anders als im engsten Anschluss an die Berufs-Praxis entstehen werden, können wir doch einige solche Projekte betrachten.

Das Messrad.

Einen kühnen Gedanken hat in der Anfangszeit der „Europäischen Gradmessung“ 1868, Steinheil in München ausgesprochen, nämlich, mit einem Messrad gewöhnliche geradlinige Eisenbahn-Linien zu befahren, und dadurch Basismessungen in grosser Menge ohne viele Mühe oder Kosten zu erlangen. Nach Steinheils Vorschlägen wurden von Voit in München einige Versuche im kleinen angestellt, über welche Steinheil in den astr. Nachr. 72. Band (1868) Nr. 1728, S. 369—378 berichtet. Es wurde ein Doppelgeleise von 20^m Länge von gewöhnlichen Eisenbahn-Schienen wie bei der bayerischen Staatsbahn (mit Laschenverbindungen und kleinen Zwischenräumen zwischen je 2 Schienen) angelegt. Das Messrad war von Holz mit einem kupfernen Reif von 0,922^m Durchmesser, und wurde aus freier Hand geleitet; die Wiederholungen stimmten unter einander auf etwa 0,01%. Später wurde für das Rad ein Gestelle konstruiert, welches die Rad-Ebene genau in der Vertikal-Ebene der Schienen erhalten soll. Damit wurden 50 Befahrungen einer Strecke von 17,383^m (6 Radumfänge) gemacht, wobei sich der mittlere unregelmässige Fehler der einmaligen Befahrung = $\pm 0,30^{mm}$ ergab oder $\pm 2,3^{mm}$ für 1^m.

Der Basis-Mess-Wagen.

In dem Werke von Zachariae „Die geodätischen Hauptpunkte“, deutsch von Lamp, Berlin 1878, S. 94, wird folgendes Projekt von Bruhns in Leipzig berichtet:

In der Basislinie werden, mit Zwischenräumen von ungefähr 4^m, eiserne Pflöcke eingerammt, deren Oberfläche mit einem Punkt oder einem Kreuz versehen ist. Der Messapparat besteht aus einem 4^m langen Massstab und zwei an den Enden angebrachten vertikalen Mikroskopen, mit denen man die Massstabslänge auf die Pfahlköpfe übertragen kann. Dieser Apparat liegt auf einem Wagen, wird durch ein Dach und Seitenwände gegen Sonnenschein u. s. w. geschützt, und fährt somit in Absätzen von 4^m über die ganze Basis hin.

Messungen mit Metalldrähten (Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1885, S. 362—365).

In Stockholm hat Jäderin, 1885, Längenmessungen mit Stahlbändern und mit Drähten aus Stahl und Messing gemacht. Die Drähte werden über Stativen ausgestreckt, dabei durch Gewichte in konstanter Spannung gehalten. Die Längenbestimmung geschieht mittelbar durch Vergleichung der Drahtmessung mit einer anderweitigen Stangenmessung. Die Geschwindigkeit ist bedeutend, die grösste Leistung war 550^m in 1 Stunde und 2368^m in einem 9stündigen Arbeitstage.

Auf der Erdmessungs-Konferenz in Berlin 1895 wird berichtet, dass in Russland eine Basismessung mit dem ausserordentlich schnell messenden Jäderinschen Apparate stattgefunden hat.

Das Schätz-Mikroskop.

Während Nonien und Schrauben-Mikroskope längst zur Basismessung angewendet wurden, ist ein Hilfsmittel, welches in mehrfacher Hinsicht nach unserer Ansicht sich hier vortrefflich eignet, noch nicht benutzt worden, nämlich das Schätz-Mikroskop, das wir früher in Band II, 4. Aufl. 1893, S. 191—192 beschrieben haben.

Wir machen zunächst eine allgemeine Überlegung: Um einen mittleren unregelmässigen Messungsfehler von rund $\pm 1^{mm}$ auf 1 Kilometer, d. h. den thatsächlich bei guten Messungen vorkommenden Betrag zu erklären, braucht man keine sehr feinen optischen und mechanischen Hilfsmittel anzunehmen, denn bei der üblichen Stangenlänge von 4^m kommen 250 Lagen auf 1 Kilometer, und wenn μ der mittlere Fehler einer Lage ist, so hat man $\mu \sqrt{250} = 1^{mm}$, woraus folgt $\mu = 0,063^{mm}$; dieses ist ein Betrag, den man sogar durch Schätzung von freiem Auge an einer Millimeter-Teilung erzielen könnte, (etwa entsprechend einem Winkel von 2' an einer Kreisteilung von 100^{mm} Halbmesser).

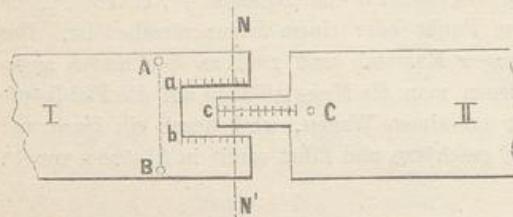
Da man aber natürlich die Genauigkeit im einzelnen weiter treibt, wurde man bald zu Nonien, Mikroskopen u. s. w. geführt. Ein weiteres Hilfsmittel zur Bestimmung des Zwischenraums oder des Übergreifens an der Grenze zweier Messstangen, das Schätz-Mikroskop, ist sehr bequem und hat die für solche Zwecke nötige Genauigkeit, giebt eine Ablesung auf einen Blick, was zur Zeitsparung bei Basismessungen sehr wichtig ist.

Die Anwendung eines Schätz-Mikroskops zur Messung des Anschlusses zwischen zwei aufeinander folgenden Stangen I und II ist in Fig. 1. (S. 100) angedeutet: Die Stange I endigt gabelförmig und umfasst mit zwei Teilungen *a* und *b* die Teilung *c*, welche sich auf einem zungenartigen Fortsatze der Stange II befindet. Ein Schätz-Mikroskop wird mit drei Fussspitzen auf die Punkte *A*, *B* und *C* gestellt, von denen

A und *B* fest sind (etwa konische Löcher), während *C* dem Spielraum des Anschlusses entsprechend veränderlich ist. Man kann vielleicht auch das Schätz-Mikroskop mit

einer Kipp-Axe *AB* aufstellen. Das Schätz-Mikroskop, welches somit auf den drei Punkten *A*, *B* und *C* aufsitzt, hat eine horizontale Axe in der Richtung I II und Kippbewegung in der Querrichtung *NN'*, so dass die 3 Teilungen *a*, *b* und *c* rasch nach einander abgelesen werden können.

Fig. 1



Trennung der Längenmessung von den Hilfs-Operationen.

Die Einrichtungen, welche zu einem Basis-Apparate gehören, und die Operationen mit denselben, sind wesentlich zweierlei Art, erstens solche, welche zur Temperatur-Ausdehnung und Intervall-Bestimmung, d. h. zur eigentlichen Längenmessung dienen, und zweitens die verschiedenen mechanischen Hilfsmittel für das Auflegen der Stangen, Geradrichtung und Neigungsmessung u. s. w.

Die eigentliche Längenmessung muss ihrer Natur nach eine *kontinuierliche* Operation sein, sogar mit einer nahezu gleichförmigen Geschwindigkeit, während das bei den Hilfs-Operationen nicht nötig ist. Wir glauben deshalb, dass die eigentliche Längenmessung, d. h. das Legen der Messstangen und das Bestimmen der Zwischenräume, oder Übergreifungen ihrer Enden, zeitlich und räumlich *getrennt* werden sollte von den vorbereitenden Hilfs-Verrichtungen der Gerad-Richtung, Neigungs-Bestimmung u. s. w.; das könnte z. B. dadurch geschehen, dass man stets etwa 1 Kilometer voraus die Basis durch eingerammte Pfähle (etwa von 4 zu 4 Meter) absteckt, geradrichtet und nivelliert. Die Pfähle wären zum Einrammen unten mit eisernen Schuhen und oben zum Auflegen der Messstangen mit scharfgeformten Metall-Kappen zu versehen, welche zum Geradrichten Spielraum und Richte-Schrauben haben.

Es mag hier auch nochmal daran erinnert werden, wie wir schon in § 9. S. 62 mitgeteilt haben, dass Benzenberg zu seinen Basismessungen eine Messungsbrücke von 1000 Fuss = 314 Meter Länge legte, so dass die Längenmessung stets auf genügende Länge von den Hilfs-Operationen unabhängig war.

Auch Schwerd liess bei seiner kleinen Speyerer Basis (Sp. B. S. 23) Pfähle, welche 0,58^m lang, 0,1^m dick und oben mit einem Brettchen zur Aufnahme der Stangen versehen waren, 0,3^m tief, den ganzen Vorrat der Messung voraus, in den Boden schlagen.

§ 16. Länge und Einteilung der Grundlinien.

Die Basis eines Dreiecksnetzes ist eine genau gemessene Seite des Netzes.

Will man beim Übergang von der Basis zu andern Dreiecksseiten spitze Winkel oder ähnliche Fehlerquellen vermeiden, so bleibt nichts übrig, als der Basis nahezu die Länge einer Haupt-Dreiecksseite zu geben, und deswegen finden wir bald nach dem ersten Aufschwung der Triangulierungen, das Bestreben, die Grundlinien so lang als möglich zu machen.

Allerdings der Begründer Snellius hatte nur ganz kleine Grundlinien von zuerst 328^m, 348^m, später etwa 2000^m, dagegen die französischen Messungen im 18. Jahrhundert hatten fast nie unter 10^{km} lange Grundlinien, nämlich:

1736 Gradmessung in Peru (La Condamine)	
Basis von Yarouqui	12 226 m
Basis von Tarqui	10 250 m
1736 Gradmessung in Lappland (Maupertuis)	
Basis von Tornea	14 436 m
1792 Gradmessung von Delambre und Méchain	
Basis von Melun	11 842 m
Basis von Perpignan	11 706 m
Auch in Deutschland mass man am Anfang dieses Jahrhunderts sehr lange Linien, z. B.:	
1801 Bayerische Basis München-Aufkirchen	21 654 m
1820 Württembergische Basis Solitude-Ludwigsburg	18 032 m
1819 Rheinbayerische Basis Speyer-Oggersheim	15 460 m

Die letztgenannte Basis war mittelbare Veranlassung zum Verlassen der langen Grundlinien:

Professor Schwerd am Lyceum in Speyer war mit der vor seinen Augen vorgenommenen amtlichen Messung von Steuerrat Lämmle nicht einverstanden, und behauptete, eine 20 mal kleinere Basis leiste denselben Dienst. Zum Beweis mass er mit seinen Lyceums-Schülern im Jahr 1820 eine kleine nur 860^m lange Grundlinie, und leitete die grosse Speyerer Linie mit guter Übereinstimmung daraus ab.

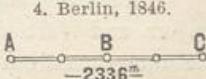
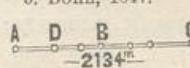
Schwerd veröffentlichte seine Arbeit in dem Werk: „Die kleine Speyerer Basis, oder Beweis, dass man mit einem geringen Aufwand an Zeit, Mühe und Kosten durch eine kleine genau gemessene Linie die Grundlage einer grossen Triangulation bestimmen kann. Speyer 1822.“ Netzausgleichung in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, § 65.)

Von da an kamen kurze Grundlinien ziemlich allgemein in Gebrauch, namentlich Bessel nahm zu seiner berühmten Gradmessung in Ostpreussen 1834 nur eine 1822^m lange Basis; doch ist das die untere Grenze, später ging man wieder weiter, und die neuesten deutschen Grundlinien sind 5—7 Kilometer lang.

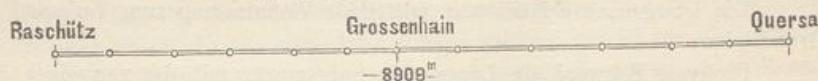
Die Längen und Einteilungen der 14 Grundlinien, welche mit dem Bessel'schen Apparate gemessen sind, sind im Folgenden übersichtlich zusammengestellt:

Längen und Einteilungen der 14 Grundlinien, welche bis jetzt mit dem Bessel'schen Apparate gemessen sind.

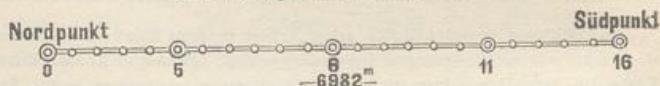
1. Basismessung bei Königsberg, 1834, von Bessel und Baeyer. 2 Strecken.

2. Basismessung bei Kopenhagen, 1838. 2701^m lang, im ganzen nur *einmal* gemessen, nur drei kleine Teilstrecken von zusammen 692^m Länge sind zweifach gemessen.
3. Basismessung bei Upsala in Schweden.
4. Basismessung bei Berlin, 1846, von Baeyer, 4 ungleiche Strecken.

5. Basismessung bei Bonn, 1847, von Baeyer, 6 ungleiche Strecken.


6. Basismessung bei Lommel in Belgien, 1852, 2301^m lang, 5 Strecken je zweifach gemessen.
 7. Basismessung bei Ostende, 1854, 2489^m lang, 4 Strecken 622^m, je zweifach gemessen. 8. Schlesien, 1854.
 8. Basismessung bei Strehlen in Schlesien, Krieschwitz 2 1 Hernsdorf
1854, von Baeyer, 3 ungleiche Strecken, — 2763^m
 9. Basismessung bei Braak 9. Braak in Holland, 1871.
in Holstein, 1871, von Nordpunkt I II III IV V VI Südpunkt
v. Morozowicz, trigono- — 5875^m
metrische Abteilung der preussischen Landes-Aufnahme, 7 ungleiche Strecken.
 10. Basismessung bei Grossenhain im Königreich Sachsen, 1872, von Nagel und Bruhns. Sächsische Triangulierung, 12 Strecken.
 10. Grossenhain in Sachsen, 1872.



11. Basismessung bei Oberhergheim im Elsass, 1877, von v. Morozowicz, trig. Abteilung der preuss. Landes-Aufnahme; in der Gegend der früheren französischen Basis von Ensisheim, 22 Strecken: 376^m + 20mal 312^m + 364^m = 6980^m.
 12. Oberhergheim im Elsass, 1877.



12. Basismessung bei Göttingen, 1880, von Schreiber, trig. Abt. der preuss. Landes-Aufnahme, 33 Strecken von je 156^m.
 12. Göttingen, 1880.
 13. Basismessung von Meppen, 1883, von Westpunkt 45 Strecken Ostpunkt Schreiber, trig. Ab- — 5192^m
teilung der preuss. — 7033^m
Landes-Aufnahme, 45 Strecken von je 156^m.
 13. Meppen, 1883.

14. Basismessung bei Bonn 1892, 2513 Meter eingeteilt in 15 Strecken, 4mal von der Landes-Aufnahme mit dem Besselschen Apparat und 2mal vom Geodätischen Institut mit dem Brunnerschen Apparate gemessen.
 Die vorstehende Zusammenstellung bezieht sich (mit unwesentlichen Ausnahmen) auf Doppel-Messungen, d. h. jede Strecke wurde hin und her gemessen.

Auch die älteren französischen Basismessungen des 17. und 18. Jahrhunderts sind meist doppelt gemacht, eine derselben, die Nachmessung der Picardschen Basis von Juvisy durch Cassini sogar 5mal. Dagegen die französischen Messungen mit den Bordaschen Platin-Kupfer-Stangen von 1798—1828 sind nur *einmal* gemessen.

Auch die langen süddeutschen Grundlinien am Anfang dieses Jahrhunderts in Bayern und Württemberg sind unbegreiflicherweise nur *einmal* gemessen, so dass über die unregelmässigen Messungsfehler jeder Nachweis fehlt.

Die Schwerdsche und alle nachfolgenden Grundlinien sind wieder in der Regel doppelt gemessen; als Ausnahme ist zu erwähnen, dass die badische Basis von Heitersheim, 2125^m lang, im Jahr 1846 sogar 8mal gemessen wurde.

Wie man aus Doppelmessungen oder allgemeiner aus Messungs-Wiederholungen im ganzen oder in Strecken den mittleren unregelmässigen Messungsfehler bestimmen kann, werden wir später in § 23 behandeln.

Gesamt-Übersicht der Basismessungen.

Eine Zusammenstellung aller zu der internationalen Erdmessung angemeldeten Basismessungen ist von Perrier gemacht worden. Dieselbe findet sich veröffentlicht in den Generalberichten der internationalen Erdmessung und zwar für 1877, S. 40 bis 55; für 1880, Annexe VI; für 1883, Annexe III; für 1887, Beilage IV,

Wir haben hieraus folgenden Auszug gebildet, wo n die Anzahl der Grundlinien, und $[B]$ deren Gesamtlänge für das einzelne Land, also $\frac{[B]}{n}$ die mittlere Länge einer Grundlinie ist.

Num.	Land	Anzahl n	Summe [B]	Mittel $\frac{[B]}{n}$
1.	Bayern	3	51,0 km	17,0 km
2.	Belgien	2	4,8	2,4
3.	Dänemark	1	2,7	2,7
4.	Frankreich mit Algerien	10	117,1	11,7
5.	Italien	9	42,8	4,7
6.	Holland	1	6,0	6,0
7.	Hessen-Darmstadt	1	7,7	7,7
8.	Schweden und Norwegen	7	27,1	3,9
9.	Österreich-Ungarn	19	80,5	4,2
10.	Preussen	11	45,1	4,1
11.	Portugal	1	10,5	10,5
12.	Russland	19	113,3	6,0
13.	Spanien	9	32,8	3,6
14.	Schweiz	6	27,0	4,5
15.	Nord-Amerika	5	49,0	9,8
Summe		104	617,4	
Gesamt-Mittel			$\frac{617,4}{104} = 5,9 \text{ km}$	

Diese Tabelle ist nicht vollständig; es fehlen von den deutschen Linien die Württembergische und die Badische, namentlich aber fehlen die Britischen Messungen in England selbst und in den Kolonien. Andererseits sind zwei preussische Linien (Strehlen und Berlin) infolge von Nachmessung doppelt aufgeführt.

In England sind nach S. 422 des Werkes: „Ordnance trigonometrical survey u. s. w.“ von 1791—1849, 7 Grundlinien von zusammen 219 579 engl. Fuss oder rund 66,9 km Länge gemessen worden (Mittel = 9,6 km); fügt man dieses zu der vorstehenden Zusammenstellung, und rechnet für die britischen Kolonien noch einen runden Betrag, so kann man die gesamten Basislängen der Erde zu rund 700 Kilometer schätzen, oder 70% des Erdquadranten.

Wir entnehmen aus dieser Statistik, dass die mittlere Länge einer Grundlinie rund = 6 Kilometer ist.

Neuere Berichte über Basismessung geben die Verhandlungen der internationalen Erdmessung z. B. Verhandlungen über die Versammlung 1892 in Brüssel, 1893, Annexe A. II^t S. 157—164. Wir haben diese neueren Berichte zunächst nicht mehr nachgetragen, weil als summarische Übersicht unsere vorstehende Tabelle genügt.

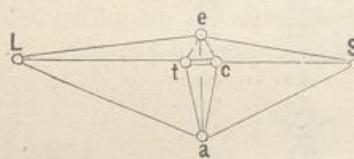
§ 17. Basisnetze.

Die Basis einer Triangulierung ist meist erheblich *kleiner* als die Dreiecksseiten im allgemeinen, und es entsteht daher die Aufgabe, eine grosse Seite aus einer kleinen trigonometrisch abzuleiten. Ungünstige Dreiecks-Verbindungen sind hier nicht zu vermeiden; denn entweder macht man den Übergang von der kleinen Basis zu einer grossen Hauptdreiecksseite durch wenige Dreiecke, und man muss dabei spitze Schnitte anwenden; oder man nimmt eine grosse Zahl von Dreiecken, man hat dann aber eine grosse Zahl von Fehlerquellen.

Wir werden nun zuerst mehrere Basisnetze bekannter Triangulierungen betrachten, und sehen, wie zu verschiedenen Zeiten verschiedene Landmesser sich bemüht haben, teils durch zweckmässige Anordnung der Dreiecke, teils durch lange Grundlinien selbst, die in der Natur der Sache liegenden Schwierigkeiten zu überwinden.

1) Das Basisnetz von Snellius (Fig. 1.)

Fig. 1. Snellius, 1615.
Massstab 1 : 100 000.
 $t c = 328 \text{ m}$, $L S = 4114 \text{ m}$.



Basis $t c$ wurde mit hölzernen Messlatten, und die Winkel mit einem geteilten Quadranten von 2,2 rhein. Fuss ohne Fernrohr auf etwa $1'$ gemessen.

In Fig. 1. sind L und S die Türme von Leiden und dem südlich von Leiden gelegenen Dorfe Soeterwoute, die wirklich gemessene Grundlinie ist nur $t c = 87,05$ rheinl. Ruten = $327,85^{\text{m}}$ lang, daran schliessen sich zwei hochgestellte Dreiecke $t c e$ und $t c a$, und an die abgeleitete Linie $e a = 1229^{\text{m}}$ schliessen sich wieder zwei hochgestellte Dreiecke $e a L$ und $e a S$, woraus $L S = 4114^{\text{m}}$ berechnet wird.

Für jedes der vier eigentlichen Messungs-Dreiecke teilt Snellius nur je *zwei* Winkel als gemessen mit, und zwar jeweils die Winkel an der Basis, was nach der ganzen Art seiner Darstellung in solchen Fällen, in welchen er die Probestimmungen nicht mitteilen will, nicht ausschliesst, dass auch die dritten Winkel gemessen und ausgeglichen wurden. Ob Snellius das Hauptgesetz, dass die *spitzen* Winkel (z. B. der Winkel a in dem Dreieck $t a c$) wesentlich die Genauigkeit bestimmen, gekannt hat, ist daraus nicht zu ersehen.

2) Basisnetze von Schwerd, 1820.

Der Vater der neueren Basisnetz-Theorie ist Professor Schwerd in Speyer (vgl. S. 100 und 101). Dieser hat im Jahre 1820 das richtige getroffen; er fand nämlich durch theoretische Betrachtungen und Vergleichungen:

erstens, dass das rhombische *Netz A B N D* Fig. 2 a. (S. 105) das günstigste ist (was schon Snellius hatte) und

zweitens, dass die *spitzen* Winkel bei N und D , welche der Basis gegenüber liegen, hauptsächlich bestimmend für die Genauigkeit sind, und deswegen mit besonderer Schärfe gemessen werden müssen.

Die eigentlichen kleinen Basisnetze, welche Schwerd gemessen und berechnet hat, sind in den folgenden Figuren dargestellt. Schwerd hat ausser seinem „Hauptnetz“ Fig. 2 a. noch zwei „Prüfungsnetze“ Fig. 2 b und Fig. 2 c. angewendet. Die eigentliche Basis $A B$ selbst ist nur 860^m lang. Die Entfernung $H D$ leitete Schwerd hieraus dreifach trigonometrisch ab mit den Ergebnissen 4959,084^m, 4959,068^m, 4959,098^m.

Fig. 2.

Basisnetze von Schwerd, 1820.

Massstab 1 : 100 000, $A B = 860\text{ m}$, $H D = 4959\text{ m}$.

Fig. 2 a.

Hauptnetz.

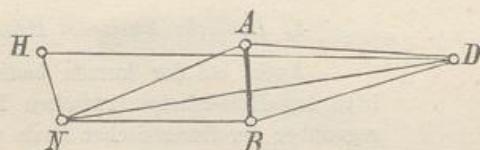
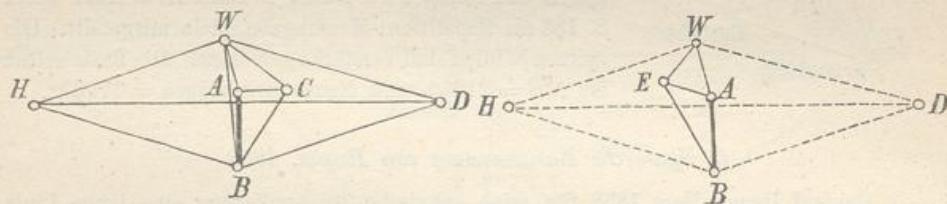


Fig. 2 b. Erstes Prüfungsnetz.

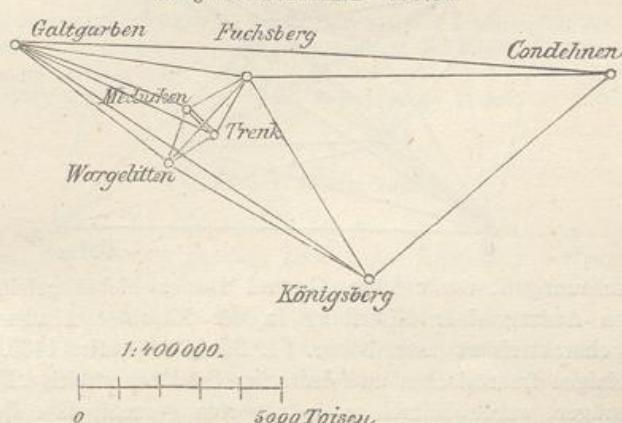
Fig. 2 c. Zweites Prüfungsnetz.



Die weitere Verbindung der Linie $H D$ mit der amtlichen bayerischen Basis Speyer-Oggersheim haben wir schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 208 behandelt, wobei mit D_{Sp} der Punkt Dom in Speyer bezeichnet ist, welcher abgesehen von einer Excentricität auf dem Turme, dem Punkte D in Fig. 2 a., 2 b. und 2 c. entspricht.

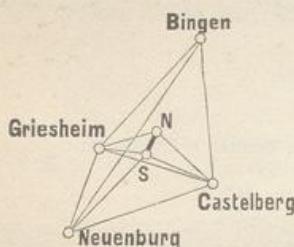
3) Basisnetz der Gradmessung in Ostpreussen, 1834.

Fig. 3. Massstab 1 : 400 000.
Basis Trenk-Mednicken = 1822 m
Galtgarben-Condehnien = 29 563 m



Die vorerwähnten Überlegungen von Schwerd haben auch auf die Anordnung der Besselschen Basismessung bei Königsberg Einfluss gehabt; Bessel erwähnt auf S. 38 der Gradmessung in Ostpreussen das „sehr lesenswerte Buch von Schwerd“, und machte seine Königsberger Grundlinie nur 1822^m lang, wie aus vorstehender Zeichnung (Fig. 3. S. 105) zu ersehen ist. Die zwei Rhomben Wargelitten-Fuchsberg und Galtgarben-Königsberg entsprechen dem Schwerdschen Gedanken, allein die Verstärkung der Messungs-Genauigkeit in den spitzen Winkeln hat Bessel, wie es scheint im Vertrauen auf die Gesamt-Ausgleichung, nicht durchgeführt (vgl. hiezu auch unsern I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 499—500).

Fig. 4.
Massstab 1 : 600 000.



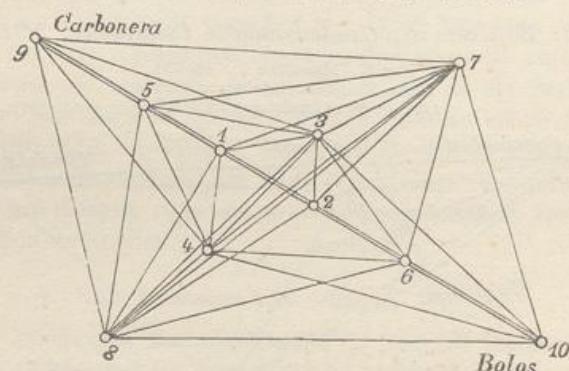
4) Badische Basis bei Heitersheim, 1846.

Auch bei der kurzen badischen Basis, welche 1846 bei Heitersheim (zwischen Freiburg und Basel) gegenüber der französischen Basis von Ensisheim (Oberhergheim) von Klose und Rheiner gemessen wurde, zeigt sich Schwerds Grundgedanke. Die Winkelmessungen hiezu haben wir früher in Band II, 3. Aufl. 1888, S. 183 als Repetitions-Messungsbeispiele mitgeteilt. Die spitzen Winkel sind verstärkt gemessen. Die Basis selbst ist $NS = 2125^m$, und Neuenburg-Bingen = 17027^m.

5) Spanische Basismessung von Ibanez, 1858.

General Ibanez liess 1858 für seine spanische Triangulierung eine lange Linie messen, bei Madridejos (etwa 100 Kilometer südlich von Madrid). Die Gesamtlänge von 14 663^m wurde in 5 Teile geteilt, welche alle unter sich trigonometrisch verbunden wurden.

Fig. 5.
Massstab 1 : 200 000, Carbonera—Bolos = 14 663 m.



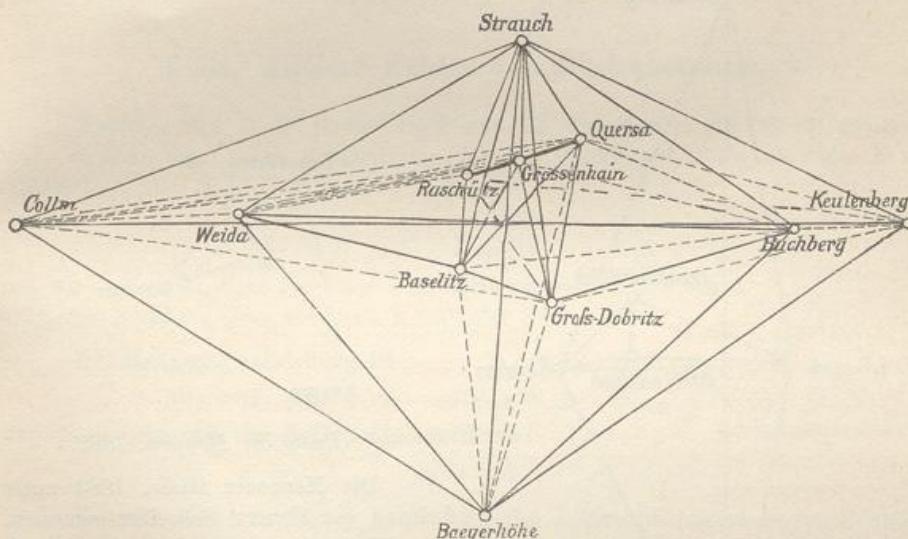
Die Anschauungen, von welchen General Ibanez hiebei geleitet wurde, sind durch folgenden Auszug einer Mitteilung in der Madrider Akademie-Sitzung vom 30. Nov. 1863 charakterisiert (astr. Nachr. 61. Band, 1864, Nr. 1462, S. 339—346): Die zwischen einigen französischen und deutschen Geodäten streitige Frage, ob kleine Grundlinien genügen, wurde dadurch zu beantworten gesucht, dass die lange Grundlinie in 5 Teile geteilt wurde, welche unter sich durch ein Netz von 10 Punkten mit

120 Dreiecken und 45 Verbindungs-Linien trigonometrisch verbunden wurden. Die trigonometrische Rechnung, welche sich auf das Mittelstück stützte, gab für die vier äusseren Stücke Werte, welche von den unmittelbar gemessenen Längen nur sehr wenig, d. h. um 2—3^{mm} Abweichung zeigten.

Weiteres über diese spanische Vermessung giebt der General-Bericht der „Europ. Gradmessung für 1869, S. 62—65 und für 1876, S. 125—128“, sowie das grosse Werk: „Memorias del instituto geografico y estadistico“, ferner (nach einem Citat des Gen.-Ber. für 1869, S. 63): „Base centrale de la triangulation géodésique de l'Espagne par les Colonels Ibanez et Saavedra, 1865.“

6) Sächsische Basis bei Grossenhain, 1872.

Fig. 6.

Massstab 1 : 600 000. Basis Raschütz-Quersa = 8909^m.

Im Königreiche Sachsen wurde im Jahre 1872 eine lange Grundlinie mit dem Besselschen Apparat unter Leitung von Nagel und Bruhns gemessen, deren Basisnetz in Fig. 6. gezeichnet ist.

Näheres hierüber giebt das amtliche Werk: „Astr. geodät. Arbeiten für die Europ. Gradm. im Königreich Sachsen, I. Abteil. die Grossenhainer Grundlinie, von Bruhns und Nagel, Berlin 1882“, und Auszug hieraus im „Civilingenieur XXVIII, 1882, Heft 1“; und Bericht von Helmert in der „Zeitschr. f. Verm. 1883“, S. 596—604. Aus diesem Helmertschen Bericht ist auch unsere Fig. 6. entlehnt.

7) Göttinger Basis, 1880.

Die Göttinger Basis ist die zwölfe der mit dem Besselschen Apparat gemessenen Grundlinien; die Messung geschah 1880 unter Leitung von General Schreiber, welcher den Mess-Apparat und dessen Anwendung zu diesem Zwecke verbessert hatte, und auch in der trigonometrischen Anlage des Basisnetzes von früherem abwich.

Das Göttinger Basisnetz Fig. 7. (S. 108) zeichnet sich durch klassische Einfachheit aus, es entspricht dem von General Schreiber dabei ausgesprochenen Grundsätze, „dass die Güte der Messungen nicht in einer systemlosen Häufung von Kontrollen, sondern in einer scharfen Messung solcher Elemente zu suchen ist, welche die Ge-

nauigkeit der Schluss-Ergebnisse in erster Linie bestimmen“ („Zeitschr. f. Verm. 1880“, S. 397). In diesem Sinne wurde das Göttinger Basisnetz Veranlassung für General Schreiber, die Anordnung der Winkel-Beobachtungen nach dem Grundsatz günstiger Gewichts-Verteilung allgemeiner zu untersuchen (s. Schreiber: Die Anordnung der Winkel-Beobachtungen im Göttinger Basisnetz, „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 129—161). Auch gehört hiezu der Schreibersche Satz über günstigste Gewichtsverteilung, den wir bereits in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 138—144 behandelt haben.

Fig. 7.
Massstab 1:670 000.
Basis $NS = m$, Ahlsburg-Meissner = 57 507 m.

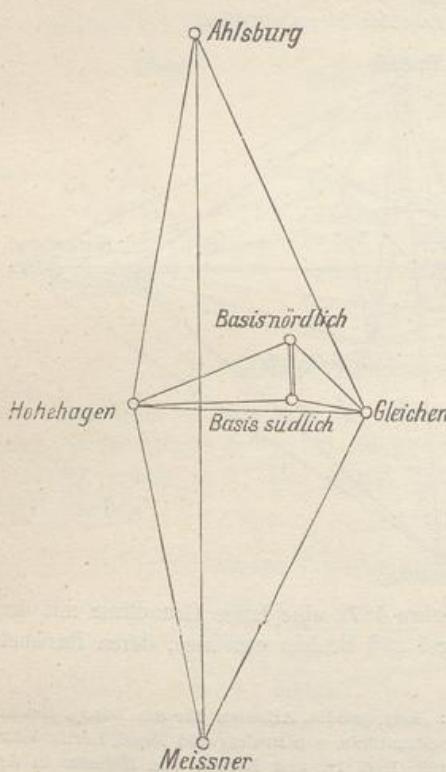
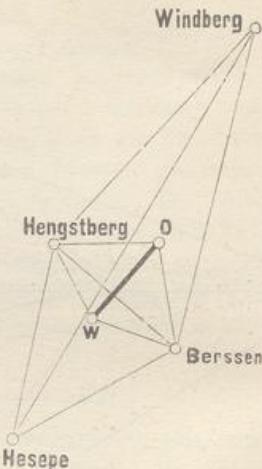


Fig. 8.
Massstab 1:600 000.



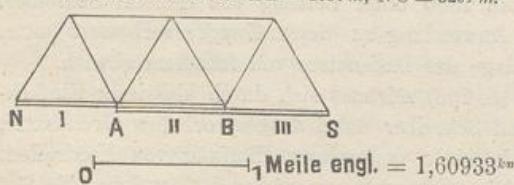
8) Basis bei Meppen, 1883.

Die Meppener Basis, 1883 unter Leitung von General Schreiber gemessen, entspricht ihrer Vorgängerin von Göttingen. Das Basisnetz besteht nur aus 4 Übertragungs-Dreiecken.

Amtliches ist hierüber noch nicht veröffentlicht, eine vorläufige Mitteilung giebt die „Zeitschr. f. Verm.“ 1883, S. 577 bis 584. In Fig. 8. ist die Basis $WO = 7039^m$ und Hesepe-Windberg = 34561^m .

9) Basis am Kap der guten Hoffnung, 1886.

Fig. 9.
Massstab 1:86 000. $AB = 1097 m$, $NS = 3291 m$.



Das in Fig. 9. dargestellte Basisnetz hat eine von allen unseren vorhergehenden Fig. 1—8. abweichende Form. Die 3 Abschnitte sind für sich gemessen und durch ein Gitternetz von 5 Dreiecken unter sich trigonometrisch verbunden. Denkt man sich das Mittelstück

A B allein gemessen, so lässt sich die Gesamtlänge NS trigonometrisch berechnen und zwar stimmte dieses im vorliegenden Falle auf $+0,0002 - 0,0027 = -0,0025$ engl. Fuss $= 0,8^{mm}$.

Die Frage der theoretischen Fehler-Fortpflanzung in einem solchen Netze werden wir später besonders behandeln (§ 19); wir werden finden, dass das Gitternetz Fig. 9. theoretisch ungünstiger ist als das Rhombennetz, allein das Gitternetz mit nur *kurzen* Seiten hat praktische Vorteile. (Unsere Fig. 9. S. 108 ist aus einem Berichte in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1887“, S. 59 entnommen.)

Noch einige weitere Beispiele von Basisnetzen, mit Genauigkeitstheorien, enthält die Veröffentlichung des geodätischen Instituts: „Die Europäische Längengradmessung in 52° Breite, von Greenwich bis Warschau, I. Heft Hauptdreiecke und Grundlinienschlüsse von F. R. Helmert, Berlin 1893.“ S. 231—252, mit Tafel II, 10 Basisnetze in 1 : 50 000.

§ 18. Mittlere Fehler von Dreiecksseiten.

Wenn in Fig. 1. die Grundlinie b und die drei Winkel (1), (2), (3) gemessen sind, so kann man, nach Ausgleichung der drei Winkel auf 180° , die Seite B berechnen:

$$B = b \frac{\sin(2)}{\sin(1)} \quad (1)$$

und wir wollen für diese Funktion den mittleren Fehler bestimmen unter der Annahme, dass die Basis b fehlerfrei sei.

Die Bedingungs-Gleichung ist:

$$+ (1) + (2) + (3) - 180^{\circ} = 0$$

also die Coefficienten der Bedingungs-Gleichung:

$$a_1 = +1 \quad a_2 = +1 \quad a_3 = +1 \quad (2)$$

Versteht man unter f_1, f_2, f_3 die partiellen Differentialquotienten der Funktion B nach Gleichung (1), so hat man (nach Band I. 4. Aufl. 1895, §. 42.):

$$f_1 = \frac{\partial B}{\partial (1)} = - \frac{b \sin(2)}{\sin^2(1)} \cos(1) = - \frac{b \sin(2)}{\sin(1)} \cotg(1) = -B \cotg(1)$$

Wir wollen zur Abkürzung schreiben:

$$\cotg(1) = c_1 \quad \cotg(2) = c_2 \quad \cotg(3) = c_3 \quad (3)$$

Dann wird:

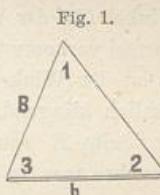
$$f_1 = -B c_1 \quad f_2 = +B c_2 \quad f_3 = 0 \quad (4)$$

Die Gewichte der drei gemessenen Winkel seien:

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad (5)$$

Dann ist das Gewicht P der Dreiecksseite B nach der Ausgleichung, indem hier die Basis b als fehlerfrei betrachtet wird, zunächst in allgemeiner Formel gegeben (nach Band I. 4. Aufl. 1895, S. 125.):

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{ff}{p} \right] - \left[\frac{\frac{af}{p}}{\frac{aa}{p}} \right]^2 \quad (6)$$



Die Einsetzung der einzelnen Teile aus (2), (4) und (5) giebt:

$$\frac{1}{P} = B^2 \left(\frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2} \right) - \left[\frac{1}{p} \right] \left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} \right)^2 \quad (7)$$

Dieses kann auch auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{1}{P} = B^2 \frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad (8)$$

Setzt man den mittleren Gewichtseinheits-Fehler $= \pm \mu$, so hat man auch den mittleren Fehler der Seite B , den wir mit $m(B)$ bezeichnen wollen:

$$m(B) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{1}{P}} = \frac{\mu}{\varrho} B \sqrt{\frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \quad (9) ^*)$$

Wir wollen auch noch den mittleren Fehler der Längen-Einheit von B einführen, und hiefür das Zeichen $\mu(B)$ setzen, also:

$$\frac{m(B)}{B} = \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{p_1 c_2^2 + p_2 c_1^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \quad (10) ^*)$$

Nach diesen verschiedenen Formen kann die Genauigkeit der trigonometrischen Übertragung von b auf B beurteilt werden.

Aus der Formel (7) ist zu ersehen, dass mit $c_1 = c_2$, oder mit Winkel (1) = Winkel (2), der zweite Teil ganz fortfällt, und dass dann p_3 gar nicht mehr in der Formel vorkommt; wenn also das Dreieck mit (1) = (2) gleichschenklig ist, also $B = b$, so ist der Winkel (3) bei der Messung *gleichgültig*. Dieses Ergebnis ist zuerst eigentlich klingend, aber bei näherer Betrachtung ganz sachgemäss, denn wenn man nur die Seite B von Fig. 1. (S. 109) bestimmen wollte und B nahezu $= b$ ist, dann brauchte man in der That den Winkel (3) gar nicht oder nur oberflächlich zu messen; da man aber gewöhnlich auch die *andere* Seite, welche (3) gegenüber liegt, haben will, so darf auch der Winkel (3) nicht vernachlässigt werden.

Wenn das Dreieck bei (3) rechtwinklig ist, so wird $c_3 = 0$, B ist dann Kathete, deren mittlerer Fehler nach (10) zu berechnen ist, wobei nun $c_2 = 1 : c_1$ ist.

Gleiche Gewichte.

Aus (8) oder (10) wollen wir auch noch den besonderen Fall herleiten, dass alle Gewichte einander *gleich*, also $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ gesetzt werden; dann wird:

$$\mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} (c_1^2 + c_2^2 + c_1 c_2)} \quad (11)$$

und für das gleichseitige Dreieck mit $c_1 = c_2 = c_3 = \cotg 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ giebt dieses:

$$\mu(B) = \sqrt{2} \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \text{ oder } = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,000\,003\,96 \mu \quad (12)$$

^{*)} Es soll für diese und die folgenden Betrachtungen das Zeichen m wie ein Funktionszeichen gebraucht werden, allgemein $m(x) = \text{mittlerer Fehler von } x$, und $\mu(x)$ soll einen mittleren sogenannten *relativen* Fehler bedeuten, nämlich $\mu(x) = \frac{m(x)}{x}$, während μ an und für sich den mittleren Gewichtseinheits-Fehler, d. h. den mittleren Winkelfehler in Sekunden bezeichnet.

Nimmt man $\mu = 1''$, so hat man rund $\mu(B) = 0,000\,004$, oder der Übertragungs-Fehler beträgt in diesem Falle 4 Milliontel der Länge, oder 4 Millimeter auf 1 Kilometer.

Sehr ungleiche Gewichte.

Wir betrachten den Fall, dass man die Gewichte p_1 oder p_2 verstärkt oder vermindert, je nachdem die zugehörigen Winkel (1) und (2) mehr oder weniger spitz werden. Namentlich ein spitzer Winkel (1) gegenüber der Basis b in Fig. 1. (S. 109) wirkt bekanntlich sehr schädlich, und das zeigt sich in den Formeln dadurch, dass $\cot g(1) = c_1$ sehr gross wird, wenn (1) klein ist. Nun zeigt aber die Formel (7), dass man dem grossen Werte c_1 dadurch entgegen wirken kann, dass man auch das Gewicht p_1 gross macht, d. h. den Winkel (1) verstärkt misst. Ebenso ist es mit c_2 und p_2 .

Wir haben damit bereits den Hauptsatz über Gewichts-Verteilung, dass man einen spitzen Winkel, der einer Basis gegenüber liegt, besonders genau messen soll.

Wir wollen auch noch den Fall vornehmen, dass abwechselnd je einer der drei Winkel des Dreiecks gar nicht gemessen sei, d. h. das Gewicht = Null habe, während die beiden anderen Winkel mit dem Gewichte = 1 gemessen sind. Dann hat man aus (10):

$$\begin{aligned} \left(\mu(B_{12})\right)^2 &= \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 (c_2^2 + c_1^2) \text{ mit } p_3 = 0 \\ \left(\mu(B_{13})\right)^2 &= \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 (c_2^2 + (c_1 + c_2)^2) \text{ mit } p_2 = 0 \\ \left(\mu(B_{23})\right)^2 &= \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 (c_1^2 + (c_1 + c_2)^2) \text{ mit } p_1 = 0 \end{aligned}$$

Dazu wenn alle drei Winkel gleich gemessen sind:

$$\left(\mu(B_{123})\right)^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \frac{(c_2^2 + c_1^2 + (c_1 + c_2)^2)}{3}$$

Diese 4 Formeln geben die Beziehung:

$$\left(\mu(B_{123})\right)^2 = \frac{1}{6} \left[\left(\mu(B_{12})\right)^2 + \left(\mu(B_{13})\right)^2 + \left(\mu(B_{23})\right)^2 \right]$$

Ähnliche Beziehungen gelten auch für die mittleren Koordinatenfehler und für die mittleren Punktfehler, wie in unserem I. Band, 3. Aufl. 1888, § 110–113 gezeigt wurde.

Kette von Dreiecken.

In der Dreieckskette Fig. 2. ist b die Basis; daraus wird zuerst durch das erste Dreieck B_1 abgeleitet, dann B_2 durch das zweite Dreieck u. s. w., wir wollen annehmen bis B_n durch ein n^{tes} Dreieck. Jedenfalls entsteht jede Seite B aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Sinusfunktion, welche immer die Form hat wie in der Gleichung (11). Wenn die letzte Seite B_n ist, so bekommt man durch wiederholte Anwendung der Gleichung (11):

$$\mu(B_n) = \frac{m(B_n)}{B_n} = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} \left([c_1^2] + [c_2^2] + [c_1 c_2] \right)} \quad (13)$$

wobei

$$[c_1^2] = \cot g^2(1)_1 + \cot g^2(1)_2 + \dots + \cot g^2(1)_n \text{ u. s. w.}$$

Die Messungsgewichte der Dreieckswinkel sind dabei alle = 1 angenommen.

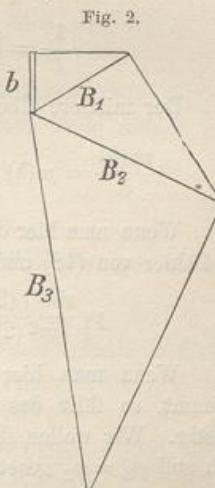


Fig. 2.

Wenn alle Dreiecke, um die es sich handelt, einander ähnlich sind, so wird (13):

$$\mu(B_n) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2n}{3} (c_1^2 + c_2^2 + c_1 c_2)} \quad (14)$$

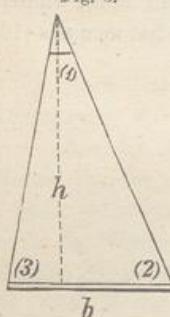
und nimmt man alle Dreiecke gleichseitig, also $c_1 = c_2 = c_3 = \cotg 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so wird (14):

$$\frac{m(B_n)}{B_n} = \mu(B_n) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} n} = 0,000\,004 \mu \sqrt{n} \quad (15)$$

Dieses ist der relative mittlere Seitenfehler der letzten Seite einer Kette von n gleichseitigen Dreiecken; μ ist der mittlere Winkelfehler.

Höhe eines Dreiecks.

Fig. 3.



Wir bestimmen den mittleren Fehler der Höhe h eines Dreiecks nach Fig. 3. mit der Funktion:

$$h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3) \quad (16)$$

Diese Funktion wird ebenso behandelt wie früher (1) S. 109. Die verschiedenen Coefficienten sind, mit der Abkürzung $\cotg(1) = c_1$ u. s. w.:

$$\begin{array}{lll} a_1 = +1 & a_2 = +1 & a_3 = +1 \\ f_1 = -c_1 h & f_2 = +c_2 h & f_3 = +c_3 h \end{array}$$

Die Formel (6) § 18. S. 109 gibt damit:

$$\frac{1}{P} = h^2 \left(\frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2} + \frac{c_3^2}{p_3} \right) - \left[\frac{1}{p} \right] \left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} - \frac{c_3}{p_3} \right)^2 \quad (17)$$

Dieses kann man auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{P} = h^2 \frac{p_1(c_2 - c_3)^2 + p_2(c_1 - c_3)^2 + p_3(c_1 - c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad (18)$$

Der mittlere Übertragungs-Fehler ist hiernach:

$$\frac{m(h)}{h} = \mu(h) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{p_1(c_2 - c_3)^2 + p_2(c_1 - c_3)^2 + p_3(c_1 - c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \quad (19)$$

Wenn man hier die Bedeutungen $c_1 = \cotg(1)$ u. s. w. wieder einführt, so nimmt der Zähler von (18) und (19) folgende Form an:

$$p_1 \frac{\sin^2((2) - (3))}{\sin^2(2) \sin^2(3)} + p_2 \frac{\sin^2(2)}{\sin^2(1) \sin^2(3)} + p_3 \frac{\sin^2(3)}{\sin^2(1) \sin^2(2)} \quad (20)$$

Wenn man hier den Winkel $(2) = (3)$ setzt, also das Dreieck gleichschenklig annimmt, so fällt das erste Glied in (20) fort, die Gleichschenklichkeit wirkt also günstig. Wir wollen diese Annahme in (19) einführen, also $c_3 = c_2$ setzen, zugleich auch soll $p_3 = p_2$ gesetzt werden, dieses giebt aus (19) und (20):

$$\mu(h) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{(2p_1 + p_2) \sin^2(1)}} \text{ oder } = \frac{2\mu}{\varrho \sin(1)} \sqrt{\frac{1}{4p_1 + p_2 + p_3}} \quad (21)$$

Setzt man noch die Gewichte p_1 und $p_2 = p_3 = 1$, so giebt dieses (zu Fig. 3. gehörig):

$$\frac{m(h)}{h} = \mu(h) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (22)$$

Von der Formel (21) kann man auch unmittelbar auf den Rhombus Fig. 5. S. 114 übergehen, doch wollen wir vorher noch eine allgemeinere Aufgabe einschalten.

Diagonale eines Vierecks.

In ähnlicher Weise wie für eine Dreiecksseite kann man auch das Gewicht für eine Diagonale B in Fig. 4. bestimmen, wenn auf einer Basis b nach zwei Seiten hin Dreiecke (1) (2) (3) und (1') (2') (3') aufgebaut sind.

In jedem dieser beiden Dreiecke hat man eine Bedingungs-Gleichung, also zusammen:

$$\begin{aligned} a) \quad & + (1) + (2) + (3) - 180^\circ = 0 \\ b) \quad & + (1') + (2') + (3') - 180^\circ = 0 \end{aligned}$$

Die Diagonale B wird als Funktion gemessener Winkel dargestellt durch die Gleichung:

$$B^2 = a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos(3 + 3') \quad (23)$$

$$\text{wobei } a = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2), \quad a' = \frac{b}{\sin(1')} \sin(2')$$

Wenn man die Funktion B nach (1), (2) und (3) differentiiert, und wenn man die geometrischen Beziehungen beachtet:

$a - a' \cos(3 + 3') = B \cos \alpha$, und $a' \sin(3 + 3') = B \sin \alpha$
so findet man:

$$\begin{aligned} f_1 &= -a \cos \alpha \cotg(1), \quad f_2 = +a \cos \alpha \cotg(2), \quad f_3 = +a \sin \alpha \\ f'_1 &= -a' \cos \alpha' \cotg(1'), \quad f'_2 = +a' \cos \alpha' \cotg(2'), \quad f'_3 = +a' \sin \alpha' \end{aligned}$$

Wenn man damit ebenso verfährt, wie bei der vorigen Aufgabe (18) — (20), so findet man zuerst, dass sich die Gewichtsreciproke von P in zwei Teile zerlegt, entsprechend den zwei Dreiecken, nämlich:

$$\frac{1}{P} = I + II \quad (24)$$

Wir beschäftigen uns zunächst nur mit dem ersten Teil I, die Ausrechnung ist nicht schwierig, jedoch etwas langwierig, das Ergebnis ist:

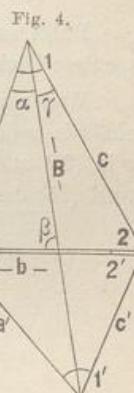
$$I = \frac{a^2 p_1 (\sin \alpha - \cos \alpha \cotg(2))^2 + p_2 (\sin \alpha + \cos \alpha \cotg(1))^2 + p_3 \cos^2 \alpha (\cotg(1) + \cotg(2))^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}$$

Den Zähler hievon kann man auf diese Form bringen:

$$p_1 \left(\frac{a \cos(\alpha + (2))}{\sin(2)} \right)^2 + p_2 \left(\frac{a \cos((1) - \alpha)}{\sin(1)} \right)^2 + p_3 \frac{(a \cos \alpha \sin((1) + (2)))^2}{\sin(1) \sin(2)}$$

$$\text{oder } p_1 \left(\frac{b}{\sin(1)} \cos((3) - (2) + \beta) \right)^2 + p_2 \left(\frac{a}{\sin(1)} \cos \gamma \right)^2 + p_3 \left(\frac{c}{\sin(1)} \cos \alpha \right)^2$$

Jordan, Handb. d. Vermessungskunde. 4. Aufl. III. Bd.



Dieses geht in den entsprechenden Teil von (21) und (22) über, wenn man $\beta = 90^\circ$ setzt, denn dann wird $\cos((3)-(2)+\beta) = \sin(3)-\sin(2)$ und $h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3)$ oder $h = a \sin(3) = c \sin(2)$. Dieser Übergang, der in sich richtig sein muss, dient als Entwicklungs-Probe.

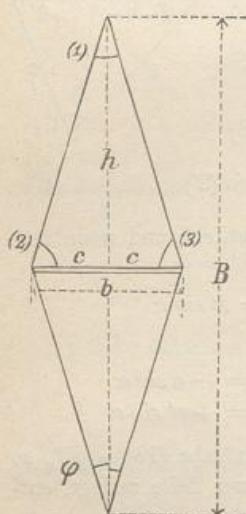
Um nun zusammen zu fassen, bilden wir das mittlere Fehlerquadrat der Diagonale B von Fig. 4. S. 123:

$$(m(B))^2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 \left\{ \frac{p_1 b^2 \cos^2((3)-(2)+\beta) + p_2 a^2 \cos^2\gamma + p_3 c^2 \cos^2\alpha}{\sin^2(1)(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)} + \frac{p_1' b'^2 \dots}{\sin^2(1')(p_1' p_2' \dots)} \right\} \quad (25)$$

Dabei soll der zweite teilweise nur angedeutete Teil in der Klammer dasselbe für das untere Dreieck von Fig. 4. S. 113 bedeuten, was der erste Teil für das obere Dreieck.

Will man nicht den mittleren Fehler $m(B)$ selbst haben, sondern das Fehler-Verhältnis $m(B) : B$, welches wir sonst mit $\mu(B)$ bezeichnet haben, so braucht man nur in (25) alle Masse b , a u. s. w. in Teilen von B auszudrücken, dann liefert die Formel (25) das gewünschte $\mu(B)$.

Fig. 5.



Man kann nach der Formel (25) für jedes Basis-Rhomboide die Fehler-Übertragung von der kurzen Diagonale zur langen Diagonale beurteilen, wenn man außer der Form des Vierecks auch den mittleren Winkelfehler μ und die sämtlichen Gewichte p kennt.

Man bemerkt sofort, dass diese Gewichte sehr ungleiche Einflüsse auf das Schluss-Ergebnis ausüben, am wichtigsten ist das Gewicht p_1 bzw. p_1' , denn in der Formel (25) trägt eine Verstärkung des Gewichtes p_1 wesentlich zur Vergrößerung des Nenners bei und im Zähler kommt p_1 nur in Verbindung mit $\cos((3)-(2)+\beta)$ vor, was mit $\beta = 90^\circ$ und $(2) = (3)$, also in dem wichtigsten Falle, verschwindet.

Wir wollen diesen Fall, $\beta = 90^\circ$ und $p_3 = p_2$, nun behandeln und zugleich annehmen, dass das untere Dreieck in Fig. 4. S. 113 dem oberen Dreieck symmetrisch sei, dass man also den Rhombus Fig. 5. habe. Damit giebt (25):

$$(m(B))^2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 \left\{ 2 \frac{h^2}{\sin^2(1)(2p_1 + p_2)} \right\}$$

$$\frac{m(B)}{2h} = \frac{m(B)}{B} = \mu(B) = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{(2p_1 + p_2)}} \quad (26)$$

Diese Formel kann man auch einfacher aus (22) S. 113 herleiten, denn es ist $m(B) = m(h) \sqrt{2}$ und $\mu(B) = \frac{\mu(h)}{\sqrt{2}}$.

Günstigste Gewichts-Verteilung.

Nun wollen wir die frühere Frage wieder aufnehmen, welche Verteilung der Gewichte p_1 und p_2 am günstigsten ist? Es handelt sich dabei darum, den Ausdruck (26) möglichst klein zu machen bei konstanter Summe $p_1 + p_2 + p_3 = p_1 + 2p_2 = [p]$, (indem die Messungs-Arbeit für jeden Winkel dem Gewicht proportional gesetzt wird).

Da die Gewichte in (26) nur im Nenner vorkommen, muss man darnach trachten, die Funktion $f = 2p_1 + p_2$ möglichst gross zu machen, bei konstantem $p_1 + 2p_2 = [p]$. Eliminiert man zu diesem Zwecke p_1 , indem man $p_1 = [p] - 2p_2$ in f einsetzt so wird:

$$f = 2[p] - 4p_2 + p_2 = 2[p] - 3p_2$$

und dieses wird am grössten, wenn $p_2 = 0$ gesetzt wird, dadurch muss aber $p_1 = [p]$ werden, und man hat aus (26):

$$\mu(B) \min = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{2[p]}} \quad (27)$$

Dieses Ergebnis, dass nur der *eine* Winkel (1) an der Spitze, die beiden Basiswinkel (2) und (3) aber gar nicht zu messen sind, mag zuerst sonderbar erscheinen; man muss es aber richtig auffassen: dasselbe gilt, wenn das Dreieck gleichschenklig ist; man muss also doch mindestens so viel von den Basiswinkeln messen, dass man weiss, ob die Gleichschenkligkeit vorhanden ist. Man kann also sagen: Wenn man durch vorläufige Messungen gefunden hat, dass ein Dreieck von der Form Fig. 3. S. 112 sehr nahe gleichschenklig ist, dann kann man, wenn man nur auf die Höhe ausgeht, alle weitere Winkelmess-Arbeit auf den spitzen Winkel (1) konzentrieren.

Wir wollen nun in (26) statt des Winkels (1) das Vergrösserungs-Verhältnis $B : b = v$ einführen, oder auch, indem wir nach Fig. 5. die Hälften nehmen, $h : c = v$ setzen, wobei $\sin(1) = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, und:

$$\sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + h^2}} \quad \cos \varphi = \frac{h}{\sqrt{c^2 + h^2}}$$

Wenn man damit $\sin(1)$ in v ausdrückt und in (26) einsetzt, so bekommt man für den Rhombus Fig. 5. S. 114:

$$\frac{1}{\sin(1)} = \frac{1+v^2}{2v} \quad (28)$$

$$\mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v^2}{2v} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \quad (29)$$

und das Minimum, wie bei (27):

$$\mu(B) \min = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v^2}{2v} \sqrt{\frac{1}{2[p]}} \quad (30)$$

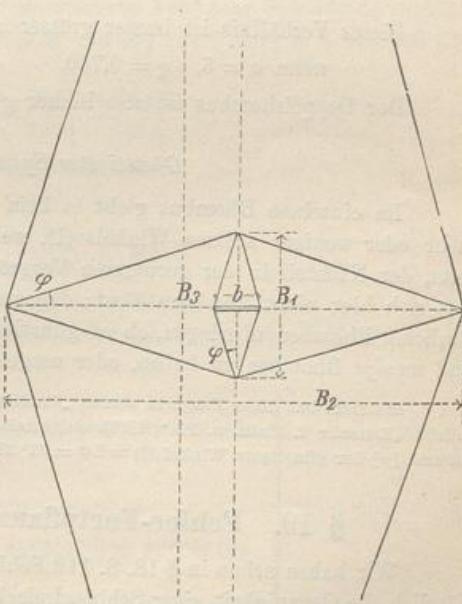
Das rhombische Multiplikations-Netz.

Nach Andeutung von Fig. 6. kann man die rhombische Vergrösserung wiederholt anwenden. Wenn die Rhomben alle ähnlich und ähnlich gemessen sind, so hat man nach (26):

$$\mu(B_1) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}}$$

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \text{ u. s. w.}$$

Fig. 6.



Dieses giebt eine ähnliche Fehler-Fortpflanzung, wie wir schon bei Fig. 2. S. 111 untersucht haben, und man hat daher für r malige Rhomben-Wiederholung:

$$\frac{m(B_r)}{B_r} = \mu(B_r) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \sqrt{r} \quad (31)$$

Bleiben wir zunächst bei zweimaliger Wiederholung stehen, so haben wir mit $r = 2$:

$$\mu(B_r) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{2}{2p_1 + p_2}}$$

Wenn nun wieder $B_2 : b = v$ werden soll, so muss $B_2 : B_1 = B_1 : b = \sqrt{v}$ sein, und eine ähnliche Rechnung wie bei (28) giebt: $\frac{1}{\sin(1)} = \frac{1+v}{2\sqrt{v}}$,

folglich

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v}{2\sqrt{v}} \sqrt{\frac{2}{2p_1 + p_2}} \quad (32)$$

Dieses gilt für beliebige p_1 und $p_3 = p_2$; dagegen im günstigsten Falle mit $p_1 = p_1 + p_2 + p_3 = [p]$ hat man:

$$\mu(B) \min = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{[p]}} \quad (33)$$

Nun kann man die Ausdrücke (30) und (32) zweckmäßig vergleichen, es sei kurz $(\mu)'$ der Fehler-Ausdruck nach (30) für einen Rhombus, und $(\mu)''$ für zwei Rhomben, und das Vergrösserungs-Verhältnis v sei in beiden Fällen dasselbe. Dann hat man das Verhältnis $(\mu'') : (\mu')$ oder $\mu(B_2) : \mu(B) = q$ wie folgt:

$$q = \frac{1+v}{\sqrt{2v}} : \frac{1+v^2}{2v}, \quad q = \frac{1+v}{1+v^2} \sqrt{2v}$$

Dieses Verhältnis ist immer grösser als 1 und giebt z. B.

$$\text{wenn } v = 5, \quad q = 0,730, \quad \text{wenn } v = 10, \quad q = 0,487.$$

Der Doppelrhombus ist also immer günstiger als der einfache Rhombus.

Günstigster Spitzens-Winkel (1).

Im einzelnen Rhombus giebt es kein Mass für den Vorteil oder Nachteil eines mehr oder weniger spitzen Winkels (1), weil dem Vorteil in der Genauigkeit einerseits, der Nachteil in der geringeren Vergrösserung $B : b$ andererseits gegenübersteht, was sich hier nicht abwägen lässt; dagegen kann man bei mehrfacher Anwendung ähnlicher Rhomben überlegen, ob es günstiger ist, den Winkel (1) sehr spitz zu machen und wenige Rhomben zu haben, oder umgekehrt.

Helmert hat diese Frage in seinen „Studien über rationelle Vermessungen“, III, 45. (Schlömilchs „Zeitschr. f. Math. u. Ph.“ 1868) aufgestellt, und dahin beantwortet, dass bei konstanter Summe $[p]$ der günstigste Winkel $(1) = 2\varphi = 33^\circ 32'$ ist.

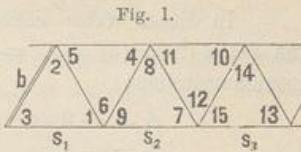
§ 19. Fehler-Fortpflanzung in Dreiecksketten.

Wir haben schon in § 18. S. 112 Fehlerverhältnisse in Dreiecksketten behandelt, nämlich die Genauigkeit einer Schlussdreiecksseite. Wir gehen nun über zu der Frage nach der Genauigkeit der Gesamtausdehnung einer Kette.

In der gitterförmigen Kette gleichseitiger Dreiecke, welche in Fig. 1. angedeutet ist, soll es sich um die *Summe* mehrerer Dreiecksseiten, z. B. $s_1 + s_2 + s_3$ handeln, wobei die einzelnen Seiten s_1, s_2, s_3 aus derselben Basis b , teilweise durch dieselben Winkel abgeleitet sind.

In jedem einzelnen Dreiecke seien alle drei Winkel gleich genau gemessen, und ausgeglichen, also z. B.:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} (1) + (2) + (3) - 180^\circ = 0 \\ \text{b)} \dots \dots \dots (4) + (5) + (6) - 180^\circ = 0 \\ \text{c)} \dots \dots \dots (7) + (8) + (9) - 180^\circ = 0 \\ \text{d)} \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (1)$$



Alle diese Bedingungs-Gleichungen stehen ganz unabhängig von einander; wenn man sie aber trotzdem als *ein* System zur Ausgleichung der Dreieckskette als Ganzes auffassen will, so geben sie sehr einfache Normalgleichungs-Coëfficienten, nämlich: $[aa] + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ und im ganzen:

$$\left. \begin{array}{llll} [aa] = 3 & [ab] = 0 & [ac] = 0 & [ad] = 0 \\ [bb] = 3 & [bc] = 0 & [bd] = 0 & \\ [cc] = 3 & [cd] = 0 & & \end{array} \right\} \quad (2)$$

Wenn man nach der Ausgleichung den mittleren Fehler oder das Gewicht der Summe $s_1 + s_2 + s_3$ berechnen will, so hat man die Gewichtsformel für bedingte Beobachtungen anzuwenden (vgl. Band I, 4. Aufl. 1895, S. 124, Gleichung (12)), nämlich:

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cf \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \dots \quad (3)$$

Diese Formel vereinfacht sich aber in unserem Fall sehr bedeutend; zunächst wird wegen $[ab] = 0$, der Wert $[bb \cdot 1] = [bb]$ und $[bf \cdot 1] = [bf]$ u. s. w., und deswegen wird (3) zuerst so:

$$\frac{1}{P} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf]^2}{[bb]} - \frac{[cf]^2}{[cc]} - \dots \quad (4)$$

Nun muss man die Funktion F näher betrachten:

$$\begin{aligned} F &= s_1 + s_2 + s_3 \\ F &= \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) + \frac{b}{\sin(1) \sin(4) \sin(7)} \sin(8) \\ &\quad + \frac{b}{\sin(1) \sin(4) \sin(7) \sin(10) \sin(13)} \sin(14) \end{aligned} \quad (5)$$

Die Differential-Quotienten sind:

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = \frac{\partial F}{\partial (1)} = -s_1 \cot(1) - s_2 \cot(1) - s_3 \cot(1) \\ f_2 = \frac{\partial F}{\partial (2)} = +s_1 \cot(2) \\ f_3 = \frac{\partial F}{\partial (3)} = +s_2 \cot(3) + s_3 \cot(3) \\ f_4 = \frac{\partial F}{\partial (4)} = -s_2 \cot(4) - s_3 \cot(4) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (6)$$

In dieser Weise bekommt man 15 Werte f , welche wir nun, mit Einführung von $(1) = (2) = (3) = \dots = 60^\circ$ und $\cot 60^\circ = c$, sowie $s_1 = s_2 = s_3 = \dots = s$ so zusammenstellen:

$$\left. \begin{array}{lll} f_1 = -3sc & f_7 = -2sc & f_{13} = -1sc \\ f_2 = +1sc & f_8 = +1sc & f_{14} = +1sc \\ f_3 = +2sc & f_9 = +1sc & f_{15} = 0 \\ f_4 = -2sc & f_{10} = -1sc & \\ f_5 = +2sc & f_{11} = +1sc & \\ f_6 = 0 & f_{12} = 0 & \end{array} \right\} \quad (7)$$

Nun sieht man zuerst aus der Verbindung mit (1), dass

$$[af] = f_1 + f_2 + f_3 = 0, \quad [bf] = f_4 + f_5 + f_6 = 0, \quad [cf] = 0 \text{ u. s. w.}$$

Damit wird die Gewichts-Formel (3) sehr einfach, nämlich:

$$\frac{1}{P} = [ff] = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + \dots \quad (8)$$

Setzt man hier die Werte f nach (7) ein, so findet man:

$$\frac{1}{P} = (9 + 1 + 4 + 4 + 4 + 0 \dots) s^2 c^2 = 32 s^2 c^2 = 32 s^2 \cot^2 60^\circ \quad (9)$$

Indessen gilt das zunächst nur für den Fall *dreier* Seiten $s_1 + s_2 + s_3$.

Wichtiger wird es sein, das allgemeine Gesetz der Gewichts-Formel (9) für irgend welche Seitenzahl zu bestimmen, etwa für n Seiten nach der Formel:

$$F_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \dots + s_n \quad (10)$$

Denkt man sich hiezu die Reihe (5) fortgesetzt, so sieht man leicht, dass die Winkel (2), (8) und (14) nur in jedem Gliede *einmal* vorkommen, der Winkel (1) kommt in allen n Gliedern vor, und ähnliche Gesetze zeigen sich auch im übrigen, so dass man folgendes findet:

Winkel (1) giebt $(-sc - sc - sc \dots)^2 = (ns)^2 = n^2 (sc)^2$
 „ (2), (8), (14) ... geben $(sc)^2 + (sc)^2 + (sc)^2 + \dots = n(sc)^2$

Die Gruppe $\frac{(3)(5)}{(4)(7)}$ giebt $\dots + \dots = 4(n-1)^2 (sc)^2$

Die Gruppe $\frac{(9)(11)}{(10)(13)}$ giebt $\dots + \dots = 4(n-2)^2 (sc)^2$

Die nächste Gruppe giebt $\dots = 4(n-3)^2 (sc)^2$

Die letzte derartige Gruppe giebt $\dots = 4(1^2) (sc)^2$

Im ganzen hat man:

$$\frac{1}{P_n} = \left(n^2 + n + 4((n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2) \right) (sc)^2 \\ = -3n^2 + n + 4(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2) (sc)^2$$

Nun ist aber die Summe der n ersten Quadrate bekanntlich:

$$n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

und damit wird:

$$\frac{1}{P_n} = \left(-3n^2 + n + 4 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) (sc)^2 = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{3} s^2 c^2$$

Dabei ist $c = \cotg 60^\circ = 0,577$, $c^2 = \frac{1}{3}$, und wenn man nun den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels mit μ einführt, so ist der mittlere Fehler der Seitensumme $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$, mit Anwendung der Bezeichnungsart der Anmerkung S. 110:

$$m(ns) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{4n^2 - 3n + 5n}{3}} \quad (11)$$

Meist will man nicht den Fehler selbst haben, sondern das Verhältnis des Fehlers zu $s_1 + s_2 + \dots + s_n$ oder den sogenannten relativen Fehler, dieser ist:

$$\frac{m(ns)}{ns} = \mu(ns) = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{4n^2 - 3n + 5}{3n}} \quad (12)$$

Nachdem wir so den Fall der Dreieckskette Fig. 1. S. 117 in aller Ausführlichkeit behandelt haben, wollen wir noch einige andere ähnliche Fälle betrachten, jedoch nur die Schluss-Ergebnisse hier mitteilen, da die Entwicklung nach dem vorstehenden keine Schwierigkeit bieten kann.

In Fig. 2. soll es sich um die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$ handeln; der mittlere Fehler dieser Summe wird gefunden:

$$m(ns) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{4n^3 + 3n^2 + 5n}{3}} \quad (13)$$

Nun kann man die zwei Fälle von Fig. 1. S. 117 und Fig. 2. zusammen nehmen.

Wenn man hiernach in Fig. 3. die Summe der auf beiden Seiten der Kette liegenden Seiten betrachtet:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n \\ + s'_1 + s'_2 + s'_3 + \dots + s'_n,$$

so findet man dafür den mittleren Fehler durch Zusammensetzung von (11) und (13), nämlich:

$$m(ns + n's) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{(4n^3 - 3n^2 + 5n) + (4n'^3 + 3n'^2 + 5n')}{3}} \quad (14)$$

Nimmt man hier $n' = n$ und $n + n' = v$, so wird:

$$m(v s) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{8n^3 + 10n}{3}} \text{ oder } = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{v^3 + 5v}{3}} \quad (15)$$

Eine andere Zusammenfassung von Fig. 1. und Fig. 2. zeigt Fig. 4., wobei es sich um die Diagonale SS' handelt, welche näherungsweise etwa $= SB + B'S'$ gesetzt werden kann. Hiefür ist mit zweifacher Anwendung von (11), mit $2n = v$:

$$m(v s) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{8n^3 - 6n^2 + 10n}{3}} = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{2v^3 - 3v^2 + 10v}{6}} \quad (16)$$

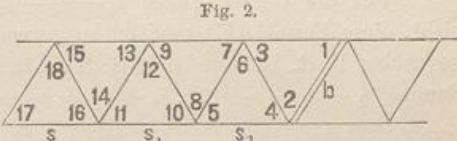


Fig. 2.

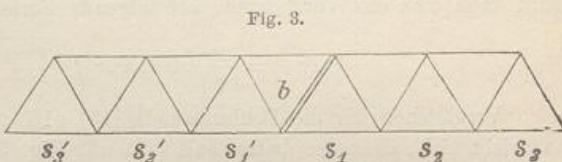


Fig. 3.

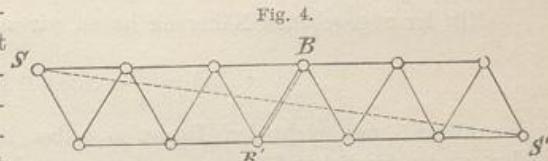
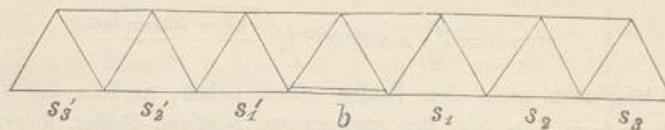


Fig. 4.

Einen weiteren Fall nehmen wir mit Fig. 5. vor. Die Basis b liegt in der Kettenrichtung selbst. Für die Summe nach einer Seite $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$ findet man:

Fig. 5.



$$m(ns) = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{4n^3 + 9n^2 + 5n}{3}} \quad (17)$$

Für die Gesamtsumme $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s'_1 + s'_2 + s'_3 + \dots$ genügt es nicht, diese Formel (17) zweifach anzuwenden, denn der Winkel, welcher der Basis b gegenüber liegt, hat auf beide Seiten Einfluss. Die selbständige Entwicklung für die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n + s'_1 + s'_2 + s'_3 + \dots$ gibt:

$$m(b + ns + n's) = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt{(n + n')^2 + \frac{4n^3 + 6n^2 + 5n}{3} + \frac{4n'^3 + 6n'^2 + 5n'}{3}} \quad (18)$$

Setzt man hier $n' = n$, so wird:

$$m((2n + 1)s) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{8n^3 + 24n^2 + 10n}{3}} \quad (19)$$

Die ganze abgeleitete Länge ist hier $= (2n + 1)s$, weil das Mittelstück s als fehlerfreie Basis mitgerechnet wird; wir wollen deswegen nun setzen $2n + 1 = v$, und damit kann man das Vorstehende auf folgende Form bringen:

$$m(v s) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{v^3 + 3v^2 - 4v}{3}} \quad (20)$$

Vergleichen wir die Fehlerformeln (15), (16) und (20) für die drei Hauptfälle, so ergibt sich, dass der dritte Fall (20) mit Fig. 5. etwas ungünstiger ist, als die beiden ersten Fälle, und daraus folgt, dass es besser ist, die Basis b quer zur Kette zu legen, wie in Fig. 3. und 4., als nach der Längsrichtung, Fig. 5.

Wenn aber die Kette sehr lang ist, d. h. n oder v sehr gross, so kann man alle Formeln näherungsweise als *gleich* betrachten, indem man n und n^2 gegen n^3 vernachlässigt. Man sieht dann auch, dass die Formeln mit v allgemein die Hälfte der entsprechenden Formeln für n geben, dass es also jedenfalls günstiger ist, die Basis in die Mitte als an das Ende der Kette zu legen, indem z. B. die Verdoppelung der Kettenlänge von der Mitte aus nur das $\sqrt{2}$ fache des Fehlers, dagegen von einem Ende aus das $\sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$ fache gibt.

Mit der angegebenen Näherung haben wir aus (11):

$$m(ns) = \frac{\mu}{\varrho} s \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{4n^3}{3}} \quad (21)$$

Oft will man nicht den Fehler m selbst haben, sondern das Verhältnis des Fehlers zu der fraglichen Länge $s_1 + s_2 + \dots + s_n$ oder den sogenannten relativen Fehler. Derselbe ist für (21):

$$\mu(ns) = \frac{m(ns)}{ns} = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{4n}{3}} \quad (22)$$

Oder da $\cotg 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, haben wir:

$$\mu(ns) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{2}{3} \sqrt{n}$$

Setzt man rund $\mu = \pm 1''$, so giebt dieses:

$$\mu(ns) = 0,000\,003\,23 \sqrt{n}$$

Dieses ist der relative Fehler für n fache Ketten-Ausdehnung von der Basis an einem Ende der Kette. Ist dagegen die Basis in der Mitte, und dehnt sich die Kette nach beiden Seiten je um das $\frac{v}{2}$ -fache der Basis, also im ganzen wieder um das v fache aus, so bekommt man:

$$\mu(v s) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{3} \sqrt{v} \text{ oder } = 0,000\,001\,62 \sqrt{v}$$

Vergleichung der Rhomben-Diagonale mit der Gitterlinie.

Von allen Vergleichungen, welche zwischen den Formeln dieses § unter sich und mit denen des vorhergehenden § 18. angestellt werden können, wollen wir hier nur die wichtigste herausheben, entsprechend Fig. 6., wo eine Rhomben-Diagonale B und eine Gitterlinie B , beide $= 5b$, dargestellt sind.

Für die mittleren Fehler haben wir nach (29) § 18., S. 115, und nach (20) § 19., S. 120:

$$\text{Rhombus: } \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v^2}{2v} \sqrt{\frac{1}{2p_1+p_2}}$$

$$\text{Gitter: } \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt{\frac{v^2+3v-4}{3v}}$$

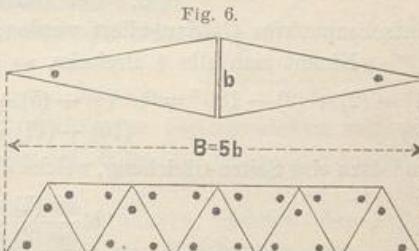
Nimmt man im ersten Falle $p_1 = p_2 = 1$, also $2p_1 + p_2 = 3$ und in beiden Fällen $\mu = \text{rund } \pm 1''$ und $v = 5$, so erhält man:

$$\text{Rhombus } \mu(B) = 0,000\,007\,27 \text{ rund } = 7 \text{ Milliontel}$$

$$\text{Gitter } \mu(B) = 0,000\,004\,34 \text{ ", } = 4 \text{ Milliontel}$$

Die Gitterlinie hat also einen kleineren Fehler als die Rhomben-Diagonale; dieses Verhältnis gestaltet sich aber ungünstiger, wenn man die Zahl der Winkel-Messungen überlegt. Der Rhombus hat nur 6 Winkel, und von diesen brauchen sogar die 4 Basiswinkel nur genähert bekannt zu sein, man kann im Rhombus fast die ganze Arbeit auf die *zwei* spitzen Winkel konzentrieren, dagegen hat das Gitter 9 Dreiecke mit 27 Winkeln, oder wenn man die unwichtigen Winkel ausscheidet, immer noch 21 Winkel.

Trotz dieses starken theoretischen Missverhältnisses könnte doch auch das Gitternetz, wegen der kurzen Seiten, unter Umständen praktische Verwendung als Basisnetz finden. (Vgl. S. 108.)



Azimut-Übertragung.

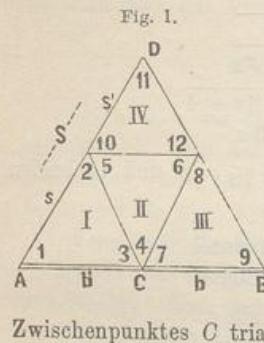
Die Azimut-Übertragung längs einer Dreieckskette besteht einfach in der *Summierung* aller längs eines Polygons auftretender Dreieckswinkel, z. B. in Fig. 1. (S. 117) besteht die Azimut-Übertragung längs $s_1 + s_2 + s_3$ in der Summierung $(3) + (1) + (6) + (9) + (7) + \dots$

Wenn jedoch die Azimut-Übertragung längs der Hauptstreckung einer Dreieckskette besonders wichtig ist, so soll man schon die Anordnung der Messungen darnach einrichten, also nicht bloss die einzelnen je 60° betragenden Winkel in den Ketten von Fig. 1. bis 5. S. 117—120 messen, sondern die je nahezu 180° betragenden Winkel der in der Hauptstreckung liegenden Seiten.

Besser noch ist es, für die Zwecke der Azimut-Übertragung die Dreiecksseiten besonders anzugeben, wie z. B. Bessel bei der Gradmessung in Ostpreussen gethan hat. Dieses ist aus dem Netzbilde der Gradmessung in Ostpreussen in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 499 zu ersehen, indem auf der nordwestlichen Gesamtstreckung Tunz-Galtgarben-Nidden-Memel nur zwei Zwischenpunkte Galtgarben und Nidden sind, während auf der südöstlichen Grenze 7 Zwischenpunkte zur Azimut-Übertragung nötig wären.

§ 20. Verschiedene Fehler-Betrachtungen zur Anlage von Dreiecks-Netzen.

I. Grösse der Dreiecke.



Eine erste wichtige Frage betrifft die *Grösse* der Dreiecksseiten. Soll man, wenn man die Wahl hat, grosse oder kleine Dreiecke nehmen?

Diese Frage ist sehr unbestimmt, wir wollen ihr mit Fig. 1. folgende bestimmtere Fassung geben:

Auf einer Geraden sind drei feste Punkte A, C, B gegeben, und zwar, wie wir meist bei Grundlinien annehmen, fehlerfrei gegeben, ein Punkt D kann entweder durch 4 Dreiecke I, II, III, IV mit Benützung des Zwischenpunktes C , oder durch ein Dreieck ABD ohne Benützung des Zwischenpunktes C trianguliert werden; welches ist das günstigere?

Nimmt man alle 4 Dreiecke, so hat man zunächst 4 Summen-Gleichungen:
 $(1) + (2) + (3) - 180^\circ = 0, \quad (4) + (5) + (6) - (180) = 0, \quad (7) + (8) + (9) - 180^\circ = 0,$
 $(10) + (11) + (12) - 180^\circ = 0 \quad (1)$

und dazu eine Seiten-Gleichung, welche die Beziehung zwischen b' und b ausdrückt, d. h.:

$$b' \frac{\sin(1) \sin(5) \sin(8)}{\sin(2) \sin(6) \sin(9)} = b$$

oder mit der Abkürzung $\cotg(1) = c_1$ u. s. w. giebt dieses:

$$c_1 v_1 - c_2 v_2 + c_5 v_5 - c_6 v_6 + c_8 v_8 - c_9 v_9 + \dots = 0 \quad (2)$$

Die Seite $AD = s$ wird in b' ausgedrückt durch die Funktion:

$$S = s + s' = b' \frac{\sin(3)}{\sin(2)} + b' \frac{\sin(1) \sin(4) \sin(12)}{\sin(2) \sin(6) \sin(11)}$$

Das Weitere wollen wir nur noch mit der Vereinfachung machen, dass alle Dreiecke gleichseitig seien, also $b = b' = s = s'$ und $c_1 = c_2 \dots = \cotg 60^\circ = c$. Damit giebt die Weiterrechnung für das Gewicht P der Seite S :

$$\frac{1}{P} = \left(10 c^2 - \frac{0}{3} - \frac{0}{3} - \frac{0}{3} - \frac{0}{3} - \frac{16 c^4}{6 c^2} \right) b^2 = 7,333 c^2 b^2$$

also der mittlere Fehler von S :

$$m(S) = \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ b \sqrt{7,333}$$

oder, da $2b = S$ ist, der relative Fehler (vgl. Anmerkung S. 110):

$$\mu(S) = \frac{\mu}{2\varrho} \cotg 60^\circ \sqrt{7,333} = 1,354 \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ = 0,000\,003\,79 \mu \quad (3)$$

Wenn man dagegen die Seite S aus dem *einen* grossen Dreieck $A B D$ bestimmt, so bekommt man nach (12) § 18. S. 110:

$$\mu(S) = 1,4142 \frac{\mu}{\varrho} \cotg 60^\circ = 0,000\,003\,96 \mu \quad (4)$$

Die Bestimmung (4) der Seite S aus dem *einen* grossen Dreiecke ist also hier fast gleich günstig wie die Bestimmung (3) aus den 4 kleinen Dreiecken, trotzdem, dass mit den 4 kleinen Dreiecken der günstige Zwischenpunkt C mit benutzt wurde, der in dem *einen* grossen Dreieck gar nicht vorkommt.

Bedenkt man noch, dass in den 4 Einzeldreiecken zusammen 4 mal so viel Winkel zu messen sind, als in dem *einen* Gesamtdreieck, oder dass man bei gleicher Winkelmessungs-Summe (Arbeit) die Seite S aus *einem* grossen Dreiecke nahezu doppelt so genau bekommt, als aus den vier kleinen Dreiecken, so erscheint das *eine* grosse Dreieck im Vorteil.

II. Diagonalen-Kontrolle.

In Fig. 2. haben wir ein Quadrat mit zwei Diagonalen gezeichnet, wobei die Seite b als Grundlinie gilt, aus welcher die anderen Seiten s' , s und s'' trigonometrisch abgeleitet werden sollen.

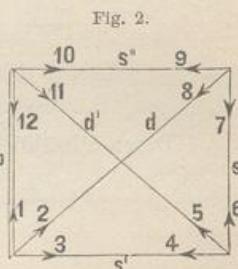
Die ganze Figur ist bestimmt, auch wenn nur eine Diagonale eingemessen ist, und wir wollen untersuchen, welche Genauigkeits-Änderung stattfindet, je nachdem eine oder beide Diagonalen d und d' gemessen sind.

Die Messungen seien nach Richtungen gemacht, so dass für das volle Netz mit beiden Diagonalen 12 Richtungen gleichgewichtig vorliegen; wenn dagegen die Diagonale d' nicht vorhanden ist, fallen die beiden Richtungen (5) und (11) fort.

Im ganzen hat das Netz vier Bedingungs-Gleichungen, nämlich eine Seiten-Gleichung und drei Winkelsummen-Gleichungen, diese vier Gleichungen sind:

$$a) \frac{\sin(2, 3) \sin(4, 5) \sin(7, 9) \sin(10, 12)}{\sin(1, 3) \sin(4, 6) \sin(8, 9) \sin(10, 11)} = 1 \quad (5)$$

$$b) (10, 12) + (1, 2) + (8, 9) = 189^\circ \\ c) (1, 3) + (4, 5) + (11, 12) = 180^\circ \\ d) (2, 3) + (4, 6) + (7, 8) = 180^\circ \quad (6)$$



Wenn es sich um die Bestimmung des Gewichtes der Seite s handelt, so kommt hiezu noch:

$$f) \frac{s}{b} = \frac{\sin(2,3)\sin(10,12)}{\sin(4,6)\sin(8,9)}$$

Um die Gleichungen a) und f) linear zu machen, braucht man bekanntlich die Cotangentialen der Winkel als Coefficienten, und da in unserem Falle nur Winkel von 45° oder 90° vorkommen, für welche man z. B. hat:

$\cotg(2,3) = \cotg 45^\circ = 1$, $\cotg(7,9) = \cotg 90^\circ = 0$,
so werden die linearen Gleichungen sehr einfach.

Auf diese Weise bekommt man aus a) eine Gleichung von folgender Form:

$$-v_2 + v_3 - v_4 + v_5 + v_8 - v_9 + v_{10} - v_{11} + \dots = 0 \quad (7)$$

Die Gleichung b) wird geben:

$$-v_1 + v_2 - v_8 + v_9 - v_{10} + v_{12} + \dots = 0 \quad (8)$$

Das ganze so zu bildende Coefficienten-System ist in folgender Tabelle enthalten:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
a	.	-1	+1	-1	+1	.	.	+1	-1	+1	-1	.
b	-1	+1	-1	+1	-1	.	+1
c	-1	.	+1	-1	+1	-1	+1
d	.	-1	+1	-1	.	+1	-1	+1
f	.	-1	+1	+1	-1	.	.	.

Dieses giebt $[aa] = (-1)^2 + (+1)^2 + \dots = +8$
 $[ab] = (-1)(+1) + \dots = -4$

Das ganze derartige Coefficienten-System ist:

$$\begin{array}{r} +8 \\ +6 \\ +6 \\ +6 \\ +4 \end{array} \left. \begin{array}{r} -4 \\ +2 \\ +2 \\ +3 \\ +4 \end{array} \right\} \quad (10)$$

Durch allmähliche Elimination erhält man:

$$\begin{array}{r} +4 \\ +4 \\ +4 \\ +4 \\ +2 \end{array} \left. \begin{array}{r} +4 \\ 0 \\ +1 \\ +1 \\ +2 \end{array} \right\} \quad (10_a)$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +4 \\ +4 \end{array} \left. \begin{array}{r} 0 \\ +1 \\ +1 \\ +1,75 \end{array} \right\} \quad (10_b)$$

$$\underline{+1,50} = \frac{1}{P} \text{ für die Seite } s, \text{ mit zwei Diagonalen.}$$

Wenn nun μ der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung ist, so ist der mittlere Fehler des Verhältnisses $s:b$, oder der sogenannte relative Fehler der trigonometrischen Übertragung von b nach s folgendes:

$$\mu(s) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{1,50} \quad (11)$$

Nach diesem nehmen wir an, dass die Diagonale d' nicht gemessen sei, dann fällt die Seiten-Gleichung a) und die zweite Dreiecks-Gleichung c) fort, im übrigen bleibt die Rechnung wie vorhin und giebt:

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 12 \\
 \hline
 a & -1 & +1 & . & . & . & . & -1 & +1 & -1 & +1 \\
 b & . & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & . & . & . \\
 f & . & -1 & +1 & . & . & . & +1 & -1 & . & . \\
 & +6 & -2 & -3 & & & & & & & \\
 & +6 & +3 & & & & & & & & \\
 & +4 & & & & & & & & & \\
 \hline
 & +5,333 & +2,000 & & & & & & & & \\
 & +2,500 & & & & & & & & & \\
 & +1,750 = \frac{1}{P} & & & & & & & & & \text{für } s, \text{ mit einer Diagonale } d.
 \end{array}$$

Nachdem wir diesen Fall in aller Ausführlichkeit vorgerechnet haben, mag es genügen, für die beiden anderen Fälle s' und s'' die Ergebnisse mitzuteilen, wie in folgender Zusammenstellung geschieht:

Berechnete Seite	mit einer Diagonale d	mit zwei Diagonalen d und d'	
s	$\frac{1}{P} = 1,75$	$\frac{1}{P} = 1,50$	$\sqrt{\frac{1,75}{1,50}} = 1,080$
s'	$\frac{1}{P'} = 4,00$	$\frac{1}{P'} = 3,75$	$\sqrt{\frac{4,00}{3,75}} = 1,033$
s''	$\frac{1}{P''} = 3,75$	$\frac{1}{P''} = 3,75$	

Wie man hieraus sieht, ist der Genauigkeits-Gewinn durch Hinzunehmen der zweiten Diagonale nicht bedeutend. Bei s'' ändert die zweite Diagonale d' überhaupt nichts, wie auch aus Fig. 2. S. 128 unmittelbar zu ersehen ist.

In der letzten Spalte vorstehender Zusammenstellung sind die Fehler-Verhältnisse 1,080 und 1,033 für beide Fälle angegeben, es ist also der Genauigkeits-Gewinn durch die zweite Diagonale nur bzw. 8% und 3%.

III. Ein weiterer Fragefall ist in Fig. 3. dargestellt.

Wenn die Grundlinie b fest gegeben ist, so kann man die Seiten s und $s' + s'' = S$ entweder aus einem Dreieck mit den Winkeln (1), (2+5), (6) oder aus zwei Dreiecken (1) (2) (3) und (4) (5) (6) bestimmen; es fragt sich, was das günstigere ist.

Da wir die Behandlung solcher Aufgaben nun genügend erläutert haben, schreiben wir sofort die Ergebnisse mit der Abkürzung $\cotg(1) = c_1$ u. s. w. (mit den Fehler-Bezeichnungen nach der Anmerkung zu S. 110). Die Gewichte der Winkel seien alle = 1.

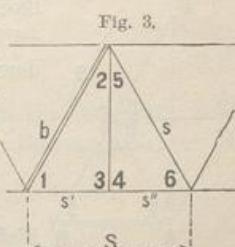


Fig. 3.

Für die Seite s hat man aus *einem* Dreieck nach (11) § 18. S. 110:

$$\mu(s)_1 = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} (c_1^2 + c_6^2 + c_1 c_6)} \quad (12)$$

Dagegen aus *beiden* Dreiecken:

$$\mu(s)_2 = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} (c_1^2 + c_3^2 + c_1 c_3 + c_4^2 + c_6^2 + c_4 c_6)} \quad (13)$$

Für die andere Seite S hat man aus *einem* Dreieck:

$$\mu(S) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} (c_{25}^2 + c_6^2 + c_{25} c_6)} \quad (14)$$

und aus *beiden* Dreiecken (wobei aber die Bedingung, dass $s' + s''$ eine Gerade sei, nicht mit enthalten ist):

$$m(s' + s'') = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} (s'^2 c_2^2 + s''^2 (c_1^2 + c_5^2 + c_6^2 + c_5 c_6) + S^2 c_3^2 - s' s'' c_1 c_2 + s' S c_2 c_3 + s'' S c_1 c_3)} \quad (15)$$

Macht man das grosse Dreieck gleichseitig und die Querlinie rechtwinklig, also $c_1 = c_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_2 = c_5 = \sqrt{3}$ und $c_3 = c_4 = 0$, so erhält man folgende Vergleichung:

aus <i>einem</i> Dreieck	aus <i>zwei</i> Dreiecken
$\mu(s)_1 = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\mu(s)_2 = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)}$
$\mu(s)_1 : \mu(s)_2 = 1 : 0,8165$	

(16)

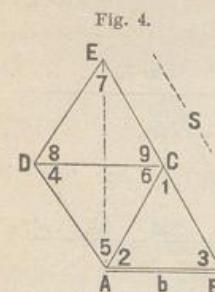
aus <i>einem</i> Dreieck	aus <i>zwei</i> Dreiecken
$\mu(S) = \frac{\mu}{\varrho} \sqrt{\frac{2}{3}}$	$\mu(s' + s'') = \frac{\mu}{3} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{5}{3} \right)}$
$\mu(S) : \mu(s' + s'') = 1 : 1,291$	

(17)

Es wird also zwar die Seite s günstiger aus zwei Dreiecken, dagegen S günstiger aus *einem* Dreieck bestimmt.

Hiernach kann man zu Fig. 3. sagen:

Die Einschaltung des Punktes bei 3.4 in die Reihe der gleichseitigen Dreiecke wirkt ungünstig auf die Bestimmung der Längen-Erstreckung S der Kette, aber günstig auf die Basis-Übertragung von b nach s .



IV. In Fig. 4. zeigt die Fehler-Berechnung, dass aus der Basis $A B = b$ die Seite $B E = S$ günstiger durch *drei* gleichseitige Dreiecke bestimmt wird, als durch *ein* Dreieck $A B E$, denn die Fehler-Berechnung giebt:

1) aus drei Dreiecken

$$S = B C + C E$$

$$S = b \frac{\sin(2)}{\sin(1)} + b \frac{\sin(3) \sin(5) \sin(8)}{\sin(1) \sin(4) \sin(7)}$$

hiefür wird, wenn alle Winkel $= 60^\circ$ sind:

$$\mu(S) = 0,913 \frac{\mu}{\varrho} \quad (18)$$

2) $S = BE$ als Hypotenuse des *einen* rechtwinkligen Dreiecks BAE mit $B = 60^\circ$, $A = 90^\circ$ und $E = 30^\circ$ berechnet, giebt:

$$\mu(S) = 1,414 \frac{\mu}{\varrho} \quad (19)$$

Dieser Fehler ist also nahe das 1,5fache des zuerst berechneten Fehlers der Bestimmung aus drei Dreiecken.

V. Wir wollen hier noch eine andere kleine Genauigkeits-Untersuchung anschliessen, wie auch schon in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 470. Es soll der mittlere Fehler einer Richtung bestimmt werden, nur mit Rücksicht auf die Summen-Proben in dem Viereck, also *ohne* die Seiten-Gleichung. Man hat dann nach Fig. 2. S. 123 die schon unter (6), (8) und (9) enthaltenen Bedingungs-Gleichungen:

$$\begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0 \\ -v_1 + v_3 - v_4 + v_5 &= 0 \\ -v_2 + v_3 - v_4 + v_6 - v_7 + v_8 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -v_8 + v_9 - v_{10} &= 0 \\ -v_{11} + v_{12} + w_2 &= 0 \\ -v_{12} + w_1 &= 0 \end{aligned}$$

Hiezu gehören die Normalgleichungen (deren Coefficienten in (10) schon mit enthalten sind):

$$\begin{aligned} +6k_1 + 2k_2 - 2k_3 + w_1 &= 0 \\ +2k_1 + 6k_2 + 2k_3 + w_2 &= 0 \\ -2k_1 + 2k_2 + 6k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = \frac{-2w_1 + w_2 - w_3}{8}, \quad k_2 = \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{8}, \quad k_3 = \frac{-w_1 + w_2 - 2w_3}{8}$$

Nun ist $[v v] = -[w k]$ und die Ausrechnung hiernach giebt:

$$-8[w k] = 2w_1^2 + 2w_2^2 + 2w_3^2 - 2w_1w_2 + 2w_1w_3 - 2w_2w_3 \quad (20)$$

Das kann man aber noch übersichtlicher gestalten durch Einführung eines *vierten* Summen-Widerspruches w_4 , nämlich:

$$w_1 - w_2 + w_3 = w_4$$

Damit kann man (20) auf die Form bringen:

$$-8[w k] = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$$

und den mittleren Gewichtseinheits-Fehler m' erhält man, da drei unabhängige Bedingungs-Gleichungen benutzt wurden:

$$m'^2 = \frac{[v v]}{3} = \frac{-[w k]}{3} = \frac{1}{3} \frac{[w^2]}{8} \quad (21)$$

wo nun unter $[w^2]$ die Summe *aller vier* in dem Vierecke möglicher Dreiecks-Summenproben bedeutet. Der Wert m' nach (21) ist ein mittlerer Richtungs-Fehler, der entsprechende mittlere Winkel Fehler ist:

$$m = m' \sqrt{2} = \sqrt{\frac{[w^2]}{12}} \quad (22)$$

Hieran schliesst sich an der Schreibersche Satz über günstigste Gewichtsverteilung, welcher bereits in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, § 48. behandelt worden ist.

§ 21. Triangulierungs-Ketten und Netze der preussischen Landes-Aufnahme.

Nachdem wir schon früher in § 2. S. 15 u. ff. die Aufsuchung und Auswahl der Triangulierungs-Punkte in dem Sinne behandelt haben, welche Punkte man vermöge der gegenseitigen Sichten u. s. w. benützen *kann*, wollen wir nun die mehr theoretische Frage aufwerfen, welche Punkte und welche Verbindungs-Sichten man nehmen *will*.

Nach der ersten Einführung der Methode der kleinsten Quadrate in die Triangulierungen ist bald die Anschauung entstanden, dass man nun darauf ausgehen müsse, äusserst viele Messungen und Kontrollen in eine Ausgleichung zusammen zu bringen, und es gab eine Zeit, in welcher es als höchste Triangulierungs-Leistung gepriesen wurde, 100 und mehr Bedingungs-Gleichungen zusammen zu fassen und ebenso viele Normalgleichungen numerisch aufzulösen. In dieser Beziehung haben sich die Anschauungen wieder teilweise geändert.

Folgendes sind die Grundsätze, welche bei den neuesten Triangulierungen der preussischen Landes-Aufnahme unter General *Schreiber* zur Anwendung kommen; wir benützen dazu das sehr anschauliche und charakteristische Beispiel der Ketten und des Netzes in der Provinz Hannover, welche in unserer Fig. 1. S. 129. dargestellt sind.

Wir haben auf dem hier dargestellten Gebiete *drei* Grundlinien:

- | | | | |
|----|--|-------------------|------|
| 1) | Grundlinie bei Braak in Holstein im Jahre 1871 gemessen, | 5875 ^m | lang |
| 2) | " " Göttingen " " 1880 " | 5193 ^m | " |
| 3) | " " Meppen " " 1883 " | 7039 ^m | " |

Die geradlinigen Entfernungen dieser Grundlinien von einander sind rund im Mittel 230^{km} und zu der trigonometrischen Verbindung sind drei zusammenschliessende *Ketten* angeordnet, nämlich die „Hannoversche Kette“ im Westen, sowie Teile der „Elbkette“ und der „Hannoverisch-Sächsischen Kette“ im Osten.

Diese *Ketten* wurden zuerst in sich ausgeglichen, und liefern dann den festen Rahmen für das dazwischenliegende „Netz“, welches den Namen „Weser-Netz“ führt.

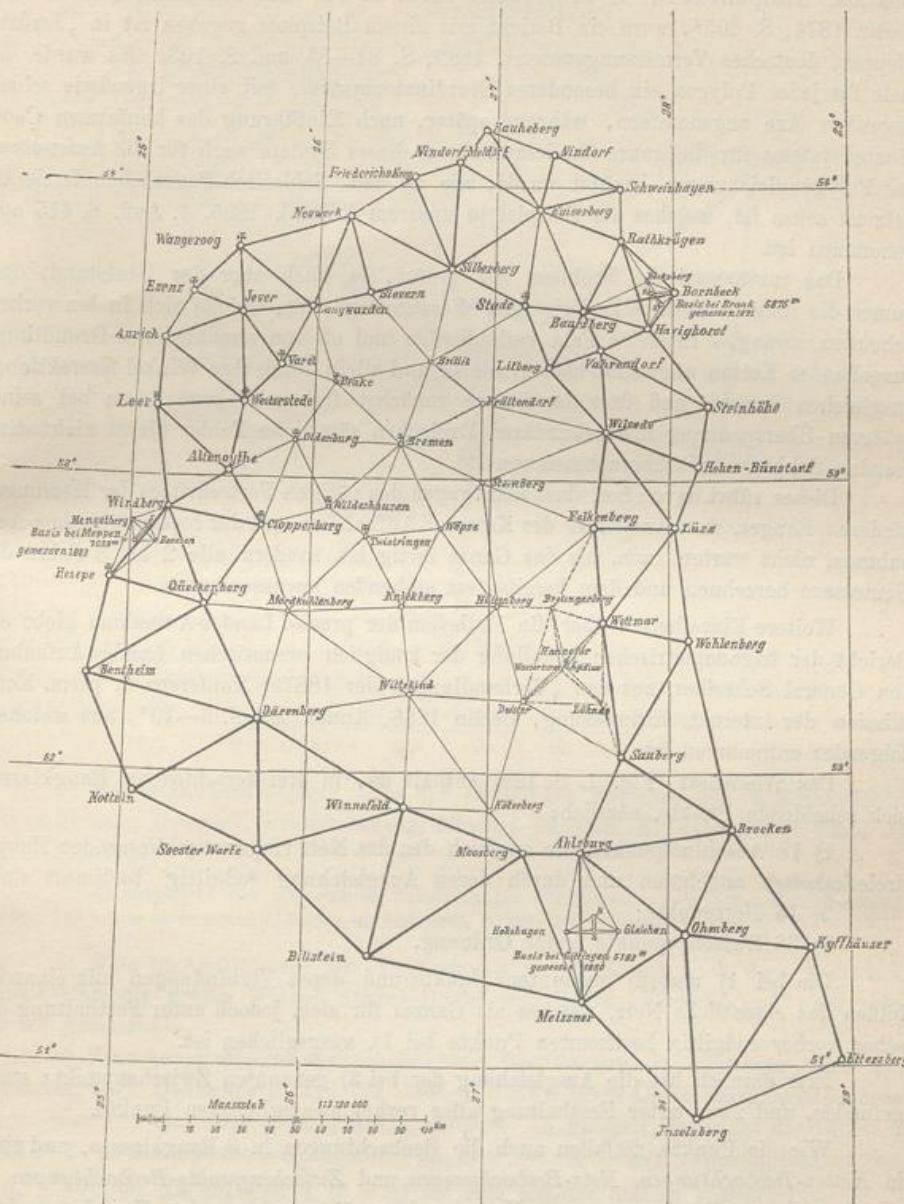
Ehe wir mit der Beschreibung dieser besonderen Verhältnisse fortfahren, müssen wir hier über die Anlage der preussischen Ketten und Netze im allgemeinen das Nötige berichten.

Es geschieht dieses am besten durch Vorführung der geschichtlichen Entwicklung, welche diese Anlage und die zugehörigen Ausgleichungen genommen haben, nach einer Mitteilung von Major *Haupt* in den „Astronom. Nachrichten“ 107. Band, Nr. 2549—2550, (Sept. 1883).

Als in den 60er Jahren dieses Jahrhunderts bei der preussischen Landes-Triangulierung Ketten, welche einen von Dreiecken freien Landesteil umspannten, wieder in sich zusammen schlossen, stellte sich der Übelstand heraus, dass trotz der Aufstellung aller vorhandenen und notwendigen Winkel- und Seiten-Gleichungen identische Punkte, von verschiedenen Seiten her berechnet, *nicht* dieselbe Länge und Breite erhielten, und dass der von Dreiecken freie innere Raum, das Polygon, *nicht* die seinem Inhalt entsprechende Winkelsumme erhielt, denn es fehlten die drei nötigen Polygon-Gleichungen. (Was diese Gleichungen betrifft, so haben wir bereits in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, S. 177 darüber gehandelt.)

Fig. 1.

Triangulierung der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme in der Provinz Hannover.
(Massstab 1 : 3 130 000.)



Die Methode, welche hiefür von der preussischen Landes-Triangulation eingeführt wurde, ist von dem früheren Hauptmann *Schreiber* (späteren Chef der Landes-Aufnahme) angegeben, dasselbe liefert zwei Gleichungen durch die Projektion der inneren Polygonkranz-Begrenzung auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges, sphäroidisches Coordinaten-System.

Diese *Schreibersche* Methode des Polygonkranz-Anschlusses durch rechtwinklige Coordinaten ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. I. Teil, Berlin 1870, S. 421 und Hauptdreiecke II. Teil, Berlin 1874, S. 605“, wozu ein Bericht mit einem Beispiele gegeben ist in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen“, 1885, S. 81—85 und S. 103. Es wurde damals für jedes Polygon ein besonderes Coordinatensystem, mit einer irgendwie schief-liegenden Axe angenommen, während später, nach Einführung des konformen Coordinatensystems für die ganze Landesaufnahme, dieses System auch für die Aufstellung der Polygongleichungen benutzt wurde, wie an dem Schlesisch-Posen-schen Dreiecksnetz zu sehen ist, welches als Beispiel in unserem I. Band, 1895, 4. Aufl. S. 415 aufgenommen ist.

Das mathematische Problem war gelöst, es blieb aber der Übelstand, dass immer die jüngste Kette alle diejenigen Missstimmigkeiten, welche sich in den vorhergehenden, zwanglos in freies Feld verlaufenden und oft von verschiedenen Grundlinien ausgehenden Ketten angehäuft hatten, einzig und allein durch ihre Winkel-Korrektionen ausgleichen musste, und dass der innere zunächst frei gebliebene Raum bei seiner späteren Überspannung mit sekundären Dreiecken sämtliche Fehler dieses nicht stimmenden Schlusses mit übernehmen musste.

Dieses röhrt davon her, dass man wegen des nötigen Fortschrittes der Messungen niederen Ranges, zum Anschluss der Kataster-Aufnahmen und der topographischen Aufnahmen, nicht warten kann, bis das Ganze fertig ist, sondern alle 2 bis 3 Jahre das Gemessene berechnen und dem bereits fest stehenden anpassen muss.

Weitere Einzelheiten über die Methoden der preuss. Landes-Aufnahme giebt ein Bericht der trigonometrischen Abteilung der königlich preussischen Landes-Aufnahme von General Schreiber, aus den „Verhandlungen der 1887er Konferenz d. perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888, Annex X“, S. 6—10, aus welchem folgendes entnommen ist.

Das Wesernetz (Fig. 1. S. 129) enthält 66, in drei verschiedene Rangklassen sich scheidende Punkte, nämlich:

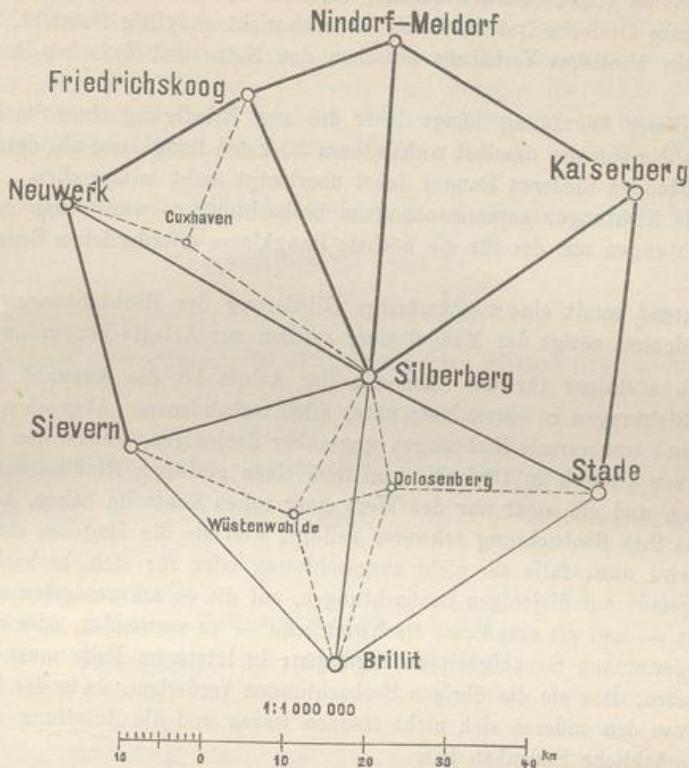
- 1) 18 Anschlusspunkte, die zugleich den das Netz rings umschliessenden Haupt-dreiecksketten angehören und durch deren Ausgleichung endgültig bestimmt sind;
- 2) 15 Netzpunkte;
- 3) 33 Zwischenpunkte erster Ordnung.

Die bei 1) und 2) genannten Punkte und deren Verbindungen mit einander bilden das eigentliche Netz, welches als Ganzes für sich, jedoch unter Festhaltung der schon vorher endgültig bestimmten Punkte bei 1), ausgeglichen ist.

Erst darnach hat die Ausgleichung der bei 3) genannten Zwischenpunkte stattgefunden, und zwar unter Festhaltung aller vorher ausgeglichenen Punkte.

Wie die Punkte, zerfallen auch die Beobachtungen in 3 Rangklassen, und zwar in *Ketten-Beobachtungen*, *Netz-Beobachtungen* und *Zwischenpunkts-Beobachtungen*, je nachdem sie zur Bestimmung von *Kettenpunkten*, *Netzpunkten* oder *Zwischenpunkten* dienen. Auf jeder Station werden diese drei Rangklassen, selbst bei gleichzeitiger Ausführung, dergestalt getrennt von einander gehalten, dass jede für sich auf der Station ausgeglichen werden kann. Demgemäß sind z. B. die Beobachtungen auf der sowohl der Kette als auch dem Netz angehörigen Station Silberberg wie folgt angeordnet und ausgeführt worden (vgl. Fig. 2. S. 131).

Fig. 2.
Station Silberberg. Von Fig. 1, S. 129 in grösserem Massstab, mit Zwischenpunkten.



a) *Ketten-Beobachtungen*: jeder der 15 Winkel zwischen den 6 Ketten-Richtungen Sievern, Neuwerk, Friedrichskoog, Nindorf—Meldorf, Kaiserberg und Stade ist 8 mal gemessen;

Dieses entspricht der allgemeinen Vorschrift für Winkelmessung in allen Kombinationen, welche wir schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 259—272 mitgeteilt haben.

b) *Netz-Beobachtungen*: zur Bestimmung der Richtung nach dem Netzpunkt Brillit sind die beiden Winkel Stade—Brillit und Brillit—Sievern, und zwar jeder 12mal, gemessen;

c) *Zwischenpunkts-Beobachtungen*: zur Bestimmung der Richtung nach dem Zwischenpunkt Dolosenberg sind die beiden Winkel Stade-Dolosenberg und Dolosenberg—Sievern, und zwar jeder 6 mal, gemessen. In gleicher Weise ist die Richtung nach dem Zwischenpunkt Wüstenwohlde an zwei Netzrichtungen angeschlossen worden.

Jede der Rangklassen a, b, c ist für sich auf der Station ausgeglichen.

Eine derartige Anordnung gewährt gegenüber dem Streben, alle auf einer Station vorhandenen Richtungen möglichst zusammenhängend zu beobachten, den Vorteil, dass die Beobachtungen niederen Ranges in den Zwischenzeiten, wo die Luft-Beschaffenheit Beobachtungen höheren Ranges zu machen ohnehin verbietet, ausgeführt werden können, indem sie wegen der kleineren Entfernungen nicht nur leichter gelingen, sondern auch bei etwas weniger günstigen Umständen angestellt werden dürfen; denn es liegt auf

der Hand, dass Netz-Beobachtungen, deren Fehler auf das Gebiet des Netzes beschränkt bleiben, nicht so genau zu sein brauchen, wie Ketten-Beobachtungen, deren Fehler sich über das ganze Dreiecks-System, soweit es noch nicht endgültig feststeht, fortpflanzen, und dass ein ähnliches Verhältnis zwischen den Netz- und Zwischen-Beobachtungen besteht.

Bei dieser Anordnung hängt daher die zur Erledigung einer Station erforderliche Zeit allein von der daselbst vorhandenen höchsten Rangklasse ab, dergestalt, dass die Beobachtungen niederen Ranges dabei überhaupt nicht mitsprechen. Wollte man dagegen alle Richtungen zusammenhängend beobachten, so würde man genötigt sein, alle Beobachtungen mit der für die höchste Rangklasse erforderlichen Genauigkeit auszuführen.

Während somit eine zweckmässige Gliederung der Beobachtungen Arbeits-Ersparnis bedeutet, nötigt der Mangel einer solchen zur Arbeits-Vergeudung.

Noch wichtiger für die Ökonomie der Arbeit ist die Auswahl der zu beobachtenden Richtungen in einem Netz unter allen vorhandenen. Abgesehen davon, dass diagonale und transversale Richtungen gegenüber denjenigen, welche den besten Rechnungsweg von Dreieck zu Dreieck vermitteln, einen geringen Einfluss auf die Punkt-Bestimmung, und oft sogar nur den Wert einer rohen Kontrolle haben, kommt in Betracht, dass ihre Beobachtung schwerer gelingt, weil sie die längeren sind. Der Beobachter wird also, falls sie nicht ausgeschlossen oder für sich beobachtet werden, genötigt, gerade auf diejenigen Beobachtungen, auf die es am wenigsten ankommt, die meiste Zeit — und oft eine kaum erschwingliche — zu verwenden, oder sich bei ihnen mit einer geringeren Genauigkeit zu begnügen; in letzterem Falle muss er sich aber gefallen lassen, dass sie die übrigen Beobachtungen verderben, da in der Ausgleichung die einen von den anderen sich nicht trennen lassen und die Zuteilung verschiedener Gewichte erhebliche Bedenken hat.

Über Zeitaufwand, Genauigkeit sind zu dem Wesernetz (vgl. S. 129) Angaben gemacht:

Zur Bestimmung der 15 Netzpunkte des Wesernetzes sind 4760 Einstellungen (sämtlich nach Heliotropen), und zur Bestimmung der 33 Zwischenpunkte, 3536 Einstellungen (davon 3247 nach Heliotropen) gemacht worden.

Hiermit sind beschäftigt gewesen:

im Jahre 1886: eine Sektion 162 Tage,

" " 1887: drei Sektionen bezw. 141, 136 und 74 Tage.

Jede Sektion bestand aus 1 Beobachter, 1 bis 2 Assistenten und 10 bis 15 kommandierten Soldaten.

Gleichzeitig sind von diesem Personal alle einstellbaren Türme je 6 mal angeschnitten und alle Centrier- und Festlegungs-Arbeiten ausgeführt worden.

Wie aus der Karte (S. 129) zu ersehen, enthält das eigentliche Netz 60 Bedingungs-Gleichungen, abgesehen von 16 örtlichen Winkel-Gleichungen auf den Anschluss-Stationen. Es kommen somit durchschnittlich 4 Netz-Bedingungen auf den Punkt. Die Ausgleichung ist übrigens nicht nach Bedingungs-Gleichungen (Correlaten), sondern nach Elementen, und zwar nach ebenen rechtwinkligen Coordinaten, ausgeführt worden, so dass anstatt eines Systems von 60 nur ein solches von 30 Normal-Gleichungen (da 15 Punkte zu bestimmen waren) gebildet und aufgelöst zu werden brauchte.

Von den 121 durch die Netz-Ausgleichung bestimmten Richtungs-Verbesserungen sind 6 grösser als $1''$, die grösste hat die Richtung Hüttenberg—Deister mit $1,43''$ erhalten. Die Richtungs-Verbesserungen liefern übrigens kein zutreffendes Genauigkeitsmass für die Winkel-Bestimmung im Wesernetz, da der ganze Anschluss-Zwang in ihnen enthalten ist. Frei von letzterem sind dagegen die Schlussfehler der 38 Dreiecke und nicht in Dreiecke zerlegten Vier- und Fünfecke, in denen alle Winkel gemessen worden sind. Von diesen Schlussfehlern (die der Vier- und Fünfecke, den

Gewichts-Verhältnissen entsprechend, bzw. mit $\sqrt{\frac{3}{4}}$ und $\sqrt{\frac{3}{5}}$ multipliziert) liegen:

2 zwischen $2,5''$ und $2,0''$

6 " $2,0''$ " $1,0''$

30 " $1,0''$ " $0,0''$

Die Summe ihrer Quadrate ist 27,22, mithin der mittlere Dreiecks-Schlussfehler:

$$\sqrt{\frac{27,22}{38}} = 0,85'',$$

woraus sich der mittlere Fehler eines durch Stations-Ausgleichung bestimmten Winkelwertes gleich $0,85'' \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,49''$ ergibt.

Fig. 3.
Massstab 1:1 1000 000.

(Ergänzungen zu Fig. 1. S. 129.)

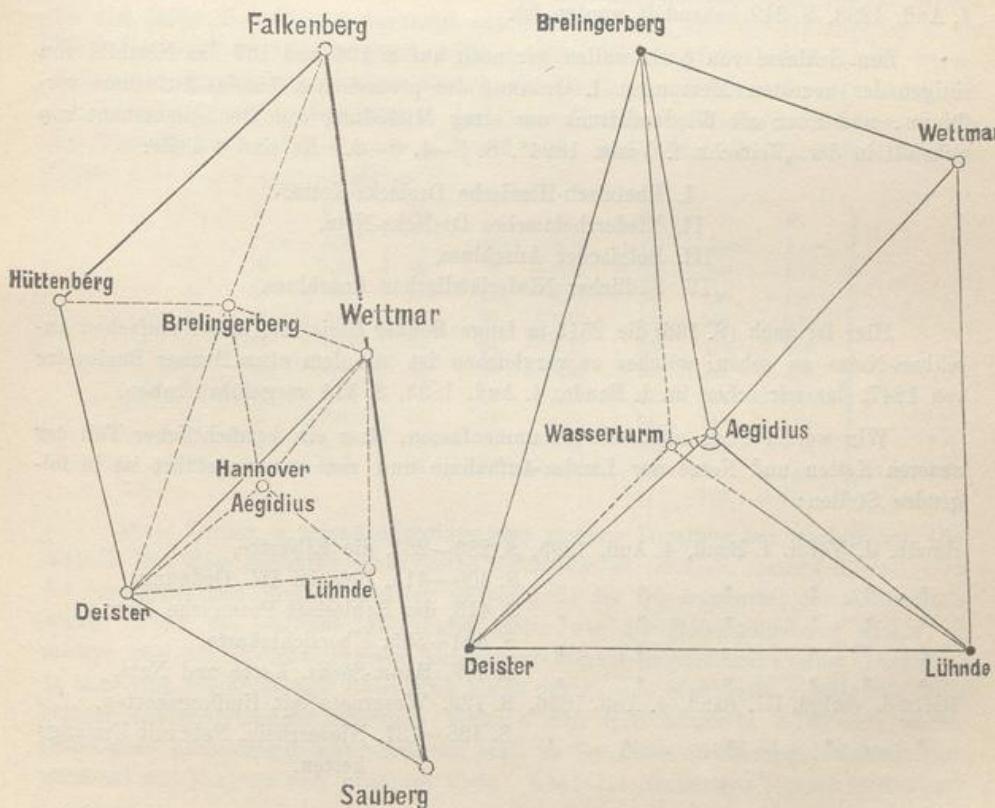


Fig. 4.
Massstab 1:500 000.

Die Berechnung der Messungen geschieht durchweg, bis zur niedrigsten Ordnung herab, nach der Methode der kleinsten Quadrate, und zwar unter volligem Anschluss der neu hinzukommenden an die bereits feststehenden Teile, so dass schliesslich ein über das ganze Land ausgedehntes widerspruchsfreies Netz von durchschnittlich 20 Punkten auf 100 Quadrat-Kilometer entsteht.

Die beste Übersicht der Ketten und Netze der preussischen Landes-Aufnahme erhält man aus den 2 Kartenbeilagen in 1: 2 000 000 zu dem neuesten Band: „Die königlich preussische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke VII Teil, Berlin 1895“. Auch ist dazu nochmals an all das zu erinnern, was dazu bereits in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, in § 107—108, § 131. u. a. mitgeteilt ist.

Im Anschluss hieran geben wir mit Fig. 3. und Fig. 4. S. 133 noch zwei weitere Vervollständigungen des Gesamt-Netzes von Fig. 1. S. 129 und zwar in der Gegend der Stadt Hannover. Fig. 3. zeigt die Einschaltung des Aegidienturmes in Hannover in das Wesernetz, zusammen mit Brelingerberg und Lühnde.

Nachdem so für die Stadt-Vermessung von Hannover *ein* Punkt Aegidius festgelegt war, wurde noch ein zweiter Punkt Wasserturm dazu bestimmt, wie Fig. 4. in doppeltem Massstab von Fig. 3. andeutet.

Dabei ist Wasserturm als „Folgepunkt“ im Anschluss an *Aegidius* als „Leitpunkt“ gemessen und ausgeglichen, wie wir des näheren in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1889, S. 1—14 mitgeteilt haben (vgl. auch Band I, 4. Aufl. 1895, § 104).

Dieses ist zugleich der Nachweis für die Basis der Hannoverschen Stadt-Triangulierung, welche in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 185. und in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 249 behandelt worden ist.

Zum Schlusse von § 21. wollen wir noch auf S. 136 und 137 das Netzbild von einigen der neuesten Messungen I. Ordnung der preussischen Landes-Aufnahme vorführen, und zwar als Wiederabdruck aus einer Mitteilung von Oberstleutnant *von Schmidt* in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 1–4, 8–9. Es sind 4 Teile:

- I. Rheinisch-Hessische Dreiecks-Kette,
 - II. Niederrheinisches Dreiecks-Netz,
 - III. Belgischer Anschluss,
 - IV. Südlicher Niederländischer Anschluss

Hier ist auch (S. 136) die 2513 m lange Bonner Basis mit ihrem einfachen Anschluss-Netze zu sehen, welches zu vergleichen ist mit dem *alten* Bonner Basisnetze von 1847, das wir schon im I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 514 vorgeführt haben.

Wir wollen auch nochmals zusammenfassen, dass ein beträchtlicher Teil der neueren Ketten und Netze der Landes-Aufnahme nun von uns vorgeführt ist in folgenden Stellen:

Handb. d. Verm. I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 280—281, die Elbkette,

" " " " " " S. 400—411, Beispiel III. Ordnung,

" " " " " S. 415, das Schlesisch-Posensc

" " " " " S. 504—505, Übersichtskarte,
S. 509, H. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Hiezu i. vorlag III. Band 4. Aufl. 1896 S. 129. Wasymata mit Hufschuhplatten

Mit diesen Netzbildern kann man auch die Übersichtskarte der Haupttriangulationen des Deutschen Reiches in 1:2 000 000, welche wir früher in dem Werke „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882“ herausgegeben haben, ziemlich auf den heutigen Stand ergänzen.

§ 22. Seiten-Refraktion.

Bei den Unregelmässigkeiten der Wärme-Verteilung in der Atmosphäre, entsprechend der ungleichen Wärme-Ausstrahlung der Erdoberfläche (Wasser und Land, Wälder und Sand u. s. w.), ist es an sich wahrscheinlich, dass die Lichtstrahlen in der Atmosphäre nicht nur nach der Höhe abgelenkt werden, sondern auch *seitlich* kleine Refraktionen erleiden.

Wenn z. B. ein Heliotropenlicht im Fernrohr nicht als ein Punkt, sondern als ein Lichtfleck von $60''$ Durchmesser erscheint, so haben jedenfalls die seitlichen Lichtteile seitliche Brechungen von $\pm 30''$ erfahren, und ob das Intensitäts-Zentrum des Lichtflecks, auf welches die Fadenmitte eingestellt wird, allein sich in einer vertikalen Ebene fortgepflanzt hat, kann man nicht sicher wissen.

Wichtiger als solche Überlegungen sind *Beobachtungen*, zu denen wir nun übergehen.

I. Struves Beobachtungen, 1829.

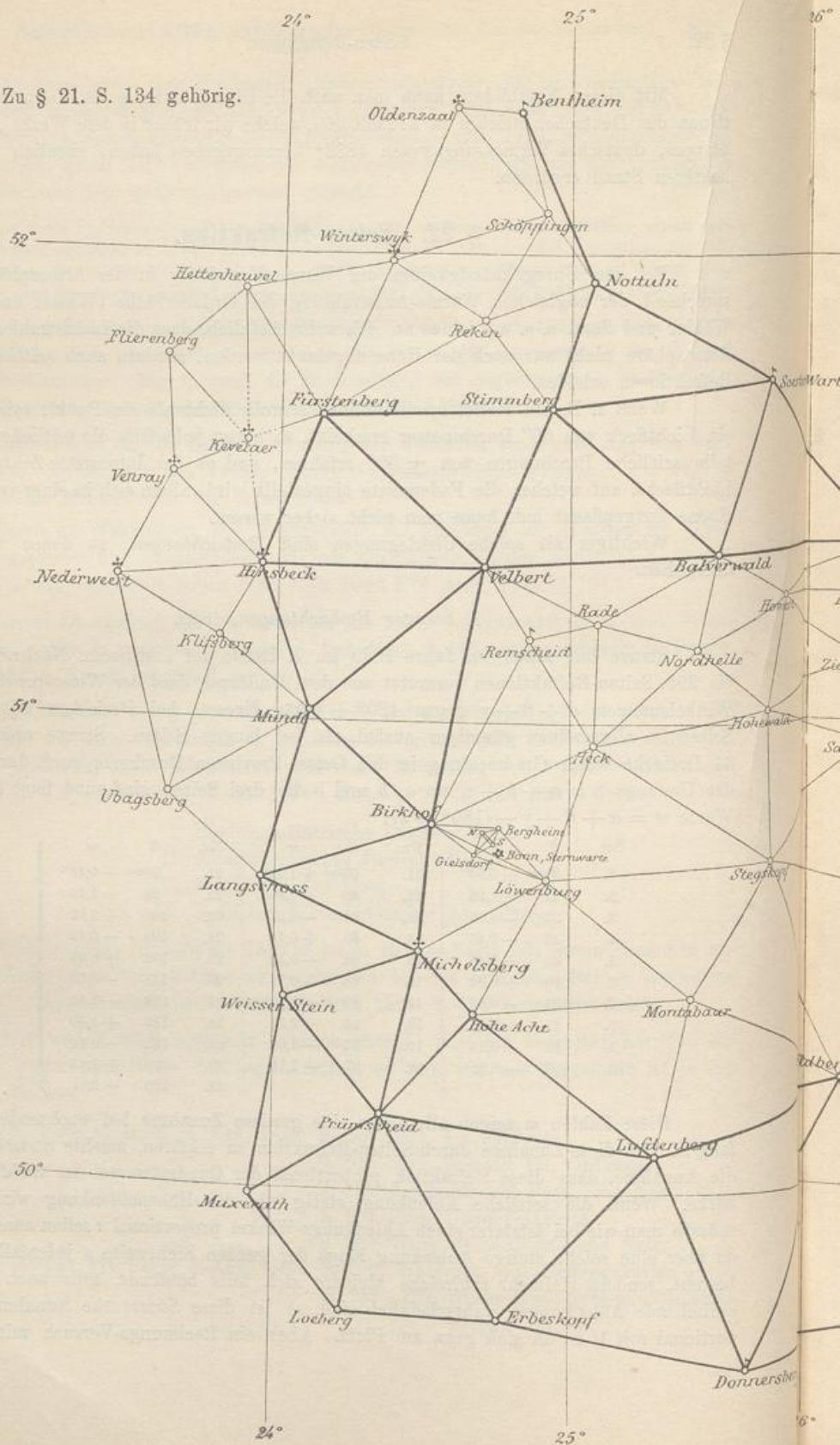
Struve hat schon im Jahre 1829 im 7. Bande der „astronom. Nachr.“ S. 391 bis 395, Seiten-Refraktionen vermutet aus dem Umstand, dass der Widerspruch w der Winkelsummen $\alpha + \beta + \gamma$ gegen $180^\circ + \text{sphär. Excess}$, bei Dreiecken mit kurzen Seiten im allgemeinen günstiger ausfiel, als bei langen Seiten. Struve ordnete die 31 Dreiecke seiner Gradmessung in den Ostsee-Provinzen Russlands nach der Grösse des Umfangs $S = a + b + c$, wo a , b und c die drei Seiten sind, und fand folgende Werte $w = \alpha + \beta + \gamma - (180^\circ + \epsilon)$:

Nr.	S	w	Nr.	S	w	Nr.	S	w
1.	20 km	+ 0,50''	11.	63 km	+ 1,09''	21.	98 km	- 0,16''
2.	22	- 1,36	12.	66	- 0,55	22.	98	- 1,15
3.	33	- 0,50	13.	80	- 0,55	23.	100	+ 1,82
4.	43	+ 0,46	14.	80	+ 0,18	24.	100	- 0,13
5.	43	+ 0,45	15.	84	- 0,19	25.	102	+ 0,03
6.	49	+ 0,22	16.	88	- 0,26	26.	111	- 0,28
7.	51	- 0,33	17.	89	+ 2,18	27.	113	- 1,43
8.	57	- 0,46	18.	94	- 0,51	28.	115	+ 1,40
9.	58	- 0,15	19.	95	- 1,03	29.	122	- 0,14
10.	59	- 0,61	20.	97	- 1,15	30.	129	+ 1,03
						31.	129	+ 2,81

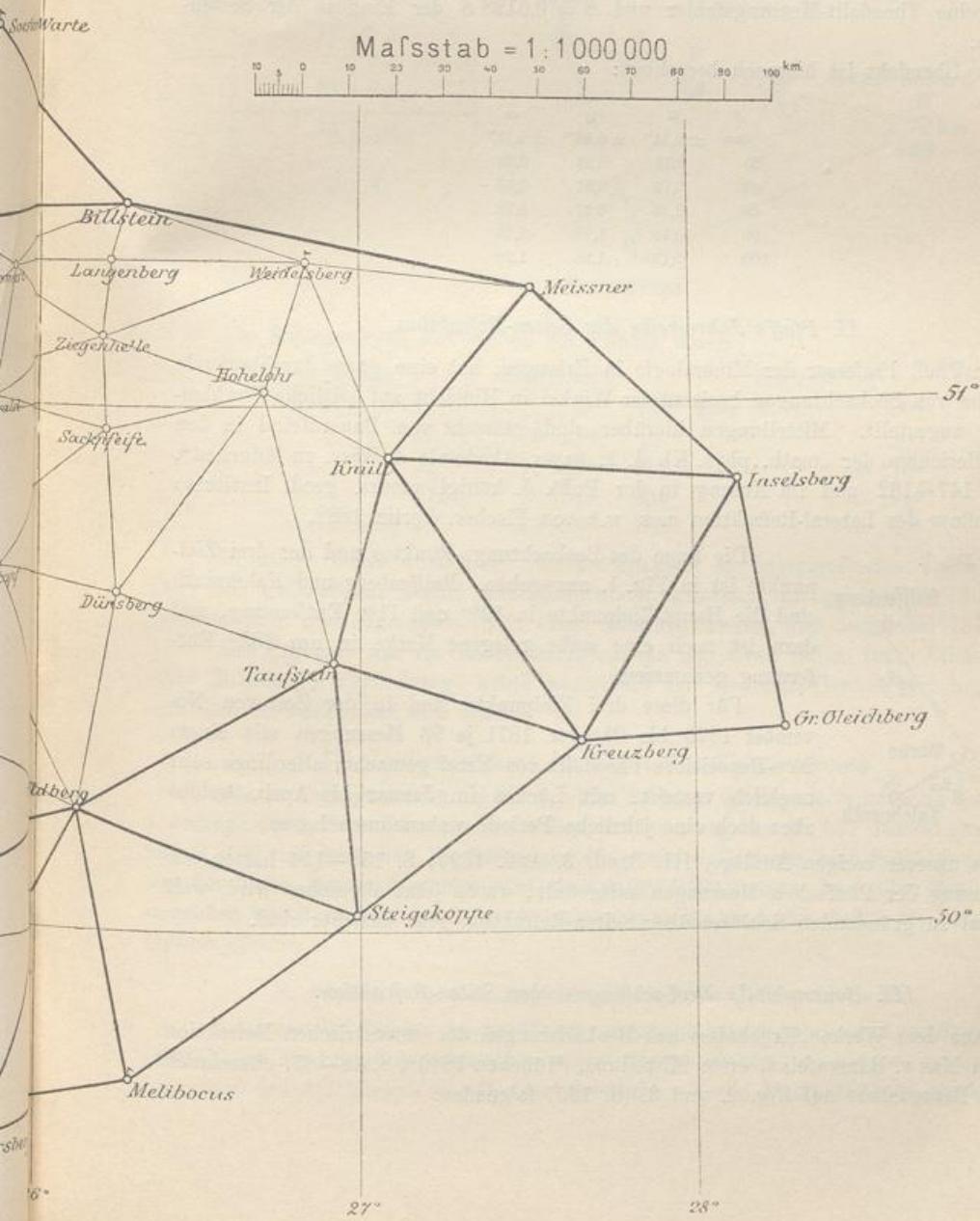
(1)

Diese Zahlen w zeigen allerdings eine gewisse Zunahme bei wachsendem Umfang S . Um diese Zunahme durch Seiten-Refraktion zu erklären, machte Struve zuerst die Annahme, dass diese Refraktion proportional der Quadratwurzel der Sichtweite s wirke. Wenn die seitliche Ablenkung stetig wie die Höhenablenkung wirkte, so müsste man wie bei letzterer einen Ablenkungs-Winkel proportional s selbst annehmen; da aber eine solche stetige Ablenkung längs der ganzen Sichtweite s jedenfalls nicht besteht, sondern vielmehr zahlreiche kleinere sich teils häufende, teils auch wieder aufhebende Ablenkungen wahrscheinlich sind, so ist diese Struvesche Annahme, proportional mit \sqrt{s} , an sich ganz am Platz. Aber ein Rechnungs-Versuch mit dieser

Zu § 21. S. 134 gehörig.



Rheinisch-Hessische Dreiecks-Kette,
 Niederrheinisches Dreiecks-Netz
 und
 Südlicher Niederländischer Anschluss.



Annahme gab einen inneren Widerspruch, weshalb ein Versuch in anderer Form gemacht wurde, so dass der mittlere Fehler m eines Winkels mit den Schenkel-Längen a und b von Struve so dargestellt wurde:

$$m^2 = e^2 + k^2 (a^2 + b^2) \quad (2)$$

also: $w^2 = 3e^2 + 2k^2 (a^2 + b^2 + c^2) \quad (3)$

Aus den in dieser Form geführten Struveschen Berechnungen haben wir die Formel gebildet:

$$m = \sqrt{0,152^2 + (0,0128 S)^2} = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2} \quad (4)$$

Dabei ist m der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung, $\mu = 0,152''$ der mittlere reine Theodolit-Messungsfehler und $\sigma = 0,0128 S$ der Einfluss der Seiten-Refraktion.

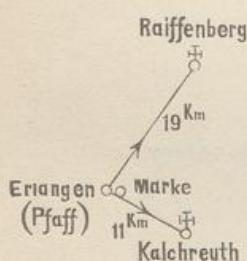
Zur Übersicht ist hiernach berechnet:

S	μ	σ	m
0km	$\pm 0,15''$	$\pm 0,00''$	$\pm 0,15''$
20	0,15	0,26	0,30
40	0,15	0,51	0,53
60	0,15	0,77	0,78
80	0,15	1,02	1,03
100	0,15	1,28	1,29

II. Pfaff's Jahresreihe der Seiten-Refraktion.

Dr. Pfaff, Professor der Mineralogie in Erlangen, hat eine ganze durchlaufende Jahresreihe von Beobachtungen horizontaler Winkel in Hinsicht auf seitliche Strahlen-Brechung angestellt. Mitteilungen hierüber sind gemacht von Bauernfeind in den Sitzungs-Berichten der „math. phys. Kl. d. k. bayer. Akademie d. Wiss. zu München“, 1872, S. 147—162 und im Auszug in der Publ. d. königl. preuss. geod. Instituts: „Der Einfluss der Lateral-Refraktion u. s. w.“ von Fischer, Berlin 1882.

Fig. 1.



Die Lage des Beobachtungs-Punktes und der drei Zielpunkte ist in Fig. 1. angegeben. Raiffenberg und Kalchreuth sind die Haupt-Zielpunkte in 19km und 11km Entfernung, und dazu ist noch eine nahe gelegene Marke in nur 283m Entfernung genommen.

Für diese drei Zielpunkte sind in der Zeit von November 1870 bis Oktober 1871 je 93 Messungen mit einem 20cm-Repetitions-Theodolit von Ertel gemacht; allerdings sehr ungleich verteilt, mit Lücken im Januar bis April, welche aber doch eine jährliche Periode wahrnehmen lassen.

In unserer vorigen Auflage, III. Band, 3. Aufl. 1890, S. 153—154 hatten wir einen Auszug der Pfaffschen Messungen mitgeteilt, wovon jetzt abgesehen wird, weil die darauf zu gründenden Schlüsse über Seiten-Refraktion sehr unsicher sind.

III. Bauernfeinds Beobachtungen über Seiten-Refraktion.

Aus dem Werke „Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion von Carl Max v. Bauernfeind, erste Mitteilung, München 1880“, S. 48—65, entnehmen wir mit Bezugnahme auf Fig. 2. und 3. (S. 139) folgendes:

Auf dem Punkte Döbra befand sich ein *Ertelscher Höhenkreis* mit Fernrohr, fest aufgestellt, mit welchem 4 Zielpunkte *N*, *II*, *III*, *IV* (Fig. 3.) in nahezu gerader Linie beobachtet wurden. Diese 4 Zielpunkte erschienen gemeinsam im Gesichtsfeld des Fernrohrs, so dass die Horizontal-Winkel, stets auf den Nullpunkt *N* bezogen, durch ein Okular-Mikrometer sehr genau gemessen werden konnten. Das Gesichtsfeld des Fernrohrs mit den 4 Zielpunkten ist in Fig. 2. angedeutet, ohne Umkehrung, so dass der Punkt *N*, welcher der tiefste ist, unten erscheint.

Fig. 2.
Gesichtsfeld des Fernrohrs
in Döbra.

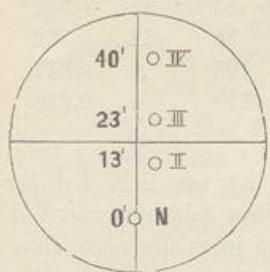
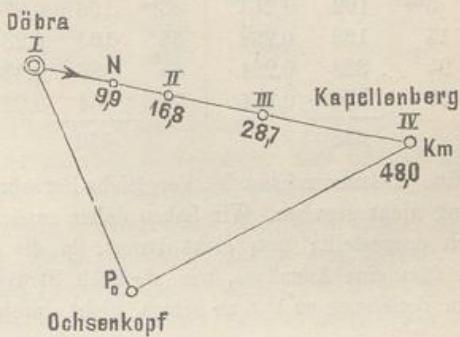


Fig. 3.
Lageplan (1 : 1 000 000).



Die Entfernungen und Höhen der Punkte waren:

Punkt	Entfernung	Höhen
Döbra <i>I</i>	0 ^m	795 ^m über N. N.
<i>N</i>	9 921 ^m	..
<i>II</i>	16 766 ^m	619 — 176 ^m
<i>III</i>	28 701 ^m	604 — 191 ^m
Kapellenberg <i>IV</i>	47 958 ^m	765 — 30 ^m

In dieser Weise wurden die Horizontalwinkel in durchlaufenden Tagesreihen Tags mit Heliotropen, Nachts mit Lampenlicht, gemessen, im ganzen an 12 Tagen zwischen Juni und September 1877, sowie zwischen August und September 1878.

Das Ergebnis war für Seiten-Refraktion ein negatives, indem (nach Elimination einer Mikrometer-Verdrehung) keine ausserhalb der Messungs-Genauigkeit liegenden seitlichen Abweichungen sich fanden.

IV. Dreiecksschlüsse der sächsischen Triangulierung.

Bei der Triangulierung des Königreichs Sachsen, welche wir in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, S. 140 beschrieben haben, hat sich ergeben (S. 550 unseres Berichtes und S. 102 des amtlichen Werkes), dass die grössten Dreiecke gute Schlüsse zeigten, was durch den Umstand erklärt wird, dass lange Sichten stets *hoch* über den Boden weggehen und deswegen von Seiten-Refraktion weniger zu leiden haben als kurze und niedere Sichten.

V. Fischer's Vergleichung der preussischen Triangulierungen.

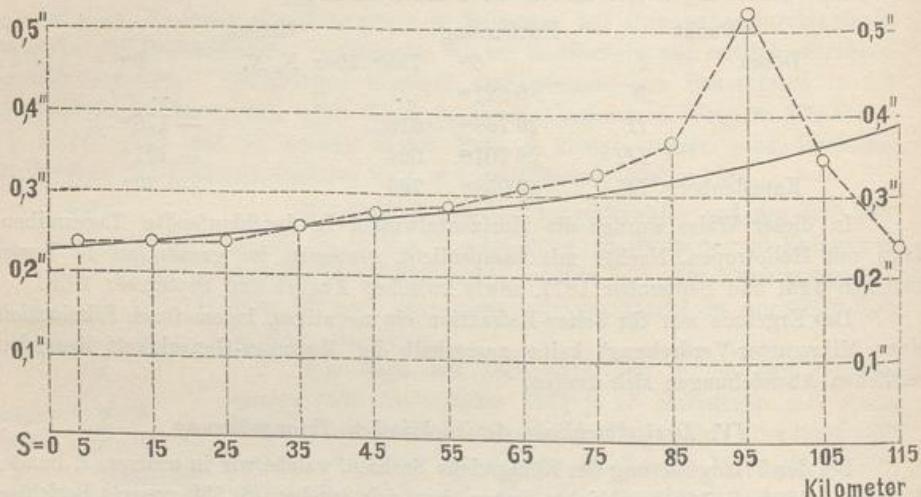
Sektions-Chef Fischer im geodätischen Institut hat im Jahre 1882 veröffentlicht: „Publikation des königlich preussischen geodätischen Instituts. Der Einfluss der Lateral-Refraktion auf das Messen von Horizontalwinkeln. Berlin 1882“ (Bericht hierüber s.

„Zeitschr. f. Verm. 1884“, S. 79—81). Es wurden von den preussischen Triangulierungs-Ausgleichungen, Gradmessung in Ostpreussen, Küsten-Vermessung u. s. w. bis zum rheinischen und hessischen Dreiecksnetz die sämtlichen Netz-Verbesserungen in der Form von Richtungs-Verbesserungen (mit Hilfe der Besselschen Nullpunkts-Korrekturen, vgl. Band I, § 74) dargestellt, und, in der Zahl 1434, nach der Grösse der Sichtweiten S geordnet, wie folgende Zusammenstellung zeigt, in welcher m den Mittelwert der fraglichen Richtungs-Verbesserungen in der Gruppe mit der durchschnittlichen Sichtweite S , und p die jeweilige Zahl in einer Gruppe bedeutet.

S	p	m	S	p	m	S	p	m
5 ^{km}	102	0,243''	45 ^{km}	196	0,278''	85 ^{km}	18	0,361''
15	198	0,238	55	100	0,281	95	12	0,522
25	328	0,234	65	86	0,308	105	6	0,347
35	330	0,254	75	54	0,322	115	4	0,238
	958			436			40	[p] = 1434

Eine zusammenfassende Vergleichs-Berechnung ist von dem Urheber dieser Sammlung nicht gegeben. Wir haben daher zunächst diese Zahlen m und S in Fig. 4. graphisch dargestellt; man sieht daraus, da die Kurve jedenfalls nach oben konkav verläuft, dass eine Annahme, wie sie auch Struve zuerst versuchte, das Anwachsen von m in Beziehung zu \sqrt{S} zu setzen, nicht durchzuführen ist.

Fig. 4.
Richtungsfehler als Funktion der Entfernung.



Wir haben daher drei andere Ausgleichs-Versuche gemacht, wobei immer die Gruppenzahlen p als Gewichte im gewöhnlichen Sinne genommen wurden:

- 1) $m = 0,208'' + 0,0016 S$
- 2) $m = 0,232'' + (0,0415 S)^2$
- 3) $m = \sqrt{0,237^2 + (0,00263 S)^2} = \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$

In Bezug auf die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler sind alle diese 3 Formen nahezu gleich; im übrigen hat die dritte Form am meisten für sich; dieselbe giebt folgendes:

<i>S</i>	<i>p</i>	μ	σ	<i>m</i>	<i>m'</i> beob- achtet	$m-m'=v$
5km	102	0,237''	0,013''	0,237''	0,243''	-0,006''
15	198	0,237	0,039	0,240	0,238	+0,002
25	328	0,237	0,066	0,246	0,234	+0,012
35	330	0,237	0,092	0,254	0,254	0,000
45	196	0,237	0,118	0,265	0,278	-0,013
55	100	0,237	0,145	0,278	0,281	-0,008
65	86	0,237	0,171	0,292	0,308	-0,016
75	54	0,237	0,197	0,308	0,322	-0,014
85	18	0,237	0,224	0,326	0,361	-0,035
95	12	0,237	0,250	0,344	0,522	-0,178
105	6	0,237	0,276	0,364	0,347	+0,017
115	4	0,237	0,302	0,384	0,238	+0,146

1434

Zu Fig. 4. ist über die drei letzten Werte für 95, 105 und 115km, welche zusammen nur 22 mal (oder 1,5 %) vorkommen, zu bemerken, dass dieses wohl nur Zufalls-Werte sind, welche das bis 85km schön verlaufende Gesetz nicht stören.

Im übrigen kann man nun sagen, dass nach den 50 jährigen Gesamt-Erfahrungen der preussischen Triangulierungen, weite Sichten im allgemeinen ungenauer sind als kurze. Ob der Grund hievon in eigentlicher sogen. Seiten-Refraktion liegt, oder nur darin, dass weite Sichten selten und nur undeutlich zu beobachten sind, ist für die darauf zu gründenden praktischen Folgerungen zunächst gleichgültig.

Wenn man noch überlegt, ob die grössere Netz-Unsicherheit bei langen Sichten daher röhrt, dass diese Sichten selten zu erlangen waren, und deswegen mit *geringeren Anschnittszahlen* in die Ausgleichung eingingen, so müssten die älteren Richtungs-Messungen, bei welchen ein fester Plan der Messungs-Anordnung nicht vorhanden war, von den neueren Winkel-Messungen in allen Kombinationen, unterschieden werden; reduziert man aber auf gleichen Zeit- oder Arbeits-Aufwand, so kommen die langen Sichten jedenfalls in den Nachteil.

In unserer vorigen Auflage, III. Band, 1895, 3. Aufl. S. 156—159, haben wir auch eine physikalische *Theorie* der Seiten-Refraktion versucht, auf welche im Falle weiteren Beobachtungs-Materials zurückzukommen wäre.

Grösse der Theodolite.

Indem mit diesem § 22. über Seiten-Refraktionen alles, was auf Winkelmessung Bezug hat, abgeschlossen wird, kann hier noch ein Nachtrag zu § 5. und überhaupt auch zu unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, Kap. VI und Kap. VIII gebracht werden, nämlich betreffend die Grösse der Theodolite, mit Kreisdurchmesser-Wahl zwischen 10cm und 40cm.

Die trigonometrische Abteilung der preussischen Landesaufnahme hat die in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 182—183 abgebildeten Instrumente in folgenden Grössenverhältnissen:

Für Triangulierung I. Ordnung Fig. 13. S. 182 mit 35cm und 27cm Kreisdurchmesser,

"	"	II.	"	"	"	"	21cm	"
"	"	III.	"	"	14.	"	183	"
"	"						14cm	"

Die Hannoversche Stadt-Triangulierung, welche in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, § 60. mitgeteilt ist, mit einem mittleren Fehler einer Netzrichtung = $\pm 1,0''$,

(I. Band, 1895, S. 195) ist mit den kleinen 13^{cm} -, 14^{cm} -Theodoliten von Band II, 1893, S. 183 und S. 184 ausgeführt, mit je 12 Sätzen im Hauptnetz (Band I, S. 185) und je 4 Sätzen in den Punkteinschaltungen (Band I, S. 400—401). Andere Stadtvermessungen haben teilweise grössere Instrumente, z. B. Berlin („Zeitschr. f. Verm.“ 1881, S. 13) ein 27^{cm} -Theodolit und 2 kleinere 14^{cm} -Instrumente, beide mit Nonien, Strassburg („Zeitschr. f. Verm.“ 1893, S. 130) ein 21^{cm} -Mikroskop-Theodolit und ein $14,5^{\text{cm}}$ -Nonien-Theodolit, Leipzig („Zeitschr. f. Verm.“ 1895, S. 104) ein 32^{cm} -Theodolit und ein 16^{cm} -Theodolit, beide mit Mikroskopen.

Über die Grösse der Theodolite, bzw. ob man zu gewissen Zwecken mit kleinen Instrumenten ausreichen kann, welche natürlich für Transport und Handhabung die Bequemsten sind, hat auf der Versammlung des Deutschen Geometer-Vereins 1895 in Bonn eine Erörterung stattgefunden, über welche in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1895 S. 496 und ausführlicher in den Mitteilungen des Mecklenburgischen Geometer-Vereins 1895 S. 5—7 berichtet wird. An letztere Stelle giebt Kammeringenieur Vogeler noch einige weitere Angaben hinzu. Wir drucken dieses im wesentlichen hier ab:

Prof. Koll trug vor: „Es hat sich bei den trigonometrischen Arbeiten der preussischen Katasterverwaltung ganz sicher ergeben, dass eine, allen Anforderungen vollauf genügende Triangulation I. und II. Ordnung mit kleinen 5 zölligen ($13,5^{\text{cm}}$) Schraubenmikroskop-Theodoliten bei nur 12 maliger Beobachtung der Richtungen in I. Ordnung und 8 maliger Beobachtungen II. Ordnung ausgeführt werden kann.“ —

Kammeringenieur Vogeler entgegnete hierauf: In Mecklenburg wird zur Zeit die Triangulierung des Netzes II. und III. Ordnung beschafft, wobei wir 8 zöllige ($21,5^{\text{cm}}$) Mikroskop-Theodolite verwenden. Wir haben seit 30 Jahren in Mecklenburg für die Zwecke der Kleintriangulierung dieselben kleinen Instrumente von nur $13,5^{\text{cm}}$ im Gebrauch, wie die vorher genannten, wir wissen auch sehr wohl, dass man mit diesen Theodoliten sehr genau messen kann, aber trotzdem haben wir uns entschlossen, neue grössere Instrumente anzuschaffen.

Wir hatten schon auf unserer Geometer-Versammlung 1891 in Berlin erfahren, wie günstige Resultate mit den fünfzölligen Theodoliten in der Kataster-Verwaltung gemacht worden seien, und weiter, dass diese Erfahrungen niedergelegt seien in dem Werke „Die Verbindungs-Triangulation zwischen dem Rheinischen Dreiecksnetze und der Triangulation des Dortmunder Kohlenreviers“, welches von Herrn Professor Dr. Reinhertz herausgegeben ist. Wir haben dieses Werk eingehend studiert und gefunden, dass die Erfahrungen sich nur auf wenige trigonometrische Punkte stützen, die man in den Jahren 1881 bis 1883 gemessen hat. Es sind dieses die Erfahrungen von zwei Trigonometern mit einem Instrumente. Es mag sein, dass gerade dieses Instrument besonders leistungsfähig gewesen ist; denn nach S. 31 der Verbindungs-Triangulation beträgt der mittlere Fehler einer Richtung $\pm 2,01''$ (mit Messung in zwei Fernrohrlagen). Nach unseren Erfahrungen und den Erfahrungen anderer Trigonometern mit verschiedenen Instrumenten kann man die durchschnittliche Leistungsfähigkeit fünfzölliger Mikroskop-Theodolite auf einen mittleren Richtungsfehler von $3''$ bis $4''$ veranschlagen, während die achtzölligen Theodolite nur etwa einen Fehler von $1,5''$ bis $2''$ erwarten lassen. Dies heisst aber mit andern Worten, dass man mit einem fünfzölligen Instrument einen Winkel viermal so oft beobachten muss, wie mit einem achtzölligen Instrument, wenn man dieselbe Genauigkeit erreichen will. Bei der Triangulierung eines Netzes II. und III. Ordnung hat man mit Entfernung von 3 bis 4 Kilometer zu thun; hier gilt es, die günstigsten Beleuchtungsverhältnisse auszunützen und durch wenige Beobachtungen schon gute Resultate zu erzielen. Es ist hier also ein leistungsfähiges Instrument, und besonders ein Instrument mit starkem Fernrohr am Platze. Auch durch den Transport des grösseren Instruments werden die Arbeiten nicht verteuert, denn bei einer Triangulierung II. und III. Ordnung hat man einen grossen Apparat an Geräten mitzunehmen und Entfernung von 3—4 km von einem Punkt zum andern zurückzulegen, daher ist ein Wagen unbedingt erforderlich. Wir haben bei der Neuanschaffung von Instrumenten uns nach den langjährigen Erfahrungen gerichtet, die man bei der preussischen Landes-Aufnahme gemacht hat. Diese Behörde verwendet für die Triangulierung II. Ordnung einen achtzölligen Theodolit (abgebildet in unserem II. Bande, 1895, 4. Aufl. S. 182) und zwei ebensolche Instrumente sind in Mecklenburg jetzt im Gebrauch. Ein Sektions-Chef des geodätischen Instituts, welcher grosse Erfahrung in Haupttriangulierungen besitzt, hat sich über diese Instrumentenfrage so aus-

gesprochen: Bei allen Theodoliten steht die Grösse des Fernrohrs mit der Grösse des Kreises in einem gewissen Verhältnisse. Wenn nun ein gutes Fernrohr für Triangulierungen von Netzen I und II. Ordnung durchaus am Platze ist, so wird die ganze Konstruktion des Theodolits hierdurch schon wesentlich bedingt, dann wird man aber dieses Instrument nicht mit einem ganz kleinen Kreis ausrüsten lassen; denn im allgemeinen wird ja auch der grössere Kreis der besser geteilt sein und eine grössere Ablesungsgenauigkeit gestatten.

Soweit der Mecklenburgische Bericht über die Bonner Verhandlungen, den wir im wesentlichen abgedruckt haben. Im übrigen kann noch aus unseren eigenen Messungen mit 13^{cm}-Theodoliten aus „Zeitschr. f. Verm.“ 1892, S. 26 ein mittlerer Richtungsmessungsfehler von $\pm 2,31''$ berichtet werden (Messung in zwei Fernrohr-lagen mit zusammen vier Ablesungen, wie auch im Vorstehenden stets angenommen ist).

Es mag auch aus Reinhertz „Verbindungs-Triangulation“ S. 33 noch citiert werden, dass abgesehen von Teilungsfehlern das zehnzöllige Instrument der Landes-Aufnahme ein etwa zehnmal so grosses Gewicht liefert, wie das zur Verbindungs-Triangulation benützte fünfzöllige.

Aus der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde“ 1892, S. 104—105 entnehmen wir „über die Leistung eines kleinen Instrumentes“, dass bereits Struve darauf hingewiesen hat, dass kleine Instrumente *verhältnismässig* genauere Resultate liefern als grosse, und dass astronomische Messungen mit 17,5^{cm}-Kreisen unerwartet günstige Ergebnisse lieferten.

Fassen wir alles dieses zusammen, so kann man wohl sagen, dass manche Praktiker mit teuren und *grossen* Instrumenten unnötig vorgehen, z. B. Stadtpolygon-züge mit 25^{cm}-Mikroskop-Theodolit („Zeitschr. f. Verm.“ 1888, S. 78), dass aber die auf der Bonner Versammlung aufgestellte Behauptung, für Triangulierung I. Ordnung seien fünfzöllige Theodolite (13,5^{cm}) ausreichend und zweckmässig, mit den dafür vorgebrachten Messungsergebnissen noch nicht begründet ist.

§ 23. Genauigkeit und Geschwindigkeit der Basismessung.

Über die Leistungsfähigkeit der in den früheren § 9—15. behandelten Basis-mess-Einrichtungen haben wir verschiedene Angaben gesammelt, welche im Folgenden zusammengestellt sind.

Die Fehler der Basis-messungen sind wesentlich zweierlei Art, erstens unregelmässige von der Handhabung der Apparate u. s. w. herrührende Fehler, von denen man gewöhnlich annimmt, dass sie proportional der Quadratwurzel der Länge wachsen, und zweitens regelmässige mit der gemessenen Länge selbst anwachsende Fehler, zu welchen vor allem die Mass-Unsicherheiten der gebrauchten Massstäbe selbst gehören.

Man wird im allgemeinen annehmen können, dass die regelmässigen Fehler im Gesamtergebnis überwiegen, indessen sind sie schwer zu bestimmen (und wahrscheinlich sind dieselben oft unterschätzt worden).

Leichter und sicherer zu bestimmen sind die unregelmässigen Fehler, mit welchen wir uns nun zuerst beschäftigen wollen. Man findet diese Fehler durch Messungs-Wiederholungen.

Besonders wichtig ist hiebei die Doppel-messung einer Linie in verschiedenen Teilstrecken.

Man habe hiefür folgendes:

Strecke s_1 gebe die Differenz hin und her d_1

$\begin{matrix} s_2 & \dots & s_n \\ \parallel & \dots & \parallel \\ d_2 & \dots & d_n \end{matrix}$

Daraus bildet man die mittlere Differenz nach Band I, 4. Aufl. 1895, § 11.

$$D = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2} + \dots + \frac{d_n^2}{s_n} \right)} = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{dd}{s} \right]}$$

oder den mittleren Fehler einer Messung der Längen-Einheit (1^{km}):

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{dd}{s} \right]} \quad (1)$$

Damit hat man auch den mittleren Fehler des Mittels aus zwei Messungen der Längen-Einheit:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{dd}{s} \right]} \quad (2)$$

oder den mittleren Fehler des Mittels aus zwei Messungen einer Länge L :

$$M = m' \sqrt{L} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{n} \left[\frac{dd}{s} \right]} \quad (3)$$

Die Doppelmessungs-Ergebnisse der Basis der Gradmessung in Ostpreussen von 1834 haben wir bereits in (30) unten auf S. 76 mitgeteilt und die Anwendung der vorstehenden Formeln (1)–(3) auf dieses schon mehrfach von uns benützte klassische Beispiel der Gradmessung in Ostpreussen haben wir bereits in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 38 gezeigt.

Wenn alle Teilstrecken $s_1 s_2 \dots$ nahezu gleich sind, so braucht man die Quotienten $d : \sqrt{s}$ bzw. $d^2 : s$ nicht einzeln auszurechnen.

Als Beispiel für gleiche Strecken, jedoch für dreifache Messung aller Teilstrecken, nehmen wir die schweizerische Basismessung von Aarberg mit dem spanischen Apparat (vgl. § 13. S. 89):

Strecke	Messung I	Messung II	Messung III	Mittel
s_1	400,0370 m	400,0364 m	400,0370 m	400,0368 m
s_2	400,0390	400,0383	400,0379	400,0384
s_3	400,0383	400,0382	400,0388	400,0384
s_4	400,0570	400,0580	400,0584	400,0578
s_5	400,0352	400,0356	400,0353	400,0354
s_6	399,9045	399,9044	399,9043	399,9044
Summe	2400,1110	2400,1109	2400,1117	2400,1112

Nun bildet man die sämtlichen 18 Differenzen v zwischen den Streckenmitteln und den Einzelmessungen, mit Quersummen $[v] = 0$ zur Probe, worauf die Quadrate v^2 sich ergeben:

	v	v^2	v	v^2	v	v^2	$[v]$
1.	— 0,2 mm	0,04	+ 0,4 mm	0,16	— 0,2 mm	0,04	0,0 mm
2.	— 0,6	0,36	+ 0,1	0,01	+ 0,5	0,25	0,0
3.	+ 0,1	0,01	+ 0,2	0,04	— 0,4	0,16	— 0,1
4.	+ 0,8	0,64	— 0,2	0,04	— 0,6	0,36	0,0
5.	+ 0,2	0,04	— 0,2	0,04	+ 0,1	0,01	+ 0,1
6.	— 0,1	0,01	0,0	0,00	+ 0,1	0,01	0,0
		1,10		0,29		0,83	2,22 = [v ²]

Der mittlere Fehler einer Messung einer Strecke von rund $0,4^{km}$ wird hiernach:

$$m_1 = \sqrt{\frac{[v v]}{n(\sigma - 1)}} = \sqrt{\frac{2,22}{12}} = \pm 0,430^{mm} \quad (4)$$

Hiebei ist mit σ die Wiederholungszahl der Strecken-Messung bezeichnet, also in diesem Falle $\sigma = 3$. Weiter berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km} , da $s = 0,4^{km}$ ist:

$$m = m_1 \sqrt{\frac{1}{0,4}} = \pm 0,68^{mm} \quad (5)$$

Auch hat man den mittleren Fehler der 3fach wiederholten Messung der Gesamtlänge von $2,4^{km}$:

$$M = \sqrt{\frac{2,4}{3}} m = \pm 0,61^{mm} \quad (6)$$

Man wird hiernach das Gesamtergebnis schreiben:

$$L = 2400,1112^m \pm 0,0061^m$$

Wenn hier die Strecken s nicht alle gleich wären, so müsste man nicht bloss v und v^2 , sondern auch alle Werte $v : \sqrt{s}$ bzw. $v^2 : s$ bilden, und dann rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n(\sigma - 1)} \left[\frac{v v}{s} \right]} \quad (7)$$

Sind alle s gleich, so stimmt das mit (5) und (6) überein.

Nach diesen Formeln, welche zur Berechnung des mittleren unregelmässigen Basismessungs-Fehlers aus Messungs-Wiederholungen dienen, geben wir im Folgenden eine Reihe von Beispielen hiefür, wobei immer m den mittleren unregelmässigen (aus Wiederholungen berechneten) Fehler einer Messung von 1 Kilometer Länge, bedeutet.

1736. *Basis von Yarouqui in Peru*, 2 Messungen mit hölzernen 15 oder 20 Fuss langen Latten (La Condamine Mesure des trois premiers degrés dans l'hémisphère austral, Paris 1751, S. 5) „nous nous accordâmes à moins de trois pouces près sur une longueur de 6273 toises.“ Dieses gibt $81,21^{mm}$ auf $12,226^{km}$ doppelt gemessen oder den mittleren Fehler für eine Messung von 1^{km} : $m = \pm 16,42^{mm}$.

1736. *Basis von Tornea in Lappland*, 2 Messungen mit hölzernen Latten, 7407 Toisen, Differenz 4 Zoll. (Astr. Nachr. 6. Band, 1828, S. 20.) Dieses gibt $20,152^{mm}$ auf $14,436^{km}$ oder $m = \pm 20,15^{mm}$.

1739. *Nachmessung der Picardschen Basis von Juvisy*, durch Cassini (Base du système métrique, III, S. 505), Basis von 5747 Toisen mit Eisenstangen gemessen, welche längs einer 50 Toisen langen Schnur unmittelbar aneinander gelegt wurden. Die Basis ist 5 mal gemessen:

	Toisen	Fuss	Zoll	Linien	Meter
1.	5747	2'	8"	6'''	= 11201,991
2.	"	4'	0"	9'''	= 11202,431
3.	"	3'	4"	10'''	= 11202,217
4.	"	4'	5"	10'''	= 11202,569
5.	"	4'	0"	0'''	= 11202,411

Mittel $11202,324^m \pm 0,100^m$.

Betrachtet man alle Abweichungen als unregelmässige Fehler, so erhält man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km} : $m = \pm 67,0^{\text{mm}}$.

1805. *Benzenbergs* Basismessung mit hölzernen Latten für das Rheinische Kataster (vgl. § 9. S. 62). $m = \pm 8,2^{\text{mm}}$.

1819. *Schwerds kleine Basis*. Zwei Messungen auf 20°R reduziert: 859,442734 $^{\text{m}}$ und 859,440943 $^{\text{m}}$. Differenz = 1,791 $^{\text{mm}}$. (*Schwerd*, „Die kleine Speyrer Basis“, S. 33.) Dieses gibt $m = \pm 1,37^{\text{mm}}$.

1834—1872. Basismessungen mit dem Besselschen Apparate.

Die Längen- und die Strecken-Verteilung der zahlreichen seit 1834 mit dem Besselschen Apparate gemachten Basismessungen haben wir schon in § 16. S. 101—102 mitgeteilt, und da auch die Messungs-Differenzen bereits anderwärts, nämlich in dem Werke: „Deutsches Vermessungswesen von Jordan-Steppes 1882“, I, S. 133 von uns zusammengestellt wurden, bilden wir hier die Tabelle der mittleren unregelmässigen Fehler m für je eine Messung von 1 Kil.:

Jahr	Länge	Basismessung	mittlerer Fehler m
1834	1,822 $^{\text{km}}$	Königsberg (Gradm. in Ostpreussen)	$\pm 2,77^{\text{mm}}$
1838	2,701	Kopenhagen	0,86
1846	2,336	Berlin (Küstenvermessung)	1,55
1847	2,134	Bonn	0,73
1852	2,301	Lommel (Belgien)	0,66
1853	2,489	Ostende	0,54
1854	2,763	Strehlen (Schlesien)	1,75
1871	5,875	Braak (Holstein)	1,59
1872	8,909	Grossenhain (Sachsen)	1,46

(Die Angaben für Grossenhain sind von Nagel veröffentlicht im „Civilingenieur“, 28. Band, 1882, 1. Heft, vgl. auch Helmert, „Zeitschr. f. Verm.“ 1883*, S. 596.)

Besonders zu erwähnen ist hier noch die Göttinger Basismessung, weil dieselbe in metronomischer Beziehung neu behandelt wurde, wie wir bereits in § 14. S. 95—97 beschrieben haben. Die Genauigkeits-Berechnung, entsprechend 4 verschiedenen metronomischen Formeln, ist von General Schreiber in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1882*, S. 1—17 mitgeteilt worden. Aus den 33 Strecken-Differenzen der 5193 $^{\text{m}}$ langen Linie (eine Strecke = 157 $^{\text{m}}$) ergab sich der mittlere Fehler m einer Messung von 1 $^{\text{km}}$, unter der Annahme unregelmässiger \pm gleichwahrscheinlicher Fehler so:

Formel (vgl. § 14. S. 96—97)	mittl. Fehler m
I. $l = L - (k - 1,4) m$	$\pm 0,80^{\text{mm}}$
II. $l = L - (k - 1,4) m - (k - 1,4)^2 \rho$	0,70
III. $l = L - (k - 1,4) m - (k - 1,4)^2 \rho + \alpha h$	0,55
IV. $l = L - (k - 1,4) m - (k - 1,4)^2 \rho + \alpha h + \alpha^2 k$	0,57

Die Differenzen für die ganze Länge 5193 $^{\text{m}}$ (hin und her) der Göttinger Basis wurden nach diesen 4 Formeln:

I	II	III	IV
$- 14,10^{\text{mm}}$	$- 13,04^{\text{mm}}$	$- 8,17^{\text{mm}}$	$- 7,62^{\text{mm}}$

1879—1880. Basismessung des geodätischen Instituts.

Im Jahre 1879 wurde die alte schlesische Basis bei Strehlen, 2763 $^{\text{m}}$ lang, welche erstmals 1854 mit dem Besselschen Apparat gemessen worden war, von dem

geodätischen Institute mit einem Brunnerschen Apparate (S. 85) nachgemessen. Die Linie wurde in 10 gleichen Teilen von je 276^m hin und her gemessen. Die Messungs-Differenzen sind in dem „Generalbericht f. d. Europ. Gradm. für 1879“, S. 104 veröffentlicht; man berechnet hieraus den mittleren unregelmässigen Fehler einer Messung von 1^km : $m = \pm 0,76^{mm}$.

Einiges weitere hierüber giebt auch der „Generalbericht über den Fortschritt der Arbeiten für d. Europ. Gradm. im Jahre 1880“, S. 33—35.

Über die Bonner Basismessung 1892 haben wir bereits einiges citiert in Band I, 1895, 4. Aufl. S. 514. (Brunner = $2512,995^m$, Bessel = $2512,984^m$, Differenz = 11^{mm}).

1858. Spanische Basismessungen.

Spanische Basis von Madridejos, mit dem älteren Brunnerschen Apparate (S. 84) gemessen. Das Mittelstück, 2767^m der 5teiligen Basis (s. o. S. 106.) wurde in 12 Absätzen je zweimal gemessen (Astr. Nachr. 61. Band, 1864, S. 340). Die 11 ersten Abschnitte haben je 234^m Länge und die Differenzen der 11 Doppelmessungen sind: $+0,23 - 0,20 + 0,49 + 0,00 - 0,02 - 0,23 - 0,32 + 0,39 - 0,09 - 0,28 + 0,36^{mm}$, das letzte Stück hat nur 194^m Länge und gab bei der Doppelmessung die Differenz $-0,14$. Aus diesen 12 Doppelmessungen berechnet man . $m = \pm 0,40^{mm}$.

Über zwei kleinere, im Jahre 1860 ebenfalls mit dem älteren Brunnerschen Apparate gemessene Grundlinien giebt der „Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1869“, S. 65 die Einzelheiten der Doppelmessungen, woraus man berechnet:

$$\begin{array}{ll} \text{Basis von Mahon, } 2359^m \text{ in 6 Absätzen, } & m = \pm 0,43^{mm} \\ " " \text{ Ivice, } 1665^m, 4 " & m = \pm 0,32^{mm} \end{array}$$

Ausser diesen drei Linien sind bis 1879 noch 6 Grundlinien in Spanien gemessen worden, worüber Einzelheiten mitgeteilt sind in dem amtlichen Werke: „Memorias del instituto geográfico y estadístico. Tomo III. Madrid 1881, und Tomo IV, Madrid 1883. (Arcos de la Frontera III, S. 259, Lugo III, S. 337, Vich III, S. 419, Olite IV, S. 99.)

Schweizerische Basismessungen.

In den Jahren 1880—1881 wurden mit dem neuen spanischen Apparate (vgl. S. 87—89) drei Grundlinien in der Schweiz gemessen, bei Aarberg 2400^m , bei Weinfelden 2540^m und bei Bellinzona 3200^m . Die erste Linie 3 mal (s. o. S. 144) die beiden anderen je 2 mal.

Aus den Messungs-Differenzen berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1^km : Aarberg $m = \pm 0,68^{mm}$
Weinfelden $m = \pm 1,27^{mm}$
Bellinzona $m = \pm 0,89^{mm}$

Weiteres hierüber giebt das amtliche Werk: „Le réseau de triangulation suisse, publié par la commission géodésique suisse, troisième volume, la mensuration des bases par A. Hirsch et J. Dumur. Lausanne 1888.“

Nordamerikanische Basismessungen mit dem Repsold-Comstockschen Apparat (§ 13. S. 89—93).

Nach dem Werke: „Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Comstock etc. Washington 1882, S. 262, S. 290, S. 303“ berechnet man aus den Messungs-Differenzen die mittleren unregelmässigen Fehler einer Messung von 1^km :

1877 Chicago-Base	7509 ^m	in 8 Strecken	$m = \pm 1,12^{\text{mm}}$
1878 Sandusky-Base	6227 ^m	"	1,19
1879 Olney-Base	6589 ^m	"	0,79

Dabei sind die auf S. 97—98 erwähnten Korrekturen für die Ungleichheit der Temperaturen beider Massstabteile berücksichtigt.

1881. *Californien. Yolo-Country.*

United States coast and geodetic survey, methods and results on the length of the Yolo-Base-Line. Appendix Nr. 11. Report for 1883. Washington 1884, berechnet von Charles A. Schott, Assistent. (Vgl. auch „Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1883“, Annexe III, S. 2—3.)

Die 17,5^{km} lange Linie wurde teils zweifach, teils dreifach gemessen. Aus den 18 Differenzen-Vergleichungen zwischen der ersten und zweiten Messung berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km} $m = \pm 2,03^{\text{mm}}$

Österreichische Basismessungen.

1862. Grundlinie bei Josephstadt, zwei Messungen, 2772,174 020 und 2772,180 159 Wiener Klafter, Differenz = 0,006 139 W. Kl. („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1863“, S. 15). Dieses giebt 11,64^{mm} Differenz auf 5,257^{km}, oder $m = \pm 3,59^{\text{mm}}$

1868. Basis in Dalmatien, zwei Messungen 1305,83270 und 1305,83186 Wiener Klafter, Differenz = 0,00084 W. Kl. („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1870“, S. 28), oder 1,6^{mm} auf 2,475^{km} $m = \pm 0,72^{\text{mm}}$

1863. *Schwedische Grundlinie* auf Axevelia, zwei Messungen 1357,03274 Toisen und 1357,03360 Toisen, Differenz = 0,00086 Toisen („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1863“, S. 28) oder 1,68^{mm} auf 2,645^{km} $m = \pm 0,73^{\text{mm}}$

1865. *Italienische Basis von Catania.* Eine Basis 3692^m wurde 6mal gemessen („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1865“, S. 64 und 65).

Wenn man die 6 Messungen als gleichartig behandelt, so findet man

$$m = \pm 1,96^{\text{mm}}$$

Die Messungen 1. 2. und 3. sind in der einen, 4. 5. 6. in der andern Richtung gemacht. Die beiden Arten zeigen eine regelmässige Differenz. Behandelt man daher die 3 ersten Messungen und die 3 letzten Messungen je für sich, so findet man die mittleren unregelmässigen Fehler für 1^{km} bzw. für 1. 2. 3. $m = \pm 0,85^{\text{mm}}$ und für 4. 5. 6. $m = \pm 0,47^{\text{mm}}$

1873. *Basis von Simlak*, gemessen von Oudemans bei der Triangulierung von Java (s. o. §. 14. S. 94).

Eine Länge von 3909^m wurde in 20 Strecken von je rund 200^m doppelt gemessen, woraus sich ergiebt $m = \pm 1,69^{\text{mm}}$

1890. *Französische Basismessung* bei Juvisy, in der Nähe von Paris. Ein Bericht in Comptes rendes etc. 112. Band, 1891 S. 770—773 und Auszug in „Zeitschr. f. Verm.“ 1891, S. 26—29 giebt hierüber: Die neue Grundlinie liegt an Stelle der schon von Picard 1669 mit 4 hölzernen Stangen und 1739 von Cassini mit 4 eisernen Stäben gemessenen Linie von 7,2^{km} (s. o. § 9. S. 63). Die Neumessung 1890 geschah mit einer 4^m langen Platin-Kupfer-Stange von Brunner (vgl. S. 84), wobei eine Umdrehung mit dickem Wollenstoff stattfand, innerhalb dessen Wasser zirkulierte zum

Zweck der Temperatur-Ausgleichung. Die Messung erfolgte in 24 Abschnitten von ungleichen, im Mittel 300^m betragenden Längen. Der mittlere unregelmässige Fehler einer Messung von 1^{km} ergab sich nach der Formel (1) S. 144 für den südlichen Teil $m = 1,02^{mm}$, für den nördlichen Teil $m = 1,90^{mm}$, im Ganzen . . . $m = \pm 1,52^{mm}$.

Geschwindigkeit der Basismessung.

Bei der Beurteilung der Leistungs-Fähigkeit eines Basis-Apparates kommt ausser der Genauigkeit auch die Geschwindigkeit in Betracht, weshalb wir hiefür eine Anzahl von Angaben gesammelt haben, die im Folgenden zusammengestellt sind. Dabei bedeutet immer v die gemessene Länge für 1 Stunde.

Schwerd mass im Jahre 1820 in 3 Tagen mit 30 Stunden eine 859^m lange Grundlinie zweimal (Schwerd: „Die kleine Speyrer Basis“, S. 23—32). Dieses giebt für 1 Stunde $v = 57^m$

Die Württembergische Grundlinie Solitude—Ludwigsburg von 13 032^m Länge wurde in 19 Tagen einmal gemessen (Kohler: „Die Landes-Vermessung des Königreichs Württemberg“, S. 57). Rechnet man 1 Tag durchschnittlich zu 6 Stunden, so ist $v = 114^m$

Struve fand 1840 das mittlere Fortschreiten in 1 Stunde 42 Toisen für den Tannerschen Apparat und 36 Toisen für seinen Apparat („Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft 1870“, S. 69), dieses giebt

für den Apparat von Tanner	$v = 82^m$
" " " Struve	$v = 70^m$

Basismessungen der preussischen Landes-Aufnahme mit dem Besselschen Apparat.

Nach einer bereits früher in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 387 und 1883, S. 583 gemachten Zusammenstellung haben wir folgende Maximal-Leistungen in 1 Tag, wobei 1 Lage = 4 Stangen = 15,6^m ursprünglich als Einheit zu grunde gelegt ist:

1834 Königsberg	68,6 Lagen	= 1070 ^m
1871 Braak	67	= 1045
1877 Oberhergheim	113	= 1763
1880 Göttingen	131	= 2044
1883 Meppen	150	= 2340

Dieses sind *Maximal-Leistungen* für je 1 Tag; was die *mittlere Geschwindigkeit* für 1 Stunde betrifft, so war dieselbe in Königsberg nach S. 47 „der Gradm. in Ostpreussen“ 8 Lagen = 125^m in 1 Stunde. Teils durch die Vervollkommenungen des Apparates, teils durch die Übung steigerte sich die Geschwindigkeit so sehr, dass bei Göttingen auf 1 Lage etwa 5 Minuten, bei Meppen nur noch etwa 3 Minuten auf 1 Lage kamen. Hiernach haben wir folgende Geschwindigkeiten in 1 Stunde:

Königsberg	$v = 125^m$
Göttingen	$v = 187^m$
Meppen	$v = 300^m$

Sächsische Basismessung bei Grossenhain.

Diese Basis ist ebenfalls mit dem Besselschen Apparat gemacht. Nach der Mitteilung „Zeitschr. f. Verm.“ 1883, S. 600 erforderte die 8909^m lange Linie folgende Zeiten:

Hinmessung 13 Tage = 118,5 Stunden, also 75 Meter in 1 Stunde

Rückmessung 12 " = 88,0 " 101 " 1 "

Im Mittel hat man 206,5 Stunden für 17818^m oder die mittlere Geschwindigkeit in 1 Stunde: $v = 86^m$

Basismessungen des geodätischen Instituts.

Mit einem Brunnerschen Apparat, ähnlich dem ersten spanischen Apparate, wurden die zwei Grundlinien bei Strehlen (2763^m) und bei Berlin (2336^m) in den Jahren 1879—1880 gemessen. Nach Mitteilung von Fischer wurden zu Anfang stündlich 5 Stangenlagen ($= 20^m$) gemacht; nachdem aber das Personal eingebübt war, kamen bei der Strehler Basis auf 1 Stunde durchschnittlich 7—8 Lagen, und bei der Rückmessung 10 Lagen. Bei der Berliner Basis wurden bei etwa dreistündiger Arbeitszeit Vormittags und dreistündiger Nachmittags zusammen 60 Lagen $= 240^m$ gemessen.

Hierach ist die Geschwindigkeit für 1 Stunde anzunehmen: $v = 40^m$

Spanische Basismessungen mit dem Brunnerschen Apparat.

Der erste Brunnersche Apparat, mit welchem die Basis von Madridejos gemessen wurde, hatte eine sehr geringe Geschwindigkeit. Koppe schreibt hierüber in der Abhandlung „der Basisapparat des Generals Ibanez und die Aarberger Basismessung“ S. 2:

Die erste spanische Basismessung, $14\ 663^m$, dauerte vom 22. Mai bis zum 7. September 1858. Sie erforderte 78 Arbeitstage, also 5,3 Tage für 1 Kilometer. Rechnet man 1 Tag = 6 Stunden, so erhält man für 1 Stunde $v = 31^m$

In dem Werke: „Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases u. s. w. traduit par Laussedat, Paris 1860“, S. 210 ist angegeben, dass die Geschwindigkeit 2 Minuten für 1 Meter war, oder für 1 Stunde $v = 30^m$

Bei den zwei kleinen spanischen Grundlinien von Mahon und Ivica auf den balearischen Inseln war nach dem „Generalbericht der Europ. Gradm. für 1869“, S. 65 die Messungs-Geschwindigkeit in 1 Stunde: $v = 120^m$

Schweizerische Basismessungen.

1880—1881 die Grundlinien bei Aarberg, Weinfelden und Bellinzona (vgl. § 13. S. 85 bis 89). Die Zeitverhältnisse sind sehr genau angegeben, man findet die Geschwindigkeit in 1 Stunde:

Aarberg	$v = 142^m$
Weinfelden	$v = 114^m$
Bellinzona	$v = 144^m$

Ausserdem sind auch die Kosten angegeben (S. 86 der amt. Veröffentlichung), nämlich für alle drei Linien 37 600 Fr. oder 4 600 Fr. für 1 Kilometer.

Nordamerikanische Basismessungen mit dem Repsold-Comstockschen Apparat
(vgl. § 13. S. 90—93).

„Report upon the primary triangulation“ etc. S. 262, S. 290, S. 300 giebt: 1877 Chicago-Base. Die mittlere Messung in 1 Tag war 292^m , die grösste Leistung in 1 Tag 500^m ,

1878 Sandusky-Base. Der Durchschnitt für 1 Tag bei der Hinmessung war 88 Röhren $= 352^m$, bei der Rückmessung 100 Röhren $= 400^m$,

1879 Olney-Base. Die mittlere Röhrenzahl in 1 Tag war $105 = 420^m$, die grösste Zahl an 1 Tag war 168 Röhren $= 672^m$. Gemessen wurde an 32 Tagen.

Die Tagesleistung wächst mit den Übungsjahren. Nehmen wir zum Schlusse 1 Tag = 6 Stunden $= 420^m$, so wird für 1 Stunde: $v = 70^m$

Neue französische Messung mit einer Brunnerschen 4^m langen Platin-Kupfer-Stange (s. o. S. 148—149).

Nach dem Bericht in Comptes rendus etc. 112. Band 1891 S. 772 erforderte die $7,226^m$ lange Linie zur Hinmessung 25 Tage, zur Rückmessung 18 Tage, also 43 Tage mit $14,5^m$. Rechnet man 1 Tag = 6 Stunden, so giebt dieses $14\ 500 : 258 = 56^m$ auf 1 Stunde $v = 56^m$

Schluss-Betrachtungen über Basismessung.

Die neueren Basismessungen sind technisch so fein behandelt, dass der mittlere unregelmässige Messungs-Fehler nicht mehr als etwa 1 Millimeter für 1 Kilometer beträgt. Dieses geht aus den auf S. 146—148 gesammelten mittleren Fehlern deutlich hervor, denn wir haben für den mittleren Fehler einer Messung von 1 Kilometer, in runden Durchschnittszahlen:

S. 146	für Bessels Apparat	$m = \pm 1,3^{\text{mm}}$
S. 147	, den neuen spanischen Apparat	$0,9^{\text{mm}}$
S. 148	" " nordamerikanischen "	$1,0^{\text{mm}}$
	Durchschnitt	$m = \pm 1,1^{\text{mm}}$

Für Doppelmessung vermindert sich dieses noch auf $1,1 : \sqrt{2} = 0,8^{\text{mm}}$ für 1^{km} , indessen wollen wir den runden Wert $m = \pm 1^{\text{mm}}$ für 1^{km} als unregelmässigen von der Messung selbst herrührenden Fehler einer neueren Basis nun annehmen.

Ganz anders, nämlich ungünstiger, steht es mit den regelmässigen, namentlich den metronomischen Fehlern der Basismessungen.

Wir haben in §. 11. S. 75 berichtet, dass bei der Besselschen Basismessung bei Königsberg, 1834, der Hauptfehler, nämlich die Vergleichung mit einem von anderwärts gegebenen Normalmass, nur = 0,6 Milliontel der Länge gefunden wurde, und ähnliche kleine Werte wurden auch später mit dem Besselschen Apparate gefunden; indessen sind wahrscheinlich jene älteren Vergleichungen in Bezug auf Genauigkeit überschätzt, indem später mit dem Besselschen Apparate Unsicherheiten bis zu $0,02^{\text{mm}}$ auf eine Stange von 4^{m} , d. h. 5 Milliontel der Länge, gefunden wurden. (Vgl. dazu oben S. 147 auch die Differenz Brunner-Bessel = 11^{mm} auf $2,5^{\text{km}}$.)

Die beiden betrachteten Fehleranteile, nämlich m = mittlerer unregelmässiger Fehler und m' = mittlerer regelmässiger Fehler, setzen sich in bekannter Weise zum Gesamtfehler M für die Länge L zusammen, nach der Gleichung:

$$M = \sqrt{(m\sqrt{L})^2 + (m' L)^2} = \sqrt{m^2 L + m'^2 L^2} \quad (1)$$

Nehmen wir nach dem bisherigen $m = 1^{\text{mm}}$ für $L = 1^{\text{km}}$ und als Minimum m' ebenfalls = 1^{mm} für $L = 1^{\text{km}}$, so wird:

$$M = \sqrt{L + L^2}$$

Zur Übersicht ist hernach folgendes berechnet:

Gemessene Basis-Länge L	Mittlerer unregelm. Fehler $m\sqrt{L}$	Mittlerer regelmäss. Fehler $m' L$	Mittlerer Gesammt-Fehler M	Verhältnis $\frac{M}{L}$
1^{km}	$\pm 1,00^{\text{mm}}$	$\pm 1,00^{\text{mm}}$	$\pm 1,41^{\text{mm}}$	1,41
2^{km}	$1,41^{\text{mm}}$	$2,00^{\text{mm}}$	$2,24^{\text{mm}}$	1,12
5^{km}	$2,24^{\text{mm}}$	$5,00^{\text{mm}}$	$5,10^{\text{mm}}$	1,02
10^{km}	$3,16^{\text{mm}}$	$10,00^{\text{mm}}$	$10,05^{\text{mm}}$	1,005

Hieraus ist zu sehen, dass bei grösseren Längen neben den systematischen Fehlern m' , die unregelmässigen Messungs-Fehler m fast verschwindend sind; dieses

ist noch viel mehr der Fall, als die vorstehende Tabelle zeigt, weil wir hier nur $m' = 1$ Milliontel angenommen haben, während es in Wirklichkeit das 5—10 fache liegen kann.

Durch solche Überlegungen wird der Fingerzeig gegeben, dass die Technik auf einem falschen Wege war, als sie Apparate, wie den älteren Brunnerschen und ähnliche schuf. (Vgl. § 13. S. 84.)

Die Messungs-Geschwindigkeiten sind nach der Zusammenstellung S. 149—150 sehr verschieden; die äussersten Werte scheinen zu sein:

Älterer Brunnerscher Apparat $v = 30$ Meter in 1 Stunde
Bessels Apparat, Landes-Aufnahme bei Meppen $v = 300$ " " "

Die Hauptsache der Basismessung, nämlich der metronomische Teil, liegt nun in den Händen des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus (vgl. § 8. S. 56 und in dieser Beziehung werden ohne Zweifel die nächsten Basismessungen sich wesentlich von den früheren unterscheiden.

§ 24. Basis-Anschlüsse.

Wenn man die mittleren Fehler zweier Grundlinien und den mittleren Winkel-fehler einer verbindenden Triangulierung kennt, so kann man auf theoretischem Wege den Fehler berechnen, welcher beim Durchrechnen der Triangulierung von einer Grundlinie zur anderen sich wohl einstellen wird, oder man kann auch berechnen, um wie viel eine Triangulierungskette in der Messung und Berechnung ihren wahren Endpunkt verfehlten wird, im Sinne der Entfernung und im Sinne der Richtung.

Theoretische Betrachtungen hiezu haben wir in den vorhergehenden §§ 17—20 gegeben, und es ist hiezu an alles zu erinnern, was bereits in unserem I. Bande, 1895, 4. Aufl., in Kap. V über Triangulierungs-Genauigkeit verhandelt worden ist. Auch erfahrungsmässige Genauigkeitsangaben sind daselbst in grosser Zahl gesammelt und wir wollen auch nochmals an die wertvollen auf mühsame Berechnungen gegründeten Angaben der preussischen Landes-Aufnahme über Entfernungs- und Azimutal-fehler langer Ketten erinnern, welche im I. Bande der Landestriangulation enthalten und von uns (in „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen I“ S. 138—139) dahin zusammengefasst worden sind, dass eine Dreiecksseite in 100^{km} Entfernung an der Basis, mit 7 Milliontel ihrer Länge erhalten wird, oder dass eine Kette von 180^{km} einen Entfernungsfehler von nur 3 Milliontel der Entfernung und einen Richtungs-fehler von kaum 1" bietet.

Wichtiger als die so zu berechnenden theoretischen Anschlussfehler sind die thatsächlich in der Praxis aufgetretenen Anschlussfehler und wir haben daher schon frühzeitig solche Anschlüsse aus der vorhandenen Literatur gesammelt, wie aus unseren früheren Auflagen und zugehörigen Veröffentlichungen zu ersehen ist; es ist aber schwer auf diesem Gebiete rein objektive Nachrichten zu erlangen, weil sehr oft die Vermutung nicht zu unterdrücken ist, dass die Berechner früherer Zeiten die Anschlüsse in der Triangulierungsausgleichung mehr oder weniger haben miteingespielen lassen. —

Das Wichtigste auf diesem Gebiete sind die neueren Untersuchungen des geodätischen Institutes, von welchen wir im Folgenden einige Auszüge vorführen:

Wir betrachten zuerst ein Werk von *Helmert*:

Veröffentlichung des Königlich preussischen Geodätischen Instituts und Centralbureau der internationalen Erdmessung. Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft, Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von England bis Polen, herausgegeben von F. R. Helmert mit zwei lithographischen Tafeln. Berlin, Druck und Verlag von Stankewicz, Buchdruckerei, 1893.

Wir haben von diesem Werke schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 283—299 die neue Theorie der Triangulierungsausgleichung mit Richtungsgewichten mitgeteilt und können nun weiter aus dem 4. Kapitel über die Grundlinien und ihre Anschlüsse folgendes berichten, wobei mit (H. S. . .) die Citate aus dem Originalwerk beigegeben sind.

Alle mit dem Basisapparat von Bessel gemessenen Grundlinien beruhen auf der Toise von Bessel, welche Bessel selbst 1823 setzte (H. S. 225):

$$P = 863,9992 \text{ Par. Linien bei } 16,25^\circ \text{ oder bei } 13^\circ \text{ R.}$$

Wir haben diese Toise bereits in § 7. S. 53—54 und in § 11. S. 75, Gleichung (19) erwähnt, dieselbe kommt in Bessels „Gradmessung in Ostpreussen“ S. 22 vor mit der Angabe, dass ihre wahre Länge = 863,9992 Par. Linien sei, mit der Gleichung:

$$P = 863,835384 + 0,0126014 R^\circ$$

was man auch so schreiben kann

$$\begin{aligned} P &= 863,99920 (1 + 0,0000145877 [R^\circ - 13^\circ]) \\ &= 863,99920 (1 + 0,00001167016 [C^\circ - 16,25^\circ]) \end{aligned}$$

d. h. Bessel hat in der Gradmessung in Ostpreussen den Ausdehnungs-Coefficienten 0,00001167 für $1^\circ C$, und bei den Pendelversuchen nahm Bessel den von Borda für Eisen bestimmten Wert $\alpha = 0,0000114$ als Ausdehnungs-Coefficient (H. S. 226).

Die in neuester Zeit gemachte Vergleichung der Besselschen Toise im internationalen Massbureau zu Breteuil gab (H. S. 226):

$$P = 1949,061^{\text{mm}} \text{ bei } 16,25^\circ$$

und den Ausdehnungs-Coefficienten $\alpha = 0,00001160$. Durch diese Neubestimmung konnten die mit Bessels Apparat gemessenen Grundlinien auf internationales Metermass reduziert werden. Das Endergebnis ist nach H. S. 230—231, dass alle auf Bessels Bestimmungen beruhenden geodätischen Linien bzw. Dreiecksseiten, nachdem sie inzwischen formell mit 443,296 : 864 auf Metermass reduziert sind, nun noch mit einer Korrektion von + 57,7 Einheiten der 7. Logarithmenstelle versehen werden müssen, um sie auf internationales Metermass zu reduzieren.

Diese Zahl ist für die Zukunft wichtig und wir wollen dazu sogleich auch aus der Veröffentlichung der Landes-Aufnahme, Landes-Triangulation, Hauptdreieck V. Teil, Berlin 1893 Seite V citieren:

Allen in Metern ausgedrückten Ergebnissen der Landes-Aufnahme hat man, um sie auf internationales Metermass zu bringen, eine Reduktion zuzufügen, welche beträgt:

logarithmisch + 0,0000058 oder + 58 Einheiten der 7. Stelle

oder in Teilen der Längen selbst:

$$+ \frac{58}{4,3429\dots} = 13,4 \text{ Milliontel}$$

oder + 13,4^{mm} auf 1^{km}.

So wurden behandelt die Grundlinien von Königsberg, Berlin, Bonn, Ostende und Lommel, Strehlen, Grossenhain, Göttingen, woraus mit Rücksicht auf Nebenumstände eine Reduktionstabelle (H. S. 241) entsteht. Nachdem hierbei auch die mitt-

leren Fehler der Grundlinien geschätzt waren, nämlich $\pm 10 \cdot 0$ (d. h. 10 Einheiten des 7stell. Logar.) und entsprechend auch $\pm 18 \cdot 0$ für englische und $\pm 10 \cdot 0$ für russische Linien, kommen die Vergrößerungsnetze in Betracht, durch welche der trigonometrische Weg von der Basis selbst bis zur ersten Hauptdreiecksseite hergestellt wird, mit Fehlerschätzung nach Näherungsformeln (H. S. 245) und endlich dazu die trigonometrische Verbindung längs der Hauptketten von Basis zu Basis, wozu Fehlerschätzungen nach H. S. 83 möglich sind. Das sind nun alles Genauigkeitsbestimmungen a priori, und es entsteht die brennende Frage, wie die trigonometrische Zusammenrechnung zwischen den Grundlinien tatsächlich stimmen wird, ob die faktischen Anschlussfehler den theoretisch berechneten Fehlern entsprechen werden?

Die 9 Grundlinien mit ihren 8 Verbindungs-Triangulierungsnetzen wurden einer Ausgleichung unterworfen (H. S. 243—244), wobei die Verbesserungen $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_9$ der Grundlinien selbst als unabhängige Unbekannte und die Verbesserungen $v_1 v_2 \dots v_8$ der 8 Verbindungs-Triangulierungen als Beobachtungen auftreten, mit Gewichten, welche der Form und Ausdehnung der Netze a priori angepasst sind. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler ergab sich nach der Ausgleichung = ± 33 und für das Durchschnittsgewicht 4—5 der mittlere Fehler = ± 16 Einheiten der 7. logar. Dezimale oder = $16 : 4.34 = 3,8 \text{ mm}$ auf 1 km , ein ungemein kleiner Betrag (gültig für ein v oder σ).

Die Hauptergebnisse der Basisgenauigkeiten und der Verbindungs-Triangulierungs- genauigkeiten sind in einer Tabelle auf H. S. 251 enthalten, welche wir hier in zwei Teilen vorführen:

Mittlere Fehler a priori (H. S. 251.)

(1)

Nr.	Grundlinie		Basis, direkte Messung	Vergrößerungs-Netz	Verbindungs-Netz
1	Englische	Basis	± 18	± 40	± 100
2	Ostender	"	± 10	± 35	± 50
3	Lommeler	"	± 10	± 30	± 32
4	Bonner	"	± 10	± 30	± 37
5	Göttinger	"	± 10	± 9	± 28
6	Grossenhainer	"	± 10	± 7	± 38
7	Strehlener	"	± 10	± 23	± 22 zu (6,8)
8	Berliner	"	± 10	± 21	± 83
9	Königsberger	"	± 10	± 23	

Durchschnitt

 ± 28 ± 55 7. Log.-Stelle $\pm 6,4$ $\pm 12,7 \text{ mm}$ auf 1 km

Der vorstehenden Tabelle für Fehler a priori entspricht nun folgende zweite Tabelle der Fehler a posteriori:

Mittlere Fehler a posteriori (H. S. 251.)

(2)

Nr.	Grundlinie	Verbindungsausgleichung		Länge des Verbindungs-Netzes
		Verbesserung ξ	Verbesserung v	
1	Englische	Basis	$- 4^{\circ} 6$	
2	Ostender	"	$- 21^{\circ} 1$	200
3	Lommeler	"	$- 2^{\circ} 0$	170
4	Bonner	"	$+ 22^{\circ} 2$	140
5	Göttinger	"	$+ 7^{\circ} 4$	220
6	Grossenhainer	"	$- 1^{\circ} 0$	250
7	Strehlener	"	$+ 14^{\circ} 7$	260
8	Berliner	"	$- 7^{\circ} 2$	180
9	Königsberger	"	$+ 12^{\circ} 0$	540

Durchschnitt

 $\pm 16^{\circ} 0$ $\pm 16^{\circ} 0$ 7. Log.-Stelle $= \pm 3,71$ $3,7 \text{ mm}$ auf 1 km

210 km

Die mittleren Fehler sind in dieser Tabelle in Einheiten der 7. Log.-Dezimale angesetzt, d. h. da $d \log x = \frac{0,434}{x}$ ist, muss man die 7. Log.-Stelle mit 4,34 dividieren, um sie in Milliontel der Längen (oder in Millimeter für 1 Kilometer) zu verwandeln.

Die unmittelbaren Basisfehler, im Durchschnitt $\pm 2,5^{\text{mm}}$ auf 1^{km} , sind Schätzungen, nach Anbringung der Reduktionen auf das internationale Meter.

Was weiter die mittleren Fehler der Verbindungs-Triangulierungen zwischen zwei Grundlinien betrifft, so hat man für Ketten erster Ordnung unsere früheren Formeln von § 18, insbesondere die Formel (13) S. 111, welche mit anderen Bezeichnungen, und logarithmisch ausgedrückt in H. S. 83, Anmerkung, angegeben ist.

Da aber die Ketten erster Ordnung mit ihren $20-50^{\text{km}}$ langen Seiten nicht unmittelbar an die nur $5-7^{\text{km}}$ langen Grundlinien anschliessen können, sondern besondere Basisnetze, gewöhnlich rhombisch (vgl. S. 104-108) zur Vermittlung haben, so mussten dafür die mittleren Übertragungsfehler besonders bestimmt werden. Den mittleren Fehler der Höhe h eines einzelnen gleichschenkligen Dreiecks haben wir bereits in § 18. bestimmt, nämlich nach der Formel (22) auf S. 113 oben, welche mit gleichen Gewichten $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, und Weglassung von ϱ giebt:

$$\mu(h) = \frac{m(h)}{h} = \frac{\mu}{\sin(1)} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Hat man zwei solche gleichschenklige Dreiecke auf beiden Seiten einer Grundlinie angesetzt, etwa wie in Fig. 4. S. 114, jedoch mit ungleichen Höhen h und h' , so erhält man daraus

$$\begin{aligned} m(h+h') &= \frac{\mu h}{\sin(1)} \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\mu h'}{\sin(1')} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ m(h+h') &= \mu \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{h^2}{\sin^2(1)} + \frac{h'^2}{\sin^2(1')}} \end{aligned}$$

Dieses ist in anderer Form dasselbe wie die erste Formel in H. S. 245, und, um auch die zweite dort angegebene Formel für zwei rechtwinklige Dreiecke nachzuweisen, nehmen wir unsere allgemeine zu Fig. 4. S. 113 gehörige Formel (25) S. 114 und setzen darin, um a und a' in eine zu b rechtwinklige Gerade zu verwandeln:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \quad (1) = \gamma \quad (3) = 90^\circ \quad (2) = 90^\circ - \gamma \quad \beta = 90^\circ \\ \alpha' &= 0 \quad (1') = \gamma' \quad (3') = 90^\circ \quad (2') = 90^\circ - \gamma' \end{aligned}$$

und dazu $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, dann wird (ohne ϱ):

$$\begin{aligned} (m(B))^2 &= \mu^2 \left(\frac{b^2 \sin^2 \gamma + a^2 \cos^2 \gamma + c^2}{\sin^2 \gamma \cdot 3} + \frac{b^2 \sin^2 \gamma' + a'^2 \cos^2 \gamma' + c'^2}{\sin^2 \gamma' \cdot 3} \right) \\ &= \frac{\mu^2}{3} \left(b^2 + \frac{a^4}{b^2} + \frac{c^4}{b^2} + b^2 + \frac{a'^4}{b^2} + \frac{c'^4}{b^2} \right) \\ &= \frac{\mu^2}{3} \left(2b^2 + \frac{a^4 + a'^4}{b^2} + \frac{(a^2 + b^2)^2 + (a'^2 + b^2)^2}{b^2} \right) \\ (m(B))^2 &= \frac{2\mu^2}{3} \left(b^2 + \frac{a^4 + a'^4}{b^2} + (a^2 + a'^2) \right) \end{aligned}$$

Dieses ist die zweite Formel von H. S. 245. Durch solche Formeln wurden die Wirkungen der Basis-Netze geschätzt und in Verbindung mit der Kettenformel (13)

S. 111 sind dann die mittleren Fehler *a priori* bestimmt worden, welche in den zwei letzten Spalten der oben S. 154 gegebenen Tabelle (1) auftreten.

Betrachten wir nun diese Tabelle (1) S. 154 und die darauffolgende Tabelle (2) S. 154, so fällt uns zuerst auf, wie klein die meisten auftretenden Beträge sind, mehr aber noch, wie sehr klein die *a posteriori* erhaltenen Fehler sind im Vergleich mit den *a priori* geschätzten, z. B. $12,7 : 3,7$ bei den Verbindungsnetzen. Es wird gesagt (H. S. 252), dass zu diesem befriedigenden Ergebnis der Zufall wohl viel beigetragen habe. Unter allen Umständen bieten diese Fehlertabellen ein vortreffliches und in mancher Hinsicht erstes aus weiten Gebieten genügend kritisch gesammeltes Urteil über die Genauigkeit moderner Triangulierungen.

Eine zweite wichtige Untersuchung über Basis-Anschlüsse ist mitgeteilt in den „Verhandlungen der X. allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung zu Brüssel 1892“, Seite 518—456. „Verbindung und Vergleichung geodätischer Grundlinien“, zusammengestellt im Zentral-Bureau der Internationalen Erdmessung von Dr. Kühnen, wovon ein Auszug auch in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 75—79 gegeben ist.

Es war verfügbar je *ein* Anschluss zwischen den Ländern: Algerien, Spanien, Frankreich, England, Belgien, Deutschland, Russland; — Deutschland, Schweiz, Italien, Österreich; — Deutschland, Dänemark. Zwar gibt es zwischen Deutschland und Russland 4 und zwischen Deutschland und Dänemark 2 Anschlüsse, doch lagen die Verhältnisse für nur *je einen* von diesen so einfach, dass sie für den Bericht 1892 berücksichtigt werden konnten. Waren nun die Anschlüsse der verschiedenen Länder allein zusammengestellt, so wäre die Arbeit wenig lehrreich gewesen. Dagegen gewinnt sie ein grosses Interesse dadurch, dass eine Vergleichung fast aller europäischen Grundlinien (nebst den algerischen) ausgeführt worden ist. Im Ganzen erstreckt sich die Vergleichung von $7\frac{1}{2}^{\circ}$ westl. Länge (Lugo) bis $58\frac{1}{2}^{\circ}$ östl. Länge (Orsk), und von $35\frac{1}{2}^{\circ}$ nördl. Breite (Oran) bis $55\frac{1}{2}^{\circ}$ nördl. Breite (Amager).

Die Hauptschwierigkeiten der Arbeit bestanden darin, eine sichere Reduktion der einzelnen Basislängen auf das internationale Meter festzustellen. Für die Hälfte der Grundlinien war diese Schwierigkeit bereits durch die Europäische Längengradmessung von Prof. Helmert gehoben, über welche im Vorstehenden S. 154 berichtet ist.

Als allgemeine Bezugsbasis ist nach dem Vorgange der Helmertschen Längengradmessung die Basis von Lommel gewählt. Die Ergebnisse sind in einer Tabelle zusammengestellt, welche ausser 9 deutschen Grundlinien weiter 2 belgische, 2 neue und 3 alte französische, 6 spanische, 3 algerische, 2 englische, 3 schweizerische, 2 italienische, 2 österreichische, 1 dänische und 13 russische — zusammen 48 Grundlinien enthält, die durch rund 1000 Dreiecke mit einander verbunden sind.

Diese grosse und wichtige Tabelle findet sich in den „Verhandlungen der Konferenz in Brüssel 1892“ auf S. 540—545 mit 46 Grundlinien und ein Auszug daraus in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 78—79. Hier genügt es, daraus folgendes mitzuteilen:

Die Anschlüsse stimmen im allgemeinen über Erwarten günstig, es ergibt sich für *je 2* Grundlinien eine mittlere Anschluss-Differenz von $15,6^{\text{mm}}$ für 1^{km} .

Ein Polygon, welches fast ganz Zentral-Europa umfasst, nämlich von der Grundlinie Berlin ausgehend, über Göttingen, Bonn, Oberhergheim, Aarberg, Weinfelden, Bellinzona, Somma, Udine, Grossenhain bis zurück nach Berlin, schliesst mit einem Widerspruch von nur $15,5^{\text{mm}}$ für 1^{km} . —

Solcher Polygone, aber in viel geringerer Ausdehnung, konnten mehrere in Spanien geschlossen werden; auch dort sind die Resultate, bis auf eines, günstig. — Die Anschlussdifferenzen gegen Lommel addieren sich nur bei der russischen Längengradmessung systematisch und erreichen bei Orsk den bedeutenden Betrag von 570^{mm} für 1^{km}. Im übrigen sind die drei grössten Abweichungen gegen Lommel: Lugo (Spanien) mit 81^{mm}, Taschbunar (russ. Breitengradmessung von Struve) mit 54^{mm} und Oran (Algerien) mit 36^{mm} für 1^{km}.

Die Anschlüsse zwischen Grundlinien benachbarter Länder, die mit *verschiedenen* Apparaten gemessen worden sind, sind in der folgenden Tabelle enthalten. (In Belgien und Dänemark diente der preussische Besselsche Basisapparat.)

Anschluss	Entfernung in km	Anzahl der verbinden- den Dreiecke	Anschlussdifferenz in 7. Stelle des Log.	in mm für 1 ^{km}
1) Algerien — Spanien (Oran — Cartagena)	450	18	— 105	— 24,2
2) Spanien — Frankreich (Vich — Perpignan)	100	10	— 9	— 2,1
3) Frankreich — England (Paris — engl. Basen)	300	27	+ 14	+ 3,2
4) Frankreich — Belgien (Paris — Ostende)	275	26	+ 46	+ 10,6
5) England — Belgien (engl. Basen — Ostende)	150	9	— 10	— 2,3
6) Deutschland — Schweiz (Oberhergheim — Aarberg)	100	15	— 40	— 9,2
7) Schweiz — Italien (Bellinzona — Somma)	75	3	— 29	— 6,7
8) Preussen — Russland (Strehlen — Czenstochau) .	150	11	+ 2	+ 0,5
Summe	1600	119	± 255	± 58,8
Durchschnitt	200	13	± 32	± 7,4

Der rohe Durchschnitt giebt also zwischen je zwei Grundlinien mit 13 Verbindungsdreiecken auf 200^{km} Entfernung eine Anschluss-Differenz = 0.000 0032 im Logarithmus oder $\frac{32}{4,34} = 7,4^{\text{mm}}$ für 1^{km}.

Im Ganzen kommt der Verfasser zu folgenden Schlüssen:

I. Nach Reduktion auf internationale Meter zeigen die Grundlinien, welche in benachbarten Ländern mit *verschiedenen* Apparaten gemessen sind, keinen Unterschied gegen die Grundlinien, die mit *demselben* Apparat gemessen worden sind.

II. Die Vergleichung der Grundlinien vermittelst Dreiecksketten lässt deshalb weitere Schlüsse über die Massvergleichung, über die Reduktionsfaktoren, oder über die angewandte Messungsmethode nicht mehr zu (d. h. diese Feinheiten verschwinden neben den Triangulierungsfehlern).

III. Um alle Grundlinien wirklich einheitlich auf einander beziehen zu können, ist es erforderlich, entweder sämtliche Grundlinien mit demselben Apparat zu messen, oder eine einzige Grundlinie mit allen Apparaten zu messen, und hiernach die einzelnen Apparate gegen einander zu bestimmen.

§ 25. Änderung der geographischen Breite.

Die seit etwa 10 Jahren konstatierte und nun in gründlicher Erforschung befindliche Änderung der geographischen Breite eines Ortes; allgemeiner die Schwankungen der Erdaxe, bis zu 0,3" Ausweichung von der Mittellage, bildet eine Haupt-

aufgabe der heutigen internationalen Erdmessung und muss wohl auch in unserem der Geodäsie gewidmeten Bande summarisch behandelt werden, obgleich astronomische Messungen sonst hier ausgeschlossen sind.

Wir hatten schon in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1891 einiges hierüber aus den Verhandlungen der permanenten Kommission der internationalen Erdmessung von Freiburg 1890 berichtet, mit Mitteilungen von Herrn Professor Albrecht am geodätischen Institut, welcher auch für die allgemeine Konferenz der Erdmessung in Berlin 1891 den amtlichen Bericht erstattet (vgl. „Zeitschr. f. Verm.“ 1891, S. 579—580) und den nachstehenden Auszug daraus unterstützt hat.

Nachdem schon früher 1842—1843 an der Polhöhe von Pulkowa kleine Änderungen vermutet und rechnerisch erörtert waren (Helmert, Höhere Geodäsie, II. Band, 1884, S. 394) ist die Frage der Breiten-Änderung auf der Erdmessungs-Konferenz in Rom, 1883, bestimmter gestellt worden. Auf dieser Konferenz wurde diese Frage von Fergola angeregt.

Es wurde vorgeschlagen, an mehreren passend gewählten Orten auf der Erdoberfläche unter Anwendung gleicher Instrumente und einheitlicher Beobachtungsmethoden Breitenbestimmungen vorzunehmen, welche in hinreichend von einander abstehenden Zeitepochen zu wiederholen seien.

Die Konferenz in Rom beschäftigte sich eingehend mit dieser Frage, ohne dass indes praktische Folgen hieraus hervorgingen.

Die Resultate einer mehr als einjährigen Beobachtungsreihe des Herrn Küstner auf der Berliner Sternwarte nach der Methode Horrebow-Talcott brachten von Neuem diese Frage in Fluss.

Durch die Ergebnisse dieser letzterwähnten Beobachtungsreihe war die Frage einer Veränderlichkeit der Polhöhe in ein akuteres Stadium getreten, da Küstner zu dem Resultat gelangt war, dass die Beobachtungen derselben Sternpaare im Frühjahr 1885 eine um $0,20'' \pm 0,04''$ kleinere Polhöhe ergaben als diejenigen im Frühjahr 1884. (Vgl. Küstner, Neue Methode zur Bestimmung der Aberrations-Konstante nebst Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Polhöhe, Berlin 1888, S. 47.)

Dadurch wurde die Frage nahe gerückt, ob nicht vielleicht neben den schon mehrfach vermuteten säkularen Änderungen der Polhöhe auch Schwankungen innerhalb kürzerer Fristen nachzuweisen seien. Die Möglichkeit derartiger Veränderungen, als Folge der meteorologischen Vorgänge an der Erdoberfläche ist unbestritten; nur erschien es zweifelhaft, ob dieselben die Grenzen der Messbarkeit erreichen.

Auf der Konferenz der Permanenten Kommission in Salzburg 1888 wurde der Beschluss gefasst, mit eigenen Mitteln und Kräften zur Aufklärung der Frage der Veränderlichkeit der Lage der Erdaxe im Erdkörper beizutragen, und zur Vorbereitung weiterer umfassenderer Untersuchungen dieser Art Vorversuche anzustellen, welche dem Zentralbureau übertragen wurden.

Darauf hin wurden vom Anfang 1889 ab fortlaufende Breitenbestimmungen in Berlin, Potsdam und Prag unter Anwendung der Methode von Horrebow-Talcott ausgeführt.

Der Grundgedanke dieser Methode ist in Fig. 1. S. 159 angedeutet, er beruht auf der Meridian-Zenit-Distanzmessung zweier Sterne in nahezu gleichen Zenitabständen. (Vgl. Albrecht, Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, Leipzig 1894, 3. Aufl., S. 75 u. ff.)

Sind S_1 und S_2 zwei Sterne, welche auf verschiedenen Seiten von dem Zenit Z eines Punktes J kulminieren und die Deklinationen δ_1 und δ_2 haben, so sind die beiden Zenitdistanzen z_1 und z_2 , ausgedrückt in der Breite φ des Beobachtungsortes und den Deklinationen δ_1 und δ_2 der beiden Sterne:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \varphi - \delta_1 & z_2 &= -\varphi + \delta_2 \\ \text{also } \varphi &= \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2} \end{aligned} \right\} (1)$$

Wenn man nun solche Sterne hat, deren Zenitdistanzen z_1 und z_2 sehr nahe gleich sind, nämlich nur um wenige Minuten verschieden, während z_1 und z_2 selbst bis zu 25° — 30° betragen dürfen, so braucht man zur Messung der Differenz $z_1 - z_2$, auf welche es ankommt, die Kreisteilung nicht, sondern nur Mikrometer-Ablesungen, deren Fehler hinreichend klein gemacht werden können.

Die Vorteile des Verfahrens sind: Minimum an Rechnungsarbeit, höchster Genauigkeitsgrad der Resultate, nahezu völlige Unabhängigkeit von systematischen Fehlern.

Um aber von den Fehlern in den angenommenen Deklinationen der Sterne unabhängig zu werden, wurde ein Kettenverfahren angewendet, dergestalt, dass auf jeder der Stationen 9 Sterngruppen von je 8 bis 9 Sternpaaren ausgewählt wurden, so dass an jedem klaren Abende je zwei dieser Sterngruppen nach einem festen Beobachtungsprogramm beobachtet werden konnten.

Die Veränderung der Polhöhe kann dadurch unabhängig von den Deklinationsunsicherheiten der Sterne erhalten werden, dass zunächst innerhalb jeder Sterngruppe die Reduktionen jedes einzelnen Sternpaars auf das mittlere Deklinations-System der betreffenden Gruppe abgeleitet, und die übergreifenden Gebiete je zweier Gruppen dazu benutzt werden, die Deklinations-Systeme der Gruppen unter einander (unabhängig von der Veränderlichkeit der Polhöhe) festzustellen.

Die Ergebnisse der Beobachtungen, auf eine und dieselbe Sterngruppe reduziert, und daher von der Unsicherheit der angenommenen Deklinationen der Sterne befreit, sind enthalten in den Verhandlungen der vom 15.—21. Sept. 1890 zu Freiburg i. B. abgehaltenen Konferenz der permanenten Kommission der internationalen Erdmessung. Berlin 1891. S. 14—18.

Diese Ergebnisse wurden graphisch dargestellt, wie aus den hier folgenden Kurven für Berlin, Potsdam, Prag zu ersehen ist.

Fig. 1.

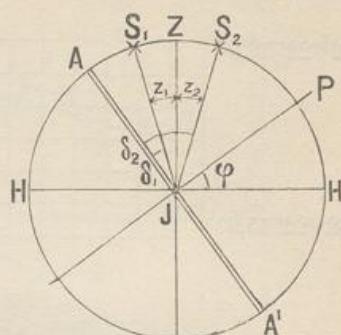


Fig. 2. Berlin.

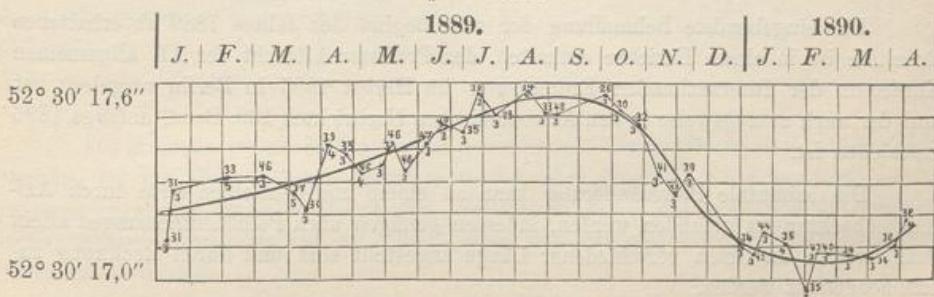


Fig. 3. Potsdam.

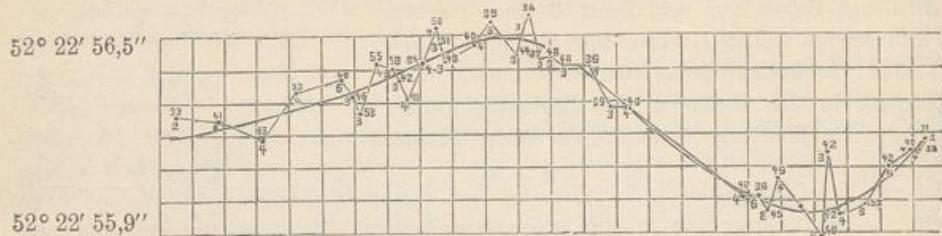
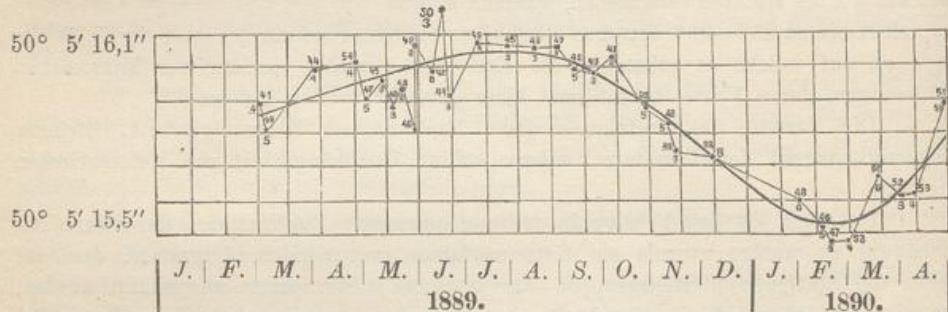


Fig. 4. Prag.



In diesen Darstellungen sind die Zeiten als Abscissen und die Breiten als Ordinaten behandelt.

In den Abscissen ist 1 Teil = 20 Tage oder = $\frac{2}{3}$ Monat, in den Ordinaten ist 1 Teil = $0,1''$. Die beigeschriebenen Zahlen bedeuten die Sternpaare der Beobachtungen und die Zahl der Beobachtungstage z. B. bei Potsdam $\frac{33}{2}$ bedeutet 2 Beobachtungstage zwischen dem 1. und 20. Januar 1889, und Anwendung von 33 Sternpaaren.

Die Kurven zeigen einen so nahe parallelen Verlauf auf allen drei Stationen, dass an der Realität der Polhöhenänderung nicht zu zweifeln ist.

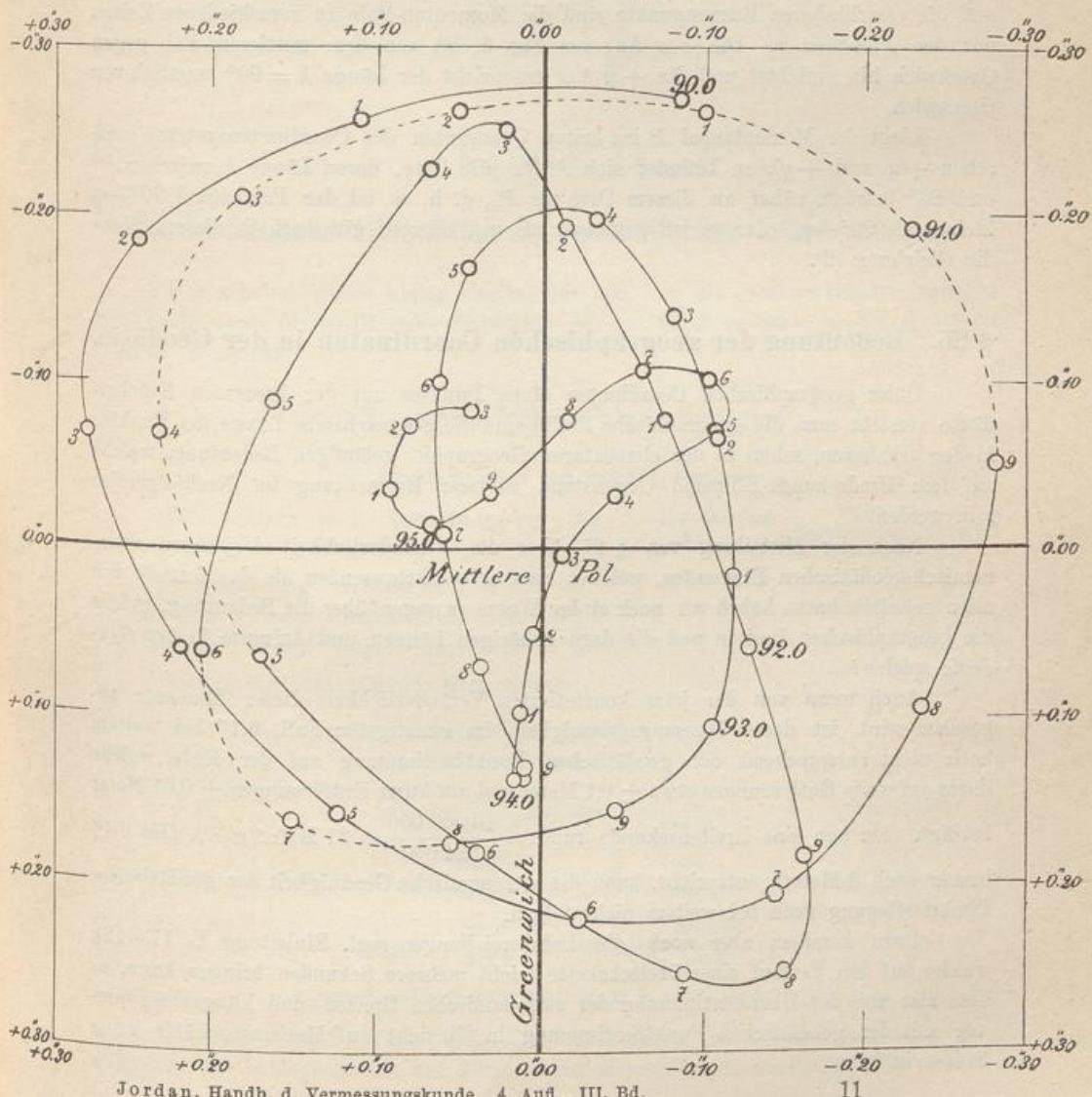
Dank der regen Beteiligung einer grösseren Anzahl von Sternwarten und sonstigen Beobachtungsstationen sind die Beobachtungen fortgesetzt worden und haben es ausser Zweifel gestellt, dass die Polhöhen Schwankungen durch wirkliche Lageänderungen der Umdrehungsaxe veranlasst sind.

Die eingehendste Behandlung der vom Beginn des Jahres 1889 ab erhaltenen Resultate ist in einem Berichte enthalten, den Professor Albrecht der XI. allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung im Herbst 1895 in Berlin vorgelegt hat und der auch auszugsweise in den Astronomischen Nachrichten 139. Band, anfangs 1896 erschienen ist.

Die azimutale Polveränderung kann an einem und demselben Orte durch Azimutbeobachtungen gefunden werden, indessen genügen auch Polhöhenmessungen allein dazu, welche an Orten verschiedener Länge angestellt sind und durch Rechnung zusammengefasst werden.

Wenn für einen Beobachter in Greenwich, oder im Meridian von Greenwich, der Momentan-Pol am Himmel um den Betrag x höher steht als der mittlere Pol, so wird auch die beobachtete Polhöhe φ um ebensoviel grösser sein als die mittlere Polhöhe φ_0 oder es wird sein $\varphi - \varphi_0 = x$. Wenn zugleich der Pol in Greenwich um den Betrag y rechts vom Meridian des mittleren Pols steht, so hat das auf die Polhöhenmessung in Greenwich, oder im Meridian von Greenwich keinen Einfluss, da gegen auf einem Punkte in der Länge 90° östlich von Greenwich wird dieses y sich als Polhöhenvergrösserung zeigen, während umgekehrt hier x unbemerkt bleibt.

Fig. 5. Bewegung des Nordpols der Erde von 1890—1895.
Punkte in Abständen von $\frac{1}{10}$ Jahr.



Allgemein in der Länge λ östlich von Greenwich werden die erwähnten Komponenten x und y der Polabweichung eine Polhöhenänderung erzeugen:

$$\varphi - \varphi_0 = x \cos \lambda + y \sin \lambda \quad (2)$$

Hat man eine Gruppe gleichzeitiger Bestimmungen von $\varphi - \varphi_0$ auf möglichst verschiedenen Längen λ , so kann man daraus die Konstanten x und y durch Ausgleichung bestimmen, und zwar nach denselben Formeln, welche z. B. in diesem Bande § 6. für periodische Schraubenfehler S. 45—48 angewendet wurden.

Das Ergebnis der hier nach geführten Ausgleichung ist in Fig. 5. S. 161 gezeichnet. Diese Figur ist nicht dem Anblick am Himmel entsprechend, sondern sie ist so gedacht, als ob der Beobachter ausserhalb der Erde steht und auf die Erdoberfläche sieht. Der Coordinaten-Nullpunkt stellt den mittleren Pol mit der Polhöhe φ_0 vor und die verschiedenen Kurvenpunkte sind die Momentan-Pole zu verschiedenen Zeiten mit den Polhöhen φ . Die $+x$ Axe von Fig. 5. ist von dem mittleren Pol gegen Greenwich hin gerichtet und die $+y$ Axe entspricht der Länge $\lambda = 90^\circ$ westlich von Greenwich.

Liegt der Momentanpol P im ersten Quadranten des Coordinatensystems (zwischen $+x$ und $+y$), so befindet sich P für alle Orte, deren Länge λ zwischen 0° und 90° beträgt, näher an diesem Orte als P_0 , d. h. es ist der Polabstand $90^\circ - \varphi$ kleiner als $90^\circ - \varphi_0$ oder es ist φ grösser als φ_0 , oder es gilt auch in diesem Sinne die Gleichung (2).

§ 26. Bedeutung der geographischen Coordinaten in der Geodäsie.

Unter geographischen Coordinaten eines Punktes auf der krummen Erdoberfläche versteht man die geographische Breite und die geographische Länge des Punktes in der bekannten, schon in der elementaren Geographie geläufigen Bedeutung, welche auf dem Umdrehungs-Ellipsoid Gegenstand weiterer Betrachtung im Nachfolgenden sein werden.

Nach der Mitteilung von § 25. über die Veränderlichkeit desjenigen astronomisch-geodätischen Elementes, welches man seit Jahrtausenden als das festeste von allen gehalten hatte, haben wir noch einige Worte zu sagen über die Bedeutung, welche die geographischen Breiten und die dazu gehörigen Längen und Azimute in der Geodäsie spielen:

Auch wenn von der jetzt konstatierten Veränderlichkeit dieser Elemente abgesehen wird, ist deren Messungsgenauigkeit, im günstigsten Fall, $0,1''$ bei weitem noch nicht entsprechend der geodätischen Punktbestimmung auf der Erde, welche linear auf weite Entfernungen etwa $\pm 0,1$ Meter und auf kurze Entfernungen $\pm 0,01$ Meter beträgt. Da nun eine Breitensekunde rund $= \frac{10\,000\,000}{324\,000} = 31$ Meter giebt, also $0,1''$ immer noch 3 Metern entspricht, kann die astronomische Genauigkeit der geodätischen Punktfestlegung noch bei weitem nicht folgen.

Dazu kommen aber noch die Lotabweichungen (vgl. Einleitung S. 11—12), welche auf den Verlauf einer Dreieckslette leicht mehrere Sekunden bringen kann, so dass also von der Übereinstimmung der astronomischen Breiten- und Längenbestimmung mit der geodätischen Punktbestimmung in Hinsicht auf Messungsschärfe keine Rede sein kann.

Allerdings astronomische Längen und Azimute *zusammen* spielen hier noch eine andere Rolle, wovon aber hier auch noch nicht gehandelt werden kann.

Vielmehr ist es hier, vor Beginn der mathematisch-geodätischen Rechnungen auf dem Ellipsoid, nur nötig zu erklären, dass die Breiten und Längen, welche bis auf Tausendel und Zehntausendel-Sekunden ($0,001''$ bis $0,0001''$ und teilweise noch weiter) angegeben werden, in der Geodäsie zunächst gar keinen anderen Zweck haben als die geometrische Punktbestimmung auf einer krummen Fläche, welche, als Umdrehungs-Ellipsoid angenommen, selbst nur hypothetischer Natur ist.

Dieser Entwicklungsgang ist unerlässlich, und *nach* Erledigung der geodätischen Theorien für Ellipsoid und Kugel wird auch das Verständnis für die von jenen Voraussetzungen freie Geodäsie sich eröffnen.

Kapitel II.

Mathematische Hilfsmittel der geodätischen Entwicklungen.

Wir schalten dieses kleine Kapitel hier ein, um die gebräuchlichsten Formeln und Zahlenwerte für geodätische Entwicklungen zur Hand zu haben und nach Bedarf citieren zu können.

§ 27. Sphärische Trigonometrie.

I. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

Wir nehmen nach Andeutung von Fig. 1. die Bezeichnungen an:

Hypotenuse = c Gegenwinkel = 90°

Kathete = a Gegenwinkel = α

Kathete = b Gegenwinkel = β

Hiemit hat man folgende Gleichungen:

$$\cos c = \cos a \cos b$$

$$\cos c = \cotg \alpha \cotg \beta$$

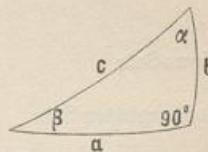
$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \text{ und } \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c} \text{ und } \cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan a}{\sin b} \text{ und } \tan \beta = \frac{\tan b}{\sin a}$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \text{ und } \cos \beta = \sin \alpha \cos b$$

Fig. 1.
Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.



In dieser Gestalt prägen sich diese Gleichungen leicht dem Gedächtnis ein, wenn man die Analogien mit den Formeln der *ebenen* Trigonometrie im Auge behält.