Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

Kapitel III. Das Erd-Ellipsoid.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

halten daraus durch Zusammensetzung mit Hilfe von Steinhausers 20stelligen Logarithmen:

$$log\, a = \quad 7{,}462\,2032\,705\,16635$$

also $$log\,(a+b) - log\, a = d \quad = -\,0{,}000\,0085\,355\,16098$$

Das Mittel aus dem obigen 11stelligen $\mu\, e^2$ und aus der Näherung a ist $a_0 = 0{,}00289\,86715\,151$, womit $y = a_0 \dfrac{d}{\mu} = -\,569{,}697\,7144$, also das gesuchte

$$\mu\, e^2 = a + b = 0{,}00289\;\;86430\;\;30229$$

Es kommt bei solchen Rechnungen vor allem auf gute, möglichst grosse Näherungswerte an, die man mit Überlegung und manchem Kunstgriff durch Produktenzerlegung gewinnen kann, wobei eine Faktoren- und Primzahlen-Tafel, z. B. in Vega-Hülsse, Leipzig 1840, S. 360—454, von Nutzen ist.

Wir sind mit dieser Sache fast zu weit von der Geodäsie abgeschweift, doch war es nötig, für die in der höheren Geodäsie ausnahmsweise vorkommenden vielstelligen Fundamentalzahlen die Hilfsmittel hier zu behandeln.

Kapitel III.

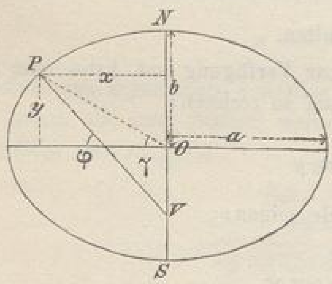
Das Erd-Ellipsoid (Sphäroid).

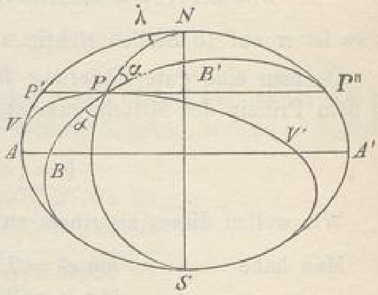
§ 31. Erklärungen und Grund-Masse.

Die ideale Erdoberfläche, welche unseren Berechnungen zu Grunde gelegt wird, ist ein Umdrehungs-Ellipsoid, d. h. diejenige Fläche, welche durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe erzeugt wird.

Fig. 1. Fig. 2.

Umdrehungs-Ellipsoid.





Zuerst kommen folgende Grössen und Gleichungen in Betracht, welche zu den vorstehenden Fig. 1. und Fig. 2. in Beziehung stehen.

Die grosse Halbaxe a, die kleine Halbaxe b (1)

die Abplattung $\alpha = \dfrac{a-b}{a}$ (2)

$$\text{die Excentricität } e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \tag{3}$$

$$\text{die zweite Excentricität } e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} \tag{4}$$

Die Excentricität e in diesem Sinne ist eine absolute Zahl und erscheint als Verhältnis der halben linearen Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ zur grossen Halbaxe a.

Indem man die halbe lineare Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2}$ auch zur kleinen Halbaxe b in Beziehung setzt, kommt man auf den Wert e' nach (4), welcher für unsere Berechnungen meist vorteilhafter ist, als e nach (3).

Zwischen e und e' bestehen die leicht nachweisbaren Beziehungen:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \qquad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \tag{5}$$

$$\text{und } (1 - e^2)\,(1 + e'^2) = 1 \tag{6}$$

Zwischen der Abplattung α und dem verwandten e hat man:

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} \text{ oder } e^2 = 2\,\alpha - \alpha^2 \tag{7}$$

In α und e ist die grosse Halbaxe a und in e' ist die kleine Halbaxe b bevorzugt; beide a und b treten gleichartig auf in den Werten

$$n = \frac{a - b}{a + b} \qquad m^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \tag{8}$$

Ausser den beiden Halbaxen a und b führen wir auch noch eine dritte Grösse c ein, entsprechend der Gleichung:

$$c = \frac{a^2}{b} \text{ oder } c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \tag{9}$$

Diese Grösse c hat die Bedeutung des Krümmungs-Halbmessers im Nordpol oder Südpol der Meridian-Ellipse, und schmiegt sich daher dem Umdrehungs-Ellipsoid in der Nähe der Pole sehr an; diese Grösse c wird sich später bei manchen Entwicklungen nützlich erweisen, was auch von vorn herein wahrscheinlich ist, insofern bei einem Umdrehungs-Ellipsoid die Umdrehungsaxe b die wichtigste ist.

Unsere geodätischen Entwicklungen werden wir meist mit c und e'^2 als Konstanten führen.

In Fig. 1. haben wir noch zu betrachten die Normale $P\,V$, welche die Richtung der Schwerkraft auf dem Ellipsoid anzeigt, und dazu den Winkel φ, welchen die Normale mit der grossen Axe macht, d. h.:

die geographische Breite φ

Verschieden hievon ist der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel γ, welcher *geocentrische* Breite heisst, und in der Erdmessung fast nie gebraucht wird (dagegen kommt γ bei astronomischen Parallaxen-Rechnungen vor).

Ferner sind nach Fig. 2. noch folgende Begriffe festzustellen:

Parallelkreis $P'\,P''$,
Meridiane $N\,A\,S$ und $N\,P\,S$
Geographischer Längen-Unterricht λ,
Normalschnitte, z. B. $B\,P\,B'$,
Azimut α eines Normalschnittes.

Die Besselschen Erd-Dimensionen.

Wie wir schon in der Einleitung S. 9—10 angegeben haben, werden die von Bessel im Jahre 1841 durch Ausgleichung aus 10 Breitengradmessungen berechneten Erd-Dimensionen sehr allgemein angewendet, und wir werden in der Folge dieselben stets benützen.

Bessel hat im 19. Bande, 1842, der astronomischen Nachrichten, Nr. 438, Altona 1841, 2. Dezember, S. 116 folgende Schlusswerte seiner Ausgleichungen gegeben:

$$\left.\begin{array}{ll}
n = \dfrac{a-b}{a+b} = 0{,}00167\ 41848 & \\
\dfrac{a}{b} = \dfrac{299{,}1528}{298{,}1528} & \\
a = 327\,2077{,}14 \text{ Toisen} & log\ a = 6.514\,8235{\cdot}337 \text{ in Toisen} \\
b = 326\,1139{,}33 \quad \text{"} & log\ b = 6.513\,3693{\cdot}539 \quad \text{" } \quad \text{"} \\
log\ e = 8.912\,2052 & log\ \sqrt{1-e^2} = 9.998\ 5458{\cdot}202 \\
\text{Länge des Erdquadranten} & \\
\quad = 513\,1179{,}81 \text{ Toisen} = 10\,000\,855{,}76 \text{ Meter} &
\end{array}\right\} \quad (11)$$

Dieses sind genau die Angaben von Bessel, und man könnte nun meinen, die seit 54 Jahren allgemein gebrauchten „Besselschen Erddimensionen" seien dadurch unabänderlich festgestellt, das ist aber in den letzten Stellen nicht der Fall. Diese Besselschen Zahlen stimmen begreiflicherweise unter sich selbst nicht völlig scharf in den letzten Stellen, und je nachdem man nun von der einen oder anderen ausgeht und schärfer weiter rechnet, erhält man Abweichungen.

Gauss citiert die Besselschen Erddimensionen im I. Teil der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung" 1834 S. 9—10:

$$log\ a = 6.514\ 8235{\cdot}337 \text{ in Toisen, } log\ cos\ \varphi = log\ \sqrt{1-e^2} = 9.998\ 5458{\cdot}202$$

dann heisst es: „Es folgt hieraus, mit Hilfe der 10 ziffrigen Logarithmen":

$$\varphi = 4^\circ\,41'\,9{,}98262'' \text{ und } log\ sin\ \varphi = log\ e = 8.912\ 2052{\cdot}079$$

und zur Reduktion von Toisen auf Metermass hat hier Gauss den Logarithmus 0.2898199·300

Diese Zahlen liegen der Gaussschen Tafel für konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel zu Grunde.

Encke ging bei Berechnung seiner „Tafeln für die Gestalt der Erde" im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1852, S. 318—381 von den Besselschen *log a* und *log b* aus, er sagt daselbst S. 322—323: Bei den folgenden Tafeln ist zu Grunde gelegt nach Bessel:

$$log\ a = 6.514\,8235{\cdot}337\ ,\ log\ b = 6.513\,3693{\cdot}539$$

woraus abgeleitet ward:

$$\begin{array}{ll}
a = 3\,272\,077{,}1399 \text{ Toisen} & log\ e = 8.912\,2052{\cdot}075 \\
b = 3\,261\,139{,}3284 \quad \text{"} & log\ \sqrt{1-e^2} = 9.998\,5458{\cdot}202 \\
\dfrac{a-b}{a} = \dfrac{1}{299{,}152\,818} & log\ n = 7.223\,8033{\cdot}861 \\
 & log\,(1+n^2) = 0.000\,0012{\cdot}173 \\
 & n = 0.001\,6741{\cdot}84767
\end{array}$$

Vergleicht man die Zahlen von Bessel und Encke, so sieht man, dass durch den Umweg über die 10 stelligen Logarithmen *a* und *b* sich bzw. um 0,0001 und 0,0016 Toisen geändert haben. —

Alle die Zahlen, welche in namhaften geodätischen Schriftwerken für die Besselschen Erddimensionen aufgestellt worden sind, differieren von einander mehr oder weniger in den letzten Stellen, wie wir in der „Zeitschr. f. Verm." 1885, S. 22—26 durch Zusammenstellung jener Zahlen näher gezeigt haben.

Auch die Umwandlung der Besselschen a und b von Toisen in Meter hat zu Schwankungen der letzten Stelle Veranlassung gegeben. Das gesetzliche Verhältnis der Toise zum Meter, welches wir schon in der Einleitung S. 7 erwähnt haben, ist 864 : 443,296, und wenn man mit den gewöhnlichen 10 stelligen Logarithmen rechnet, so bekommt man:

$$1 \text{ Meter} = \frac{443{,}296}{864} \text{ Toisen} \qquad \begin{aligned} log\, 443{,}296 &= 2.646\,6938{\cdot}125 \\ log\, 864 &= 2.936\,5137{\cdot}425 \\ \hline log\,(M, T) &= 9.710\,1800{\cdot}700 - 10 \\ log\,(T, M) &= 0.289\,8199{\cdot}300 \end{aligned}$$

und die Zahlen zu diesen Logarithmen

$$1 \text{ Meter} = 0{,}513\,074\,074 \text{ Toisen}, \quad 1 \text{ Toise} = 1.949\,036\,310 \text{ Meter}.$$

Wenn man aber schärfer rechnet, so wird durch gewöhnliches Dividieren:

$$(T, M) = \frac{443{,}296}{864} = 1{,}94903\,63098\,24587$$

und der 11 stellige Logarithmus hiezu ist:

$$log\,(T, M) = log\,\frac{443{,}296}{864} = 0.289\,8199\,2994$$

also 10 stellig abgerundet um 0·001 kleiner als das obige gewöhnlich gebrauchte 0·300.

Die Zahlenschärfe aller dieser Angaben geht weit über die sachliche Genauigkeit hinaus, denn nach dem was wir über die Besselsche Ausgleichung selbst in der Einleitung S. 9—10 gesehen haben, hat der Meridianquadrant 10 000 856 m einen mittleren Fehler von rund 500 m und die Abplattungszahl 299 einen mittleren Fehler von 5, während man mit $log\,a$ und $log\,b$ 10 stellig rechnet. — Aber es bestehen doch gute Gründe für das Festhalten gewisser auf 10 Stellen unabänderlich angenommenen Zahlen für die Dimensionen des Erd-Ellipsoids, das als ideale Vergleichs- und Projektionsfläche allen Rechnungen zu Grunde gelegt wird.

Namentlich bei Berechnung von geodätischen Zahlentafeln, wo man wegen der Abrundungshäufung oft 3—4 Stellen mehr in Anrechnung stellt, als man schliesslich haben will, ist es störend, wenn die letzten Stellen bei dem einen und anderen Rechner nicht übereinstimmen. —

Wir halten uns ein für allemal an diejenigen Festsetzungen für die letzten Stellen der Besselschen Erddimensionen, welche seit 1878 von der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme und im Anschluss hieran seit 1886 vom geodätischen Institut getroffen worden sind, nämlich:

$$log\, a = \mathbf{6.804\,6434{\cdot}637} \text{ **in Metern**}$$
$$log\, e^2 = \mathbf{7.824\,4104{\cdot}237 - 10}$$
$$log\,\frac{1}{1+e'^2} = log\,(1-e^2) = \mathbf{9.997\,0916{\cdot}404 - 10}$$

Dieses sind in Preussen die einzig richtigen Besselschen Erddimensionen; die Quellenangaben dafür sind:

1) *Landesaufnahme:* Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten

aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878, im Selbstverlage, zu beziehen durch die königliche Hofbuchhandlung von E. S. Mittler und Sohn Kochstrasse 69, 70. (S. 4 *log a* und *log* e^2 wie oben).

2) *Geodätisches Institut:* Veröffentlichung des königlich preussischen geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft 1: Formeln und Tafeln sowie einige Ergebnisse für Norddeutschland. Der allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung im Oktober 1886 zu Berlin gewidmet. Mit drei Karten. Druck und Verlag von P. Stankiewicz Buchdruckerei 1886. (S. 4 *log a* und *log* e^2 wie oben).

Bei den Grundzahlen für $log\, a$ und $log\, e^2$ ist auch noch $log\,(1-e^2)$ angegeben, wie in jenen Rechnungsvorschriften S. 4; und da die dritte Zahl $log\,(1-e^2)$ von der zweiten $log\, e^2$ abhängt, ist zu bemerken, dass $log\, e^2$, welches 10 Wertstellen hat, allein massgebend ist und dazu gebraucht werden kann, um $log\sqrt{1-e^2}$, welches im 10 stelligen Logarithmus nur 8 eigentliche Wertstellen hat, noch auf weitere Stellen auszurechnen, welche zu manchen Zwecken erwünscht sein werden.

Aus der logarithmischen Reihe § 28. S. 169 hat man sofort:

$$l\,(1-e^2) = -\left(e^2 + \frac{e^4}{1} + \frac{e^6}{3} + \frac{e^8}{4} + \frac{e^{10}}{5} + \ldots\right)$$

$$log\,\frac{1}{1-e^2} = \mu\, e^2 + \frac{\mu\, e^4}{2} + \frac{\mu\, e^6}{3} + \frac{\mu\, e^8}{4} + \frac{\mu\, e^{10}}{5} + \ldots$$

Die Ausrechnung mit $log\, e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$ giebt:

$$log\,\frac{1}{1-e^2} = +\,28986{\cdot}430302 + 96{\cdot}733112 + 0{\cdot}430422 + 0{\cdot}002155 + 0{\cdot}000012$$

$$log\,\frac{1}{1-e^2} = 0.002\,9083{\cdot}596003\;,\quad log\,(1-e^2) = 9.997\,0916{\cdot}403997$$

Zur Probe kann man auch rechnen:

$$log\, e^2 - log\,(1-e^2) = log\, e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833$$

$$log\,(1+e'^2) = \mu\, e'^2 - \frac{\mu e'^4}{2} + \frac{\mu e'^6}{3} - \frac{\mu e'^8}{4} + \frac{\mu\, e'^{10}}{5} - \ldots$$

$$= +\,29\,181{\cdot}196470 - 98{\cdot}037422 + 0{\cdot}439157 - 0{\cdot}002213 + 0{\cdot}000012$$

$$log\,(1+e'^2) = 0.002\,9083{\cdot}596004\;,\quad log\,\frac{1}{1+e'^2} = 9.997\,0916{\cdot}403996$$

So sind diese Werte auf der Hauptzusammenstellung S. 193 eingesetzt.

Die seltener gebrauchten, und deswegen auf S. 193 weggelassenen Werte für $(a-b)$: a und $(a-b):(a+b)$ fügen wir hier auch noch bei:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{399{,}1528128} \qquad log\,\frac{1}{\alpha} = 2.475\,8930{\cdot}907$$

$$\alpha = 0{,}00334\,27731\,81579 \qquad log\,\alpha = 7.524\,1069{\cdot}093 - 10$$

$$\frac{a-b}{a+b} = n = 0{,}00167\,41848\,00816 \qquad log\, n = 7.223\,8033{\cdot}949 - 10$$

Bemerkt sei auch noch zu der Zusammenstellung auf S. 193, dass die verschiedenen -10 u. s. w. an den Logarithmen, weil bei praktischen Rechnungen stets selbstverständlich, *nicht* geschrieben sind.

Besselsche Erddimensionen und Mathematische Konstante.

$a = 6\,377\,397{,}15500^{m}$ $\quad log\ a = 6.804\,6434{\cdot}637$ $\qquad log\,\frac{\varrho''}{c} = 8.508\,3274{\cdot}897$

$b = 6\,356\,078{,}96325_{"}$ $\quad log\ b = 6.803\,1892{\cdot}839$

$\frac{a^2}{b} = c = 6\,398\,786{,}84939_{"}$ $\quad log\ c = 6.806\,0976{\cdot}435$ $\qquad log\,\frac{c}{\varrho''} = 1.491\,6725{\cdot}103$

$c = a\sqrt{1+e'^2} = b\,(1+e'^2)$ $\quad log\,c^2 = 13.612\,1952{\cdot}870$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = e^2 = 0{,}00667\,43722\,31315 \qquad log\,e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$$

$$\frac{a^2-b^2}{b^2} = e'^2 = 0{,}00671\,92187\,98677 \qquad log\,e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833$$

$$1-e^2 = \frac{1}{1+e'^2} = 0{,}99332\,56277\,68685 \qquad log\,(1-e^2) = 9.997\,0916{\cdot}403996$$

$$\frac{1}{1-e^2} = 1+e'^2 = 1{,}00671\,92187\,98677 \qquad log\,(1+e'^2) = 0.002\,9083{\cdot}596004$$

$$\sqrt{1-e^2} = \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} = 0{,}99665\,72269 \qquad log\,\sqrt{1-e^2} = 9.998\,5458{\cdot}201998$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{1+e'^2} = 1{,}00335\,39848 \qquad log\,\sqrt{1+e'^2} = 0.001\,4541{\cdot}798002$$

n	$log\ e^n$	$log\ \mu\ e^n$	$log\ e'^n$	$log\ \mu\ e'^n$	n
0		9.637 7843·113		9.637 7843·113	0
2	7.824 4104·237	7.462 1947·350	7.827 3187·833	7.465 1030·946	2
4	5.648 8208·474	5.286 6051·587	5.654 6375·666	5.292 4218·779	4
6	3.473 2312·711	3.111 0155·824	3.481 9563·499	3.119 7406·612	6
8	1,297 6416·948	0.935 4260·061	1.309 2751·332	0,947 0594·445	8
10	9.122 0521·185	8.759 8364·298	9.136 5939·165	8.874 3782·278	10
12	6.946 4625·422	6.584 2468·535	6.963 9126·998	6.601 6970.111	12

für 7. Log.-Stelle: $\mu\,e^2 = 28986{,}43030229$ $\qquad \mu\,e'^2 = 29181{,}19646966$

1 Meter $= 0{,}513\,074\,074$ Toisen $\qquad log\,(M,T) = 9.710\,1800{\cdot}700$ (vgl. hiezu
1 Toise $= 1{,}949\,036\,310$ Meter $\qquad log\,(T,M) = 0.289\,8199{\cdot}300$ S. 191)

Die Zahlen π, ϱ und μ (vgl. auch S. 170 und S. 171).

$$\pi = 3{,}14159\,26536 \qquad log\,\pi = 0.497\,1498{\cdot}727 \qquad log\,\frac{1}{\pi} = 9.502\,8501{\cdot}273$$

$$\varrho^\circ = 57{,}29577\,95131 \qquad log\,\varrho^\circ = 1.758\,1226{\cdot}324 \qquad log\,\frac{1}{\varrho^\circ} = 8.241\,8773{\cdot}676$$

$$\varrho' = 3\,437{,}74677\,07849 \qquad log\,\varrho' = 3.536\,2738{\cdot}828 \qquad log\,\frac{1}{\varrho'} = 6.463\,7261{\cdot}172$$

$$\varrho'' = 206\,264{,}80624\,71 \qquad log\,\varrho'' = 5.314\,4251{\cdot}332 \qquad log\,\frac{1}{\varrho''} = 4.685\,5748{\cdot}668$$

Für neue Teilung:

$$\varrho^g = 63{,}66197\,72368 \qquad log\,\varrho^g = 1.803\,8801{\cdot}230 \qquad log\,\frac{1}{\varrho^g} = 8.196\,1198{\cdot}770$$

$$\mu = 0{,}43429\,44819 \qquad log\,\mu = 9.637\,7843{\cdot}113 \qquad log\,\frac{1}{\mu} = 0.362\,2156{\cdot}887$$

Für Einheiten der 7ten Stelle $\quad log\,\mu = 6.637\,7843{\cdot}113 \qquad log\,\frac{1}{\mu} = 3.362\,2156{\cdot}887$

$log\,2 = 0.301\,0299{\cdot}957$ $\qquad log\,5 = 0.698\,9700{\cdot}043$ $\qquad log\,8 = 0.903\,0899{\cdot}870$
$log\,3 = 0.477\,1212{\cdot}547$ $\qquad log\,6 = 0.778\,1512{\cdot}504$ $\qquad log\,9 = 0.954\,2425{\cdot}094$
$log\,4 = 0.602\,0599{\cdot}913$ $\qquad log\,7 = 0.845\,0980{\cdot}400$ $\qquad log\,12 = 1.079\,1812{\cdot}460$

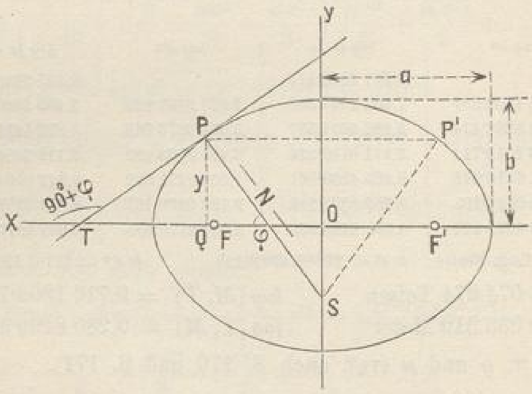
Für die Festhaltung der oben S. 191 fett gedruckten Konstanten besteht der Grund, dass die von der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme veröffentlichten geographischen Coordinaten, auf welchen die ganze preussische praktische Geodäsie beruht, mit diesen Konstanten und den darauf gegründeten Hilfstafeln berechnet sind, dass also z. B. eine Dreiecksseite rückwärts aus jenen Coordinaten berechnet unmöglich wieder ebenso herauskommen kann, wie sie als Dreiecksseite eingeführt worden ist, wenn nicht wieder dieselben Konstanten a und e^2 angewendet werden.

In diesem Buche haben wir die auf S. 191 fett gedruckten Zahlen und die darauf gegründeten auf S. 193 zusammengestellten weiteren geodätischen Konstanten allen geodätischen Rechnungen zu Grunde gelegt.

§ 32. Die Haupt-Krümmungs-Halbmesser.

Eine Ellipse mit den beiden Halb-Axen a und b in rechtwinkligen Coordinaten x und y ist in Fig. 1 gezeichnet.

Fig. 1.
Umdrehungs-Erd-Ellipsoid.



Die Gleichung dieser Ellipse ist bekanntlich:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ oder } b^2 x^2+a^2 y^2=a^2 b^2 \tag{1}$$

Die Differentiierung dieser Gleichung giebt:

$$\frac{2\,x\,d\,x}{a^2}+\frac{2\,y\,d\,y}{b^2}=0 \text{ oder } \frac{d\,y}{d\,x}=-\frac{b^2\,x}{a^2\,y} \tag{2}$$

Andererseits hat der Differential-Quotient $\frac{d\,y}{d\,x}$ eine Beziehung zum Normalen-Winkel φ, nämlich (nach Fig. 1.):

$$\frac{d\,y}{d\,x}=-\,cotg\,\varphi \text{ oder } \frac{d\,y}{d\,x}=-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) und (3) zusammen geben:

$$\frac{b^2\,x}{a^2\,y}=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \quad\text{oder}\quad \frac{b^2\,x^2}{a^2\,y^2}=\frac{a^2\cos^2\varphi}{b^2\sin^2\varphi} \tag{4}$$

Nun hat man in (1) und (4) zwei Gleichungen, welche nach x^2 und y^2 aufgelöst werden können, was wir in aller Ausführlichkeit so schreiben:

$$\begin{array}{lll} (1) \text{ giebt:} & b^2 x^2 \qquad + a^2 y^2 & = a^2 b^2 \\ (4) \quad „ & b^4 x^2 \sin^2 \varphi - a^4 y^2 \cos^2 \varphi & = 0 \end{array}$$

Wenn man die erste dieser beiden Gleichungen mit $a^2 \cos^2 \varphi$ multipliziert und dann beide Gleichungen addiert, so bekommt man:

$$x^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \tag{5}$$

Wenn man andererseits die erste der beiden vorstehenden Gleichungen mit $b^2 \sin^2 \varphi$ multipliziert und dann beide Gleichungen subtrahiert, so bekommt man

$$y^2 = \frac{b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \tag{6}$$

Meridian-Krümmungs-Halbmesser M.

Nach diesem gehen wir über zur Bestimmung des Krümmungs-Halbmessers der Meridian-Ellipse, den wir mit M bezeichnen wollen. Die analytische Geometrie bietet hiezu bekanntlich die Formel:

$$M = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}} \tag{7}$$

Den hiezu nötigen ersten Differential-Quotienten haben wir bereits in (3) gebraucht, nämlich:

$$\frac{dy}{dx} = -\cot g\, \varphi \quad , \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \tag{8}$$

Die zweite Ableitung hievon giebt zunächst:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dx} \tag{9}$$

und um $\frac{d\varphi}{dx}$ zu erlangen, müssen wir die Reciproke $\frac{dx}{d\varphi}$ aus (5) ableiten:

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

Ableitung eines Bruches:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a^2}{(\sqrt{\ldots})^2} \left(- \sin \varphi \sqrt{\ldots} - \cos \varphi \, \frac{-a^2 \cos \varphi \sin \varphi + b^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{\ldots}} \right)$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a^2}{(\sqrt{\ldots})^3} \left(\sin \varphi \, (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) + \cos \varphi \, (-a^2 + b^2) \sin \varphi \cos \varphi \right)$$

$$= \frac{-a^2}{(\sqrt{\ldots})^3} b^2 \sin \varphi \, (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-a^2 b^2 \sin \varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

Nun kann man aus (8), (9), (10) die Formel (7) zusammensetzen, und man bekommt dadurch mit Weglassung des für uns bedeutungslosen Vorzeichens:

$$M = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{11}$$

Einführung der Excentricität.

Die Formeln, welche wir hier entwickelt haben, sind die sich zuerst darbietenden, allein für die späteren Anwendungen sind diese Formeln nicht geeignet, weil man darin nicht gut den wichtigen Umstand zum Ausdruck bringen kann, dass beim Erdellipsoid die beiden Halbaxen a und b nahezu *gleich* sind, oder mit anderen Worten: die später unerlässlichen rasch konvergierenden Reihen-Entwicklungen lassen sich an die vorstehenden Formeln mit a und b nicht gut ansetzen. Man führt deswegen eine Excentricität und eine lineare Axengrösse ein. Wir haben hiezu zwei Formen, welche zunächst beide behandelt werden sollen:

$$\text{I. Ältere Form mit } \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2 \text{ und Axe } a \tag{12}$$

$$\text{II. Neuere Form mit } \frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2 \text{ und Axengrösse } \frac{a^2}{b} \tag{13}$$

Bleiben wir zuerst bei der älteren Form I, so haben wir, um alles in a und e^2 auszudrücken, zunächst

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = e^2 \qquad b^2 = a^2 (1 - e^2) \tag{14}$$

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = a^2 \cos^2 \varphi + a^2 (1 - e^2) \sin^2 \varphi = a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)$$

Wir setzen ein für allemal:

$$1 - e^2 \sin^2 \varphi = W^2 \qquad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \tag{15}$$

damit werden x und y, sowie M aus ihren ersten Formen in (5), (6) und (11) übergeführt in:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \qquad y = \frac{a (1 - e^2) \sin \varphi}{W} \tag{16}$$

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{W^3} \tag{17}$$

Diese Formeln (16) und (17) findet man sehr allgemein in geodätischen Werken, sie sind aber nicht die besten. Wenn man nach der neueren Form II bei (13) rechnet, so bekommt man:

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 = e'^2 \qquad \frac{a}{b} = \sqrt{1 + e'^2}\,,\ \frac{a^2}{b} = c$$

$$a = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2}} \qquad b = \frac{c}{1 + e'^2} \tag{18}$$

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = \frac{c^2 (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)}{(1 + e'^2)^2}$$

Wir setzen ein für allemal:

$$1 + e'^2 \cos^2 \varphi = V^2 \qquad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{19}$$

damit werden x, y und M aus (5), (6), (11) übergeführt in:

$$x = \frac{c \cos \varphi}{V} \qquad y = \frac{c \sin \varphi}{V(1+e'^2)} \tag{20}$$

$$M = \frac{c}{V^3} \tag{21}$$

Der Querkrümmungshalbmesser N.

Durch das Vorstehende haben wir den ersten Haupt-Krümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids, für den Meridian, bestimmt; der zweite Haupt-Krümmungs-Halbmesser, welcher sich auf die Krümmung quer zum Meridian, also von West nach Ost bezieht, kann ohne weitere Rechnung durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung gefunden werden.

Wir betrachten in Fig. 1. (S. 194) zuerst den Parallelkreis $P\,P'$ für die Breite φ, und sehen, dass alle in diesem Parallelkreis gezogenen Flächen-Normalen sich in *einem* Punkte S der Axe schneiden.

Der Querkrümmungs-Bogen, welcher in P rechtwinklig zum Meridian ist, muss offenbar jenen Parallelkreis $P\,P'$ in P berühren, und deswegen sind zwei einander unendlich nahe liegende Gerade $P\,S$ auch Normalen des Querkrümmungs-Bogens in P. Da aber der Schnittpunkt zweier einander unendlich naher Normalen einer Kurve als Krümmungs-Mittelpunkt der Kurve gilt, so ist $P\,S$ der Krümmungs-Halbmesser des Querkrümmungs-Bogens, oder kurz, es ist $PS = N$ der Querkrümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids in dem Punkte P.

Indem wir die Länge dieses Querkrümmungs-Halbmessers ein für allemal mit N bezeichnen, haben wir

$$N = \frac{x}{\cos \varphi}$$

und je nach der alten oder neuen Form (16) oder (20) giebt dieses:

$$N = \frac{a}{W} \quad \text{oder} \quad N = \frac{c}{V} \tag{22}$$

Mittlerer Krümmungshalbmesser r.

Unter dem mittleren Krümmungshalbmesser versteht man in der Geodäsie das geometrische Mittel aus den beiden Haupt-Krümmungs-Halbmessern M und N, d. h.:

$$r = \sqrt{M\,N} \tag{23}$$

oder mit Einsetzung der Bedeutungen von M und N

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2} \quad \text{oder} \quad r = \frac{c}{V^2} \tag{24}$$

Krümmungs-Verhältnis $N : M$.

Nachdem die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N bestimmt sind, wollen wir auch ihren Quotienten betrachten, d. h. in zwei Formen, aus (17) und (21) mit (22):

$$\frac{N}{M} = \frac{W^2}{1-e^2} \quad \text{oder} \quad \frac{N}{M} = V^2 \tag{25}$$

Dieser Quotient ist in der Geodäsie sehr wichtig, denn je näher dieser Quotient gleich 1 ist, desto mehr ist es gestattet, die Erde unter der betreffenden Breite als eine Kugel zu betrachten. Zur Gewinnung einer Übersicht wollen wir einige Werte hiefür ausrechnen:

$$\varphi = 0° \quad \frac{N}{M} = 1{,}0067 = V^2$$

..	30°	 1,0050
..	45°	 1,0034
..	60°	 1,0017
..	90°	 1,0000

Die Werte V^2 sind von 1 ziemlich verschieden, unter 45° um etwa $^1/_3$ $^0/_0$; und nur in den Erdpolen ($\varphi = 90°$) wird $V^2 = 1$.

Trotzdem giebt es viele Fälle, wo es sich nur um kleine Korrektionen *zweiter* Ordnung handelt, in welchen der Quotient $N : M$ doch hinreichend $= 1$ gesetzt, d. h. die Erde als Kugel behandelt werden darf. In solchen Fällen nimmt man dann den mittleren Krümmungs-Halbmesser r nach (23) oder (24) als Halbmesser einer solchen Kugel.

Da das Verhältnis $N : M$ stets grösser als 1 ist, ist auch immer N grösser als M, d. h. der Querkrümmungs-Halbmesser ist immer grösser als der Meridiankrümmungs-Halbmesser, oder umgekehrt, die Krümmung $1 : M$ ist im Meridian stets grösser als die Krümmung $1 : N$ im Querbogen. Nur im Pol werden beide gleich, nämlich $N = M = \frac{a^2}{b} = c^2$ (wie schon in (9) § 31. S. 189 bemerkt wurde) und im Pol der Erde wäre daher das beste Arbeitsfeld für einen Geodäten, weil dort alle sphäroidischen Korrektionen verschwinden.

Geocentrischer Halbmesser und geocentrische Breite.

Selten in der Geodäsie, aber in der Astronomie zu Parallelaxenrechnungen gebraucht, sind noch zwei Werte, welche wir im Anschluss an das Vorhergehende bestimmen wollen, nämlich der Abstand eines Erdpunktes von dem Erdmittelpunkt, geocentrischer Halbmesser $= C$ genannt und der Winkel dieses Halbmessers mit dem Äquator, geocentrische Breite $= \gamma$.

Nach Fig. 1. § 31. S. 188 haben wir für diese beiden Grössen sofort die Formeln:

$$C = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad tang\,\gamma = \frac{y}{x} \tag{a}$$

Wir wollen weiter mit a und e^2 rechnen, d. h. nach (16) S. 196

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \quad \text{und} \quad y = \frac{a\,(1 - e^2) \sin \varphi}{W} \tag{b}$$

also

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2}(\cos^2 \varphi + (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi) \quad , \quad tang\,\gamma = (1 - e^2)\,tang\,\varphi \tag{c}$$

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2}(\cos^2 \varphi + \frac{tang^2\,\gamma}{tang^2\,\varphi} \sin^2 \varphi) = \frac{a^2}{W^2}\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \gamma} \tag{d}$$

Aus (c) hat man weiter:

$$1 - e^2 = \frac{tang^2\,\gamma}{tang^2\,\varphi} \quad , \quad e^2 = \frac{sin\,(\varphi - \gamma)}{sin\,\varphi\,cos\,\gamma}$$

$$W^2 = 1 - e^2\,sin^2\,\varphi = 1 - sin\,(\varphi - \gamma)\,\frac{sin\,\varphi}{cos\,\gamma} = \frac{cos\,\varphi}{cos\,\gamma}\,cos\,(\varphi - \gamma)$$

also nach (d):

$$C^2 = \frac{a^2\,cos\,\varphi}{cos\,\gamma\,cos\,(\varphi - \gamma)} \tag{e}$$

Mit diesen Formeln (c)—(e) hat man genügende Mittel zur scharfen Ausrechnung von C und γ, indessen häufiger braucht man Näherungsformeln, welche mit Beschränkung auf e^2, d. h. Vernachlässigung von e^4 u. s. w. sich rasch geben. Aus (c) hat man:

$$tang\,\varphi - tang\,\gamma = e^2\,tang\,\varphi$$

$$\frac{\varphi - \psi}{cos^2\,\varphi} = e^2\,tang\,\varphi \quad , \quad \varphi - \psi = e^2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi$$

oder mit Zusetzung von ϱ:

$$\varphi - \psi = \frac{1}{2}\,e^2\,\varrho\,sin\,2\,\varphi = [2.8378056]\,sin\,2\,\varphi \tag{f}$$

Mit gleicher Näherung hat man aus (c):

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2}\,(cos^2\,\varphi + (1 - 2\,e^2)\,sin^2\,\varphi) = \frac{a^2}{W^2}\,(1 - 2\,e^2\,sin^2\,\varphi)$$

Da $W^2 = 1 - e^2\,sin^2\,\varphi$ oder $1 : W^2 = 1 + e^2\,sin^2\,\varphi$, hat man:

$$C^2 = a^2\,(1 - e^2\,sin^2\,\varphi) = a^2\,W^2$$

$$C = a\,\left(1 - \frac{e^2}{2}\,sin^2\,\varphi\right) \tag{g}$$

Die Formeln (f) und (g) braucht man z. B. zur Reduktion von Monddistanzen. Genaue Tafeln für $log\,\frac{C}{a}$ und für $\varphi - \psi$ sind von Encke in dem „Berliner astronomischen Jahrbuche für 1882“, S. 344—373 gegeben worden. In der Geodäsie werden diese Werte fast nie gebraucht.

Reduzierte Breite. In der Geodäsie spielt noch ein anderer Winkel eine wichtige Rolle, der „reduzierte Breite“ genannt wird und bestimmt wird durch die Gleichung:

$$tang\,\psi = \sqrt{1 - e^2}\,tang\,\varphi$$

Damit werden wir uns aber erst später zu beschäftigen haben.

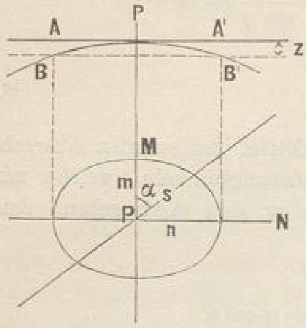
§ 33. Krümmungs-Halbmesser für beliebiges Azimut.

Nachdem der Meridian-Krümmungs-Halbmesser M und der Querkrümmungs-Halbmesser N bestimmt sind, kann man auch den Krümmungs-Halbmesser R für irgend welches Azimut α leicht angeben, wenn man den Eulerschen Satz als bekannt voraussetzt, nämlich:

$$\frac{1}{R} = \frac{cos^2\,\alpha}{M} + \frac{sin^2\,\alpha}{N} \tag{1}$$

Dieser Satz wird in der analytischen Geometrie bewiesen, und wir wollen hier eine geometrisch anschauliche Begründung des Satzes geben, welche durch einige Nebenbetrachtungen auch zum strengen Beweise entwickelt werden kann.

Fig. 1.



In Fig. 1. sei P ein Punkt des Ellipsoids mit einer Berührungs-Ebene $A\,A'$ und einer Schnitt-Ebene $B\,B'$ parallel $A\,A'$.

Die Ebene $B\,B'$ giebt eine Schnitt-Ellipse, welche im unteren Teile von Fig. 1. dargestellt ist mit ihren Hauptaxen $P\,M$, $P\,N$ und einer dritten Richtung s im Azimute α. Wenn nun der Abstand der beiden Ebenen $A\,A'$ und $B\,B'$ sehr klein ist, $= z$, so lässt sich die Ordinate z durch die Krümmungs-Halbmesser M, R, N, welche für die drei betrachteten Richtungen gelten, dreifach ausdrücken, in bekannter Näherung (welche z. B. auch für die Erdkrümmung bei trigonometrischer Höhenmessung angewendet wird), nämlich:

$$z = \frac{m^2}{2\,M} = \frac{s^2}{2\,R} = \frac{n^2}{2\,N} \tag{2}$$

Dabei besteht für die Schnitt-Ellipse mit den Halbaxen m und n die Gleichung:

$$\frac{(s \cos \alpha)^2}{m^2} + \frac{(s \sin \alpha)^2}{n^2} = 1 \tag{3}$$

Durch Verbindung von (2) und (3) erhält man den bereits oben (1) geschriebenen Eulerschen Satz.

Um diesen für jede beliebige Fläche giltigen Euler schen Satz der Gleichung (1) auf unser Ellipsoid anzuwenden, müssen wir die Ausdrücke für M und N nach (21) und (22) § 32. S. 197 einsetzen, nämlich:

$$M = \frac{c}{V^3} \quad \text{und} \quad N = \frac{c}{V}, \text{ wobei } V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi$$

Damit giebt (1):

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{c} V^3 + \frac{\sin^2 \alpha}{c} V = \frac{V}{c} \left(\cos^2 \alpha \,(1 + e'^2 \cos^2 \varphi) + \sin^2 \alpha\right)$$

$$R = \frac{c}{V} \, \frac{1}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha} \tag{4}$$

Wir wollen den besonderen Fall mit $\alpha = 45°$ betrachten, also $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$ setzen, wodurch die Gleichung (1) giebt:

$$\frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) = \frac{M + N}{2\,M\,N} \tag{5}$$

Hier hat $M\,N$ die Bedeutung $= r^2$ nach (24) § 32. S. 197 mit r als geometrischem Mittel aus M und N, und $\frac{M + N}{2} = d$ ist das arithmetische Mittel aus M und N also

$$R_{45} = \frac{r^2}{d} \tag{6}$$

woraus zu ersehen ist, dass in erster Näherung der Krümmungs-Halbmesser für 45° Azimut, dem mittleren Krümmungs-Halbmesser r, oder dem Durchschnittswert d gleich ist.

Die zweite bei (4) angewendete Form für R führt zu einer bequemen logarithmischen Näherungs-Formel; in erster Näherung hat man:

$$\log (1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha) = \mu\, e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \ldots$$

also:

$$\log R - \log N = - \mu\, e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \ldots \tag{7}$$

Setzt man hier $\alpha = 0$, so geht R in den Meridian-Krümmungs-Halbmesser M über, also:

$$\log M - \log N = -\mu e'^2 \cos^2 \varphi + \dots \tag{8}$$

oder genau $\log M - \log N = -\log V^2$ (nach (25) § 32 S. 197)

Damit geben (7) und (8):

$$\log R - \log N = -(\log V^2) \cos^2 \alpha \tag{9}$$

und in gleicher Weise findet man auch:

$$\log R - \log M = +(\log V^2) \sin^2 \alpha \tag{10}$$

Die Näherungsformel (9) oder (10) giebt den Wert $\log R$ nahezu auf 7 Stellen richtig. Um dieses besser beurteilen zu können, entwickeln wir die Formel (4) bis e'^4 und finden:

$$\left.\begin{aligned} \log R &= \log N - \mu e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \mu \frac{e'^4}{2} \cos^4 \varphi \cos^4 \alpha \\ &= \log N - [4{\cdot}465\,1031] \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + [1{\cdot}99139] \cos^4 \varphi \cos^4 \alpha \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

wo die Zahlen in eckigen Klammern Coëfficienten-Logarithmen bedeuten.

Man kann dieses auch auf folgende Form bringen:

$$\log R = \log N - \cos^2 \alpha (\log V^2) - \frac{\mu e'^4}{2} \cos^4 \varphi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tag{12}$$

oder

$$\log R = \log M + \sin^2 \alpha (\log V^2) - \frac{\mu e'^4}{2} \cos^4 \varphi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tag{13}$$

Nach diesen Formeln (11)—(13) ist die folgende Tafel berechnet worden, welche $\log R$ für verschiedene Breiten φ und verschiedene Azimute α giebt.

Breite	Azimut α						
φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
	$\log R$	$\log R$	$\log R$	$\log R$	$\log R$	$\log R$	$\log R$
0°	6.80 1735	6 80 1929	6.80 2460	6.80 3187	6.80 3915	6 80 4448	6.80 4643
10°	1866	2055	2570	3274	3980	4498	4687
20°	2244	2416	2885	3527	4169	4641	4813
30°	2823	2969	3368	3913	4459	4860	5006
35°	6.80 3167	6.80 3298	6.80 3655	6.80 4143	6.80 4632	6.80 4990	6.80 5121
40°	3534	3648	3961	4388	4815	5128	5243
45°	3913	4010	4276	4641	5005	5272	5369
50°	4292	4372	4592	4893	5194	5415	5496
55°	4659	4723	4899	5138	5378	5554	5618
60°	5004	5053	5186	5369	5551	5684	5733
65°	5316	5353	5446	5577	5707	5803	5837
70°	6.80 5586	6.80 5609	6.80 5671	6.80 5756	6.80 5842	6.80 5904	6.80 5927
80°	5966	5972	5988	6010	6032	6048	6054
90°	6098	6098	6098	6098	6098	6098	6098

Eine ausführlichere Tafel dieser Art ist nicht nötig, denn die azimutalen Krümmungs-Halbmesser R spielen in der Geodäsie der Triangulierungen u. dergl. in dieser Form keine Rolle.

Für scharfe Rechnung trigonometrischer Höhen braucht man diese Krümmungs-

Halbmesser. Wir wollen annehmen, zu einer trigonometrischen Höhenmessung zwischen dem Polytechnikum in Karlsruhe und dem trigonometrischen Punkte Hornisgrinde im Schwarzwald solle der Erdkrümmungs-Halbmesser in der fraglichen Sicht berechnet werden. Die Mittelbreite beider Punkte ist $\varphi = 48^\circ 48' 26{,}6''$ und das mittlere Azimut $\alpha = 18^\circ 55' 3{,}0''$. Mit diesen Werten findet man nach der strengen Formel (4):

$$log\ R = 6{\cdot}804\,3345$$

und nach der Näherungsformel (9) oder (10):

$$log\ R = 6{\cdot}804\,3347$$

Dieser Wert wäre einer weiteren Berechnung nach § 149. unseres II. Bandes, 4. Aufl. 1893, zu Grunde zu legen, entsprechend $log\ R$ in (6) S. 510 jenes Bandes.

Änderung der Erdkrümmung nach Breite und Azimut.

Wenn man das vorstehende Übersichtstäfelchen in Bezug auf die Änderungen betrachtet, welche der Krümmungs-Halbmesser R in der Breite und im Azimut erfährt, so bemerkt man, dass für gleiche Änderungen $\varDelta\,\varphi$ oder $\varDelta\,\alpha$ die Änderungen $\varDelta\,log\,R$ von nahe gleicher Grössenordnung sind, und das zeigt auch die Differentiierung von $log\,R$ oder von R nach φ und nach α, die beiden Differentiierungen von R nach φ und nach α geben Grössen von der Ordnung e'^2.

Allein wenn man überlegt, welche Änderungen von R überhaupt vorkommen auf einem räumlich begrenzten Vermessungsgebiete der Erde, so wird die Vergleichung der Einflüsse von φ und α ganz anders, denn auf beschränktem Gebiete der Erde ist die Breite φ nahezu konstant, dagegen trotzdem das Azimut α innerhalb seiner äussersten Grenzen 0° und 90° veränderlich.

Auf beschränktem Vermessungsgebiete sind daher die Änderungen im Azimut viel einflussreicher als die Änderungen der Breite, und man kann in solchem Falle sagen, dass die Erdkrümmungsänderungen, welche von Breitenänderung $\varDelta\,\varphi$ herrühren, nur Grössen zweiter Ordnung sind im Vergleich mit den vom Azimut α abhängigen Krümmungs-Änderungen.

Zwischen-Bemerkung.

Mit den Entwicklungen von § 31.—33. sind wir so weit gekommen, dass alsbald zu § 40. u. ff. sphärische Triangulierung übergegangen werden kann, und von allem bisherigen wird dort zunächst nur der mittlere Krümmungs-Halbmesser gebraucht werden. Es ist für erstes Studium zu raten, von § 33. auf § 40. überzugehen.

Wenn hier anders verfahren und noch § 34.—39. eingeschaltet werden, so hat das den Sinn, dass vieles für weitergehende Zwecke Nötige hier ein für allemal erledigt werden soll; auf Einzelnes, z. B. Meridianbögen § 35., welche später zu Coordinaten gebraucht werden, kann nach Bedarf zurückgegriffen werden, ähnlich ist es mit den Parallelbögen und Oberflächen.

Bei den geodätischen Messungen und Berechnungen im engeren Sinne hat man kein Bedürfnis, die Oberflächen einzelner Zonen oder Gradabteilungen des Ellipsoids zu kennen; jedoch besteht für Kartographie und Geographie im allgemeinen ein solches Bedürfnis, weshalb auch die Flächenberechnung der Gradabteilungs-Trapeze in § 37. angeschlossen wurde. Auch auf die sehr wichtigen Hilfstafeln des Anhangs, deren Berechnung in den nachfolgenden Paragraphen gelehrt wird, wird später nach Bedarf zurückverwiesen.

§ 34. Die Funktionen W und V.

Bei der Entwicklung der Krümmungs-Halbmesser in § 32. sind die zwei Funktionen aufgetreten:

$$W = \sqrt{1 - e^2\,sin^2\,\varphi} \qquad V = \sqrt{1 + e'^2\,cos^2\,\varphi} \tag{1}$$

welche unter sich in der Beziehung stehen:

$$\frac{W^2}{1-e^2} = V^2 \qquad \text{oder} \qquad W^2 = \frac{V^2}{1+e'^2} \tag{2}$$

wobei

$$-\log\,(1-e^2) = \log\,(1+e'^2) = 0.002\,9083{\cdot}596004$$

$$-\log\sqrt{1-e^2} = \log\sqrt{1+e'^2} = 0.001\,4541{\cdot}798002$$

Diese Funktionen werden so oft in der Geodäsie gebraucht, dass wir sie näher betrachten und namentlich in Reihen entwickeln müssen.

Zur Reihenentwicklung haben wir von (1):

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2\varphi$$

also nach der logarithmischen Reihe (S. 169):

$$\log\frac{1}{W^2} = \mu\, e^2 \sin^2\varphi + \frac{\mu e^4}{2}\sin^4\varphi + \frac{\mu e^6}{3}\sin^6\varphi + \frac{\mu e^8}{4}\sin^8\varphi + \frac{\mu e^{10}}{5}\sin^{10}\varphi + \ldots \tag{3}$$

Die Ausrechnung der Coëfficienten mit dem Besselschen $\log e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$ giebt für Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

$$\log\frac{1}{W^2} = \left.\begin{aligned} &28986{\cdot}430302 \sin^2\varphi + 96{\cdot}733122 \sin^4\varphi + 0{\cdot}430422 \sin^6\varphi \\ &\quad + 0{\cdot}002155 \sin^8\varphi + 0{\cdot}000012 \sin^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

oder mit halben Coëfficienten:

$$\log\frac{1}{W} = \left.\begin{aligned} &14493{\cdot}215151 \sin^2\varphi + 48{\cdot}366556 \sin^4\varphi + 0{\cdot}215211 \sin^6\varphi \\ &\quad + 0{\cdot}001077 \sin^8\varphi + 0{\cdot}000006 \sin^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dieselben Reihen mit den Logarithmen der Coëfficienten sind:

$$\log\frac{1}{W^2} = \left.\begin{aligned} &[4.462\,1947{\cdot}350] \sin^2\varphi + [1.985\,5751{\cdot}590] \sin^4\varphi + [9.633\,8943{\cdot}3] \sin^6\varphi \\ &\quad + [7.333\,3660] \sin^8\varphi + [5.06087] \sin^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Durch Halbierung der Coëfficienten hat man auch:

$$\log\frac{1}{W} = \left.\begin{aligned} &[4.161\,1647{\cdot}393] \sin^2\varphi + [1.684\,5451{\cdot}633] \sin^4\varphi + [9.332\,8643{\cdot}3] \sin^6\varphi \\ &\quad + [7.032\,3360] \sin^8\varphi + [4.75984] \sin^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

In gleicher Weise hat man auch die andere Funktion:

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2\varphi$$

$$\log V^2 = \mu\, e'^2 \cos^2\varphi - \frac{\mu\, e'^4}{2}\cos^4\varphi + \frac{\mu\, e'^6}{3}\cos^6\varphi + \frac{\mu\, e'^8}{4}\cos^8\varphi + \frac{\mu\, e'^{10}}{5}\cos^{10}\varphi - \ldots \tag{8}$$

Wenn man hier $\log e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833$ einsetzt, so erhält man:

$$\log V^2 = \left.\begin{aligned} &29\,181{\cdot}196\,469 \cos^2\varphi - 98{\cdot}0374220 \cos^4\varphi + 0{\cdot}4391567 \cos^6\varphi \\ &\quad - 0{\cdot}0022131 \cos^8\varphi + 0{\cdot}0000119 \cos^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\log V = \left.\begin{aligned} &14\,590{\cdot}098235 \cos^2\varphi - 49{\cdot}0187110 \cos^4\varphi + 0{\cdot}2195783 \cos^6\varphi \\ &\quad - 0{\cdot}001\,1065 \cos^8\varphi + 0{\cdot}0000059 \cos^8\varphi \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ferner wieder mit den Logarithmen der Coëfficienten:

$$\log V^2 = \left.\begin{aligned} &[4.465\,1030{\cdot}946] \cos^2\varphi - [1.991\,3918{\cdot}822] \cos^4\varphi + [9.642\,6194{\cdot}1] \cos^6\varphi \\ &\quad - [7.344\,9995] \cos^6\varphi - [5.07541] \cos^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\log V = \left.\begin{aligned} &[4.164\,0730{\cdot}989] \cos^2\varphi - [1.690\,3618{\cdot}865] \cos^4\varphi + [9.341\,5894{\cdot}2] \cos^6\varphi \\ &\quad - [7.043\,9695] \cos^8\varphi + [4.77438] \cos^{10}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wenn man bei $\log W^2$ den Grenzwert $\varphi = 90°$ und bei $\log V^2$ den Grenzwert $\varphi = 0$ setzt, so bekommt man $\log(1 - e^2)$ und $\log(1 + e'^2)$ welche, schon bei anderer Gelegenheit in § 31. S. 192 angegeben sind.

Für $\varphi = 45°$ geben die Reihen (5) und (10):

$$\left.\begin{aligned} -\log W &= 7246{\cdot}607576 + 12{\cdot}091639 + 0{\cdot}026901 + 0.000067 = 7258{\cdot}726183 \\ \log V &= 7295{\cdot}299117 - 12{\cdot}254678 + 0{\cdot}027447 - 0.000069 = \underline{7283{\cdot}071817} \\ &\log V : W = 14541{\cdot}798000 \\ &\text{Nach § 31. S. 193 soll dieses sein} = 14541{\cdot}798002 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die Probe stimmt auf 0·000002, d. h. auf 2 Einheiten der 13ten Logarithmenstelle, was hier befriedigend ist.

Da die V und W unter sich in der einfachen Beziehung stehen $V^2 = W^2(1 + e'^2)$, hat man die Wahl V oder W zu rechnen und das andere daraus abzuleiten. Diese Wahl stellt sich bei den vorstehenden Reihen so, dass für kleine Werte φ man bequemer $\log W$ rechnet, zu welchem man am Anfang des Quadranten nur sehr wenige Glieder braucht, während in der Gegend von $\varphi = 90°$ die Rechnung mit $\log V$ die bequemere ist; bei $\varphi = 45°$ sind beide Rechnungen gleich gut.

Man kann die Reihen für $\log W$ und $\log V$ auch noch auf eine andere Form bringen, indem man die $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$ u. s. w. in $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w. ausdrückt, wozu die Formeln von § 29. S. 176—177 dienen, nämlich:

$$\log W^2 = -\mu e^2 \sin^2\varphi - \frac{\mu e^4}{2}\sin^4\varphi - \frac{\mu e^6}{3}\sin^6\varphi - \frac{\mu e^8}{4}\sin^8\varphi - \frac{\mu e^{10}}{5}\sin^{10}\varphi$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

$$\sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$$

$$\sin^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi - \frac{1}{32}\cos 6\varphi$$

$$\sin^8\varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos 2\varphi + \frac{7}{32}\cos 4\varphi - \frac{1}{16}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi$$

$$\sin^{10}\varphi = \frac{63}{256} - \frac{105}{256}\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi - \frac{45}{512}\cos 6\varphi + \frac{5}{256}\cos 8\varphi - \frac{1}{512}\cos 10\varphi$$

Diese $\sin^2\varphi$, $\sin^4\varphi$ u. s. w. in die Reihe $\log W^2$ eingesetzt geben:

$$\begin{aligned} \log W^2 = &-\left(\frac{1}{2}\mu e^2 + \frac{3}{16}\mu e^4 + \frac{5}{48}\mu e^6 + \frac{35}{512}\mu e^8 + \frac{63}{1280}\mu e^{10}\right) \\ &+\left(\frac{1}{2}\mu e^2 + \frac{1}{4}\mu e^4 + \frac{5}{32}\mu e^6 + \frac{7}{64}\mu e^8 + \frac{21}{256}\mu e^{10}\right)\cos 2\varphi \\ &-\left(\frac{1}{16}\mu e^4 + \frac{1}{16}\mu e^6 + \frac{7}{128}\mu e^8 + \frac{3}{64}\mu e^{10}\right)\cos^4\varphi \\ &+\left(\frac{1}{96}\mu e^6 + \frac{1}{64}\mu e^8 + \frac{9}{512}\mu e^{10}\right)\cos 6\varphi \\ &-\left(\frac{1}{512}\mu e^8 + \frac{1}{256}\mu e^{10} + \right)\cos 8\varphi \\ &+\left(\frac{1}{2560}\mu e^{10}\right)\cos 10\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

Wenn man dieses mit dem Besselschen $\log e^2 = 7.8244104{\cdot}237$ ausrechnet (Benützung der $\log \mu\, e^n$ auf S. 193), so bekommt man in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

$$\left.\begin{aligned} \log W^2 = &-14529{\cdot}6251671 + 14541{\cdot}7844150 \cos 2\varphi - 12{\cdot}1728172 \cos 4\varphi \\ &+ 0{\cdot}0135864 \cos 6\varphi - 0{\cdot}0000170 \cos 8\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Dieselbe Entwicklung für $\log V^2$ gemacht giebt aus (8) und § 29. S. 177 das folgende:

$$\log V^2 = e'^2 \cos^2\varphi - \frac{e'^4}{2}\cos^4\varphi + \frac{e'^6}{3}\cos^6\varphi - \frac{e'^8}{4}\cos^8\varphi + \frac{e'^{10}}{5}\cos^{10}\varphi$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

$$\cos^4\varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$$

$$\cos^6\varphi = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi + \frac{1}{32}\cos 6\varphi$$

$$\cos^8\varphi = \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\cos 2\varphi + \frac{7}{32}\cos 4\varphi + \frac{1}{16}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi$$

$$\cos^{10}\varphi = \frac{63}{256} + \frac{105}{256}\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi + \frac{45}{512}\cos 6\varphi + \frac{5}{256}\cos 8\varphi + \frac{1}{512}\cos 10\varphi$$

$$\begin{aligned} \log V^2 = &\left(\frac{1}{2}\mu e'^2 - \frac{3}{16}\mu e'^4 + \frac{5}{48}\mu e'^6 - \frac{35}{512}\mu e'^8 + \frac{63}{1280}\mu e'^{10}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2}\mu e'^2 - \frac{1}{4}\mu e'^4 + \frac{5}{32}\mu e'^6 - \frac{7}{64}\mu e'^8 + \frac{21}{256}\mu e'^{10}\right)\cos 2\varphi \\ &- \left(\frac{1}{16}\mu e'^4 - \frac{1}{16}\mu e'^6 + \frac{7}{128}\mu e'^8 - \frac{3}{64}\mu e'^{10}\right)\cos 4\varphi \\ &+ \left(\frac{1}{96}\mu e'^6 - \frac{1}{64}\mu e'^8 + \frac{9}{512}\mu e'^{10}\right)\cos 6\varphi \\ &- \left(\frac{1}{512}\mu e'^8 - \frac{1}{256}\mu e'^{10}\right)\cos 8\varphi \\ &+ \left(\frac{1}{2560}\mu e'^{10}\right)\cos 10\varphi \end{aligned} \quad (16)$$

Wenn man dieses mit dem Besselschen $\log e'^2 = 7.8273187{\cdot}833$ ausrechnet (Benützung der $\log \mu\, e'^n$ auf S. 193), so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} \log V^2 = &\ 14553{\cdot}9708333 + 14541{\cdot}7844155 \cos 2\varphi - 12{\cdot}1728170 \cos 4\varphi \\ &+ 0{\cdot}0135863 \cos 6\varphi - 0{\cdot}0000171 \cos 8\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die Reihen (17) und (15) stimmen in den Coëfficienten hinreichend überein und die Absolutglieder geben $\log V^2 - \log W^2 = 29083{\cdot}5960004$ was mit $\log\,(1 + e'^2)$ nach S. 193 stimmt wie es sein muss.

Durch Halbierung der Coëfficienten hat man auch $\log W$ und $\log V$, nämlich zugleich ein wenig vermittelnd zwischen den Endziffern in (15) und (17):

$$\left.\begin{aligned} \log V = &\ 7276{\cdot}9854166 + 7270{\cdot}8922076 \cos 2\varphi - 6{\cdot}0864086 \cos 4\varphi \\ &+ 0{\cdot}0067932 \cos 6\varphi - 0{\cdot}0000085 \cos 8\varphi \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

und da man gewöhnlich logarithmisch rechnet, wollen wir auch noch die Coëfficienten-Logarithmen angeben:

$$\left.\begin{aligned} \log V^2 = &\ 14553{\cdot}9708333 + [4{\cdot}1626177{\cdot}018] \cos 2\varphi - [1{\cdot}0853911{\cdot}0] \cos 4\varphi \\ &+ [8{\cdot}1331028] \cos 6\varphi - [5{\cdot}23172] \cos 8\varphi \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} log\ V = 7276{\cdot}9854166 + [3{\cdot}8615877{\cdot}062]\ cos\ 2\ \varphi - [0.7843611{\cdot}0]\ cos\ 4\ \varphi \\ + [7.8320728]\ cos\ 6\ \varphi - [4.93069]\ cos\ 8\ \varphi \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Um von der Mitte zu zählen, wollen wir noch setzen $\varphi = 45° + (\varphi - 45°)$ also:

$$\left.\begin{aligned} log\ V = 7276{\cdot}9854166 - [3.8615877{\cdot}062]\ sin\ 2\ (\varphi - 45°) + [0.7843611{\cdot}0] \\ cos\ 4\ (\varphi - 45°) + [7.8320728]\ sin\ 6\ (\varphi - 45°) - [4.93069]\ cos\ 8\ (\varphi - 45°) \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Diese Form bietet den Vorteil, dass man damit in *einer* Rechnung stets die Bestandteile für zwei Werte φ erhält, welche gegen 45° symmetrisch liegen; z. B. $\varphi - 45° = +15°$ und $-15°$ geben $log\ V$ für $\varphi = 30°$ und für $\varphi = 60°$ das folgende:

$$\text{für } \varphi = 30° \quad log\ V = 7276{\cdot}9854166 + 3635{\cdot}4461038 + 3{\cdot}0432043 - 0{\cdot}0067932 + 0{\cdot}0000042$$

$$\text{für } \varphi = 60° \quad log\ V = 7276{\cdot}9854166 - 3635{\cdot}4461038 + 3{\cdot}0432043 + 0{\cdot}0067932 + 0{\cdot}0000042$$

zusammengefasst:

$$\text{für } \varphi = 30° \quad log\ V = 0.0010915{\cdot}4679357$$

$$\text{für } \varphi = 60° \quad log\ V = 0.0003644{\cdot}5893145$$

Diese Werte stimmen innerhalb 0·000001 mit den aus (7) oder (12) berechneten.

Interpolation für log V.

Wenn man eine Tafel der $log\ V$ aufstellen will, so wird man gewisse Hauptwerte, etwa für φ von 1° zu 1° unmittelbar nach den vorstehenden Formeln (7), (12) oder (20) berechnen, und im Übrigen weitere Werte einschalten. Wenn man nun bereits Näherungswerte der einzuschaltenden $log\ V$ kennt, was oft der Fall ist, so kann man zur schärferen Einschaltung eine gute Formel nach dem Prinzip des Mittelargumentes aufstellen in folgender Weise:

Ein Wert V gehöre zur Breite φ, ferner V'' zur Breite $\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}$ und V' zur Breite $\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}$; dann werden nach der Maclaurin schen Reihe folgende zwei Gleichungen bestehen:

$$log\ V'' = log\ V + \frac{\Delta\varphi}{2}\frac{d\,log\ V}{d\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2\frac{d^2\,log\ V}{d\varphi^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^3\frac{d^3\,log\ V}{d\varphi^3}$$

$$log\ V' = log\ V - \frac{\Delta\varphi}{2}\frac{d\,log\ V}{d\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2\frac{d^2\,log\ V}{d\varphi^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^3\frac{d^3\,log\ V}{d\varphi^3}$$

Die Differenz giebt: $log\ V'' - log\ V' = \Delta\,log\ V$:

$$\Delta\,log\ V = \Delta\varphi\frac{d\,log\ V}{d\varphi} + \frac{\Delta\varphi^3}{24}\frac{d^3\,log V}{d\varphi^3} \quad (22)$$

Zur Anwendung haben wir $log\ V$ dreimal abzuleiten, wobei nun künftig immer zur Abkürzung geschrieben werden soll $tang\ \varphi = t$ und

$$V^2 = 1 + e'^2\,cos^2\,\varphi = 1 + \eta^2 \quad , \quad \text{also } \eta^2 = e'^2\,cos^2\,\varphi \quad , \quad \frac{d\eta^2}{d\varphi} = -2\,\eta^2\,t \quad (23)$$

$$V = \sqrt{1+\eta^2}\ ,\ \frac{dV}{d\varphi} = \frac{1}{2\,V}(-2\,\eta^2\,t) = -\frac{\eta^2\,t}{V}$$

$$\frac{d\,log\ V}{d\varphi} = \frac{1}{V}\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2\,t}{V^2} \quad (24)$$

In dieser Behandlung werden die beiden nächsten Ableitungen:

$$\frac{d^2 \log V}{d\varphi^2} = \frac{\eta^2}{V^4}(-1 + t^2 - \eta^2 - \eta^2 t^2)$$

$$\frac{d^3 \log V}{d\varphi^3} = \frac{2\eta^2 t}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2 - \eta^4 - \eta^4 t^2) \tag{25}$$

Die Ableitungen (24) und (25) hat man in (22) einzusetzen und zugleich wollen wir $\Delta\varphi = 10'$ nehmen, wofür mit $\varrho = 3437,7\ldots$ zu dividieren ist, und da auch noch mit $\mu = 0.43429\ldots$ zu multiplizieren ist, haben wir:

$$\Delta \log V = -\frac{\mu}{\varrho}\, 10\, \frac{\eta^2 t}{V} + \frac{\mu\, 1000\, \eta^2 t}{12\,\varrho^3\, V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t - \eta^4 - \eta^4 t^2)$$

Da $\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi$, also $\eta^2 t = e'^2 \sin\varphi \cos\varphi$, so hat man, um alles Konstante zusammenzufassen, zugleich η^4 vernachlässigend:

$$\Delta \log V = -5\,\frac{\mu}{\varrho}\, e'^2 \frac{\sin 2\varphi}{V^2} + \frac{1000\,\mu\, e'^2}{24\,\varrho^3} \frac{\sin 2\varphi}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \tag{26}$$

Die Ausrechnung giebt für Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

$$\Delta \log V = -[1.6277992{\cdot}161]\,\frac{\sin 2\varphi}{V^2} + [5.4760703]\,\frac{\sin 2\varphi}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \tag{27}$$

Das zweite Glied macht sehr wenig aus, nämlich:

$\varphi = 10°$	2. Glied = 0·0000 2015	$\varphi = 50°$	2. Glied = 0·0000 5888
20°	3795	60°	5201
30°	5133	70°	3874
40°	5862	80°	2063

Dieses Glied geht also erst in die 12te Logarithmenstelle ein und ergiebt sich von selbst als eine kleine innerhalb weiter Grenzen nahezu konstante Differenz zwischen den Summen von je 6 Zwischenwerten $\Delta \log V$ und dem Intervall zwischen zwei festen $\log V$, das sie ausfüllen sollen. Die V^2, welche man im ersten Gliede von (27) braucht, müssen dem Mittelargument φ entsprechen; in unserem Falle verfuhren wir dabei so, dass diejenigen $\log V^2$, welche schon in der vorhergehenden Auflage des Bandes 8stellig für alle Werte φ von 10′ zu 10′ ausgerechnet vorlagen, von 5′ zu 5′ eingeschaltet, die nötigen Näherungswerte zur Gleichung (27) lieferten, um Interpolation auf 12—13 Stellen genau zu geben; folgendes ist ein Beispiel hiefür:

		$\log V$	φ
$\varphi = 48°$		6522·92572	48° 0′
	42·07059 — 6 = 42·07053	6480·85519	48° 10′
	42·04425 — 6 = 42·04419	6438·81100	48° 20′
	42·01646 — 6 = 42·01640	6396·79460	48° 30′
	41·98728 — 6 = 41·98722	6354·80738	48° 40′
	41·95667 — 6 = 41·95661	6312·85077	48° 50′
$\varphi = 49°$	41·92464 — 6 = 41·92458	6270·92619	49° 0′
	251·99989 — 36 = 251·99953	251·99953	

Die Differenzen 42·07059 — 6 u. s. w. sind nach der Formel (27) berechnet, 6 ist das zweite Glied, im vorstehenden Beispiel abgerundet, (in Wirklichkeit wurde mit einer Stelle mehr gerechnet).

In dieser Weise wurde unsere Tafel der Werte *log* V, welche im Anhang auf Seite [2]—[7] gegeben ist, berechnet mit 12—13 Stellen und nachher auf 10 Stellen abgerundet.

Die Ableitungen von V nach φ.

Auch die Ableitungen der Funktion V werden später noch oft gebraucht werden, weshalb wir sie zum Vorrat hier hersetzen, auch mit Einführung fester Zeichen:

$$tang\, \varphi = t \qquad \frac{d\,t}{d\,\varphi} = 1 + t^2 \tag{a}$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = 1 + \eta^2 \quad \text{also} \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi \tag{b}$$

$$\frac{d\,\eta^2}{d\,\varphi} = -2\,e'^2 \cos\varphi \sin\varphi = -2\,\eta^2\, t \tag{c}$$

$$\text{und allgemeiner} \qquad \frac{d\,\eta^n}{d\,\varphi} = -n\,\eta^n\, t \tag{d}$$

$$\frac{d\,V}{d\,\varphi} = \frac{1}{2\,V}\frac{d\,\eta^2}{d\,\varphi} = -\frac{\eta^2\, t}{V} \tag{e}$$

$$\frac{d^2\,V}{d\,\varphi^2} = -\left(\frac{d\,\eta^2}{d\,\varphi}\frac{t}{V} + \frac{\eta^2}{V}\frac{d\,t}{d\,\varphi} - \frac{\eta^2\, t}{2\,V}\frac{d\,V}{d\,\varphi}\right)$$

$$\frac{d^2\,V}{d\,\varphi^2} = +\frac{2\,\eta^2\, t^2}{V} - \frac{\eta^2}{V}(1+t^2) - \frac{\eta^4\, t^2}{V^3}$$

Wenn man hier alles auf den Nenner V^3 bringt, und berücksichtigt, dass $V^2 = 1 + \eta^2$ ist, so bekommt man:

$$\frac{d^2\,V}{d\,\varphi^2} = -\frac{\eta^2}{V^3}(1 - t^2 + \eta^2) \tag{f}$$

Wenn man in diesen Formen weiter differentiiert, so bekommt man:

$$\frac{d^3\,V}{d\,\varphi^3} = \frac{\eta^2\, t}{V^5}(4 + 5\,\eta^2 + 3\,\eta^2\, t^2 + \eta^4) \tag{g}$$

$$\frac{d^4\,V}{d\,\varphi^3} = \frac{\eta^2}{V^7}(4 - 4\,t^2 + 9\,\eta^2 + 10\,\eta^2\, t^2 - 3\,\eta^2\, t^4 + 6\,\eta^4 + 14\,\eta^4\, t^2 + 12\,\eta^4\, t^4 + \eta^6) \tag{h}$$

Mit Hilfe dieser Ableitungen kann man auch V von einer Breite φ auf eine benachbarte Breite reduzieren, denn man hat nach dem Taylor schen Satze für eine Breite φ' einen Werth V' entsprechend folgender Reihe:

$$V' = V - \frac{(\varphi' - \varphi)\,\eta^2\, t}{V} - \frac{(\varphi' - \varphi)^2}{2}\frac{\eta^2}{V^3}(1 - t^2 + \eta^2) + \ldots \tag{i}$$

$$\text{oder} \qquad V' = V\left(1 - \frac{(\varphi' - \varphi)\,\eta^2\, t}{V^2} + (\varphi' - \varphi)^2 \ldots\right) \tag{k}$$

Damit hat man auch die Reduktion der Krümmungs-Halbmesser von einer auf die andere Breite, z. B.:

$$N = \frac{c}{V} \qquad N' = \frac{c}{V'}$$

$$\frac{N}{N'} = \frac{V'}{V} = 1 - \frac{(\varphi' - \varphi)}{V^2}\,\eta^2\, t + (\varphi' - \varphi)^2 \ldots \tag{l}$$

Später wird davon mehrfach Gebrauch gemacht werden.

§ 35. Meridianbogenlängen.

Der Meridian-Krümmungs-Halbmesser in der Breite φ ist nach (17) und (21) § 32.:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \quad \text{oder} \quad M = \frac{c}{V^3} \tag{1}$$

Ein unendlich kleiner Meridianbogen für die Breitendifferenz $d\varphi$ ist daher $= M\,d\varphi$ und der ganze Meridianbogen vom Äquator mit $\varphi = 0$ bis zur Breite φ ist

$$B = \int_0^\varphi M\,d\varphi = a(1-e^2)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \text{ oder } = c\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}} \tag{2}$$

Dieses ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung; davon ist jedoch bei der Rektifikation für geodätische Zwecke nicht die Rede, indem hier Reihenentwicklungen angewendet werden, die nach Umständen bei weniger oder mehr Gliedern abgebrochen werden.

I. Integration nur bis e^2 einschliesslich, mit a und e^2.

Wenn man nur bis e^2 einschliesslich entwickeln will, so schreibt man die zu integrierende Funktion (2) kurz so:

$$\frac{1}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = (1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi + e^4\ldots \tag{3}$$

Hier ist nach bekannter goniometrischer Formel:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \tag{4}$$

und das Integral:

$$\int \cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \tag{5}$$

Damit wird das allgemeine Integral in (2):

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\varphi - \frac{3}{8}e^2\sin 2\varphi + \ldots \tag{6}$$

Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 ist daher:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ldots d\varphi = \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{8}e^2(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)$$

oder im zweiten Gliede goniometrisch umgewandelt:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ldots d\varphi = \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{4}e^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cos(\varphi_2+\varphi_1) \tag{7}$$

folglich der Meridianbogen m selbst zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 nach (2) und (7):

$$m = a(1-e^2)\left(\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{4}e^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cos(\varphi_2+\varphi_1)\right) \tag{8}$$

Wenn man hier die Sinus-Reihe anwendet, nämlich nur deren zwei erste Glieder:

$$sin\,(\varphi_2-\varphi_1)=(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{(\varphi_2-\varphi_1)^3}{6}+\ldots$$

so erhält man durch Einsetzen dieser Glieder in die vorhergehende (8):

$$m=a(\varphi_2-\varphi_1)(1-e^2)\left(1+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}e^2 cos\,(\varphi_2+\varphi_1)+\frac{1}{8}e^2(\varphi_2-\varphi_1)^2 cos\,(\varphi_2+\varphi_1)\right) \quad (9)$$

Obgleich in diesem Ausdrucke alle Glieder von der Ordnung e^4 und darüber vernachlässigt sind, kann man doch zu vielen Zwecken davon Gebrauch machen; ja man kann noch mit einem kleinen weiteren Opfer an Genauigkeit einen sehr praktischen Satz ableiten, der sich auf den Meridian-Krümmungs-Halbmesser der *Mittelbreite* $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ bezieht. Dieser Meridian-Krümmungs-Halbmesser ist nach (1):

$$M'=\frac{a\,(1-e^2)}{\left(1-e^2 sin^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dieses ebenfalls bis auf e^2 einschliesslich entwickelt, giebt:

$$M'=a\,(1-e^2)\left(1+\frac{3}{2}e^2 sin^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

und mit Anwendung der goniometrischen Formel (4) für $sin^2\,\varphi$:

$$M'=a\,(1-e^2)\left(1+\frac{3}{4}e^2-\frac{3}{4}e^2 cos\,(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

Nimmt man nun diesen Krümmungs-Halbmesser M' als *Kreisbogen*-Halbmesser zu einem Centriwinkel $\varphi_2-\varphi_1$, so erhält man einen entsprechenden Meridianbogen:

$$m'=M'\,(\varphi_2-\varphi_1)=a\,(\varphi_2-\varphi_1)\,(1-e^2)\left(\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)-\frac{3}{4}e^2\,cos\,(\varphi_1+\varphi_2)\right) \quad (10)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem früheren (9), so findet man in den ersten Gliedern völlige Übereinstimmung, man hat also auch sofort im zweiten Teil die Differenz:

$$m'-m=-a\,(\varphi_2-\varphi_1)\,(1-e^2)\,\frac{e^2}{8}\,(\varphi_2-\varphi_1)^2\,cos\,(\varphi_1+\varphi_2)$$

oder genähert, zugleich mit Zufügung des nötigen ϱ:

$$m'-m=-a\,\frac{e^2}{8}\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varrho}\right)^3 cos\,(\varphi_1+\varphi_2) \quad (11)$$

Dieses ist der Fehler, der begangen wird, wenn man, nach (10), einen Ellipsen-Meridian-Bogen als Kreisbogen behandelt, dessen Halbmesser der Meridian-Krümmungs-Halbmesser für die Mittelbreite $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ ist.

Zunächst sieht man aus (11), dass der Fehler $m'-m$ verschwindet, wenn $\varphi_1+\varphi_2=90°$, d. h. wenn die Mittelbreite $=45°$ ist (vorbehältlich der vernachlässigten Glieder von der Ordnung e^4) u. s. w.

Im übrigen berechnet man nach (11) zur Übersicht, dass für $\varphi_2-\varphi_1=1°$ und für $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=30°$ oder $60°$ der Fehler $=-0{,}014^{\text{m}}$ oder $=+0{,}014^{\text{m}}$ wird und äussersten Falls mit $\varphi = 0°$ oder $\varphi = 90°$ bringt der Fehler für $\varphi_2 - \varphi_1 = 1°$ nur $-0{,}028^m$ oder $+0{,}028^m$. Man kann daher kurz sagen, dass in den Breiten von Mitteleuropa ein Meridianbogen von 1° Ausdehnung nach dem Näherungsverfahren von M für die Mittelbreite, innerhalb 1^{cm} genügend ist. Wir werden am Schlusse dieses Paragraphen nochmals darauf zurückkommen.

Integration bis e^{10}.

Man kann das im vorstehenden angewendete Verfahren beliebig weit fortsetzen; es besteht im allgemeinen darin, dass man die zu integrierende Funktion $(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}$ nach Potenzen von $e^2 \sin^2 \varphi$ entwickelt und dann die Potenzen $\sin^2 \varphi$, $\sin^4 \varphi$, $\sin^6 \varphi$ u. s. w. in $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 6\varphi$ u. s. w. ausdrückt und dadurch integrierbar macht.

Hiernach haben wir:

$$\frac{1}{W^3} = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\, e^4 \sin^4 \varphi + \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\, e^6 \sin^6 \varphi$$

$$+ \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,\frac{9}{8}\, e^8 \sin^8 \varphi + \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,\frac{9}{8}\,\frac{11}{10}\, e^{10} \sin^{10} \varphi + \ldots$$

$$\frac{1}{W^3} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 \varphi + \frac{35}{16} e^6 \sin^6 \varphi + \frac{315}{128} e^8 \sin^8 \varphi + \frac{693}{256} e^{10} \sin^{10} \varphi \quad (12)$$

Nach § 29. S. 176—177 ist hier zu setzen:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$

$$\sin^4 \varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi$$

$$\sin^6 \varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2\varphi + \frac{3}{16} \cos 4\varphi - \frac{1}{32} \cos 6\varphi$$

$$\sin^8 \varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16} \cos 2\varphi + \frac{7}{32} \cos 4\varphi - \frac{1}{16} \cos 6\varphi + \frac{1}{128} \cos 8\varphi$$

$$\sin^{10} \varphi = \frac{63}{256} - \frac{105}{256} \cos 2\varphi + \frac{15}{64} \cos 4\varphi - \frac{45}{512} \cos 6\varphi + \frac{5}{256} \cos 8\varphi - \frac{1}{512} \cos 10\varphi$$

Setzt man diese Ausdrücke in (12) ein und ordnet nach $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w., so bekommt man:

$$\frac{1}{W^3} = A - B \cos 2\varphi + C \cos 4\varphi - D \cos 6\varphi + E \cos 8\varphi - F \cos 10\varphi \quad (13)$$

wobei die Coëfficienten A, B u. s. w. folgende Bedeutungen haben:

$$A = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \frac{43659}{65536} e^{10} + \ldots$$

$$B = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2205}{2048} e^8 + \frac{72765}{65536} e^{10} + \ldots$$

$$C = \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \frac{10395}{16384} e^{10} + \ldots$$

$$D = \frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8 + \frac{31185}{131072} e^{10} + \ldots$$

$$E = \frac{315}{16384} e^8 + \frac{3465}{65536} e^{10} + \ldots$$

$$F = \frac{693}{131072} e^{10} + \ldots$$

Wenn man mit der Besselschen Excentricität nach § 31. S. 193 ($log\ e^2 =$ 7.824 4104·237) diese Werte ausrechnet, so findet man:

$$\left.\begin{array}{ll} A = 1{,}00503\,73060{,}48555 & log\ A = 0.002\,1821{\cdot}827 \\ B = 0{,}00504\,78492{,}40300 & log\ B = 4.504\,8414{\cdot}798 \\ C = 0{,}00001\,05637{,}86831 & log\ C = 5.023\,8196{\cdot}289 \\ D = \qquad 206{,}33322 & log\ D = 2.314\,5691{\cdot}6 \\ E = \qquad 0{,}38853 & log\ E = 9.589\,4246 \\ F = \qquad 0{,}00070 & log\ F = 6.845\,10 \end{array}\right\} \quad (14)$$

Der letzte Coëfficient F, welcher nur von e^{10} abhängt, wird verschwindend klein, aber in den übrigen Coëfficienten bringen die Glieder mit e^{10} doch noch kleine Beträge, welche die schliessliche Abrundung noch teilweise beeinflussen.

Indem man nun die Funktion (13) integriert, hat man:

$$\int cos\ 2\,\varphi = \frac{1}{2}\ sin\ 2\,\varphi \qquad \int cos\ 4\,\varphi = \frac{1}{4}\ cos\ 4\,\varphi \quad \text{u. s. w.}$$

also mit Zusetzung des Faktors $a\ (1 - e^2)$ von (1) und (2) wird der Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ ausgedrückt durch die Reihe:

$$B = a\,(1 - e^2)\left(\frac{A\,\varphi}{\varrho} - \frac{B}{2}\,sin\,2\,\varphi + \frac{C}{4}\,sin\,4\,\varphi - \frac{D}{6}\,sin\,6\,\varphi + \frac{E}{8}\,sin\,8\,\varphi - \frac{F}{10}\,sin\,10\,\varphi\right) \quad (15)$$

Man hat mit den Coëfficienten (14) auszurechnen:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{A\ a\ (1 - e^2)}{\varrho^\circ} = 111120{,}61962 & & log = 5.045\,7946{\cdot}544 \\ \dfrac{B}{2}\,a\,(1 - e^2) = \quad 15988{,}63853 & & log = 4.203\,8114{\cdot}841 \\ \dfrac{C}{4}\,a\,(1 - e^2) = \qquad 16{,}72995\,380 & & log = 1.223\,4947{\cdot}417 \\ \dfrac{D}{6}\,a\,(1 - e^2) = \qquad 0{,}02178\,4772 & & log = 8.338\,1530{\cdot}1 \\ \dfrac{E}{8}\,a\,(1 - e^2) = \qquad 0{,}00003\,07659 & & log = 5.488\,0696 \\ \dfrac{F}{10}\,a\,(1 - e^2) = \qquad 0{,}00000\,00443{,}44 & & log = 2.646\,84 \end{array}\right\} \quad (16)$$

Anmerkung. Dieselbe Reihenentwicklung, in etwas anderer Form und ausgedehnt bis e^{12} findet sich in „Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung von Oscar Schreiber, Hannover 1866", S. 13. Es ist dort zur Vermeidung von Brüchen $e = 4\,\varepsilon$, oder $e^2 = 16\,\varepsilon^2$ gesetzt und der Faktor $(1 - \varepsilon^2)$ in den einzelnen Coëfficienten ausmultipliziert, wodurch die folgende unserer (15) entsprechende Formel entsteht:

$$\text{Meridianbogen } B = a\,(A\,\varphi - A_1\,sin\,2\,\varphi + A_2\,sin\,4\,\varphi - \ldots) \quad (15\,a)$$

$$\begin{array}{rl} A = & 1 - 4\,\varepsilon^2 - 12\,\varepsilon^4 - 80\,\varepsilon^6 - 700\,\varepsilon^8 - 7056\,\varepsilon^{10} - 77616\,\varepsilon^{12} \\ A_1 = & 6\,\varepsilon^2 + 24\,\varepsilon^4 + 180\,\varepsilon^6 + 1680\,\varepsilon^8 + 17640\,\varepsilon^{10} + 199584\,\varepsilon^{12} \\ A_2 = & 15\,.. + 180\,.. + 2100\,\varepsilon + 25200\,.. + 311850\,.. \\ 3\,A_3 = & + 160\,.. + 2800\,.. + 44100\,.. + 646800\,.. \\ 2\,A_4 = & + 315\,.. + 8820\,.. + 174636\,.. \\ 10\,A_5 = & + 5540\,.. + 199584\,.. \\ A_6 = & + 2002\,.. \end{array}$$

Integration bis e'^{10}.

Wir wollen die Coëfficienten (16) zunächst stehen lassen und die Integration nochmals von neuem beginnen in der zweiten Form mit c und e'^2; es wird dabei nochmals dasselbe herauskommen, wie auf dem ersten Wege, was als Probe erwünscht ist.

Nach der zweiten Form von (1) oder (2) haben wir zu behandeln:

$$\frac{1}{V^3} = (1+e'^2\cos^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}e'^2\cos^2\varphi + \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,e'^4\cos^4\varphi - \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,e'^6\cos^6\varphi$$
$$+ \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,\frac{9}{8}\,e'^8\cos^8\varphi - \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,\frac{9}{8}\,\frac{11}{10}\,e'^{10}\cos^{10}\varphi$$

$$\frac{1}{V^3} = 1 - \frac{3}{2}e'^2\cos^2\varphi + \frac{15}{8}e'^4\cos^4\varphi - \frac{35}{16}e'^6\cos^6\varphi + \frac{315}{128}e'^8\cos^8\varphi - \frac{693}{256}e'^{10}\cos^{10}\varphi \quad (17)$$

Nach § 29. S. 177 hat man:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$
$$\cos^4\varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$$
$$\cos^6\varphi = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi + \frac{1}{32}\cos 6\varphi$$
$$\cos^8\varphi = \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\cos 2\varphi + \frac{7}{32}\cos 4\varphi + \frac{1}{16}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi$$
$$\cos^{10}\varphi = \frac{63}{256} + \frac{105}{256}\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi + \frac{45}{512}\cos 6\varphi + \frac{5}{256}\cos 8\varphi + \frac{1}{512}\cos 10\varphi$$

Wenn man diese Ausdrücke in (17) einsetzt, und nach $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w. ordnet, so bekommt man:

$$\frac{1}{V^3} = A' - B'\cos 2\varphi + C'\cos 4\varphi - D'\cos 6\varphi - E'\cos 8\varphi - F'\cos 10\varphi \quad (18)$$

wobei die Coëfficienten A' , B' u. s. w. folgende Bedeutungen haben:

$$A' = 1 - \frac{3}{4}e'^2 + \frac{45}{64}e'^4 - \frac{175}{256}e'^6 + \frac{11025}{16384}e'^8 - \frac{43659}{65536}e'^{10} + \ldots$$
$$B' = + \frac{3}{4}e'^2 - \frac{15}{16}e'^4 + \frac{525}{512}e'^6 - \frac{2205}{2048}e'^8 + \frac{72765}{65536}e'^{10} + \ldots$$
$$C' = + \frac{15}{64}e'^4 - \frac{105}{256}e'^6 + \frac{2205}{4096}e'^8 - \frac{10395}{16384}e'^{10} + \ldots$$
$$D' = + \frac{35}{512}e'^6 - \frac{315}{2048}e'^8 + \frac{31185}{131072}e'^{10} + \ldots$$
$$E' = + \frac{315}{16384}e'^8 - \frac{3465}{65536}e'^{10} + \ldots$$
$$F' = + \frac{693}{131072}e'^{10} + \ldots$$

In allen diesen Entwicklungen von (17) bis F' treten dieselben Zahlencoëfficienten auf wie früher in (12) bis F, nur mit anderen Vorzeichen. Man bemerkt auch, dass in der Gruppe der Coëfficienten A' B' $C'\ldots$ jede Vertikalreihe die Summe = Null giebt, so dass im Ganzen entsteht:

$$A' + B' + C' + D' + E' + F' = 1$$

Dieses hat auch einen inneren Sinn, nämlich mit $\varphi = 90°$ wird

$$\cos 2\varphi = -1 \quad , \quad \cos 4\varphi = +1 \quad , \quad \cos 6\varphi = -1 \text{ u. s. w.}$$

und damit wird nach (18):

$$\frac{1}{V3} = A' + B' + C' + D' + E' + F' = 1$$

und allerdings muss mit $\varphi = 0$ der Ausdruck $V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = 1$ werden. Etwas ähnliches findet bei der früheren Entwicklung mit W bei (13) statt, indem mit $\varphi = 0°$ ebenfalls $W = 1$ werden muss. Jedenfalls ist die Beziehung $A' + B' + C' \ldots = 1$ eine angenehme Probe für die Coëfficienten A', $B' \ldots$, womit zugleich auch die früheren Coëfficienten A, $B \ldots$ kontrolliert sind.

Die Ausrechnung der Zahlenwerte von A' B' u. s. w. mit dem Bessel schen $\log e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833$ hat gegeben:

$$\left.\begin{array}{llll}
A' = 0{,}99499\,21245{,}07507 & & \log A' = 9.997\,8196{\cdot}433 \\
B' = 0{,}00499\,73968{,}22747 & & \log B' = 7.698\,7438{\cdot}364 \\
C' = 0{,}00001\,04582{,}03528 & & \log C' = 5.019\,4570{\cdot}894 \\
D' = & 204{,}27152 & \log D' = 2.310\,2078{\cdot}2 \\
E' = & 0{,}38465 & \log E' = 9.585\,0657 \\
F' = & 0{,}00072 & \log F' = 6.857\,33
\end{array}\right\} \quad (19)$$

Die Weiterrechnung nach der Integration giebt dann, ganz wie früher bei der Rechnung mit W:

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{A'}{\varrho°} c = 111120{,}61962 & \log \frac{A'}{\varrho°} c = 5.045\,7946{\cdot}544 \\
\frac{B'}{2} c = 15988{,}63853 & \log \frac{B'}{2} c = 4.203\,8114{\cdot}842 \\
\frac{C'}{4} c = 16{,}72995\,380 & \log \frac{C'}{4} c = 1.223\,4947{\cdot}417 \\
\frac{D'}{6} c = 0{,}02178\,4832 & \log \frac{D'}{6} c = 8.338\,1542{\cdot}1 \\
\frac{E'}{8} c = 0{,}00003\,07662 & \log \frac{E'}{8} c = 5.488\,0733 \\
\frac{F'}{10} c = 0{,}00000\,00460{,}71 & \log \frac{F'}{10} c = 2.663\,43
\end{array}\right\} \quad (20)$$

Die beiden Ausrechnungen (16) und (20) stimmen so nahe überein, als es bei den unvermeidlichen Abrundungen erwartet werden kann. Die ganze Rechnung ist damit genügend kontrolliert, und wir bilden daraus im Mittel: die Formel für den Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ:

$$\left.\begin{array}{l}
B = \alpha\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi + \varepsilon \sin 8\varphi + \zeta \sin 10\varphi \\
B = 11\,1120{,}61962\,\varphi - 15988{,}63853 \sin 2\varphi + 16{,}72995\,38 \sin 4\varphi \\
\qquad - 0{,}02178\,480 \sin 6\varphi + 0{,}00003\,0766 \sin 8\varphi \\
\qquad - 0{,}00000\,00452 \sin 10\varphi
\end{array}\right\} \quad (21)$$

Das letzte Glied mit $\sin 10\varphi$ ist für alle im folgenden beabsichtigten Berechnungen nicht mehr von Bedeutung, wir wollen es deshalb ganz weglassen in der nachstehenden Formel, welche statt der Coëfficienten selbst deren Logarithmen giebt:

$$\left.\begin{array}{l}
B = [5.045\,7946{\cdot}544]\,\varphi - [4.203\,8114{\cdot}842] \sin 2\varphi + [1.223\,4947{\cdot}4] \sin 4\varphi \\
\qquad - [8.338\,1536] \sin 6\varphi + [5.48807] \sin 8\varphi
\end{array}\right\} \quad (22)$$

Im ersten Glied von (21) oder (22) ist φ in Graden zu nehmen; wenn man in Minuten oder in Sekunden rechnen will, so wird das erste Glied:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } 1' & 1852{,}01032\,72^{m} & log = 3.267\,6434{\cdot}040 \\ \;\;\text{„}\;\; 1'' & 30{,}86683\,879 & log = 1.489\,4921{\cdot}536 \end{array}\right\} \quad (23)$$

Die Formel (21) giebt sofort eine wichtige Anwendung; mit $\varphi = 90°$ werden $sin\,2\,\varphi$, $sin\,4\,\varphi$ u. s. w. alle = Null, und man bekommt den Meridianquadranten:

$$Q = 10\,000\,855{,}7658 \text{ Meter} \quad (24)$$

Man drückt das häufig auch so aus, dass man sagt, es sei $\frac{Q}{90} = 11\,1120{,}61962$ Meter der mittlere Meridiangrad.

Wenn man die Bedeutung des ersten Coëfficienten α in (21) nochmals aus (16) und (13) einsetzt, so erhält man:

$$Q = \frac{A\,a\,(1-e^2)}{\varrho°}\,90° = a\,(1-e^2)\,\frac{\pi}{2}\,A$$

$$Q = a\,(1-e^2)\,\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3}{4}\,e^2+\frac{45}{64}\,e^4+\ldots\right)$$

$$Q = a\,\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}\,e^2-\frac{3}{64}\,e^4-\ldots\right) \quad (24\text{a})$$

Wir wollen bei dieser Näherung stehen bleiben und nach (7) § 31. S. 189 die Abplattung α einführen, nämlich mit:

$$e^2 = 2\,\alpha - \alpha^2$$

Setzt man dieses in (24a) und ordnet nach Potenzen von α, so erhält man:

$$Q = a\,\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right) \quad (24\text{b})$$

Von dem Klammerfaktor kann man auch den Logarithmus entwickeln, wodurch man findet:

$$log\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right) = \mu\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right) - \frac{\mu}{2}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 = -\mu\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right)$$

Die Formel (24b) haben wir schon in unserer Einleitung S. 8 bei Gelegenheit der älteren Gradmessungen erwähnt, und um für solche Fälle leicht den Quadranten aus der grossen Axe und der Abplattung α oder umgekehrt berechnen zu können, haben wir dazu folgendes Hilfstäfelchen gebildet:

$\frac{a-b}{a} = \alpha$	$log\,\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right)$		$\frac{a-b}{a} = \alpha$	$log\,\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right)$	
		+			+
1 : 280	0.195 3440		1 : 300	0.195 3957	
		137			119
1 : 285	0.195 3577		1 : 305	0.195 4076	
		131			115
1 : 290	0.195 3708		1 : 310	0.195 4191	
		127			112
1 : 295	0.195 3835		1 : 315	0.195 4303	
		122			107
1 : 300	0.195 3957		1 : 320	0.195 4410	

Eine zweite naheliegende Anwendung von (21) oder (22) bekommt man mit $\varphi = 45°$, damit wird $2\,\varphi = 90°$, $4\,\varphi = 180°$, $6\,\varphi = 270°$, also:

$$B_0^{45} = 5\,000\,427{,}882900 - 15988{,}638530 + 0{,}021785 = 4\,984\,439{,}266155^{m} \quad (25)$$

Dieses ist der Meridianbogen vom Äquator bis zur Mittelbreite $= 45°$, der andere Teil von 45° bis zum Pol ist erheblich grösser, nämlich:

$$B_{45}^{90} = 50\,15416{,}4996^m \tag{26}$$

Nach der Formel (21) oder (22) haben wir die 30 Werte von $\varphi = 30°$ bis $\varphi = 60°$ berechnet:

Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ. (27)

φ	B	φ	B	φ	B
30°	3 319 786,510ᵐ	40°	4 429 084,790ᵐ	50°	5 540 279,543ᵐ
31	3 430 636,950	41	4 540 116,998	51	5 651 505,565
32	3 541 502,523	42	4 651 168,472	52	5 762 750,675
33	3 652 386,539	43	4 762 239,302	53	5 874 014,723
34	3 763 288,290	44	4 873 329,553	54	5 985 297,540
35°	3 874 208,046	45	4 984 439,266	55	6 096 598,931
36	3 985 146,054	46	5 095 568,459	56	6 207 918,679
37	4 096 102,540	47	5 206 717,124	57	6 319 256,544
38	4 207 077,708	48	5 317 885,233	58	6 430 612,266
39	4 318 071,739	49	5 429 073,732	59	6 541 985,560
40°	4 429 084,790	50	5 540 279,543	60	6 654 376,122

Zur Vergleichung wollen wir auch einige Zahlen aus fremden Tabellen zuziehen, nämlich: 1) Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch 1852, Tafeln für die Gestalt der Erde S. 374—381, giebt diese Meridianbögen B in Toisen, welche in der nachfolgenden Vergleichung in Meter verwandelt sind. 2) F. G. Gauss, Die trigonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, zweite Auflage 1893, II. Teil, S. 4—27. 3) Hartl, Tafeln, enthaltend die Ausmasse der Meridian- und Parallelbögen 1895 („Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 28—30).

Vergleichung verschiedener Berechnungen von B. (28)

φ	Jordan	Encke	F. G. Gauss	Hartl
30°	3 319 786,510ᵐ	,511ᵐ		,510ᵐ
35	3 874 208,046	,047		,046
40	4 429 084,790	,791		,790
45	4 984 439,266	,270	,265ᵐ	,266
50	5 540 279,543	,544	,542	,543
55	6 096 598,931	,932	,929	,931
60	6 654 376,122	,121		,121

Die kleinen Differenzen von Millimetern, welche sich hier zeigen, scheinen ihren Grund in den verschiedenen Annahmen der letzten Stellen der Bessel schen Erddimensionen zu haben, von welchen wir in § 31. S. 190—192 gehandelt haben.

Die Hilfstafel auf S. [38] unseres Anhangs, welche die in den vorstehenden Formeln mit B bezeichneten Meridianbögen vom Äquator bis zur Breite φ giebt, ist nur in ihrem ersten Teil, von 40° bis 44° von uns berechnet und zwar mit etwas anderen Konstanten als in vorstehender Formel (21) oder (22). Der übrige Teil von 44° bis 56° ist ein Auszug aus F. G. Gauss, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen der Feldmesskunst, 2. Aufl. 1893, II. Teil, S. 4—27.

Meridianbogen zwischen den Breiten φ_1 und φ_2.

Wenn man die Länge eines begrenzten Bogens m, zwischen φ_1 und φ_2, haben will, so kann man diesen sofort aus (21) haben, nämlich:

$$m = \alpha(\varphi_2 - \varphi_1) + \beta \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) + \gamma \sin 4(\varphi_2 - \varphi_1) + \delta \sin 6(\varphi_2 - \varphi_1) + \dots \tag{29}$$

Dieses wollen wir goniometrisch umformen, und dabei setzen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \qquad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi_0$$

Damit wird (28):

$$m = \alpha \Delta\varphi + 2\beta \sin \Delta\varphi \cos\varphi_0 + 2\gamma \sin 2\Delta\varphi \cos 2\varphi_0 + 2\delta \sin 3\Delta\varphi \cos 3\varphi_0 + \dots \tag{30}$$

Da die ausgerechneten Coëfficienten α, β, γ u. s. w. in (21) und (22) gegeben sind, kann man hiernach sofort für jede Mittelbreite φ_0 den Bogen m ausrechnen. Wir wollen $\Delta\varphi = 1^0$ setzen, und bekommen damit den Meridianbogen m_1 von 1° Weite mit der Mittelbreite φ mit ausgerechneten Coëfficienten:

$$\left.\begin{aligned} m_1 = 111120{,}61962 - 558{,}080436 \cos 2\varphi + 1{,}167734 \cos 4\varphi \\ - 0{,}002280 \cos 6\varphi + 0{,}0000043 \cos 8\varphi \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

oder mit Logarithmen:

$$\left.\begin{aligned} m_1 = 111\,120{,}61962 - [2.746\,6967{\cdot}983] \cos 2\varphi + [0.0673439{\cdot}0] \cos 4\varphi \\ - [7.357\,984] \cos 6\varphi - [4.63268] \cos 8\varphi \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Nach diesen Formeln (30)—(32) kann man jedes Meridianbogenstück ausrechnen, wenn es sich aber um Bögen von nur 1° oder von wenigen Grad handelt, und wenn man eine Tafel der Meridian-Krümmungs-Halbmesser bereits hat, so kann man eine viel bessere Reihe auf folgende Weise finden:

Wir betrachten einen Meridianbogen m, welcher zwischen den Breiten φ und $\varphi + \Delta\varphi$ liegt, dann wird man nach dem Maclaurinschen Satze entwickeln können:

$$m = \frac{dm}{d\varphi}\Delta\varphi + \frac{\Delta\varphi^2}{2}\frac{d^2 m}{d\varphi^2} + \frac{\Delta\varphi^3}{6}\frac{d^3 m}{d\varphi^3} \tag{33}$$

Nun wissen wir von (1) und (2) S. 209:

$$\frac{dm}{d\varphi} = M = \frac{c}{V^3} \tag{34}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \varphi^2 \cos^2\varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \quad , \quad \frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2 t}{V}$$

$$\frac{d^2 m}{d\varphi^2} = -\frac{3c}{V^4}\frac{dV}{d\varphi} = +\frac{3c\eta^2 t}{V^5} = +\frac{3M}{V^2}\eta^2 t \tag{35}$$

Wenn man in diesen Formen weiter differentiiert, so erhält man:

$$\frac{d^3 m}{d\varphi^3} = \frac{3c}{V^7}\eta^2(1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2) = \frac{3M}{V^4}\eta^2(1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2) \tag{36}$$

Nach diesen (34)—(36) kann man die Formel (33) zusammensetzen:

$$m = M\,\Delta\,\varphi + \frac{3}{2}\frac{M}{V^2}\eta^2\,t\,\Delta\,\varphi^2 + \frac{M}{2\,V^4}\eta^2(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2\,t^2)\,\Delta\,\varphi^3 \tag{37}$$

Zur Sicherung der Vorzeichen wollen wir dieses auch noch schreiben mit $\Delta\,\varphi = \varphi' - \varphi$ und $m = B' - B$, wo B und B' die Meridianbögen vom Äquator bis φ und φ' sind, also (37) in zweiter Form:

$$m = B' - B = M(\varphi' - \varphi) + \frac{3}{2}\frac{M}{V^2}\eta^2\,t\,(\varphi' - \varphi)^2 + (\varphi' - \varphi)^3 + \ldots \tag{38}$$

dabei gehört M, η^2, t zu φ.

Im Anschluss hieran kann man nun noch eine viel bessere Formel nach dem Prinzip der Mittelbreite (vgl. § 29. S. 178—179) herstellen:

Wir betrachten einen Meridianbogen m, welcher zwischen den Breiten $\varphi - \frac{\Delta\,\varphi}{2}$ und $\varphi + \frac{\Delta\,\varphi}{2}$ liegt, wo also φ die Mittelbreite und $\Delta\,\varphi$ die Weite ist. Der Bogen m wird dadurch ebenfalls in zwei Teile m_1 und m_2 zerlegt, für deren nördlichen m_1 nach dem Maclaurin schen Satze eine Reihe gelten wird:

$$m_1 = \left(\frac{d\,m}{d\,\varphi}\right)\frac{\Delta\,\varphi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 m}{d\,\varphi^2}\right)\left(\frac{\Delta\,\varphi}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3 m}{d\,\varphi^3}\right)\left(\frac{\Delta\,\varphi}{2}\right)^3 + \ldots$$

eine entsprechende Reihe gilt für den südlichen Teil m_2, nämlich:

$$-m_2 = -\left(\frac{d\,m}{d\,\varphi}\right)\frac{\Delta\,\varphi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 m}{d\,\varphi^2}\right)\left(\frac{\Delta\,\varphi}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{d^3 m}{d\,\varphi^3}\right)\left(\frac{\Delta\,\varphi}{2}\right)^3 + \ldots$$

durch Subtraktion findet man hieraus:

$$m_1 + m_2 = m = \left(\frac{d\,m}{d\,\varphi}\right)\Delta\,\varphi + \left(\frac{d^3 m}{d\,\varphi^3}\right)\frac{\Delta\,\varphi^3}{24} \tag{39}$$

Die hiezu nötigen Ableitungen sind im Vorstehenden (34) und (36) entwickelt, man kann daher alsbald die Formel (39) zusammensetzen, zugleich mit Zufügung der nötigen ϱ:

$$m = M\frac{\Delta\,\varphi}{\varrho} + \frac{M}{8\,V^4}\eta^2(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2\,t^2)\frac{\Delta\,\varphi^3}{\varrho^3} \tag{40}$$

und mit Einführung einer Abkürzung g und γ haben wir:

$$m = M\frac{\Delta\,\varphi}{\varrho} + g\,\Delta\,\varphi^3 \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wobei}\quad g &= \frac{M\,\eta^2}{8\,V^2\,\varrho^3}(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2\,t^2) \\ \gamma = \frac{g}{M}\,\varrho &= \frac{\eta^2}{8\,V^2\,\varrho^2}(1 - t^2 + \eta^2 + 4\,\eta^2\,t^2) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\Delta\,\varphi = \frac{m}{M}\,\varrho - \gamma\left(\frac{m}{M}\,\varrho\right)^3 \tag{43}$$

Die hiernach berechneten Werte g und γ sind in nachfolgender Tabelle mitgeteilt. Dieselbe enthält für $\Delta\,\varphi = 1°$ die Korrektions-Glieder g und γ für Meridian-Bogen-Rektifizierung mit dem Krümmungs-Halbmesser der Mittelbreite φ.

φ	g	γ	φ	g	γ	φ	g	γ
	+	—					—	+
0°	0,0281^{m}	0,00091″	45°	+ 0,00024^{m}	— 0,000008″	55°	0,0095^{m}	0,00031″
5°	0,0277	0,00090	46°	— 0,00075	+ 0,000024	60°	0,0140	0,00045
10°	0,0264	0,00086	47°	— 0,00174	+ 0,000056	65°	0,0182	0,00059
			48°	— 0,00273	+ 0,000088			
15°	0,0244	0,00079	49°	— 0,00372	+ 0,000120	70°	0,0217	0,00070
20°	0,0217	0,00070				75°	0,0247	0,00080
25°	0,0183	0,00059	50°	— 0,00470	+ 0,000152	80°	0,0268	0,00086
			51°	— 0,00567	+ 0,000184			
30°	0,0143	0,00046	52°	— 0,00664	+ 0,000215	85°	0,0281	0,00091
35°	0,0099	0,00032	53°	— 0,00761	+ 0,000246	90°	0,0286	0,00092
40°	0,0051	0,00017	54°	— 0,00856	+ 0,000277			
45°	0,0002	0,00001	55°	— 0,00951	+ 0,000308			

Diese Werte g sind im wesentlichen dasselbe, was die früher bei (11) S. 210 bis 211 angegebenen Beträge $m - m'$, d. h. die negativen Fehler.

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir den Meridianbogen zwischen den Breiten 47° und 53°, also 6° Weite mit der Mittelbreite $\varphi = 50°$ berechnen, man hat zuerst nach der Tafel des Anhangs, S. [20] und [21] $\log M = 6.804\,2916 \cdot 0$ oder sofort $\log \frac{\varrho}{M} = \log [1] = 8.510\,1335 \cdot 3$. Oder wenn wir noch schärfer rechnen wollen, so nehmen wir von S. [5] des Anhangs für $\varphi = 50°$, $\log V = 0.000\,6020 \cdot 131$ also $\log V^3 = 0.001\,8060 \cdot 393$, dazu von § 31. S. 193 $\log \varrho - \log c = 8.508\,3274 \cdot 897$, so dass man zusammen hat $\log [1] = 8.510\,1335 \cdot 290$, was mit $6° = 21\,600''$ das Hauptglied der Formel (41) giebt:

$$m' = \frac{21600}{[1]} = 667\,298{,}613^{m}$$

und dazu kommt noch nach dem vorstehenden Korrektionstäfelchen für $\varphi = 50°$ und $\Delta\varphi = 6°$ der Betrag:

$$- 0{,}00470 \times 6^3 = - 1{,}015^{m}.$$

Dieses zum vorigen hinzugefügt giebt:

$$m = 667\,298{,}613^{m} - 1{,}015^{m} = 667\,297{,}598^{m}.$$

Zur Vergleichung hat man von der Tabelle (27) S. 216:

$$\begin{array}{lll} \text{für } \varphi = 47° & B = 5\,206717{,}124^{m} \\ \text{,, } \varphi = 53° & B = 5\,874014{,}723 \\ \hline \text{Differenz} & m = 667297{,}599^{m} \end{array}$$

Dieses stimmt mit dem vorhergehenden auf 1^{mm}, was genügend ist.

Die Genauigkeit der Berechnung nach der Formel (41) ist sehr gross, denn das nächste vernachlässigte Glied ist nur von der Ordnung $\frac{M}{160} \Delta\varphi^5 e'^2 \cos 2\varphi$, was für einen Breitenunterschied von 10° zwischen 45° und 55° nur 7^{mm} ausmacht, jedoch wegen des Faktors $\cos 2\varphi$ erheblicher wird, wenn die Mittelbreite φ weit von 45° abliegt.

Wenn man etwa die von 1° zu 1° berechneten Meridianbogen B der Tabelle (27) S. 216 weiter interpolieren will, so rechnet man am besten die Differenzen nach der Formel (41), wobei das Glied mit g fast gar nichts ausmacht, z. B. für $\varphi = 50°$ und $\varDelta\varphi = 10'$ wird $\gamma\varDelta\varphi^3$ nur $= \frac{0{,}00470^m}{216} = 0{,}00002^m$.

Um daher den Meridianbogen von 50° 0′ bis 50° 10′ zu berechnen, nimmt man einfach von Seite [32] des Anhangs für $\varphi = 50°5'$ den Wert $log\,[1] = 8.510\,1272{\cdot}8$ und rechnet damit

$$\varDelta B = 600 : [1] = 18536{,}339^m$$

Ein zweites Beispiel soll die Benützung der Tafel Seite [38] und der Coëfficienten [1] zeigen:

Es sei gegeben die Breite des Punktes Celle (welcher einer der 40 Preussischen Kataster-Coordinaten-Nullpunkte ist) nämlich:

$$\varphi_0 = 52°\,37'\quad 32{,}6709''$$

und es soll dazu der Meridianbogen B vom Äquator bis zu dem Punkte Celle aus der Tafel Seite [38] des Anhangs gefunden werden. Man hat zunächst

$$\text{für } \varphi = 52°\,30': \; B_1 = 5818\,380{,}341^m \text{ und } \varDelta\varphi = 7'\,32{,}6709'' = 452{,}6709''$$

Die Mittelbreite für den Überschuss ist 52° 33′ 46,3″ und damit entnimmt man von Seite [33] den Wert $log\,[1] = 8.509\,9429{\cdot}9$, womit man logarithmisch weiterrechnet $\varDelta B = \varDelta\varphi : [1] = 13990{,}705$, was zu dem obigen B_1 zugefügt giebt $B_0 = 5\,83271{,}046^m$, und dieses ist der gesuchte zu φ_0 gehörige Meridianbogenwert, den man durch Benützung der zweiten Differenzen auf Seite [38] ebenso finden muss (in der 3. Aufl. dieses Bandes, 1890, S. 208, mit zweiten Differenzen berechnet $= 583271{,}045^m$).

§ 36. Parallelkreisbögen.

Nachdem wir die Meridianbögen gründlich behandelt haben, sind auch noch die damit verwandten Parallelkreisbögen zu erledigen, wozu keine weiteren Entwicklungen nötig sind, denn nach Fig. 1. S. 188 und Fig. 1 S. 194 ist der Parallelkreishalbmesser für die Breite φ:

$$x = N\cos\varphi \tag{1}$$

wobei wir $N = \frac{c}{V}$ als bereits berechnet voraussetzen. Damit hat man auch den Parallelbogen für die Länge λ:

$$L = x\frac{\lambda}{\varrho} = N\cos\varphi\frac{\lambda}{\varrho} = \frac{\lambda}{[1]}\cos\varphi \tag{2}$$

Die zweite oder die dritte dieser Formen wird man nehmen, wenn man N oder $[2] = \frac{\varrho}{N}$ aus unseren Anhangstafeln Seite [8]—[35] benützen will. Um noch genauer, etwa 10stellig zu rechnen, hat man $log\,V$ aus der besonderen Tafel dafür S. [2]—[7] des Anhangs zu entnehmen, und dann ist:

$$L = \frac{c}{\varrho}\frac{\cos\varphi\,\lambda}{V} \tag{3}$$

wobei für λ in Graden, Minuten oder Sekunden gilt:

	für Grade	für Minuten	für Sekunden
$log\,\frac{c}{\varrho}$	$= 5.047\,9750{\cdot}111$	$3.269\,8237{\cdot}607$	$1.491\,6725{\cdot}103$

Hiernach sind folgende Werte berechnet, zu etwaigen Weiterbenützungen mit mehr Stellen als für gewöhnlich nötig.

Parallelkreisbögen.

φ	$\lambda = 1°$	$\lambda = 1'$	$\lambda = 1''$
45°	78837,29341^m	1313,954890^m	21,88924817^m
46	77453,91115	1290,898519	21,51497532
47	76046,76765	1267,446128	21,12410212
48	74616,28344	1243,604724	20,72674540
49	73162,88715	1219,381452	20,32302421
50°	71687,01462	1194,783577	19,91305962
51	70189,10917	1169,818486	19,49697477
52	68669,62128	1144,493688	19,07489480
53	67129,00870	1118,816812	18,64694685
54	65567,73593	1092,795599	18,21325998
55	63986,27472	1066,437912	17,77396520

Verschiedene Tafelwerte von berechneten Parallelkreisbögen giebt unser Anhang auf Seite [36]—[37] , [40] und [41].

Die Parallelbögen werden ausser auf Grade, Minuten und Sekunden, auch auf Zeitmass, Stunden, Minuten und Sekunden reduziert, was astronomischen Zwecken entspricht. Es ist deswegen auf Seite [43] auch eine Tafel für Verwandlung von Bogen in Zeit und umgekehrt gegeben, und auf Seite [40] sind die Parallelbögen für 1′ und 1″ in Bogen, dazu aber auch für 1 Minute und 1 Sekunde in Zeit gegeben, als Näherungswerte, die z. B. zu astronomischen Ortsbestimmungen auf Reisen nützlich sind.

§ 37. Oberfläche des Erd-Ellipsoids.

Zur Oberflächenbestimmung denkt man sich das Ellipsoid durch Meridiane und Parallelkreise in Trapeze zerlegt, deren Differentialformel sich leicht angeben lässt.

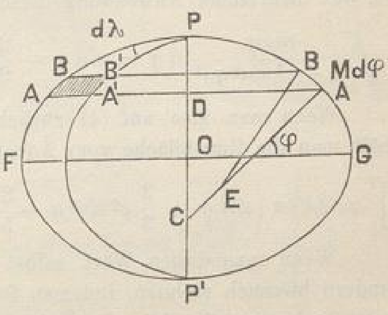
$A\,C = N \quad , \quad A\,E = M$

$D\,A = N \cos \varphi \qquad A\,B = M\,d\,\varphi$

$A\,A' = D\,A\,d\,\lambda$

$A\,A' = N \cos \varphi\, d\,\lambda$

Fig. 1.



Als Differential betrachtet hat das Trapez $A\,B\,B'\,A'$ die Fläche $d\,T = A\,B \times A\,A'$,

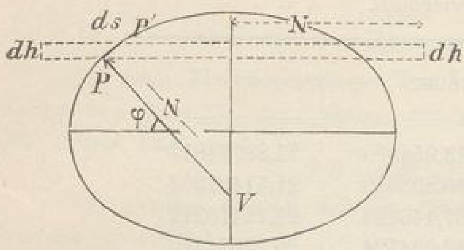
also: $$d\,T = M\,N \cos \varphi\, d\,\lambda\, d\,\varphi \qquad (1)$$

und die ganze Zone $A\,A\,B\,B$ mit $\lambda = 2\,\pi$ zwischen den Breiten φ und $d\,\varphi$ wird:

$$d\,Z = 2\,M\,N\,\pi \cos \varphi\, d\,\varphi \qquad (2)$$

Es mag auch daran erinnert werden, dass man ein solches Zonenelement $d\,Z$ zwischen zwei unendlich nahen Parallelkreisen auch als Kegelfläche auffassen kann, welche nach einem elementar-stereometrischen Satze erhalten wird als krumme Oberfläche eines Cylinders, dessen Höhe gleich der Höhe der genannten Zone ist, und dessen Halbmesser gleich der Länge der Flächennormalen N ist.

Fig. 2.



Mit Bezug auf Fig. 2. hat man daher:

Zonen-Flächen-Element $d\,Z = 2\,N\pi \times d\,h$.

Es ist aber:

$d\,h = d\,s\cos\varphi$ und $d\,s = M\,d\,\varphi$

also $d\,Z = 2\,M\,N\pi\cos\varphi\,d\,\varphi$, ebenso wie oben (2).

Da $M\,N = r^2$ ist, kann man die Formel (1) auch so schreiben:

$$d\,Z = 2\,r^2\,\pi\cos\varphi\,d\,\varphi \tag{3}$$

Setzt man für r^2 nach (24) § 32. S. 197 seinen Wert und zugleich $a^2\,(1 - e^2) = b^2$, so wird:

$$d\,Z = 2\,b^2\,\pi\,\frac{\cos\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^2}\,d\,\varphi \tag{4}$$

Dieses ist das Flächen-Differential einer Zone des Ellipsoids zwischen den Breiten φ und $\varphi + d\,\varphi$, also die Zonenfläche selbst, allgemein:

$$Z = 2\,b^2\,\pi\int\frac{\cos\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^2}\,d\,\varphi \tag{5}$$

Hier kann man entwickeln:

$$\frac{1}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^2} = (1 - e^2\sin^2\varphi)^{-2} = 1 + \left(\frac{-2}{1}\right)e^2\sin^2\varphi + \left(\frac{-2}{1}\,\frac{-3}{2}\right)e^4\sin^4\varphi + .$$

$$= 1 + 2\,e^2\sin^2\varphi + 3\,e^4\sin^4\varphi + 4\,e^6\sin^6 + 5\,e^8\sin^8\varphi + \ldots$$

Die zu integrierende Funktion ist also nach (5):

$$\frac{\cos\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^2} = \cos\varphi + 2\,e^2\cos\varphi\sin^2\varphi + 3\,e^4\cos\varphi\sin^4\varphi + 4\,e^6\cos\varphi\sin^6\varphi + \ldots$$

Diese Glieder lassen sich einzeln unmittelbar integrieren, denn es ist allgemein:

$$\int\cos\varphi\,\sin^n\varphi\,d\,\varphi = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}\varphi$$

also, mit mehrfacher Anwendung dieses Integrals:

$$\int\frac{\cos\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^2}\,d\,\varphi = \sin\varphi + \frac{2}{3}\,e^2\sin^3\varphi + \frac{3}{5}\,e^4\sin^5\varphi + \frac{4}{7}\,e^6\sin^7\varphi + \ldots$$

Wenn man also auf (4) zurückgreift, und die Grenzen 0 und φ einführt, so erhält man die Zonenfläche vom Äquator bis zur Breite φ:

$$Z\Big]_0^{\varphi} = 2\,b^2\,\pi\left(\sin\varphi + \frac{2}{3}\,e^2\sin^3\varphi + \frac{3}{5}\,e^4\sin^5\varphi + \frac{4}{7}\,e^6\sin^7\varphi + \frac{5}{9}\,e^8\sin^9\varphi + \ldots\right) \tag{6}$$

Wenn man diesen Wert selbst haben will für verschiedene φ, so kann man geradezu hiernach rechnen, indessen für Zonenflächen zwischen je zwei Breiten φ_1 und φ_2 ist es besser, die $\sin^3\varphi$ in $\sin 3\,\varphi$ u. s. w. umzuformen, nämlich nach § 29. S. 116:

$$sin^3\,\varphi = \frac{3}{4}\,sin\,\varphi - \frac{1}{4}\,sin\,3\,\varphi$$

$$sin^5\,\varphi = \frac{5}{8}\,sin\,\varphi - \frac{5}{16}\,sin\,3\,\varphi + \frac{1}{16}\,sin\,5\,\varphi$$

$$sin^7\,\varphi = \frac{35}{64}\,sin\,\varphi - \frac{21}{64}\,sin\,3\,\varphi + \frac{7}{64}\,sin\,5\,\varphi - \frac{1}{64}\,sin\,7\,\varphi$$

$$sin^9\,\varphi = \frac{63}{128}\,sin\,\varphi - \frac{21}{64}\,sin\,3\,\varphi + \frac{9}{64}\,sin\,5\,\varphi - \frac{9}{256}\,sin\,7\,\varphi + \frac{1}{256}\,sin\,9\,\varphi$$

$$sin^{11}\,\varphi = \frac{231}{512}\,sin\,\varphi - \frac{165}{512}\,sin\,3\,\varphi + \frac{165}{1024}\,sin\,5\,\varphi - \frac{55}{1024}\,sin\,7\,\varphi + \frac{11}{1024}\,sin\,9\,\varphi - \frac{sin\,11\,\varphi}{1024}$$

Damit wird (5) werden:

$$Z\Big]_0^\varphi = 2\,b^2\,\pi\left(A\,sin\,\varphi - B\,sin\,3\,\varphi + C\,sin\,5\,\varphi - D\,sin\,7\,\varphi + E\,sin\,9\,\varphi - F\,sin\,11\,\varphi\right) \quad (7)$$

wobei die Coëfficienten A, B u. s. w. diese sind:

$$\left.\begin{array}{ll}
A = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{128}e^8 + \frac{63}{256}e^{10} = & 1{,}00335\;39847{,}9231 \\
B = \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{3}{16}e^6 + \frac{35}{192}e^8 + \frac{45}{256}e^{10} = & 0{,}00112\;08040{,}9276 \\
C = \frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \frac{5}{64}e^8 + \frac{45}{612}e^{10} = & 16892{,}6070 \\
D = \frac{1}{112}e^6 + \frac{5}{256}e^8 + \frac{15}{512}e^{10} = & 26{,}9384 \\
E = \frac{5}{2304}e^8 + \frac{3}{512}e^{10} = & {,}0438 \\
F = \frac{3}{5632}e^{10} = & {,}0001
\end{array}\right\} \quad (8)$$

Die Ausrechnung geschah mit dem Bessel schen Werte $log\,e^2 = 7.824\,4104 \cdot 237$.

Wenn man nun die Zone zwischen zwei Breiten φ_1 und φ_2 haben will, so hat man in (7) die Differenzen:

$$A\,(sin\,\varphi_2 - sin\,\varphi_1) = 2\,A\,sin\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\,cos\,\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad \text{u. s. w.}$$

Dabei soll zur Abkürzung geschrieben werden:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varDelta\,\varphi \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi$$

Damit wird nach (7) die Zonenfläche von der Weite $\varDelta\,\varphi$ und mit der Mittelbreite φ:

$$\left.\begin{array}{l}
Z = 4\,b^2\,\pi\,\Big\{\,A\,cos\,\varphi\,sin\,\frac{\varDelta\,\varphi}{2} - B\,cos\,3\,\varphi\,sin\,3\,\frac{\varDelta\,\varphi}{2} \\
\qquad + C\,cos\,5\,\varphi\,sin\,5\,\frac{\varDelta\,\varphi}{2} - D\,cos\,7\,\varphi\,sin\,7\,\frac{\varDelta\,\varphi}{2} \\
\qquad + E\,cos\,9\,\varphi\,sin\,9\,\frac{\varDelta\,\varphi}{2} - \ldots\ldots \qquad \ldots\,\Big\}
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Fläche einer Grad-Abteilung.

Die Formel (8) mit dem Coëfficienten (7) giebt mit $\varDelta\varphi = 1°$ die Fläche eines Ringes von 1° Breite, der um die ganze Erde herumgeht, d. h. 360° Länge hat. Häufiger als die Fläche dieses ganzen Ringes braucht man den 360sten Teil derselben, d. h. eine „Grad-Abteilung", oder ein Trapez, welches durch zwei Meridiane und durch zwei Parallelkreise, beide im Abstande von je 1°, begrenzt ist.

Die krumme Oberfläche einer solchen Grad-Abteilung mit der Mittelbreite φ ist also:

$$G = \frac{b^2 \pi}{90} \left\{ A \sin 30' \cos \varphi - B \sin 1° 30' \cos 3\varphi + C \sin 2° 30' \cos 5\varphi \right.$$
$$\left. - D \sin 3° 30' \cos 7\varphi + E \sin 4° 30' \cos 9\varphi - \ldots \right\} \quad (10)$$

Wenn man hier alles Konstante ausrechnet, so findet man für Quadratkilometer

$$\left.\begin{array}{lll} G = 12347{,}58347 & \cos\varphi & (\log \text{ Coëff.} = 4.091\,5819{\cdot}705) \\ \quad - \quad 41{,}37468 & \cos 3\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"}\quad = 1.616\,7346{\cdot}5\;\;) \\ \quad + \quad 0{,}103911 & \cos 5\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"}\quad = 9.016\,662 - 10) \\ \quad - \quad 0{,}000232 & \cos 7\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"}\quad = 6.365\,28\; - 10) \\ \quad + \quad 0,\ldots & \cos 9\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"}\quad = 3.678\quad - 10) \end{array}\right\} \quad (11)$$

Die Messtischblätter der Preussischen Topographie im Massstab 1 : 25 000 haben in der Breite $\varDelta\varphi = 6'$ und in der Länge 10′, und hiefür wird:

$$G' = \frac{b^2 \pi}{540} \left\{ A \sin 3' \cos\varphi - B \sin 9' \cos 3\varphi + C \sin 15' \cos 5\varphi - D \sin 21' \cos 7\varphi \right\} \quad (12)$$

oder mit ausgerechneten Coëfficienten, für Quadratkilometer:

$$G' = 205{,}79564 \cos\varphi - 0{,}689656 \cos 3\varphi + 0{,}001732 \cos 5\varphi - 0{,}0000039 \cos 7\varphi \quad (13)$$

Die Logarithmen dieser Coëfficienten sind:

2.313 4361·8 9.838 6325 7.238 647 4.5874

Die hiernach berechneten Werte giebt unsere Tafel des Anhangs Seite [41].

Eine andere Reihenentwicklung, bei welcher die Coëfficienten A, B u. s. w. in endlicher geschlossener Form auftreten, wurde gegeben von *E. Roedel,* Oberpostassistent, in „Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Physik", 38. Jahrgang 1893, S. 56—60.

Integration in geschlossener Form.

Wir haben in der vorstehenden Entwicklung die Integration (4) sofort in einer Reihe behandelt, weil wir dadurch am kürzesten zu den Formeln (6) und (8) geführt worden sind, welche zum praktischen Rechnen die bequemsten sind.

Indessen kann man die Integration von (4) auch in geschlossener Form, streng ausführen, wodurch man zwar eine mathematisch elegantere Formel erhält, welche aber für die numerische Anwendung unbequemer ist als die entwickelten Reihen. Die Integration (deren Einzelheiten in der früheren 3. Auflage 1890, S. 227—228 ausgeführt waren) giebt:

$$Z\Big]_0^{\varphi} = 2\, b^2 \pi \left\{ \frac{\sin\varphi}{W^2} + \frac{1}{e}\, l \left(\frac{1 + e \sin\varphi}{W} \right) \right\} \quad (14)$$

Setzt man hier $\varphi = 90°$, so wird $W^2 = 1 - e^2$ also:

$$Z\Big]_0^{90} = 2\,b^2\,\pi \left\{ \frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{e}\, l \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} \right\} \quad , \quad \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$2Z\Big]_0^{90} = E = 4\,a^2\,\pi \left\{ 1 + \frac{1-e^2}{2\,e}\,\frac{1}{\mu}\, log \frac{1+e}{1-e} \right\}$$

Dieses muss übereinstimmen mit der Formel (6), wenn man daselbst $\varphi = 90°$ setzt, wodurch man erhält:

$$E = 4\,b^2\,\pi \left(1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \frac{5}{9}e^8 + \ldots\right) \tag{15}$$

Die Ausrechnung giebt nach beiden Formeln übereinstimmend:

$$E = 509\,950\,714{,}2 \text{ Quadrat-Kilometer} \tag{16}$$

Denkt man sich nun eine Kugel vom Halbmesser f, welche gleiche Oberfläche E haben soll, so bestimmt sich f dadurch:

$$f = \sqrt{\frac{E}{4\,\pi}} = 6\,370\,289{,}511^{m} \tag{17}$$

§. 38. Mittlerer Halbmesser der Erde als Kugel.

Die letzte Betrachtung leitet uns noch über zu der Frage, welchen Halbmesser man einer Kugel zuteilen soll, welche zu manchen Näherungsberechnungen u. s. w. dem Erd-Ellipsoid substituiert werden kann?

Der nächste Gedanke ist, das arithmetische Mittel der drei Halbaxen des Ellipsoids zu diesem Zwecke zu benützen, d. h. zu setzen:

$$\frac{a+a+b}{3} = r \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 6\,377\,397{,}155^{m} \\ a = 6\,377\,397{,}155 \\ b = 6\,356\,078{,}963 \end{array}\right\} \frac{a+a+b}{3} = 6\,370\,291{,}091^{m} \tag{2}$$

Man kann diesen Wert r nach (1) auch in eine Reihe entwickeln, nämlich:

$$r = \frac{2\,a + a\sqrt{1-e^2}}{3} = \frac{a}{3}\left(2 + 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \ldots\right)$$

$$r = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{24}e^4 - \frac{1}{48}e^6 - \ldots\right) \tag{3}$$

Nach diesem kann man die am Schlusse des vorigen § 37. (s. oben) eingeführte Kugel betrachten, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleiche Oberfläche E hat. Aus der Reihe für E in (15) § 37. (s. oben) folgt, dass der Halbmesser f der fraglichen Kugel sein muss:

$$f = a\sqrt{1-e^2}\sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \ldots}$$

$$f = a\left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16}\right)\left(1 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{11}{45}e^4 + \frac{193}{945}e^6\right)$$

$$f = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{67}{3024}e^6\right) \tag{4}$$

Die Vergleichung mit (3) giebt:

$$f = r\left(1 - \frac{1}{180}e^4 - \frac{17}{7560}r^6\right) \tag{5}$$

Die Ausrechnung hiernach giebt:

$$f = 6\,370\,291{,}091^{m} - 1{,}577^{m} - 0{,}004^{m} = 6\,370\,289{,}510^{m} \tag{6}$$

Dieses stimmt genügend mit dem früher auf zwei anderen Wegen berechneten Werte (16) § 37. S. 225.

Als dritter Mittelwert bietet sich der Halbmesser k derjenigen Kugel, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleichen körperlichen Inhalt hat.

Der Inhalt des Umdrehungs-Ellipsoids wird bekanntlich dadurch gefunden, dass man eine Kugel mit dem Äquator-Halbmesser a, also mit dem Inhalt $\frac{4}{3}\pi a^3$, in der Richtung der Umdrehungsaxe im Verhältnis $b : a$ zusammengedrückt denkt, d. h. es ist:

$$\text{Körperinhalt des Erd-Ellipsoids} = \frac{b}{a}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Wenn eine Kugel vom Halbmesser k denselben Inhalt haben soll, so muss sein:

$$k^3 = a^2 b \qquad \text{oder} \qquad k = \sqrt[3]{a^2 b} = a\sqrt[6]{1 - e^2} \tag{7}$$

Dieses kann man entwickeln:

$$k = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{5}{72}e^4 - \frac{55}{1296}e^6\right) \tag{8}$$

Nimmt man wieder das arithmetische Mittel r der 3 Halbaxen nach (3) zur Vergleichung, und entwickelt, so erhält man:

$$k = r\left(1 - \frac{1}{36}e^4 - \frac{17}{648}e^6\right) \tag{9}$$

Die Ausrechnung giebt:

$$k = 6\,370\,291{,}091^{m} - 7{,}8828^{m} - 0{,}0497^{m} = 6\,370\,283{,}158^{m} \tag{10}$$

Dieses ist auch in Übereinstimmung mit einer unmittelbaren Ausrechnung nach (7).

Zur Übersicht stellen wir nochmals die drei gefundenen Werte zusammen:

1) Arithmetisches Mittel $\frac{a + a + b}{3} = r = 6\,370\,291{,}091^{m}$

2) Halbmesser für gleiche Oberfläche $f = 6\,370\,289{,}510^{m}$

3) Halbmesser für gleichen Inhalt $\sqrt[3]{a^2 b} = \ k = 6\,370\,283{,}158^{m}$

Wie man sieht, sind diese Werte nahezu gleich, und für viele Zwecke auch gleich geeignet.

Für alle Krümmungs-Halbmesser der ganzen Erde hat Dienger in der Schrift „Abbildung krummer Oberflächen, Braunschweig 1858", S. 41 den Satz gefunden, dass das arithmetische Mittel aller Krümmungs-Halbmesser gleich der grossen Halbaxe a ist.

Hiebei ist die ganze Erde in Betracht genommen; wenn man dagegen nur einem begrenzten Teile eine Kugel substituieren will, etwa nur der Nachbarschaft eines Punktes in der Breite φ, so handelt es sich um einen Mittelwert der Krümmungs-Halbmesser in allen Azimuten von einem Punkte aus, und dafür haben wir schon in (23) § 32. S. 197 den „mittleren" Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ eingeführt ohne besondere Theorie.

Obgleich ohne Theorie der geodätischen Linie es nicht möglich ist, diese Wahl von r besser zu begründen, soll doch hier auch ein Satz von Grunert angeführt werden (vgl. die Litteraturangaben am Schlusse), dass der mittlere Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{M\,N}$ zugleich das arithmetische Mittel aller Normalschnitts-Krümmungs-Halbmesser R in einem Punkte ist. Dieses wird so bewiesen:

Man hat die Summe aller Werte R nach (1) § 33. S. 199:

$$[R] = \int_0^{2\pi} \frac{M\,N}{M \sin^2\alpha + N \cos^2\alpha}\, d\,\alpha$$

und die Anzahl derselben ist entsprechend $n = 2\pi$. also der Mittelwert:

$$\frac{[R]}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M\,N}{M \sin^2\alpha + N \cos^2\alpha}\, d\,\alpha$$

Zur Integration führt man eine neue Veränderliche ein:

$$\sqrt{\frac{M}{N}}\, tang\, \alpha = v, \quad \text{also} \quad \sqrt{\frac{M}{N}}\, \frac{d\,\alpha}{\cos^2\alpha} = d\,v$$

wodurch die Integration sich reduziert auf:

$$\int \frac{d\,v}{1+v^2}\, arc\, tang\, v$$

Und setzt man noch die Grenzen ein, so findet man:

$$\frac{[R]}{n} = \sqrt{M\,N} = r \tag{11}$$

Ein zweiter Satz von Grunert heisst:

Das arithmetische Mittel der reciproken Krümmungs-Halbmesser aller Normalschnitte in einem beliebigen Punkte eines jeden Ellipsoids ist das arithmetische Mittel zwischen dem reciproken kleinsten und grössten Krümmungs-Halbmesser in diesem Punkte.

Wenn man den Krümmungs-Halbmesser für das Mittelazimut $\alpha = 45^\circ$ von § 33. S. 200 zuzieht, so hat man hiernach, mit $n = 2\pi$ für Integralsummierung:

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{R_{45}}$$

Diese Grunert schen Sätze sind entwickelt in „Grunerts Archiv der Mathematik u. Physik", 40. Teil 1863, S. 259—354, insbesondere S. 312 und 41. Teil 1864, S. 241—296, insbesondere S. 292.

Hiezu gehört ferner: Helmert, „Die mathem. u. physikal. Theorieen der höheren Geodäsie I." Leipzig 1880, S. 63—68. Czuber, „Mittelwerte, die Krümmung ebener Kurven und Krümmungsflächen" betreffend. Grunert-Hoppes, „Archiv der Math. u. Ph." Zweite Reihe. 6. Teil 1888, S. 294—304.

§ 39. Hilfstafeln zu geodätischen Berechnungen mit den Bessel schen Erddimensionen.

Auf die Bessel schen Angaben für die Erddimensionen sind schon zahlreiche Tabellen-Berechnungen gegründet worden, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

Encke. Über die Dimensionen des Erdkörpers nebst Tafeln nach Bessels Bestimmung. Berl. astr. Jahrb. für 1852 S. 318—381 und Separatabdruck: Enckes astr. Abhandlungen 2. Band, Berlin 1866. Diese Encke schen Tafeln geben zuerst die geocentrische Breite und den geocentrischen Halbmesser, dann *log* $(N:a)$, Meridiangrade und Parallelgrade und Grade senkrecht auf dem Meridian, in Toisen. Ausserdem Tafel II, Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ in Toisen auf 0,001 Toise.

Steinhauser. Neue Berechnung der Dimensionen des Erdsphäroids. Petermann s geogr. Mitteilungen 1858 S. 465—468.

Bremiker. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 6 Dezimalstellen 1881, S. 520 bis 524. Gradabteilungen.

Bremiker. Studien über höhere Geodäsie. Berlin 1869. S. 70—81. Krümmungs-Halbmesser für verschiedene Breiten und Azimute.

Projektion tables for the use of the United States navy, Bureau of navigation. Washington, Government printing office, 1869. Polyconische Projection.

Wagner. Die Dimensionen des Erdsphäroids nach Bessel s Elementen. Geographisches Jahrbuch, herausgegeben von Behm. III. Band. Gotha 1870. S. I—LXI. Gradabteilungen u. s. w.

F. G. Gauss. Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. Berlin 1876 und 2. Aufl. 1893, II. Teil S. 4—25, von $\varphi = 44°$ bis $\varphi = 54°$ Meridianbogen, $log\, M$, $log\, N$ etc.

Schreiber. Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878. Im Selbstverlage; zu beziehen durch die Königliche Hofbuchhandlung von E. S. Mittler & Sohn, Kochstrasse 69. 70.

Von $\varphi = 47°$ bis $\varphi = 57°$ mit Intervall von $1'$ geben diese Tafeln 8stellig *log* (1) ... *log* (8), wobei die (1) , (2) ... mit Umsetzung in unsere Bezeichnungen

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi \quad \text{u. s. w.}$$

folgende Bedeutungen haben:

$$(1) = \frac{\varrho}{M} \;,\; (2) = \frac{\varrho}{N} \;,\; (3) = \frac{V^2}{2\,\varrho} \;,\; (4) = \frac{3}{2}\,\frac{\mu}{N}\,\eta^2 t \;,\; (5) = \frac{\mu}{3\,r^2}$$

$$(6) = \frac{\mu\,\eta^2}{2\,c^2}(t^2 - 1) \;,\; (7) = \frac{\mu\,\eta^2}{6\,\varrho^2}(3 + 2\,t^2) \;,\; (8) = \frac{\mu\,\eta^2}{12\,\varrho^2}(13 + 3\,t^2)$$

Dieselben Werte *log* (1) bis *log* (4) 7stellig sind herausgegeben als Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Aufnahme der Reichs-Schutzgebiete, Berlin 1891, für die Breiten $\varphi = 0°$ bis $\varphi = 13°$.

Entsprechende Tafeln für $\varphi = 47°$ bis $57°$ für zweite Ordnung 7stellig und für dritte Ordnung 6stellig.

Albrecht. Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, nebst kurzer Anleitung zur Ausführung derselben, von Prof. Dr. Th. Albrecht, Sektionschef im Königl. Preuss. Geodätischen Institut. 3. Auflage. Berlin 1894. Tafeln über die Gestalt der Erde S. 261—289. (Vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1895", S. 544—547.)

Helmert. Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie. I. Teil. Leipzig 1880. Anhang S. 621—631 giebt *log* W von $\varphi = 47°\ 0'$

bis 57° 0′ mit Intervall 5′ auf 0·0001, ferner *log* W' 8 stellig auf 0·1 genau, durch den ganzen Quadranten mit $\varDelta\,\varphi = 10'$.

Biek-Tillo. Russische Übersetzung von Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Auflage, übersetzt von A. Biek, Oberlehrer der Geodäsie am Messinstitut des Grossfürsten Constantin. Moskau 1881. Buchhändler N. J. Mamontowa. Diese Übersetzung giebt, an Stelle der Tafel S. 424—427 des Originals, ihrerseits auf S. 652—665 eine von dem Obersten des Russischen Generalstabs A. A. Tillo berechnete Tafel der Coëfficienten für die Gauss schen Mittelbreiten-Formeln; insbesondere *log* [1] und *log* [2] für $\varphi = 34°\ 0'$ bis $\varphi = 70°\ 0'$ mit Intervall 10′ auf 0·1 genau. Es ist jedoch hiebei eine andere Längeneinheit als die Besselsche zu Grunde gelegt, denn die russischen *log* [1] und *log* [2] haben gegen unsere mit Bessel schen Erddimensionen berechneten *log* [1] und *log* [2] eine konstante Differenz von 371·6.

Rehm. Mitteilungen des K. K. militär-geographischen Instituts, herausgegeben auf Befehl des K. K. Reichs-Kriegs-Ministeriums. III. Band, 1883. Wien 1883. Im Selbstverlage des K. K. milit.-geogr. Instituts. S. 137—177. Tafeln der Krümmungs-Halbmesser des Bessel schen Erdsphäroids für die Breiten von $\varphi = 40'\ 0'$ bis $51°\ 30'$ mit Intervall 1′ auf 0·0001 (vgl. nachfolgend Hartl).

Schols. Geodetische Formules en Tafels, ten gebruike bij de Triangulatie van het eiland Sumatra. Utrecht, J. van Boekhoven, 1884. Diese Tafeln geben von $\varphi = 0°\ 0'$ bis $6°\ 0'$ die Krümmungs-Halbmesser auf 0·1, nebst weiteren Zahlenwerten.

Hermann Wagner s Tafeln der Dimensionen des Erdsphäroids, auf Minuten-Dekaden erweitert von A. Steinhauser, K. K. Regierungsrat. Wien 1885. Eduard Hölzel.

Helmert. Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft 1. Formeln und Tafeln u. s. w. Berlin, Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei. 1886. Tafeln im Anhang S. 6—26; hievon giebt S. 18—24 für $\varphi = 30°$ bis 71° 8 stellige Werte *log* [1] und *log* [2], welche bzw. die dekadischen Ergänzungen unserer *log* [2] und *log* [1] sind.

Hartl. Tafeln enthaltend die Ausmasse der Meridian- und Parallelkreis-Bögen, dann die Logarithmen der Krümmungs-Radien des Bessel schen Erdellipsoids, berechnet unter der Leitung von Oberstlieutenant H. Hartl in der geodätischen Abteilung des K. und K. militär.-geographischen Instituts. Separatabdruck aus den Mitteilungen des K. K. militär-geographischen Instituts. XIV. Band. Wien 1895 (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1896", S. 28—30).

Im Anhange unseres Buches, Seite [2] und folgende, sind zahlreiche Hilfstafeln mitgeteilt, welche für diesen Zweck von uns neu und unabhängig berechnet, oder wenigstens vor der teilweisen Entlehnung gründlich revidiert worden sind.

Die geodätische Grundfunktion V bzw. *log* V auf Seite [2]—[7] ist mit den Konstanten der Landesaufnahme (§ 31. S. 191) neu und unabhängig berechnet worden nach den am Schlusse Seite [7] angegebenen Formeln, wie in § 34. ausführlich gezeigt ist; die Rechnung ist 12—13 stellig geführt und dann auf 10 Stellen abgerundet.

Die Tafel Seite [8]—[29] ist von 1° zu 1° ebenfalls neu und unabhängig berechnet, bei der Interpolation sind aber an den Stellen 0°—6° und 47°—57° die Tafeln von Schols und Helmert mitbenützt.

Die besondere Tafel für *log* [1] und *log* [2] auf Seite [30]—[35] ist nur von

45°—46° neu berechnet, und von 47°—56° ein revidierter Abdruck aus Schreibers „Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme“.

Die Tafel Seite [36]—[37] für die Längen- und Breitengrade und für die Grad-Abteilungsflächen ist zunächst nach Bremiker und Wagner angesetzt, dann aber eingehend nachgerechnet; die hiebei von uns gefundenen wenigen Fehler sind in dem geographischen Jahrbuch von Behm, VI. Band, 1876, S. 703 mitgeteilt.

Die Meridianbogen-Tafel Seite [38] ist von 44°—56° ein Auszug aus der grösseren Tafel von F. G. Gauss. Der Teil 40°—44° ist dazu berechnet.

Die Trapez-Tafel Seite [42] ist nach den betreffenden Formeln von § 35.—37. berechnet und soweit möglich mit vorhandenen verglichen.

Über die nach diesem folgenden Tafeln Seite [43] und folgende wird an den zugehörigen Stellen des Textes Auskunft gegeben.

Übersicht der Haupt-Bezeichnungen in den Hilfstafeln des Anhangs.

φ = Geographische Breite

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \quad , \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi$$

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \text{ oder } = \frac{c}{V^3} \text{ Meridian-Krümmungs-Halbmesser}$$

$$N = \frac{a}{W} \text{ oder } = \frac{c}{V} \text{ Querkrümmungs-Halbmesser} \quad , \quad \frac{N}{M} = V^2$$

$$r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2} \text{ mittlerer Krümmungs-Halbmesser}$$

$$[1] = \frac{\varrho''}{M} \text{ Meridian-Krümmungs-Coëfficient}$$

$$[2] = \frac{\varrho''}{N} \text{ Querkrümmungs-Coëfficient}$$

Kapitel IV.

Sphärische Dreiecksberechnung.

§ 40. Der sphärische Excess.

Bei der sphärischen Dreiecksberechnung nimmt man den Kugelhalbmesser nach der schon in (23) § 32. S. 197 und nochmals am Schlusse des § 38. S. 226 angegebenen Erklärung an, nämlich:

$$r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2} \tag{1}$$

Damit werden zuerst die sphärischen Excesse der Dreiecke berechnet.

Die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ist stets grösser als 180°; der Überschuss der Winkelsumme über 180° heisst der sphärische Excess.