Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

Kapitel IV. Sphärische Dreiecksberechnung.

45°—46° neu berechnet, und von 47°—56° ein revidierter Abdruck aus Schreibers „Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme".

Die Tafel Seite [36]—[37] für die Längen- und Breitengrade und für die Grad-Abteilungsflächen ist zunächst nach Bremiker und Wagner angesetzt, dann aber eingehend nachgerechnet; die hiebei von uns gefundenen wenigen Fehler sind in dem geographischen Jahrbuch von Behm, VI. Band, 1876, S. 703 mitgeteilt.

Die Meridianbogen-Tafel Seite [38] ist von 44°—56° ein Auszug aus der grösseren Tafel von F. G. Gauss. Der Teil 40°—44° ist dazu berechnet.

Die Trapez-Tafel Seite [42] ist nach den betreffenden Formeln von § 35.—37. berechnet und soweit möglich mit vorhandenen verglichen.

Über die nach diesem folgenden Tafeln Seite [43] und folgende wird an den zugehörigen Stellen des Textes Auskunft gegeben.

Übersicht der Haupt-Bezeichnungen in den Hilfstafeln des Anhangs.

φ = Geographische Breite

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \quad , \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi$$

$M = \dfrac{a(1 - e^2)}{W^3}$ oder $= \dfrac{c}{V^3}$ Meridian-Krümmungs-Halbmesser

$N = \dfrac{a}{W}$ oder $= \dfrac{c}{V}$ Querkrümmungs-Halbmesser , $\dfrac{N}{M} = V^2$

$r = \sqrt{MN} = \dfrac{c}{V^2}$ mittlerer Krümmungs-Halbmesser

$[1] = \dfrac{\varrho''}{M}$ Meridian-Krümmungs-Coëfficient

$[2] = \dfrac{\varrho''}{N}$ Querkrümmungs-Coëfficient

Kapitel IV.

Sphärische Dreiecksberechnung.

§ 40. Der sphärische Excess.

Bei der sphärischen Dreiecksberechnung nimmt man den Kugelhalbmesser nach der schon in (23) § 32. S. 197 und nochmals am Schlusse des § 38. S. 226 angegebenen Erklärung an, nämlich:

$$r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2} \tag{1}$$

Damit werden zuerst die sphärischen Excesse der Dreiecke berechnet.

Die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ist stets grösser als 180°; der Überschuss der Winkelsumme über 180° heisst der sphärische Excess.

Bezeichnen wir die Winkel mit α, β, γ und den sphärischen Excess mit ε, so haben wir also die Gleichung:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ \tag{2}$$

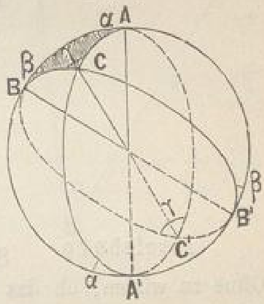
Wenn die drei Winkel α, β, γ gemessen sind, so findet man hiernach auch den Excess ε, jedoch mit den Messungsfehlern der α, β, γ behaftet; es ist deswegen erwünscht, eine unabhängige scharfe Bestimmung von ε zu haben, welche von den kleinen Messungsfehlern der Winkel α, β, γ unabhängig ist, und im Gegenteil dazu dienen soll, diese Winkel α, β, γ in ihrer Summe zu kontrollieren.

Eine solche unabhängige Bestimmung des Excesses ε erhält man durch den Satz, dass der Excess der sphärischen Dreiecksfläche F proportional ist, nämlich:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2}\varrho \tag{2a}$$

Man kann diesen Satz mit Hilfe der sphärischen Zweiecke beweisen, und wegen der Wichtigkeit desselben setzen wir den bekannten elementaren Beweis des Satzes hier her:

Fig. 1.



Unter Zwei-Eck versteht man die Fläche zwischen zwei grössten Kreisen, z. B. in Fig. 1. die Fläche:

$$\text{Zwei-Eck } A\,C\,A'\,B\,A = (\alpha, \alpha)$$

da nun die Gesamt-Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$ ist, so ist die Fläche:

$$\text{Zwei-Eck } (\alpha, \alpha) = \frac{\alpha}{360}(4\pi r^2)$$

Wenden wir dieses auch auf die beiden anderen in dem Dreieck $A\,B\,C$ zusammenstossenden Zwei-Ecke an, so haben wir:

$$\text{Zwei-Eck } (\beta, \beta) = \frac{\beta}{360}(4\pi r^2)$$

$$\text{Zwei-Eck } (\gamma, \gamma) = \frac{\gamma}{360}(4\pi r^2)$$

folglich die Summe:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360} 4\pi r^2 \tag{a}$$

Indem man nun die Fläche F des sphärischen Dreiecks $A\,B\,C$ einführt, hat man nach dem Anblick von Fig. 1. (noch anschaulicher durch Aufzeichnung auf einem Kugel-Modell):

$$\begin{aligned}(\alpha, \alpha) &= F + A'\,B\,C\\ (\beta, \beta) &= F + B'\,A\,C\\ (\gamma, \gamma) &= F + C'\,A\,B\end{aligned}$$

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 3\,F + A'\,B\,C + B'\,A\,C + C'\,A\,B$$

Nun ist aber das auf der jenseitigen Kugelfläche von Fig. 1. liegende Dreieck $C'\,A\,B$ flächengleich mit seinem diesseits liegenden Scheiteldreieck $C\,A'\,B'$; man hat also, indem man zugleich $3\,F = 2\,F + F$ schreibt:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 2\,F + F + A'\,B\,C + B'\,A\,C + C\,A'\,B'$$

Die 4 letzten Glieder dieser Gleichung geben zusammen die halbe Kugelfläche $= 2\pi r^2$, also:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 2\,F + 2\pi r^2 \tag{b}$$

Nun geben die Gleichungen (a) und (b) zusammen:

$$F = (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)\frac{\pi}{180^\circ} r^2 \tag{c}$$

Wenn man also die Bezeichnung ε nach (1) anwendet, und wenn man zugleich $\frac{180^\circ}{\pi} = \varrho$ schreibt, so findet man aus (c) dieselbe Gleichung wie (2), nämlich, was zu beweisen war:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \varepsilon = \frac{F}{r^2}\varrho \tag{d}$$

Unter F ist streng genommen die krumme (kugelförmige) Oberfläche des Dreiecks zu verstehen, indessen kann man statt dessen mit genügender Annäherung auch die Fläche $\triangle$ eines ebenen Dreiecks benützen, das aus den Seiten des sphärischen Dreiecks berechnet wird, d. h. man hat:

$$\text{Näherung } \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}\varrho \tag{3}$$

(Dasselbe findet man auch durch genäherte Anwendung der sphärisch-trigonometrischen Formel für $tang \frac{\varepsilon}{2}$, welche in § 27. S. 166 citiert wurde.)

Fig. 2.
(Massstab 1 : 2 000 000.)

Zu einem Zahlenbeispiele wollen wir das hannover sche Dreieck benützen, welches in den klassischen Abhandlungen von Gauss mehrfach als Beispiel dient, nämlich das in Fig. 2. dargestellte Dreieck:

Inselsberg—Hohehagen—Brocken.

Es sei gegeben:

die Seite Inselsberg—Brocken $b = 105\,972{,}85^m$ (4)

ferner die Dreieckswinkel, genähert, und die geographischen Breiten φ der Eckpunkte, ebenfalls genähert:

Punkt	Dreiecks-Winkel		Geogr. Breite
Inselsberg .	$\alpha = 40^\circ\ 39'\ 30''$	$(25'')$	$50^\circ\ 51'\ 9''$
Hohehagen	$\beta = 86\ \ 13\ \ 59$	$(54'')$	$51\ \ 28\ \ 31$
Brocken . .	$\gamma = 53\ \ \ 6\ \ 46$	$(41'')$	$51\ \ 48\ \ 2$
	Summe $180^\circ\ 0'\ 15''$	$(0'')$	$\varphi = 51^\circ\ 22'\ 34''$ Mittel (5)

Die auf 1″ angegebenen Dreieckswinkel geben die Summe 180° 0′ 15″, d. h. einen Überschuss von 15″ über 180°. Ohne zu wissen, ob das der sphärische Excess ist, oder von Messungs-Fehlern herrührt, verteilen wir, um wenigstens vorläufig eine in sich übereinstimmende ebene Dreiecks-Berechnung zu haben, diese 15″ auf die drei Winkel und erhalten dadurch die oben bei (5) in Klammern beigesetzten Sekundenwerte (25″), (54″), (41″) für die drei Winkel.

Mit diesen Winkeln und der schon bei (4) angegebenen Basisseite b macht man eine genäherte vorläufige Dreiecks-Berechnung nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie:

$$a = \frac{b}{\sin\beta}\sin\alpha \quad , \quad c = \frac{b}{\sin\beta}\sin\gamma$$

Dabei rechnet man nur etwa mit 5- oder 6-stelligen Logarithmen:

$\log b$	5.025 195
$Erg. \log \sin\beta$	0.000 940
$\log \sin \alpha$	9.813 933
$\log a$	4.840 068

$\log b$	5.025 195
$Erg. \log \sin\beta$	0.000 940
$\log \sin \gamma$	9.902 983
$\log c$	4.929 118

Man hat also nun zusammen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 40^\circ\ 39'\ 25'' & \log a &= 4.840\,068 \\ \beta &= 86^\circ\ 13'\ 54'' & \log b &= 5.025\,195 \\ \gamma &= 53^\circ\ \ 6'\ 41'' & \log c &= 4.929\,118 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Damit kann man die Dreiecksfläche dreifach berechnen, denn es ist bekanntlich:

$$\text{Dreiecksfläche } \triangle = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma = \frac{1}{2}\, a\, c \sin\beta = \frac{1}{2}\, b\, c \sin\alpha$$

$log\ a$	4.840 068	oder	$log\ a$	4.840 068
$log\ b$	5.025 195		$log\ c$	4.929 118
$log \sin\gamma$	9.902 983 — 10		$log \sin\beta$	9.999 060 — 10
$log\ 0{,}5$	9.698 970 — 10		$log\ 0{,}5$	9.698 970 — 10
$log \triangle$	9.467 216		$log \triangle$	9.467 216 (7)

Nach diesem braucht man den mittleren Krümmungs-Halbmesser für die Mittelbreite des Dreiecks. Diese Mittelbreite wurde schon unter (5) angegeben $\varphi = 51° 22' 34''$, und damit entnimmt man aus der Tafel Seite [20] des Anhangs durch Interpolation den Wert $log\ r$ oder auch sofort:

$log \frac{1}{r^2}$	6.390 076 — 20	
hiezu $log\ \varrho$	5.314 425	
und von (7) $log \triangle$	9.467 216	
$log\ \varepsilon$	1.171 717	$\varepsilon = 14{,}850''$ (8)

Damit sind die oben unter (5) gegebenen Winkel, insofern sie nur auf 1″ genau angesetzt sind, in ihrer Summe bestätigt. Die genaueren Winkel und die genauere Berechnung der Dreiecksseiten werden wir in § 41.—§ 42. kennen lernen.

Zu der einfachen Excess-Berechnung, welche im vorstehenden Beispiele in aller Ausführlichkeit gegeben ist, kann man noch einige Bemerkungen machen. Für ein Dreieck mit den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ ist der Excess:

$$\varepsilon = \frac{\varrho}{2\, r^2}\, a\, b \sin\gamma \qquad (9)$$

und deswegen schreibt man für häufigeren Gebrauch die Logarithmen von $\frac{\varrho}{2\, r^2}$ tabellarisch heraus; zur Übersicht stellen wir zusammen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = 45° \quad log \frac{\varrho}{2\, r^2} &= 1.40411 - 10 \\ 50° \quad log \frac{\varrho}{2\, r^2} &= 1.40361 - 10 \\ 55° \quad log \frac{\varrho}{2\, r^2} &= 1.40312 - 10 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Zur weiteren Übersicht der Verhältnisse kann man auch berechnen:

Fläche des Dreiecks	Sphärischer Excess
1 Quadrat-Kilometer	$\varepsilon = 0{,}00507''$
1 Quadrat-Meile	$\varepsilon = 0{,}279$
gleichseitiges Dreieck mit Seiten von $1° = 15$ geogr. Meilen $= 111^{km}$	$\varepsilon = 27''$

Die letzte Annahme eines Dreiecks von 111^{km} Seite ist wohl das äusserste für Landes-Vermessungen; schon das Gauss sche Dreieck Inselsberg-Hohehagen-Brocken, das wir bei (8) als Beispiel benützten, mit rund $\varepsilon = 15''$, ist eines der grössten deutschen Dreiecke, das wir deswegen auch schon in der Zusammenstellung Seite 22 erwähnt haben.

Die grössten Dreiecke, welche die Geodäsie kennt, nämlich die auf Seite 23 dargestellten Verbindungsdreiecke zwischen Spanien und Algier über das mittelländische Meer hinweg, haben geodätische Excesse von bzw. rund: 54″ , 1′ 11″ , 44″ , 1′ 0″.

Bei so grossen Dreiecken darf man aber nicht mehr bloss sphärisch rechnen; wir werden in einem späteren Kapitel darauf zurückkommen.

§ 41. Der Legendre sche Satz.

Wir betrachten ein geodätisches Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ, wie in Fig. 1. dargestellt ist.

Fig. 1.
Sphärisches Dreieck.

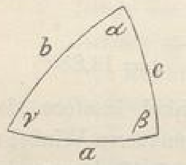
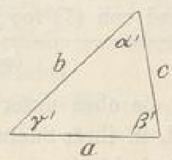


Fig. 2.
Ebenes Dreieck.



Wenn das sphärische Dreieck auf einer Kugel vom Halbmesser r liegt, so entsprechen den Seiten a b c gewisse Erd-Centriwinkel, wie aus folgender Übersicht zu ersehen ist:

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{Seiten-Längen (in Metermass)} \;.\;.\;.\;.\;. & a, & b, & c \\
\text{Erd-Centriwinkel in analytischem Mass} \;.\;. & \dfrac{a}{r}, & \dfrac{b}{r}, & \dfrac{c}{r} \\
\text{"} \quad \text{"} \quad \text{" geometrischem Mass} \;. & \dfrac{a}{r}\varrho, & \dfrac{b}{r}\varrho, & \dfrac{c}{r}\varrho
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Man könnte nun mit diesen Erd-Centriwinkeln und den Winkeln α, β, γ, welche die Bögen a, b, c auf der Kugelfläche unter sich bilden, das sphärische Dreieck nach den bekannten strengen Formeln der sphärischen Trigonometrie auflösen; man thut das aber für geodätische Zwecke nicht, weil die Erd-Centriwinkel sehr klein sind, und deswegen sich viel bequemer in Reihen-Entwicklungen und Näherungs-Formeln behandeln lassen.

Die älteste und beliebteste dieser Verfahrungsarten ist der von Legendre in Paris im Jahre 1787 gefundene und nach ihm benannte Satz, welcher heisst:

> Ein kleines sphärisches Dreieck kann näherungsweise wie ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten berechnet werden, wenn man als Winkel des ebenen Dreiecks die um je ein Drittel des sphärischen Excesses verminderten Winkel des sphärischen Dreiecks nimmt.

Diesem Satze entspricht das oben in Fig. 2. gezeichnete ebene Dreieck, das dieselben Seiten a, b, c wie das sphärische Dreieck Fig. 1. hat, und dessen Winkel α', β', γ' zunächst noch unbestimmt gelassen sind.

Um den genannten Satz zu beweisen, schreiben wir für das sphärische Dreieck die Cosinus-Gleichung an:

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha$$

$$\text{oder}\quad \cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

Nun werden alle kleinen Winkel nach Potenzen entwickelt (vgl. die Reihen-Formeln für $\sin x$ und $\cos x$ § 28. S. 172), nämlich bis zur 4. Potenz einschliesslich:

$$\cos\alpha = \frac{\left(1-\frac{a^2}{2r^2}+\frac{a^4}{24r^4}\right)-\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+\frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1-\frac{c^2}{2r^2}+\frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r}-\frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r}-\frac{c^3}{6r^3}\right)}$$

Wenn man die hier vorkommenden Klammern ausmultipliziert, dabei immer die Glieder von höherer als der 4. Ordnung vernachlässigt, so hat man:

$$\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+\frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1-\frac{c^2}{2r^2}+\frac{c^4}{24r^4}\right) = 1-\frac{b^2}{2r^2}+\frac{b^4}{24r^4}-\frac{c^2}{2r^2}+\frac{b^2c^2}{4r^4}+\frac{c^4}{24r^4}$$

$$= 1-\frac{b^2+c^2}{2r^2}+\frac{b^4+c^4}{24r^4}+\frac{b^2c^2}{4r^4}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2}+\frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4}-\frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)}$$

Der Nenner $\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$ wird hinreichend genähert dadurch berücksichtigt, dass man statt dessen in dem Zähler einen Faktor $\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$ zusetzt, und wenn man zugleich überall einen Faktor r^2 als gemeinsam weglässt, hat man:

$$\cos\alpha = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$$

die beiden Klammern multipliziert, mit Weglassung alles dessen, was über r^2 geht, führen auf die Gleichung:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\,\frac{b^2+c^2}{6r^2} \tag{2}$$

Nun giebt das ebene Dreieck Fig. 2. nach dem Cosinus-Satz:

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha' \quad\text{oder}\quad \cos\alpha' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \tag{3}$$

Dieses mit (2) zusammen giebt:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc}+\frac{b^4+c^4+2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}{12r^2bc}$$

Die beiden Teile zusammen gefasst geben:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24r^2bc} \tag{4}$$

Wir lassen diese Gleichung zunächst stehen und betrachten den Zähler des Bruches; dieser Zähler steht in naher Verwandtschaft zu dem Inhalte $\triangle$ des ebenen Dreiecks. Es ist bekanntlich nach dem Heron schen Satze:

$$\triangle = \sqrt{\frac{s}{2}\,\frac{(s-a)}{2}\,\frac{(s-b)}{2}\,\frac{(s-c)}{2}}$$

wobei $s = a + b + c$, $s - a = -a + b + c$ u. s. w. folglich:

$$\triangle^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

Hiebei ist: $(a+b+c)(-a+b+c) = -a^2+b^2+c^2+2\,b\,c$

und $(a-b+c)(+a+b-c) = a^2-b^2-c^2+2\,b\,c$

Folglich: $16\triangle^2 = (-a^2+b^2+c^2+2\,b\,c)(a^2-b^2-c^2+2\,b\,c)$

und indem man auch diese zwei Klammern ausmultipliziert und ordnet, (wobei alles mit ungeraden Potenzen sich hebt) so findet man:

$$16\triangle^2 = -a^4-b^4-c^4+2\,a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2 \tag{5}$$

Man hat also aus (4) und (5):

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -\frac{16\triangle^2}{24\,r^2\,b\,c} \tag{6}$$

Nun ist aber in erster Näherung:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -(\alpha-\alpha')\sin\alpha' + \ldots \tag{7}$$

was man entweder geradezu als Differential-Formel nach § 29. S. 179 einsehen, oder etwa auch goniometrisch so begründen kann:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -2\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}$$

d. h. wenn α und α' sehr nahe gleich sind:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -(\alpha-\alpha')\sin\alpha' \tag{7a}$$

Setzt man dieses (7) bzw. (7a) in (6), so erhält man:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3}\,\frac{\triangle^2}{r^2\,b\,c\sin\alpha'} \tag{8}$$

Es ist aber auch andererseits im ebenen Dreieck:

$$b\,c\sin\alpha' = 2\triangle \tag{9}$$

und damit wird (8): $\alpha - \alpha' = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\triangle}{r^2}$ bzw. $\alpha - \alpha' = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\triangle}{r^2}\,\varrho$ (10)

Die erste hier in (10) geschriebene Form gilt für analytisches Mass, die zweite für geometrisches Mass.

Oder wenn man nach (3) § 40. S. 232 den sphärischen Excess ε einführt, so hat man:

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{3}\,\varepsilon \tag{11a}$$

und entsprechend: $$\beta - \beta' - \frac{1}{3}\,\varepsilon \tag{11b}$$

$$\gamma - \gamma' = \frac{1}{3}\,\varepsilon \tag{11c}$$

Summe: $$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \varepsilon \tag{12}$$

Damit ist der oben S. 234 in Worten ausgesprochene Satz bewiesen.

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir wieder das klassische Dreieck, das wir schon im vorigen § 40. S. 232 benützt haben, nämlich nun mit scharfen Winkel-Werten:

	sphärisch	eben (Leg.-Satz.)	
Inselsberg	$\alpha = 40° \, 39' \, 30{,}380''$	$\alpha' = 40° \, 39' \, 25{,}430''$	
Hohehagen	$\beta = 86 \quad 13 \quad 58{,}840$	$\beta' = 86 \quad 13 \quad 53{,}890$	(13)
Brocken	$\gamma = 53 \quad 6 \quad 45{,}630$	$\gamma' = 53 \quad 6 \quad 40{,}680$	
Summe:	$180° \quad 0' \, 14{,}850''$	$180° \quad 0' \quad 0{,}000''$	

$$\varepsilon = 14{,}850''$$

$$\frac{\varepsilon}{3} = 4{,}950''$$

Die eine gegebene Seite sei $b = 105\,972{,}850^{\mathrm{m}}$. (14)

Damit macht man eine Berechnung, wie wenn das Dreieck eben wäre, nach dem Sinus-Satze der ebenen Trigonometrie scharf mit 7—8stelligen Logarithmen, weshalb wir die ganze Rechnung hersetzen wollen:

$\log b$	5.025 1946·1	oder	$Erg. \log b$	5.025 1946·1
$\log \sin \beta'$	9.999 0600·0		$Erg. \log \sin \beta'$	0.000 9400·0
$\log (b : \sin \beta')$	5.026 1346·1		$\log (b : \sin \beta')$	5.026 1346·1
$\log \sin \alpha'$	9.813 9344·8		$\log \sin \gamma'$	9.902 9830·6
$\log a$	4.840 0690·9		$\log c$	4.929 1176·7
$a = 69194{,}105^{\mathrm{m}}$			$c = 84941{,}060^{\mathrm{m}}$	(15)

Bemerkung über die Schärfe der Rechnung.

Das vorstehende Beispiel ist mit 3 Dezimalen der Sekunde, d. h. auf 0,001″ genau gerechnet. Es geschieht dieses häufig, wenn auch die Messungen selbst viel weniger sicher sind. Hiebei soll die letzte Dezimale keine selbständige Bedeutung haben, sondern nur die vorletzte Dezimale vor Abrundungs-Fehlern schützen. Es ist keine Frage, dass oft mit solchen 0,001″ Überfluss an Ziffern geschrieben und gedruckt wird, aber bei langen Ausgleichungs-Rechnungen kann man genötigt sein, von vorn herein auf 0,001″ genau und vielleicht noch schärfer zu rechnen, wenn man am Schlusse 0,01″ noch sicher haben will, bei kürzeren trigonometrischen Berechnungen genügt 0,01″ als letzte Rechenstelle.

Entsprechende Genauigkeit ist bei der logarithmischen Rechnung anzuwenden. Unsere Zahlen-Beispiele sind meist 8stellig, d. h. mit 0.000 0000·1 als letzter logarithmischer Rechenstelle geführt; die letzte Stelle 0·1 ist teils mit Hilfe des 10stelligen „Thesaurus logarithmorum", teils auch nur durch Benützung der Abrundungs-Merkmale in der Schrön schen 7 stelligen Logarithmen-Tafel erhalten, und dient dann (ebenso wie 0,001″ bei den Winkeln) nur als Sicherung für die vorhergehende 7. Stelle.

§ 42. Die Additamenten-Methode.

Ein zweites Näherungs-Verfahren zur Berechnung sphärischer Dreiecke, deren Seiten im Vergleich zu dem Kugel-Halbmesser klein sind, ist am Anfang dieses Jahrhunderts zuerst in Bayern eingeführt, und dann auch bei den übrigen süddeutschen Landes-Vermessungen allgemein angewendet worden. Das Verfahren wurde mit dem Namen „Additamenten-Methode" bezeichnet, weil kleine Korrektions-Grössen häufig zu den Logarithmen addiert (allerdings umgekehrt auch subtrahiert) werden.

Während beim Legendre schen Satz ein ebenes Hilfsdreieck benützt wurde, dessen Seiten denen des sphärischen Dreiecks gleich sind, und dessen Winkel verschieden von den Winkeln des sphärischen Dreiecks angenommen werden mussten gehen wir nun umgekehrt darauf aus, ein ebenes Hilfsdreieck zu suchen, welches zwei Winkel mit dem sphärischen Dreieck gemein, dafür aber andere Seiten hat. Mit Beziehung auf Fig. 1. und Fig. 2. denken wir uns ein sphärisches Dreieck, gegeben mit den Seiten a und b und den Gegenwinkeln α und β, und konstruieren hiezu ein ebenes Hilfsdreieck, welches dieselben Winkel α und β hat wie das sphärische Dreieck, aber damit notwendig andere Seiten a', b' haben muss.

Fig. 1. Sphärisch.

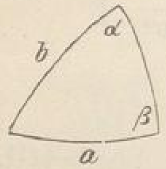
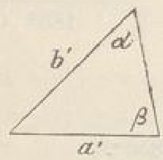


Fig. 2. Eben.



Nach dem Sinus-Satze für das sphärische Dreieck und nach dem Sinus-Satze für das ebene Dreieck haben wir die zwei Gleichungen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{b}{r}} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a'}{b'} \tag{1}$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\frac{a}{r} - \frac{a^3}{6r^3} + \cdots}{b - \frac{b^3}{6r^3} + \cdots} \tag{2}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a - \frac{a^3}{6r^2} + \cdots}{b - \frac{b^3}{6r^2} + \cdots} \tag{3}$$

Diese Gleichung ist befriedigt, wenn man setzt:

$$a' = a - \frac{a^3}{6r^2} \quad \text{und} \quad b' = b - \frac{b^3}{6r^2}$$

oder allgemein für irgend eine Dreiecks-Seite s hat man:

$$s' = s - \frac{s^3}{6r^2} \tag{4}$$

Der so bestimmte Wert $\frac{s^3}{6r^2}$ ist das lineare Additament für die Seite s, und wenn man den Halbmesser r kennt, kann man eine Tafel der Werte $\frac{s^3}{6r^2}$ berechnen, z. B. für die Mittelbreite $\varphi = 50°$ hat man:

$$\log r = 6.804\,894 \qquad \log\frac{1}{6r^2} = 5.612\,062$$

Damit ist zur Übersicht folgendes berechnet:

$$\left.\begin{array}{llllllllll} s & = 10\,000^m & 20\,000^m & 30\,000^m & 40\,000^m & 50\,000^m & 60\,000^m & 80\,000^m & 100\,000^m \\ \frac{s^3}{6r^2} & = \;\; 0{,}004^m & 0{,}033^m & 0{,}111^m & 0{,}262^m & 0{,}512^m & 0{,}884^m & 2{,}096^m & 4{,}093^m \end{array}\right\} \tag{5}$$

Wenn also z. B. eine Dreiecksseite $s = 40\,000^m$ vorliegt, so wird das zugehörige $s' = 40\,000 - 0{,}262 = 39\,999{,}738^m$, und darauf könnte man eine Dreiecks-Berechnung mit sphärischen Winkeln gründen, welche nun ganz die Form einer ebenen Rechnung hat.

Indessen thut man dieses in dieser Form gewöhnlich nicht geradezu, sondern da man doch logarithmisch rechnet, bringt man auch die Additamente in logarithmische Form, und dazu gehen wir nochmals auf (1) und (3) zurück und finden als allgemeine Beziehung zwischen einer Dreiecks-Seite s und der reduzierten Seite s' folgendes:

$$s' = r \sin \frac{s}{r}, \text{ oder } \frac{s'}{r} = \sin \frac{s}{r} \tag{6}$$

also logarithmisch:

$$\log \frac{s'}{r} = \log \sin \frac{s}{r} = \log \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6\, r^3} + \frac{s^5}{120\, r^5} - \dots \right) \tag{7}$$

Dabei haben wir noch die 5. Ordnung in der Reihe beibehalten, um nachher beurteilen zu können, ob das Glied 5. Ordnung noch von Einfluss ist.

Entwickelt man den letzten Ausdruck nach der logarithmischen Reihe, so erhält man:

$$\log \sin \frac{s}{r} = \log \frac{s}{r} + \log \left(1 - \frac{s^2}{6\, r^2} + \frac{s^4}{120\, r^4} \right)$$

$$\log \sin \frac{s}{r} = \log \frac{s}{r} + \mu \left(- \frac{s^2}{6\, r^2} + \frac{s^4}{120\, r^4} \right) - \frac{\mu}{2} \left(- \frac{s^2}{6\, r^2} + \dots \right)^2$$

$$\log \sin \frac{s}{r} = \log \frac{s}{r} - \frac{\mu\, s^2}{6\, r^2} - \frac{\mu}{180} \frac{s^4}{r^4}$$

Oder wenn man wieder s' nach (6) benützt:

$$\log s - \log s' = \frac{\mu\, s^2}{6\, r^2} + \frac{\mu}{180} \frac{s^4}{r^4} \tag{8}$$

Für die Mittelbreite $\varphi = 50°$ hat man hiefür, nach Seite [20] des Anhangs:

$$\log \frac{\mu}{6\, r^2} = 5.24985 - 20 \qquad \log \frac{\mu}{180\, r^4} = 0.16294 - 40$$

oder für Einheiten der 7. Logarithmen-Dezimale:

$$\log \frac{\mu}{6\, r^2} = 2{\cdot}24985 - 10 \qquad \log \frac{\mu}{180\, r^4} = 7{\cdot}16294 - 30$$

Für $s = 100\,000^m$ oder $\log s = 5.00000$ als Beispiel genommen, giebt dieses:

$$\frac{\mu}{6\, r^2} s^2 = 0.000\,0177{\cdot}8 \qquad \frac{\mu}{180\, r^4} s^4 = 0.000\,0000{\cdot}001$$

Daraus folgt, dass für gewöhnliche Dreiecks-Seiten das zweite Glied der Formel (8) unmerklich ist, und dass man deswegen bei dem ersten Gliede von (8) stehen bleiben kann.

Indem wir das logarithmische Additament mit A bezeichnen, schreiben wir mit Weglassung des zweiten Gliedes, zur Zusammenfassung:

$$A = \log s - \log s'$$

$$\text{oder } A = \log \frac{s}{r} - \log \sin \frac{s}{r} = \frac{\mu}{6\, r^2} s^2 \quad \text{wo } \log \frac{\mu}{6\, r^2} = 2{\cdot}249\,846 - 10 \text{ für } \varphi = 50° \tag{9}$$

Damit ist die Hilfstafel auf Seite [43] des Anhangs berechnet, und zwar in zweifacher Form, I. als Funktion von $\log s$, mit der Annahme $\log r = 6.804\,894$ für $\varphi = 50°$ und II. als Funktion von $\log \frac{s}{r}$.

Die erste Tafel I., d. h. der obere Teil von Seite [43], ist die bequemere für

Dreiecks-Berechnung, weil man geradezu mit $log\ s$ (für s in Metern) einzugehen hat, während man im Falle II., d. h. im unteren Teile von Seite [43], zuvor $log \frac{s}{r}$ bilden muss, das man sonst nicht braucht. Die Tafel II. ist aber andererseits allgemeiner brauchbar, weil sie nicht wie I. an eine bestimmte Annahme für den Halbmesser r gebunden ist, und weil sie auch noch für anderes Mass als Meter (z. B. Fusse, Toisen, Ruten u. s. w. bei älteren Triangulierungen) anwendbar ist.

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir wieder das klassische Dreieck des vorigen § 41. S. 237:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Inselsberg} & \alpha = 40° \; 39' \; 30{,}380'' \\ \text{Hohehagen} & \beta = 86 \;\; 13 \;\; 58{,}840 \\ \text{Brocken} & \gamma = 53 \;\;\; 6 \;\; 45{,}630 \\ \hline & \quad 180° \;\; 0' \; 14{,}850'' \end{array}\right\} \qquad (10)$$

$$\text{Basis } b = 105\,972{,}850^{m} \qquad log\, b = 5.025\,1946{\cdot}1 \qquad (11)$$

Hiezu braucht man das logarithmische Additament, das aus der Hilfstafel I. von Seite [43] des Anhangs für $log\, s = 5.0252$ durch Interpolation $= 199{\cdot}7$ entnommen werden kann. Da jedoch jene Hilfstafel I. Seite [43] für die Mittelbreite $\varphi = 50°$ gilt, während unser Dreieck die Mittelbreite $\varphi = 51°\, 22{,}6'$ hat, mit $log\, r = 6.804962$. und da unsere Dreiecks-Seiten sehr gross sind, so berechnen wir diesesmal das Additament A besonders:

$$\begin{array}{r|l} log\, b^2 & 10.05039 \\ log\,(\mu : 6\, r^2) & 2{\cdot}24971 \\ \hline log\, A_b & 2.30010 \qquad A_b = 199{\cdot}57 \end{array} \qquad (12)$$

Dieses ist nur wenig verschieden von dem aus der Tafel entnommenen 199·7.

Nun hat man eine logarithmische Berechnung im wesentlichen wie in der Ebene, nämlich nach (10), (11), (12):

$log\, b$	5.025 1946·1			
Logar. Additament	— 199·6			
$log\, b'$	5.025 1746·5		$log\, b'$	5.025 1746·5
$log\, sin\, \beta$	9.999 0606·9	oder	$Erg.\, log\, sin\, \beta$	0.000 9393·1
$log\,(b' : sin\, \beta)$	5.026 1139·6			5.026 1139·6
$log\, sin\, \alpha$	9.813 9466·1		$log\, sin\, \gamma$	9.902 9908·8
$log\, a'$	4.840 0605·7		$log\, b'$	4.929 1048·4
Logar. Additament	+ 85·1		Logar. Add.	+ 128·2 (13)
$log\, a$	4.840 0690·8		$log\, c$	4.929 1176·6

$$a = 69\,194{,}105^{m} \qquad b = 84\,941{,}060^{m} \qquad (14)$$

Dieses stimmt hinreichend mit (15) § 41. S. 237.

Die soeben bei (13) gebrauchten Additamente entnimmt man wieder aus der Hilfstafel I. von Seite [43] des Anhangs, oder, wenn man die letzte Stelle ganz scharf haben will, berechnet man dieselben ebenso wie vorher bei (12).

Vergleicht man die Rechnung nach dieser Additamenten-Methode mit der Rechnung nach dem Legendre schen Satze, in Hinsicht auf Bequemlichkeit, Übersichtlichkeit u. dergl., so wird man etwa sagen können:

Der Legendre sche Satz empfiehlt sich bei einem einzelnen Dreieck oder bei seltener Anwendung, durch seine Unabhängigkeit von allen besonderen Hilfen, denn den Excess ε muss man der Winkelprobe wegen bei dem anderen Verfahren doch auch kennen, und der Legendre sche Satz selbst, d. h. die Verteilung $\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}$ ist immer im Gedächtnis.

Dagegen bei ganzen Dreiecks-Netzen, mit vielen zusammenhängend zu rechnenden Dreiecken, ist die Additamenten-Methode vorteilhafter. Man reduziert zunächst nur den Logarithmus der Basis des Netzes ($log\, b' = log\, b - A_b$), dann rechnet man das ganze Dreiecks-Netz mit den sphärischen Winkeln durch, und erhält dadurch zunächst lauter reduzierte Werte $log\, a'$, $log\, c'$ u. s. w., die man dann aber nachher alle auf einmal mit der Additamenten-Tafel auf $log\, a$, $log\, c$ u. s. w. reduzieren kann.

Ein Vorteil des Additamenten-Verfahrens besteht auch darin, dass man nur eine Tabelle der Dreiecks-Winkel α, β, γ ... führen muss, während für den Legendre schen Satz eine zweite Tabelle der α', β', γ' nötig ist, welche nicht nur die Akten vermehrt, sondern auch Veranlassung zu Irrtümern geben kann, wenn nachher zur Coordinaten-Berechnung u. dergl. wieder die sphärischen Winkel selbst gebraucht werden.

Zusammenhang zwischen dem Legendre schen Satze und der Additamenten-Methode.

Diese beiden Rechnungs-Arten beruhen auf Reihen-Entwicklungen sphärischer Formeln bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, und es muss deshalb möglich sein, beide Rechnungen in ihren Formeln gegenseitig auseinander abzuleiten, was wir nun noch zeigen wollen.

Mit Annahme der bisherigen Bezeichnungen hat man nach dem Legendre schen Satze:

$$\frac{a}{b}=\frac{sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{sin\left(\beta-\frac{\varepsilon}{3}\right)}=\frac{sin\,\alpha-\frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha}{sin\,\beta-\frac{\varepsilon}{3}\cos\beta}=\frac{sin\,\alpha\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\alpha\right)}{sin\,\beta\left(1-\frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\beta\right)} \tag{15}$$

Nun ist $\varepsilon=\frac{\triangle}{r^2}$, und wenn man in den Korrektions-Gliedern ebene und sphärische Winkel vertauscht, so hat man:

$$2\,b\,c\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$$

$$b\,c\,sin\,\alpha=2\triangle$$

also
$$cotg\,\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\triangle}\quad,\quad\frac{\varepsilon}{3}=\frac{\triangle}{3\,r^2} \tag{16}$$

$$\frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{12\,r^2}\quad\text{und}\quad\frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{12\,r^2}$$

Damit giebt (15):

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta}=\frac{a}{b}\,\frac{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{12\,r^2}\right)}{\left(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{12\,r^2}\right)}=\frac{a}{b}\left(1+\frac{1}{12\,r^2}(2\,b^2-2\,a^2)\right)$$

Dieses kann man auch so schreiben:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{a^2}{6\,r^2}\right)\left(1 + \frac{b^2}{6\,r^2}\right) = \frac{a}{b}\,\frac{1 - \dfrac{a^2}{6\,r^2}}{1 - \dfrac{b^2}{6\,r^2}}$$

Dieses stimmt nach (1), (3) § 42. S. 238 mit der Additamenten-Methode überein; es ist also der oben angegebene Zusammenhang bewiesen.

Die „Additamenten-Methode" wurde in Bayern eingeführt durch Soldner. Weiteres hierüber findet man in dem amtlichen Werke: „Die Bayerische Landes-Vermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage. München 1873, S. 263 u. ff. (auf S. 262 u. ff. Abdruck einer Abhandlung Soldner, vom 5. Mai 1810). Vgl. auch: Bohnenberger, „De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis". Tubingae 1826, § 11.

Ausführlichere Additamenten-Tafeln als unsere Tafel Seite [43] finden sich in manchen geodätischen Werken, z. B. in:

Bremiker, Studien über höhere Geodäsie, Berlin 1869. Anhang Tafel III., Reduktion von Bogen auf Sehne, d. h. 0,25 A, wenn A der Wert unserer Tafel II. Seite [43].

Bremiker, Tafel zur Verwandlung von Log. Bogen in Log. Tangente. Wissenschaftliche Begründung der Rechnungs-Methoden des Centralbureaus der Europäischen Gradmessung. Beilage zum Generalbericht d. Europ. Gr. für 1870 (giebt $T = 2\,A$).

Auch die Zahlen S, welche in der Bremiker schen und Schrön schen 7-stelligen Logarithmentafel und auch in anderen Tafeln am Fuss jeder Seite der Logarithmen der natürlichen Zahlen angegeben sind, stehen in einfacher Beziehung zu unseren Additamenten. Es ist nämlich dieses S:

$$S = \log\frac{1}{\varrho''} - A = \log\sin 1'' - A$$

z. B. in Schrön S. 29 findet man für 0° 36′ 0″ $S = 4.685\,5669{\cdot}3$. Dabei ist $\log\,(1:\varrho) = 4.685\,5748{\cdot}7$ und unsere Tafel II. auf Seite [43] giebt für den Centriwinkel 0° 36′ 0″ den Wert $A = 79{\cdot}4$, was die Differenz der beiden soeben geschriebenen Zahlen ist. Für die Zahlen T der Logarithmentafeln gilt die entsprechende Gleichung:

$$T = \log\frac{1}{\varrho''} + 2\,A = \log\sin 1'' + 2\,A$$

§ 43. Verschiedene sphärische Aufgaben.

Nachdem wir die Reduktion eines sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Hilfsdreieck in zweifacher Weise kennen gelernt haben, können wir auch andere Aufgaben als die zuerst behandelte Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite und allen Winkeln lösen. Wir wollen hier noch die Bestimmung eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel und dann die sphärische Aufgabe des Rückwärts-Einschneidens vornehmen:

I. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach dem Legendreschen Satz.

Wenn zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α gegeben sind, so kann man daraus sofort den Excess ε berechnen:

$$\varepsilon = b\,c\sin\alpha\,\frac{\varrho}{2\,r^2} \tag{1}$$

Damit hat man auch die Summe der beiden andern Winkel β und γ:

$$\beta + \gamma = 180° + \varepsilon - \alpha \tag{2}$$

Betrachtet man nun das Legendre sche ebene Hilfsdreieck und berücksichtigt, dass:

$$\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \beta - \gamma$$

so findet man nach den Gauss schen Gleichungen der ebenen Trigonometrie:

$$tang \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(b - c) \cos \frac{\alpha - 1/_3\,\varepsilon}{2}}{(b + c) \sin \frac{\alpha - 1/_3\,\varepsilon}{2}} = \frac{Z}{N} \tag{3}$$

$$a = \frac{Z}{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \tag{4}$$

Aus (2) und (4) hat man also $\beta + \gamma$ und $\beta - \gamma$, folglich auch β und γ und mit Probe a aus (4), womit die Aufgabe gelöst ist.

II. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach der Additamenten-Methode.

Wenn b und c logarithmisch gegeben sind, so ist folgende Rechnung bequemer als die vorige:

Für ein ebenes Dreieck mit den Seiten b' und c' und den Winkeln β und γ hat man, mit Einführung eines Hilfswinkels λ folgendes:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b'}{c'} = \frac{1}{tang \lambda}$$

$$\frac{\sin \beta - \sin \gamma}{\sin \beta + \sin \gamma} = \frac{1 - tang \lambda}{1 + tang \lambda}$$

$$tang \frac{\beta - \gamma}{2} = tang \frac{\beta + \gamma}{2} \, cotg \, (\lambda + 45^\circ)$$

Für das sphärische Dreieck setzen wir entsprechend:

$$\log b' = \log b - A_b \quad , \quad \log c' = \log c - A_c$$

wobei A_b und A_c die Additamente von b und c sind. Man rechnet nun den Hilfswinkel λ nach der Formel:

$$cotg \, \lambda = \frac{b'}{c'} \tag{5}$$

dann bestimmt man den sphärischen Excess ε durch eine vorläufige Dreiecks-Berechnung, und hat dann:

$$\beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon - \alpha$$

$$tang \frac{\beta - \gamma}{2} = tang \frac{\beta + \gamma}{2} \, cotg \, (\lambda + 45^\circ) \tag{6}$$

Aus $\frac{\beta + \gamma}{2}$ und $\frac{\beta - \gamma}{2}$ erhält man β und γ.

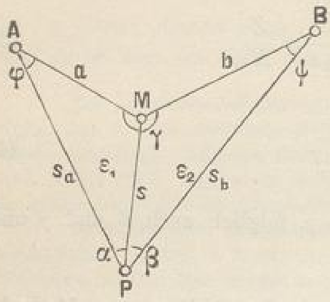
Die dritte Seite a kann man sodann sowohl nach dem Legendre schen Satz als auch nach der Additamenten-Methode bestimmen.

III. Rückwärts-Einschneiden.

Wir nehmen in Fig. 1. S. 244 dieselben Berechnungen wie früher für die ebenes Rückwärts-Einschneiden in Band II, 4. Aufl. 1893, § 89. und wir haben auch nur wenig an der früheren Rechnung zu ändern.

Drei Punkte A, M, B sind gegenseitig festgelegt durch die Seiten $AM = a$, $MB = b$ und den Winkel $BMA = \gamma$; ein Punkt P soll durch Messung der Winkel α und β gegen A, M, B festgelegt werden.

Fig. 1.



Man löst diese Aufgabe zunächst vorläufig genähert auf, indem man die Figur als eben behandelt (d. h. man rechnet zuerst nach Band II, 4. Aufl. 1893, § 89). Dann hat man so viel Anhalt, um die sphärischen Excesse ε_1 und ε_2 der beiden Dreiecke PAM und PMB zu berechnen, und damit ist auch die Summe $\varphi + \varphi$ bestimmt, nämlich:

$$\varphi + \psi = 360^\circ + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (7)$$

Mit den logarithmischen Additamenten A_a und A_b wird reduziert:

$$\log a - A_a = \log a' \quad \text{und} \quad \log b - A_b = \log b'$$

dann lässt sich die Rechnung wie für ein ebenes Viereck weiterführen; man setzt:

$$\frac{a'}{\sin\alpha} : \frac{b'}{\sin\beta} = \tang\lambda$$

und findet:

$$\tang\frac{\varphi - \psi}{2} = \tang\frac{\varphi + \psi}{2}\,\cotg(\lambda + 45^\circ) \qquad (8)$$

Nachdem somit durch (7) und (8) die beiden Winkel φ und ψ bestimmt sind, können alle Dreiecks-Seiten nach dem Legendre schen Satze oder nach der Additamenten-Methode weiter berechnet werden.

Diese 3 Aufgaben mögen genügen, um zu zeigen, dass man mit dem Legendre schen Satz und mit der Additamenten-Methode nahezu alles berechnen kann, was in der ebenen Trigonometrie berechnet zu werden pflegt. Die sphärischen Rechnungen dieser Art spielen aber keine wichtige Rolle.

§ 44. Sphärisch-trigonometrische Reihen-Entwicklungen bis zur Ordnung $\frac{1}{r^4}$ einschliesslich.

Der Legendre sche Satz und die Additamenten-Methode beruhen auf sphärisch-trigonometrischen Reihen-Entwicklungen, die wir beim Legendre schen Satze nur bis auf Glieder von der Ordnung $1 : r^2$ einschliesslich genau im Schluss-Ergebnis behandelt haben. Bei der Additamenten-Methode haben wir in (8) § 42. S. 239 noch ein Glied von der Ordnung $1 : r^4$ hinzugenommen, weil sich das ohne besondere Mühe nebenbei ergab; und es hat sich gezeigt, dass dieses höhere Glied bei den praktischen Berechnungen mit Dreiecks-Seiten bis 100 000^m und darüber unmerklich ist.

Obgleich dadurch die Wahrscheinlichkeit nahe gelegt wird, dass auch in den übrigen verwandten Entwicklungen die Glieder von der Ordnung $1 : r^2$ genügen, müssen wir doch, um ein sicheres Urteil zu haben, die höheren Glieder kennen lernen.

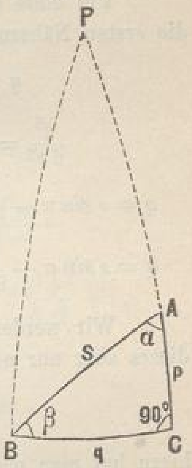
Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, dass eine sehr weit und fein geführte *sphärische* Berechnung für die Geodäsie zunächst wenig Wert hat, solange die sphärische Berechnungs-Art überhaupt nicht strenger begründet wird als dieses in unserem § 38.

S. 226—227 geschehen ist; denn ausser den höheren Gliedern von der Ordnung $1 : r^4$ sollte man auch den Einfluss der Ungleichheit der Krümmungen nach verschiedenen Richtungen und die von der geographischen Breite abhängigen Änderungen der Krümmungen untersuchen.

Dieses können wir erst später thun, und wenn wir jetzt die höheren Glieder von der Ordnung $1 : r^4$ untersuchen, so hat das zunächst den Sinn, dass wir uns überzeugen, ob die Entwicklungen bis $1 : r^2$ einschliesslich, hinreichend sind, um die *geschlossenen* sphärischen Formeln, welche man ja auch anwenden könnte, zu ersetzen, und zweitens sollen durch die nachfolgenden Entwicklungen unsere späteren Entwicklungen mit der geodätischen Linie zweckmässig vorbereitet werden.

Beim ersten Studium der höheren Geodäsie im Sinne des Verständnisses unserer heutigen Landes-Vermessungen wird man den hier folgenden § 44. zunächst ganz übergehen und erst viel später nach Bedürfnis nachholen.

Fig. 1.



I. Der sphärische Excess.

Wir betrachten in Fig. 1. das rechtwinklige sphärische Dreieck ABC mit der Hypotenuse s, mit den Katheten p und q und mit den Winkeln $90°$, β und α. Da einer der Winkel $= 90°$ ist, ist der sphärische Excess:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + 90° - 180°$$

oder

$$\varepsilon = \alpha + \beta - 90° \tag{1}$$

Dieses rechtwinklige Dreieck Fig. 1. giebt:

$$cotg\, \alpha\, cotg\, \beta = cos \frac{s}{r}$$

$$\text{oder} \quad = 1 - 2\, sin^2 \frac{s}{2r}$$

$$\text{also} \quad 2\, sin^2 \frac{s}{2r} = 1 - cotg\, \alpha\, cotg\, \beta = \frac{sin\, \alpha\, sin\, \beta - cos\, \alpha\, cos\, \beta}{sin\, \alpha\, sin\, \beta}$$

$$2\, sin^2 \frac{s}{2r} = -\frac{cos\,(\alpha + \beta)}{sin\, \alpha\, sin\, \beta} = \frac{sin\, \varepsilon}{sin\, \alpha\, sin\, \beta} = \frac{sin\, \varepsilon\, sin^2 \frac{s}{r}}{sin \frac{p}{r}\, sin \frac{q}{r}}$$

$$sin\, \varepsilon = \frac{sin \frac{p}{r}\, sin \frac{q}{r}}{2\, cos^2 \frac{s}{2}} \tag{2}$$

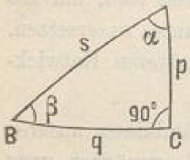
Dieses bis $\frac{1}{r^4}$ entwickelt giebt:

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{p}{r} - \frac{p^3}{6\,r^3}\right)\left(\frac{q}{r} - \frac{q^3}{6\,r^3}\right)}{2\left(1 - \frac{s^2}{8\,r^2}\right)^2} = \left(\frac{p\,q}{2\,r^2} - \frac{p\,q\,(p^2 + q^2)}{12\,r^4}\right)\left(1 + \frac{s^2}{4\,r^2}\right)$$

Da man aber in den höheren Gliedern $s^2 = p^2 + q^2$ setzen darf, so giebt dieses alsbald:

$$\varepsilon = \frac{p\,q}{2\,r^2} + \frac{p\,q}{24\,r^4}(p^2 + q^2) \tag{3}$$

Fig. 2.



II. Die Katheten-Formeln.

Das rechtwinklige sphärische Dreieck Fig. 2. giebt nach § 27. S. 163:

$$sin\,\frac{q}{r} = sin\,\frac{s}{r}\,sin\,\alpha \quad , \quad tang\,\frac{p}{r} = tang\,\frac{s}{r}\,cos\,\alpha \tag{4}$$

oder entwickelt:

$$q - \frac{q^3}{6\,r^2} = \left(s - \frac{s^3}{6\,r^2}\right) sin\,\alpha \quad , \quad p + \frac{p^3}{3\,r^2} = \left(s + \frac{s^3}{3\,r^2}\right) cos\,\alpha \tag{5}$$

Um diese Gleichungen nach q bzw. nach p aufzulösen, benützt man zunächst die ersten Näherungen:

$$q = s\,sin\,\alpha + \frac{1}{r^2}\ldots \qquad\qquad p = s\,cos\,\alpha + \frac{1}{r^2}\ldots$$

$$\frac{q^3}{6\,r^2} = \frac{s^3\,sin^3\,\alpha}{6\,r^2} + \frac{1}{r^4}\ldots \qquad\qquad \frac{p^3}{3\,r^2} = \frac{s^3\,cos^3\,\alpha}{3\,r^2} + \frac{1}{r^4}\ldots$$

$$q = s\,sin\,\alpha - \frac{s^3}{6\,r^2}\,sin\,\alpha + \frac{s^3}{6\,r^2}\,sin^3\,\alpha \qquad\qquad p = s\,cos\,\alpha + \frac{s^3}{3\,r^2}\,cos\,\alpha - \frac{s^3}{3\,r^2}\,cos^3\,\alpha$$

$$q = s\,sin\,\alpha - \frac{s^3}{6\,r^2}\,sin\,\alpha\,cos^2\,\alpha \qquad\qquad p = s\,cos\,\alpha + \frac{s^3}{3\,r^2}\,sin^2\,\alpha\,cos\,\alpha \tag{6}$$

Wir werden diese Entwicklungen noch um ein Glied weiter treiben, wollen dieses aber nur noch an der Formel für q ausführlich zeigen. Statt (5) hat man dann:

$$q - \frac{q^3}{6\,r^2} + \frac{q^5}{120\,r^4} = \left(s - \frac{s^3}{6\,r^2} + \frac{s^5}{120\,r^4}\right) sin\,\alpha \tag{7}$$

hiezu hat man nach (6):

$$q^3 = s^3\,sin^3\,\alpha - \frac{3}{6}\,\frac{s^5}{r^2}\,sin^3\,\alpha\,cos^2\,\alpha + \ldots$$

$$q^5 = s^5\,sin^5\,\alpha + \ldots$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke für q^3 und q^5 in (7) einsetzt, so bekommt man:

$$\begin{aligned} q = s\,sin\,\alpha &- \frac{s^3}{6\,r^2}\,sin\,\alpha + \frac{s^5}{120\,r^4}\,sin\,\alpha \\ &+ \frac{s^3}{6\,r^2}\,sin^3\,\alpha - \frac{s^5}{12\,r^4}\,sin^3\,\alpha\,cos^2\,\alpha \\ &- \frac{s^5}{120\,r^4}\,sin^5\,\alpha \end{aligned}$$

Wenn man dieses ordnet und berücksichtigt, dass:

$$s^4 = s^4\,(sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha)^2$$

so findet man:

$$q = s\,sin\,\alpha - \frac{s^3}{6\,r^2}\,sin\,\alpha\,cos^2\,\alpha - \frac{s^5}{120\,r^4}\,sin\,\alpha\,cos^2\,\alpha\,(8\,sin^2\,\alpha - cos^2\,\alpha) \tag{8}$$

Dieses ist die Weiterentwicklung der ersten Formel der Gruppe (6); die Weiterentwicklung der zweiten Formel der Gruppe (6) wird ebenso gemacht und giebt:

$$p = s \cos \alpha + \frac{s^3}{3 r^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{s^5}{15 r^4} \sin^2 \alpha \cos \alpha \,(2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \tag{9}$$

Umkehrung der Reihen (8) und (9).

Man kann die Reihen (8) und (9) auch umkehren, d. h. man kann $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ in Potenzen von q und p ausdrücken. (Man könnte hiezu das allgemeine Verfahren anwenden, das wir in § 29. S. 180—181 angedeutet haben; wir ziehen es aber hier vor, ohne alle Vorbereitungs-Hilfsmittel zu verfahren.)

Jedenfalls hat man in erster Näherung aus (8) und (9):

$$s \sin \alpha = q + \ldots \qquad\qquad s \cos \alpha = p + \ldots$$

folglich sofort in zweiter Näherung aus (8) und (9):

$$s \sin \alpha = q + \frac{q\, p^2}{6 r^2} + \ldots \qquad\qquad s \cos \alpha = p - \frac{q^2\, p}{3 r^2} + \ldots$$

folglich zum Einsetzen in die höheren Glieder von (8) und (9):

$$s^2 \sin^2 \alpha = q^2 + \frac{q^2\, p^2}{3 r^2} + \ldots \qquad\qquad s^2 \cos^2 \alpha = p^2 - 2 \frac{q^2\, p^2}{3 r^2} + \ldots$$

$$s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \left(q^2 + \frac{q^2\, p^2}{3 r^2}\right)\left(p - \frac{q^2\, p}{3 r^2}\right) = q^2\, p + \frac{q^2\, p^3}{3 r^2} - \frac{q^4\, p}{3 r^2} + \ldots$$

$$s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \left(q + \frac{q\, p^2}{6 r^2}\right)\left(p^2 - 2\frac{q^2\, p^2}{3 r^2}\right) = q\, p^2 + \frac{q\, p^4}{6 r^2} - 2 \frac{q^3\, p^2}{3 r^2} + \ldots$$

Setzt man dieses in (8), so bekommt man:

$$s \sin \alpha = q + \frac{q\, p^2}{6 r^2} + \frac{q\, p^4}{36 r^4} - \frac{q^3\, p^2}{9 r^4} - \frac{1}{120 r^4}(q\, p^4 - 8\, q^3\, p^2) + \ldots$$

Dieses giebt geordnet:

$$s \sin \alpha = q + \frac{q\, p^2}{6 r^2} - \frac{q\, p^2}{360 r^4}(16\, q^2 - 7\, p^2) \tag{10}$$

und auf gleiche Weise bekommt man aus (9):

$$s \cos \alpha = p - \frac{q^2\, p}{3 r^2} - \frac{q^2\, p}{45 r^4}(q^2 + 2\, p^2) \tag{11}$$

III. Die Hypotenusen-Formel.

Aus den soeben gewonnenen Formeln (10) und (11) kann man auch eine Formel für s^2 herstellen, indem man $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ quadriert und addiert. Wenn man dabei die höheren Glieder wie bisher vernachlässigt, so bekommt man:

$$s^2 \sin^2 \alpha = q^2 + \frac{q^2\, p^4}{36 r^4} + \frac{q^2\, p^2}{3 r^2} + \frac{q^2\, p^2}{180 r^4}(-16\, q^2 + 7\, p^2)$$

$$s^2 \cos^2 \alpha = p^2 + \frac{q^4\, p^2}{9 r^4} - 2 \frac{q^2\, p^2}{3 r^2} - 2 \frac{q^2\, p^2}{45 r^4}(q^2 + 2\, p^2)$$

Wenn man dieses zusammennimmt und ordnet, so findet man:

$$s^2 = q^2 + p^2 - \frac{q^2\,p^2}{3\,r^2} - \frac{q^2\,p^2\,(q^2+p^2)}{45\,r^4} \tag{12}$$

Man kann diese Formel auch unmittelbar finden durch Entwicklung von

$$\cos\frac{s}{r} = \cos\frac{q}{r}\cos\frac{p}{r}.$$

IV. *Der erweiterte Legendre sche Satz.*

Nach Andeutung von Fig. 4. verbinden wir zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke zu einem allgemeinen sphärischen Dreieck $A\,B\,C$, indem die beiden Katheten q und q' nun die Seite $C\,B = a$ bilden, zu welcher die gemeinschaftliche Kathete p als Höhe gehört.

Fig. 4.

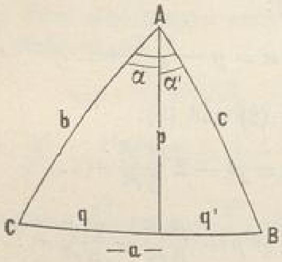
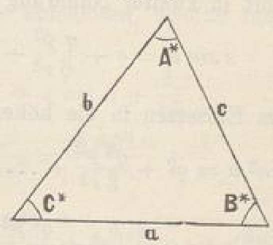


Fig. 5.



Die Winkel A^*, B^*, C^* des ebenen Dreiecks, Fig. 5., deren Summe $A^*+B^*+C^* = 180°$ ist, entsprechen den Winkeln α', β', γ' in der früheren Fig. 2. § 41. S. 234.

Der Dreiecks-Winkel A setzt sich nun aus den beiden Winkeln α und α' der beiden rechtwinkligen Dreiecke so zusammen:

$$A = \alpha + \alpha', \quad \text{also} \quad \cos A = \cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' \tag{13}$$

Nun hat man nach (11):

$$b\cos\alpha = p - \frac{p\,q^2}{3\,r^2} - \frac{p\,q^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q^2) \tag{14}$$

$$c\cos\alpha' = p - \frac{p\,q'^2}{3\,r^2} - \frac{p\,q'^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q'^2) \tag{15}$$

$$b\sin\alpha = q + \frac{p^2\,q}{6\,r^2} + \frac{p^2\,q}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q^2) \tag{16}$$

$$c\sin\alpha' = q' + \frac{p^2\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^2\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q'^2) \tag{17}$$

Wenn man (14) und (15) multipliziert, dabei die höheren Glieder vernachlässigt, und dann nach gleichen Potenzen ordnet, so bekommt man:

$$\begin{aligned} b\,c\cos\alpha\cos\alpha' = p^2 &- \frac{p^2\,q^2}{3\,r^2} - \frac{p^2\,q^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q^2) \\ &- \frac{p^2\,q'^2}{3\,r^2} + \frac{p^2\,q^2\,q'^2}{9\,r^4} \\ &- \frac{p^2\,q'^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q'^2) \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise findet man auch aus (16) und (17):

$$\begin{aligned} b\,c \sin\alpha \sin\alpha' = q\,q' &+ \frac{p^2 q\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^2 q\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q^2) \\ &+ \frac{p^2 q\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^4 q\,q'}{36\,r^4} \\ &+ \frac{p^2 q\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q'^2) \end{aligned}$$

Diese beiden Ausdrücke zusammen geben:

$$b\,c(\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha') = b\,c\cos(\alpha+\alpha') = b\,c\cos A = p^2 - q\,q' - \frac{p^2}{3\,r^2}(q^2 + q'^2 + q\,q')$$

$$-\frac{p^2}{360\,r^4}(16 p^2 q^2 + 16 p^2 q'^2 + 24 p^2 q\,q' + 8\,q^4 + 8\,q'^4 - 40\,q^2 q'^2 - 16\,q^3 q' - 16\,q'^3 q) \quad (18)$$

Nun hat man nach der Hypotenusen-Formel (12):

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= p^2 + q^2 - \frac{p^2 q^2}{3\,r^2} - \frac{p^2 q^2}{45\,r^4}(p^2 + q^2) \\ c^2 &= p^2 + q'^2 - \frac{p^2 q'^2}{3\,r^2} - \frac{p^2 q'^2}{45\,r^4}(p^2 + q'^2) \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

und unmittelbar $\qquad a^2 = (q + q')^2 = q^2 + 2\,q\,q' + q'^2 \qquad (20)$

Zugleich wird in Fig. 5. ein *ebenes* Dreieck eingeführt, dessen Seiten a, b, c gleich sind den Seiten des sphärischen Dreiecks, und dessen Winkel A^*, B^*, C^* bestimmt werden sollen. Für das ebene Dreieck hat man bekanntlich die Gleichung:

$$2\,b\,c\cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$$

und wenn man hier die Werte (19) und (20) einsetzt, so bekommt man:

$$b\,c\cos A^* = p^2 - q\,q' - \frac{p^2}{6\,r^2}(q^2 + q'^2) - \frac{p^2}{90\,r^4}(p^2 q^2 + p^2 q'^2 + q^4 + q'^4) \quad (21)$$

Dieses (21) wird mit dem früheren (18) verglichen, wodurch man nach einiger algebraischer Umformung finden wird:

$$b\,c(\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2}{6\,r^2}(q + q')^2 + \frac{p^2 (q + q')^2}{90\,r^4}(3\,p^2 + (q + q')^2 - 8\,q\,q') \quad (22)$$

Das hier vorkommende Produkt $p\,(q + q')$ steht in naher Beziehung zu $b\,c \sin A$, denn wir haben aus (16) und (15) mit Weglassung der letzten Glieder:

$$b\,c \sin\alpha \cos\alpha' = p\,q + \frac{p^3 q}{3\,r^2} - \frac{p\,q\,q'^2}{3\,r^2}$$

Entsprechend geben auch (14) und (17):

$$b\,c \cos\alpha \sin\alpha' = p\,q' + \frac{p^3 q'}{6\,r^2} - \frac{p\,q^2 q'}{3\,r^2}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen giebt:

$$b\,c(\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha') = b\,c\sin A = p\,(q + q') + \frac{p\,(q + q')}{6\,r^2}(p^2 - 2\,q\,q')$$

also: $$p\,(q + q') = b\,c\sin A\left(1 - \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - 2\,q\,q')\right) \quad (23)$$

Das Ziel dieser Entwicklung ist die kleine Winkel-Differenz zwischen A und A^*, und wir wollen deshalb setzen:

$$A - A^* = x \quad (24)$$

folglich in erster Näherung:

$$\cos A = \cos(A^* + x) = \cos A^* - x \sin A^* + \ldots \tag{25}$$

Setzt man dem entsprechend $\cos A^* - \cos A = x \sin A^*$ in (22), und berücksichtigt (23) genähert, mit $A = A^*$, so erhält man:

$$x = \frac{p}{6\,r^2}(q + q') \tag{26}$$

Damit entwickelt man eine zweite Annäherung:

$$A = A^* + \frac{p}{6\,r^2}(q + q') \quad , \quad \sin A = \sin A^* + \frac{p}{6\,r^2}(q + q')\cos A^* + \ldots$$

$$\sin A = \sin A^* \left(1 + \frac{p}{6\,r^2}(q + q')\operatorname{cotg} A^*\right) \tag{26 a}$$

oder mit Ersetzung von $\operatorname{cotg} A^*$ aus (21) und (23) genähert:

$$\operatorname{cotg} A^* = \frac{p^2 - q\,q'}{p\,(q + q')}$$

Dieses in (26 a) gesetzt giebt:

$$\sin A = \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - q\,q')\right) \tag{27}$$

Damit kann man in (23) die Funktion $\sin A$ durch $\sin A^*$ ersetzen, und dadurch bekommt man:

$$p\,(q + q') = b\,c \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - q\,q') - \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - 2\,q\,q')\right)$$

$$p\,(q + q') = b\,c \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}\,q\,q'\right) = 2 \triangle \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}\,q\,q'\right) \tag{28}$$

Hier haben wir die Fläche $\triangle$ des ebenen Dreiecks eingeführt, nämlich:

$$\frac{b\,c \sin A^*}{2} = \triangle \tag{29}$$

Nun gehen wir zum zweiten Male auf (22) zurück, und bilden durch Einsetzung von (28):

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{2}{3}\frac{\triangle^2}{r^2}\left(1 + \frac{q\,q'}{3\,r^2}\right) + \frac{4}{90}\frac{\triangle^2}{r^2}\left(\frac{3\,p^2 + (q + q')^2 - 8\,q\,q'}{r^2}\right)$$

Hier ist nach Fig. 4. zu berücksichtigen:

$$p^2 + q^2 = b^2 \quad , \quad p^2 + q'^2 = c^2 \quad \text{und} \quad (q + q')^2 = a^2$$

womit man finden wird:

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{2}{3}\frac{\triangle^2}{r^2} + \frac{2}{90}\frac{\triangle^2}{r^2}\left(\frac{3\,b^2 + 3\,c^2 - a^2}{r^2}\right) \tag{30}$$

Nun wird die frühere Entwicklung (25) noch um ein Glied weiter geführt, nämlich mit $A - A^* = x$:

$$\cos A = \cos(A^* + x) = \cos A^* - x \sin A^* - \frac{x^2}{2}\cos A^*$$

$$\cos A - \cos A^* = -\sin A^* \left(x + \frac{x^2}{2}\operatorname{cotg} A^*\right)$$

Dieses in (30) gesetzt, zugleich mit Rücksicht auf (29) giebt:

$$x + \frac{x^2}{2} \, cotg \, A^* = \frac{\triangle}{3 r^2} + \frac{1}{90} \frac{\triangle}{r^4} (3 b^2 + 3 c^2 - a^2) \tag{30 a}$$

Die erste Näherung für x ist:

$$x = \frac{\triangle}{3 r^2} + \frac{1}{r^4} \ldots$$

Dazu hat man aus dem ebenen Dreieck:

$$cos \, A^* = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c} \qquad sin \, A^* = \frac{2 \triangle}{b c}$$

also von (30 a):

$$\frac{x^2}{2} \, cotg \, A^* = \frac{\triangle^2}{9 r^4} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \triangle} = \frac{\triangle}{72 r^4} (b^2 + c^2 - a^2)$$

Dieses in (30 a) gesetzt giebt:

$$x = \frac{\triangle}{3 r^2} + \frac{\triangle}{360 r^4} (7 b^2 + 7 c^2 + a^2) \tag{31}$$

Hiebei ist die Winkelreduktion $A - A^* = x$ in analytischem Masse dargestellt; um auf Sekunden überzugehen, muss man den Faktor ϱ zusetzen. Thut man dieses und schreibt zugleich auch die zwei anderen entsprechenden Formeln für $B - B^*$ und $C - C^*$, so hat man:

$$x = A - A^* = \frac{\triangle}{3 r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360 r^4} \varrho \, (a^2 + 7 b^2 + 7 c^2) \tag{31 a}$$

$$y = B - B^* = \frac{\triangle}{3 r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360 r^4} \varrho \, (7 a^2 + b^2 + 7 c^2) \tag{32 a}$$

$$z = C - C^* = \frac{\triangle}{3 r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360 r^4} \varrho \, (7 a^2 + 7 b^2 + c^2) \tag{33 a}$$

$$\text{Summe} \quad \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2} \varrho + \frac{\triangle}{24 r^4} \varrho \, (a^2 + b^2 + c^2) \tag{34}$$

Unter $\triangle$ ist hier die Fläche des *ebenen* Dreiecks verstanden, das aus den drei Seiten a, b, c konstruiert werden kann, und die vorstehenden Formeln sind immer nur Näherungs-Formeln, weil noch höhere Glieder vernachlässigt sind. Wenn man dagegen die kugelförmige Oberfläche F des *sphärischen* Dreiecks benützt, so hat man die schon früher in (2 a) § 40. S. 231 aufgestellte strenge Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \varrho \tag{35}$$

Durch Vergleichung von (35) und (34) hat man auch eine Vergleichung zwischen F und $\triangle$, nämlich:

$$F = \triangle \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24 r^2}\right) \tag{36}$$

Hiefür kann man auch noch eine andere Form finden, indem man nach (31 a) schreibt:

$$sin \, A = sin \, A^* + \frac{\triangle}{3 r^2} cos \, A^* = sin \, A^* \left(1 + \frac{\triangle}{3 r^2} cotg \, A^*\right)$$

Nimmt man hiezu die einfachen Beziehungen, $2\,b\,c \cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$ und $2 \triangle = b\,c \sin A^*$, so findet man:

$$\frac{\sin A}{\sin A^*} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\,r^2}$$

dieses auch auf die beiden andern Winkel angewendet giebt für (36):

$$F = \triangle \sqrt{\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A^* \sin B^* \sin C^*}} \tag{37}$$

Von ähnlicher Bedeutung wie (36) ist auch die aus (34) folgende Gleichung:

$$\frac{\triangle}{r^2} = \varepsilon \left(1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24\,r^2}\right) \tag{38}$$

Setzt man dieses noch in (31 a), (31 b), (31 c), so wird überall $\triangle$ durch ε ersetzt und man hat:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{-2\,a^2 + b^2 + c^2}{r^2}\right) \tag{39 a}$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{a^2 - 2\,b^2 + c^2}{r^2}\right) \tag{39 b}$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{a^2 + b^2 - 2\,c^2}{r^2}\right) \tag{39 c}$$

Summe $\quad \varepsilon = \varepsilon$ (Probe) (40)

Endlich kann man hier noch eine kleine Form-Veränderung vornehmen dadurch, dass man den Mittelwert m^2 von a^2, b^2 und c^2 einführt, nämlich:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = m^2 \tag{41}$$

Damit werden die vorstehenden Formeln:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\frac{m^2 - a^2}{r^2} \tag{42 a}$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\frac{m^2 - b^2}{r^2} \tag{42 b}$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\frac{m^2 - c^2}{r^2} \tag{42 c}$$

Für ein gleichseitiges Dreieck verschwinden die zweiten Glieder, was auch an sich klar ist.

Nimmt man ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit den Katheten a und a, also $c^2 = 2\,a^2$, so wird:

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2\,r^2} \quad , \quad 3\,m^2 = a^2 + a^2 + 2\,a^2 \quad , \quad m^2 = \frac{4}{3}a^2.$$

Setzt man $a = 100\,000^m$, so werden die zweiten Glieder in (42 a), (42 b) und (42 c) bzw.:

$$+\frac{a^4}{40\,r^4}\varrho = +\,0{,}0003''$$

$$+\frac{a^4}{40\,r^4}\varrho = +\,0{,}0003''$$

$$-\frac{a^4}{20\,r^4}\varrho = -\,0{,}0006''$$

Zu einer Anwendung der vorstehenden Formeln auf ein Zahlen-Beispiel nehmen wir wieder das klassische Dreieck Inselsberg, Hohehagen, Brocken, das wir schon mehrfach, in § 40.—42. benützt haben.

Mit Zugrundlegung der hier als vorläufig zu betrachtenden Berechnungen § 40. S. 233 und § 41. S. 237 erhalten wir:

$$\log r = 6.804\,9621 \quad , \quad \log \triangle = 9.467\,2168 \quad , \quad \log F = 9.467\,2271$$

und dann nach (31 a), (31 b), (31 c):

$$\begin{aligned} A - A^* &= 4{,}949\,900'' + 0{,}000\,136'' = 4{,}950\,036'' \\ B - B^* &= 4{,}949\,900 \;\; + 0{,}000\,096 \;\; = 4{,}949\,996 \\ C - C^* &= 4{,}949\,900 \;\; + 0{,}000\,121 \;\; = 4{,}950\,021 \\ \hline \varepsilon &= 14{,}849\,700'' + 0{,}000\,353'' = 14{,}850\,053'' \end{aligned}$$

Dasselbe bekommt man auch nach den Formeln (42 a), (42 b), (42 c), nämlich:

$$\begin{aligned} A - A^* &= 4{,}950\,018'' + 0{,}000\,018'' = 4{,}950\,036'' \\ B - B^* &= 4{,}950\,018 \;\; - 0{,}000\,021 \;\; = 4{,}949\,997 \\ C - C^* &= 4{,}950\,018 \;\; + 0{,}000\,003 \;\; = 4{,}950\,021 \\ \hline \varepsilon &= 14{,}850\,054'' + 0{,}000\,000'' = 14{,}850\,054'' \end{aligned}$$

Damit hat man folgende sphärische und ebene Winkel:

Inselsberg	$A =$	40° 39′ 30,380 000″	$A^* =$	40° 39′ 25,429 964″
Hohehagen	$B =$	86 13 58,840 000	$B^* =$	86 13 53,890 004
Brocken	$C =$	53 6 45,630 053	$C^* =$	53 6 40,680 032
Summe		180° 0′ 14,850 053″		180° 0′ 0,000 000″

Wenn man mit diesen Winkeln die frühere Berechnung (13)—(15) S. 237 wiederholt, so muss man mindestens 10 stellig rechnen, um den Unterschied noch wahrnehmbar zu machen; indessen auch in den 10 stelligen Logarithmen ist der Unterschied höchstens eine letzte Stelle, d. h. = 0·001, und z. B. an der Dreiecks-Seite $a = 69194{,}105^{m}$ bringt die neue schärfere Rechnung nur einen Unterschied von $0{,}00002^{m}$ oder $0{,}02^{mm}$.

Da das benützte Dreieck eines der grössten in der deutschen Geodäsie ist, können wir hiernach mit Ruhe die höheren Glieder vernachlässigen.

Zum Schlusse dieser Entwicklungen wollen wir noch eine Übersichts-Tabelle berechnen für die Werte des Korrektions-Gliedes 4. Ordnung zum Legendre schen Satze, d. h. nach (42 a) für das Glied:

$$\varDelta A_4 = \frac{\varepsilon}{60\,r^2}(m^2 - a^2) \quad , \quad \text{wo } m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Die beiden Faktoren ε und $(m^2 - a^2)$ desselben sind von einander unabhängig; der Excess ε misst die Fläche des Dreiecks und der Faktor $(m^2 - a^2)$ ist ein Mass für die Unsymmetrie und Ungleichseitigkeit des Dreiecks. Wenn ein Dreieck sehr lang aber schmal ist, so kann ε klein und $(m^2 - a^2)$ gross sein; wenn ein Dreieck sehr gross und nahezu gleichseitig ist, so wird ε gross und $(m^2 - a^2)$ klein; man kann also alle denkbaren Fälle am besten umfassen durch eine Tabelle für $\varDelta A_4$ mit zwei unabhängigen Eingängen ε und $m^2 - a^2$, wie im folgenden gegeben wird:

Winkel-Korrektion 4. Ordnung, ΔA_4, zum Legendre schen Satz.

Unsymmetrie des Dreiecks		Sphärischer Excess ε des Dreiecks					
$\sqrt{m^2 - a^2}$	$m^2 - a^2$	$\varepsilon = 10''$	$\varepsilon = 20''$	$\varepsilon = 50''$	$\varepsilon = 100''$	$\varepsilon = 200''$	$\varepsilon = 300''$
10km	100 qkm	0,00000″	0,00000″	0,00000″	0,00000″	0,00001	0,00001″
20	400	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00003	0,00005
50	2 500	0,00001	0,00002	0,00005	0,00010	0,00021	0,00031
100	10 000	0,00004	0,00008	0,00021	0,00041	0,00082	0,00123
200	40 000	0,00016	0,00033	0,00081	0,00164	0,00329	0,00493
400	160 000	0,00066	0,00131	0,00325	0,00657	0,01314	0,01972

Indem wir noch eine allgemeinere Betrachtung über das Fehler-Glied des Legendre schen Satzes anstellen, schreiben wir nach (39 a) mit Zuziehung des Ausdrucks $\triangle$ nach (5) § 41. S. 236:

$$\Delta A_4 = \frac{b^2 + c^2 - 2\,a^2}{720\,r^4} \sqrt{a^2\,(2\,b^2 + 2\,c^2 - a^2) - (b - c)^2}$$

Wenn hier $b = c$, also das Dreieck gleichschenklig genommen wird, so fällt $(b - c)^2$ fort, und der Ausdruck wird ein Maximum in Hinsicht auf das Verhältnis zwischen b und c. Indem man den an der Seite a anliegenden Winkel β einführt, kann man, mit $c = b$, das Fehler-Glied zweifach ausdrücken:

$$\Delta A_4 = \frac{a^4}{1440\,r^4} \frac{1 - 4\,cos^2\,\beta}{cos^2\,\beta}\,tang\,\beta \tag{a}$$

oder

$$\Delta' A_4 = \frac{b^4}{180\,r^4}\,(1 - 4\,cos^2\,\beta)\,sin\,2\,\beta \tag{b}$$

Im Falle (a) entsteht ein Maximum mit $\beta = 45°$ und im Falle (b) entstehen Maxima mit $\beta = 26°\,49'$ und $\beta = 73°\,44'$ und daraus folgt:

$$(\beta = 45°), \qquad (\Delta\,A_4)\,max = 0{,}001\,389\,\frac{a^4}{r^4}$$

$$(\beta = 73°\,44'), \quad (\Delta'\,A_4)\,max = 0{,}002\,050\,\frac{b^4}{r^4}$$

Setzt man hier bzw. a oder $b = 100\,000$ Meter, so wird das betreffende Fehler-Glied $= 0{,}000\,017''$ oder $0{,}000\,026''$.

Man sieht hieraus, dass bei messbaren Dreiecken die Korrektion 4. Ordnung immer zu vernachlässigen ist.

Der einfache Legendre sche Satz mit Entwicklung bis $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, erschien in den Pariser „Mémoires de l'académie des sciences", Jahrgang 1787, und hat inzwischen zahlreiche Beweisformen gefunden.

Die Entwicklung bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ ist zuerst von Buzengeiger gegeben in der „Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger, 6. Band, S. 264—270, Tübingen 1818". Dieses wird auch von Bessel citiert in „Astr. Nachr. 19. Band, 1841, S. 103".

Unsere neue Behandlungsweise (im vorstehenden § 44.) ist hervorgerufen durch die entsprechenden Entwicklungen für Dreiecke mit geodätischen Linien in der klassischen Abhandlung von Gauss „Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. 24—28". Wir betrachten unseren § 44. als Vorbereitung für unsere späteren analogen Entwicklungen für Dreiecke auf dem Ellipsoid.

Über den Maximal-Einfluss der sphärischen Glieder von der Ordnung $1:r^4$ giebt schon Baeyer (Messen auf d. sphär. Oberfl. S. 73—74) eine Erörterung.

In unserer zweiten Auflage, 1878, S. 131, hatten wir eine solche Untersuchung mit der Nebenbedingung konstanter Dreiecks-Fläche. Helmert untersucht in math. u. phys. Theorieen der höheren Geodäsie I. § 16. den Maximal-Einfluss der höheren Glieder mit der Nebenbedingung, dass die Quadratsumme der Seiten, d. h. $a^2+b^2+c^2=3\,m^2$ konstant sei.

Kapitel V.

Sphärische Coordinaten.

§ 45. Übersicht der Coordinaten-Systeme.

Wir betrachten in der Folge die Erde als Kugel von gegebenem Halbmesser.

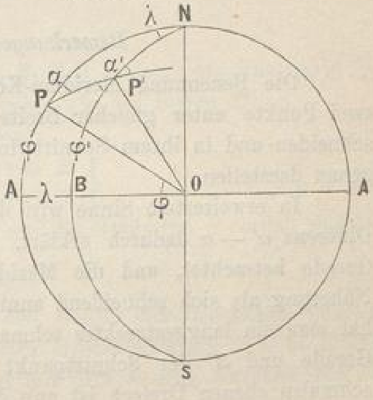
Bei dieser Betrachtungsweise werden manche Formeln und Rechen-Verfahren gefunden werden (mit kleinen Gliedern von der Ordnung $1:r^2$), welche man sofort auch auf das Ellipsoid, bzw. auf Messungen an der Erd-Oberfläche anwenden kann, wenn man nur den Kugel-Halbmesser r der Erd-Krümmung an der betreffenden Stelle einigermassen anpasst.

Andere der in diesem Kapitel zu entwickelnden Formeln (mit Gliedern von der Ordnung $1:r$) werden keine so unmittelbare Übertragung auf das Ellipsoid zulassen, und daher nur als Vorbereitungs-Formeln in irgend welchem Sinne zu betrachten sein.

Indem wir nähere Untersuchungen dieser Art auf die besonderen Fälle verschieben, betrachten wir jetzt die einzelnen Arten der Punkt-Bestimmung auf der Kugel.

I. Geographische Coordinaten.

Fig. 1.
Sphärische Coordinaten.



In Fig. 1. ist O der Mittelpunkt einer Kugel, welche, als Darstellung der Erde, den Nordpol N, Südpol S, also die Axe $N\,S$ und den Äquator $A\,A'$ hat.

$N\,A\,S$ und $N\,B\,S$ sind zwei Meridiane mit darauf liegenden Punkten P und P'; die gegenseitige Lage zweier Meridiane wird durch den Längen-Unterschied λ bestimmt, welcher entweder als Winkel λ am Pol N oder als Bogen $A\,B$ auf dem Äquator dargestellt werden kann.

Auf einem Meridian $N\,A$ wird ein Punkt P bestimmt durch seine geographische Breite φ; welche entweder als Erd-Centriwinkel $A\,O\,P=\varphi$ oder als Meridian-Bogen $A\,P$ (für den Halbmesser $=1$) dargestellt werden kann.