



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

Kapitel V. Sphärische Koordinaten.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](#)

sprechenden Entwicklungen für Dreiecke mit geodätischen Linien in der klassischen Abhandlung von Gauss „Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. 24—28“. Wir betrachten unseren § 44. als Vorbereitung für unsere späteren analogen Entwicklungen für Dreiecke auf dem Ellipsoid.

Über den Maximal-Einfluss der sphärischen Glieder von der Ordnung $1:r^4$ giebt schon Baeyer (Messen auf d. sphär. Oberfl. S. 73—74) eine Erörterung.

In unserer zweiten Auflage, 1878, S. 131, hatten wir eine solche Untersuchung mit der Nebenbedingung konstanter Dreiecks-Fläche. Helmert untersucht in math. u. phys. Theorien der höheren Geodäsie I. § 16. den Maximal-Einfluss der höheren Glieder mit der Nebenbedingung, dass die Quadratsumme der Seiten, d. h. $a^2 + b^2 + c^2 = 3 m^2$ konstant sei.

Kapitel V.

Sphärische Coordinaten.

§ 45. Übersicht der Coordinaten-Systeme.

Wir betrachten in der Folge die Erde als Kugel von gegebenem Halbmesser.

Bei dieser Betrachtungsweise werden manche Formeln und Rechen-Verfahren gefunden werden (mit kleinen Gliedern von der Ordnung $1:r^2$), welche man sofort auch auf das Ellipsoid, bzw. auf Messungen an der Erd-Oberfläche anwenden kann, wenn man nur den Kugel-Halbmesser r der Erd-Krümmung an der betreffenden Stelle einigermassen anpasst.

Andere der in diesem Kapitel zu entwickelnden Formeln (mit Gliedern von der Ordnung $1:r$) werden keine so unmittelbare Übertragung auf das Ellipsoid zulassen, und daher nur als Vorbereitungs-Formeln in irgend welchem Sinne zu betrachten sein.

Indem wir nähere Untersuchungen dieser Art auf die besonderen Fälle verschieben, betrachten wir jetzt die einzelnen Arten der Punkt-Bestimmung auf der Kugel.

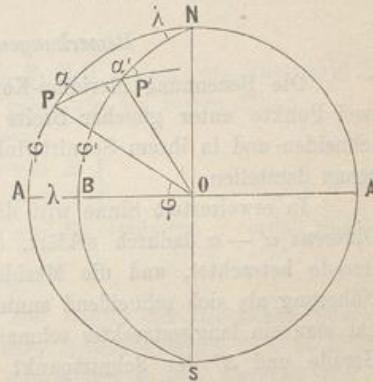
I. Geographische Coordinaten.

In Fig. 1. ist O der Mittelpunkt einer Kugel, welche, als Darstellung der Erde, den Nordpol N , Südpol S , also die Axe NS und den Äquator AA' hat.

NAS und NBS sind zwei Meridiane mit darauf liegenden Punkten P und P' ; die gegenseitige Lage zweier Meridiane wird durch den Längen-Unterschied λ bestimmt, welcher entweder als Winkel λ am Pol N oder als Bogen AB auf dem Äquator dargestellt werden kann.

Auf einem Meridian NA wird ein Punkt P bestimmt durch seine geographische Breite φ ; welche entweder als Erd-Centriwinkel $AO P = \varphi$ oder als Meridian-Bogen AP (für den Halbmesser = 1) dargestellt werden kann.

Fig. 1.
Sphärische Coordinaten.



II. Polar-Coordinate.

Wenn P als fester Punkt gilt, so kann man einen zweiten Punkt P' dagegen festlegen durch Angabe des Entfernungs-Bogens PP' und des Azimutes $NPP' = \alpha$. Die Azimute werden meist von Norden über Osten gezählt, wie in Fig. 1. mit α bei P eingeschrieben ist.

Ein zweites Azimut α' hat der Bogen PP' im Punkte P' und zwar erscheint in Fig. 1. der Winkel α' entweder als nordöstliches Azimut von PP' in der Verlängerung über P' , oder als südwestliches Azimut von $P'P$.

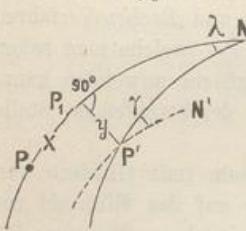
Die Differenz der beiden Azimute α und α' führt den Namen „Meridian-Konvergenz“, d. h.

$$\text{Meridian-Konvergenz} = \alpha' - \alpha \quad (1)$$

Dabei ist der dem Äquator zugewendete Winkel α' der grösse, also die Meridian-Konvergenz in dem Sinne der Gleichung (1) gezählt, positiv.

III. Rechtwinklige Coordinaten.

Fig. 2.
Rechtwinklige Coordinaten
 x, y .



Dieses ist nur eine andere Ausdrucksweise für die schon bei *II.* gegebene allgemeinere Erklärung der Meridian-Konvergenz, denn wenn das Azimut bei P_1 den besonderen Wert 90° annimmt, so ist die Meridian-Konvergenz für die Punkte P_1 und P' die Differenz:

$$PP_1P' - P_1P'N = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma \quad (2)$$

Dabei kommt der Ursprungs-Punkt P und die Abscisse x gar nicht in Betracht, sondern nur der Fusspunkt P_1 .

Bemerkungen zur Meridian-Konvergenz.

Die Benennung Meridian-Konvergenz röhrt ursprünglich davon her, dass für zwei Punkte unter gleicher Breite die Meridiane sich in einem Punkte der Erdaxe schneiden und in ihrem Schnittwinkel daselbst die Konvergenz der Meridian-Tangenten genau darstellen.

In erweitertem Sinne wird die Benennung Meridian-Konvergenz für die Azimut-Differenz $\alpha' - \alpha$ dadurch erklärt, dass man den Bogen PP' als unendlich kleine Gerade betrachtet, und die Meridian-Tangenten in P und P' mit entsprechender Näherung als sich schneidend annimmt; denkt man sich den Schnittpunkt T , dann hat man ein langgestrecktes schmales Dreieck $PP'T$, wo PP' die unendlich kleine Gerade und T der Schnittpunkt der beiden Meridian-Tangenten ist. In diesem schmalen ebenen Dreieck ist nun der Winkel bei T gleich $\alpha' - \alpha$.

Es ist auch leicht einzusehen, dass die Meridian-Konvergenz in erster Näherung durch $\lambda \sin \varphi$ ausgedrückt ist, denn wenn die zwei Punkte P und P' in Fig. 1. unter sich unendlich nahe, in der Mittelbreite φ liegen, so ist für den Kugel-Halbmesser r der Parallelkreis-Halbmesser daselbst $= r \cos \varphi$, also der Parallelkreisbogen $= r \cos \varphi \lambda$, aber die Tangentenlänge $PT = P'T = r \cot \varphi$, also der Winkel bei T gleich $r \cos \varphi \lambda : r \cot \varphi = \lambda \sin \varphi$.

So viel genügt hier zur Wort-Erklärung und zur ersten geometrischen Betrachtung der Meridian-Konvergenz, von welcher später noch weiter gehandelt werden wird.

(Vgl. hiezu Fig. 1. § 61. und die Schlussbemerkungen von § 60.)

§ 46. Rechtwinklige sphärische (Soldner sche) Coordinaten.

Der einfache Grundgedanke der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten ist etwa um 1809 von Soldner zur Vermessung des Königreichs Bayern und unabhängig von Bohnenberger in Württemberg angewendet worden, und da diese Vorgänge Nachahmung bei vielen anderen deutschen Vermessungen gefunden haben, werden diese Coordinaten häufig nach Soldner benannt.

Wir denken uns in Fig. 1. einen Meridian NOS der kugelförmigen Erde als Anfangsmeridian des Systems angenommen, und darauf einen Punkt O als Ursprung oder Nullpunkt.

Um einen Punkt A durch Coordinaten zu bestimmen, legen wir einen Grosskreisbogen $Q'A_1AQ$ durch den Punkt A , rechtwinklig zu dem Meridian ON , wobei A_1 auf ON der Fusspunkt der Senkrechten AA_1 ist und Q' sowie Q die sogenannten Pole des Meridians SON sind.

Durch den Fusspunkt A_1 wird bestimmt:

$$\begin{aligned} OA_1 &= x, \text{ die Abscisse von } A \\ A_1A &= y, \text{ die Ordinate von } A \end{aligned} \quad \{ \quad (1)$$

Wenn noch ein zweiter Punkt B durch Coordinaten bestimmt werden soll, so legt man durch ihn wieder einen Grosskreis $Q'B_1BQ$, welcher den Fusspunkt B_1 liefert, und durch dieselben Polpunkte Q' und Q geht, wie der Bogen für A .

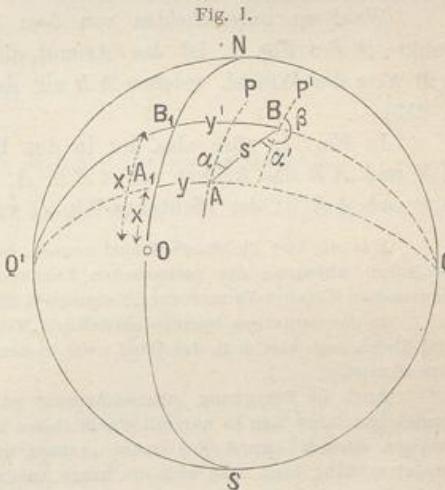
Durch den Fusspunkt B_1 wird dann bestimmt:

$$\begin{aligned} OB_1 &= x' \text{ die Abscisse von } B \\ B_1B &= y' \text{ die Ordinate von } B \end{aligned} \quad \{ \quad (2)$$

Wir zählen die Abscissen x nördlich positiv und die Ordinaten y östlich positiv.

Richtungswinkel.

Ausser den Coordinaten selbst haben wir den Begriff des Richtungs-Winkels festzustellen. Der Richtungs-Winkel α , welcher dem Grosskreisbogen AB in A kommt, ist der Winkel, welchen dieser Bogen AB mit dem zu dem Meridian von O parallel gezogenen Bogen AP im Punkte A bildet.



Bei der vorhin angegebenen Lage des Coordinaten-Systems, mit $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten, werden die Richtungs-Winkel α vom nördlichen x gegen östliches y hin positiv gezählt, wie in Fig. 1. eingeschrieben ist.

Der Winkel α , welcher hier Richtungs-Winkel genannt ist, ist derselbe, wie auch schon in den Formeln für ebene Coordinatenrechnung in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 225 ein Winkel in diesem Sinne eingeführt wurde.

Ausser dem Richtungs-Winkel α von AB in A ist auch der Richtungs-Winkel β von BA in B bestimmt als Winkel zwischen der Parallelen-Tangente BP' und dem Strahle BA , im positiven Sinne gezählt.

Wir haben neben β bei B auch noch den Winkel α' eingeschrieben, welcher um 180° kleiner ist als β , oder allgemeiner:

$$\alpha' = \beta \pm 180^\circ \quad (3)$$

Dieser Winkel α' bedeutet also im wesentlichen dasselbe wie β , er ist aber in den Formeln meist angenehmer als β selbst, weil $\alpha - \alpha'$ eine kleine Grösse ist, welche in einer Reihen-Entwicklung benutzt werden kann. Man nennt auch, nach Analogie der Meridian-Konvergenz, diese kleine Grösse:

$$\alpha - \alpha' = \text{Ordinaten-Konvergenz.} \quad (4)$$

Wohl zu unterscheiden von dem Richtungs-Winkel α des Strahls AB im Punkte A der Fig. 1. ist das Azimut dieses Strahles AB , denn das Azimut von AB wäre der Winkel, welchen AB mit dem Meridiane AN in A bildet (vgl. Fig. 1. S. 255).

In Fig. 1. wäre also der in der Figur *nicht* angezeichnete Winkel zwischen AN und AB das Azimut von AB in A , und der mit α bezeichnete Winkel zwischen AP und AB ist der Richtungs-Winkel von AB in A .

Was wir hier Richtungs-Winkel nennen, heisst auch in den Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landes-Aufnahme „Richtungs-Winkel“, dagegen bei der preussischen Kataster-Vermessung „Neigungs-Winkel“.

In der deutschen Sprache bezeichnet „Neigung“ im allgemeinen einen Winkel in einer Vertikal-Ebene, man sagt z. B. der Wind weht in der Richtung N.O. in einer Neigung von 5° aufwärts oder abwärts.

Auch die Benennung „ebenes Azimut“ wird von Vielen für jenen Richtungs-Winkel angewendet. So lange man es nur mit einem *ebenen* Systeme zu thun hat, wo gar keine Unterscheidung zwischen ebennem Azimut (bei Gauss „Azimut in plano“) und sphärischem oder sphäroidischem Azimut vorkam, kann man sich die kurze Ausdrucksweise Azimut wohl erlauben; aber nun, da solche Unterscheidung nötig wird, wollen wir das Wort „Azimut“ für die Abweichung von dem Meridian vorbehalten, und die Abweichungen von der Parallelen konsequent mit „Richtungs-Winkel“ bezeichnen.

Entwicklung der Grund-Formeln.

Mit Beziehung auf Fig. 1. stellen wir folgende Aufgabe:

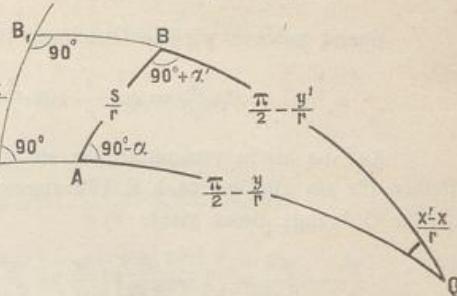
Gegeben sind die Coordinaten x und y eines Punktes A , ferner die Länge s des Bogens AB und dessen Richtungs-Winkel α in A .

Gesucht sind die Coordinaten x' und y' des jenseitigen Punktes B und der jenseitige Richtungs-Winkel β des Bogens BA in B , oder statt β selbst die Ordinaten-Konvergenz $\alpha - \alpha'$.

Wir werden diese Aufgabe mit Hilfe des sphärischen Dreiecks ABQ von Fig. 1. lösen können, und haben deshalb dieses Dreieck in Fig. 2. nochmals besonders herausgezeichnet.

Alle Seiten und Winkel dieses Dreiecks stehen in einfacher Beziehung zu den besprochenen Coordinaten und Richtungs-Winkeln, z. B. der Winkel bei A ist $= 90^\circ - \alpha$ und der Winkel bei B ist $= 90^\circ + \alpha'$, wie die Vergleichung mit Fig. 1. unmittelbar ergibt; und im übrigen ist nur noch die Bemerkung zu machen, dass die linearen Werte von Fig. 1. nun in Fig. 2., durch Division mit dem Erd-Halbmesser r , auf Erd-Centriwinkel in analytischem Masse gebracht sind, z. B. die Entfernung s in Fig. 1. giebt $\frac{s}{r}$ in Fig. 2. u. s. w. Der Wert $\frac{x' - x}{r}$ erscheint in Fig. 2. zweimal, erstens als Bogen $A_1 B_1$ und zweitens als Winkel Q , weil $Q A_1$ und $Q B_1$ beide Quadranten, d. h. analytisch $= \frac{\pi}{2}$ sind.

Fig. 2.
Dreieck $A B Q$ von Fig. 2.



Nach dieser Vorbereitung benützen wir drei Formeln der sphärischen Trigonometrie, nämlich:

- 1) eine Cosinus-Formel (von S. 164),
- 2) eine Sinus-Formel (von S. 164),
- 3) eine Gauss'sche Formel (S. 165).

Im einzelnen geben diese 3 Formeln ausführlichst geschrieben:

$$1) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r}\right) = \cos \frac{s}{r} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r}\right) + \sin \frac{s}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r}\right) \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$2) \frac{\sin \frac{x' - x}{r}}{\sin \frac{s}{r}} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r}\right)}$$

$$3) \tan \frac{(90^\circ + \alpha') + (90^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r} \right) \right)}{\cos \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{r} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{y'}{r} \right) \right)} \cotg \frac{x' - x}{2r}$$

Wenn man diese drei Gleichungen, welche sehr ausführlich geschrieben sind, damit ihre Entstehungsweise ersichtlich bleibt, vereinfacht, so erhält man:

$$1) \text{ für } y': \quad \sin \frac{y'}{r} = \cos \frac{s}{r} \sin \frac{y}{r} + \sin \frac{s}{r} \cos \frac{y}{r} \sin \alpha \quad (5)$$

$$2) \text{ für } x': \quad \sin \frac{x' - x}{r} = \frac{\sin \frac{s}{r}}{\cos \frac{y'}{r}} \cos \alpha \quad (6)$$

$$3) \text{ für } \alpha': \quad \cotg \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{\cos \frac{y' - y}{2r}}{\sin \frac{y' + y}{2r}} \cotg \frac{x' - x}{2r}$$

und wenn man hier Zähler und Nenner umkehrt, so hat man:

$$\tan \frac{\alpha - \alpha'}{2} = \frac{\sin \frac{y' + y}{2r}}{\cos \frac{y' - y}{2r}} \tan \frac{x' - x}{2r} \quad (7)$$

Zuerst nehmen wir die Gleichung (5) allein vor:

$$\sin \frac{y'}{r} = \cos \frac{s}{r} \sin \frac{y}{r} + \sin \frac{s}{r} \cos \frac{y}{r} \cos \alpha$$

Auf die hierin vorkommenden \sin und \cos kleiner Grössen werden die Potenzreihen für \sin und \cos nach S. 172 angewendet, jedoch mit Beschränkung auf Glieder dritter Ordnung; dieses gibt:

$$\frac{y'}{r} - \frac{y'^3}{6r^3} = \left(1 - \frac{s^2}{2r^2}\right) \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3}\right) + \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3}\right) \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right) \sin \alpha$$

Wenn man mit Vernachlässigung der höheren Glieder weiter rechnet, so erhält man:

$$y' - \frac{y'^3}{6r^2} = y \left(1 - \frac{s^2}{2r^2} - \frac{y^2}{6r^3}\right) + s \sin \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right) \quad (8)$$

Diese Gleichung soll nach y' aufgelöst werden; man hat es also mit einer cubischen Gleichung zu thun. Da jedoch von vornherein alle Glieder von höherer als der dritten Ordnung vernachlässigt worden sind, so kann auch die Auflösung von (8) entsprechend genähert ausgeführt werden. Man bildet nämlich zuerst eine erste Näherung für y' :

$$y' = y + s \sin \alpha + \frac{1}{r^2} \dots$$

Dieser Näherungs-Wert von y' genügt, um das zweite Glied $\frac{y'^3}{6r^2}$ in (8) auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich genau zu bestimmen. Man hat daher durch Einsetzen der ersten Näherung in jenes zweite Glied:

$$\begin{aligned} y' - \frac{(y + s \sin \alpha)^3}{6r^2} &= y + s \sin \alpha + y \left(-\frac{s^2}{2r^2} - \frac{y^2}{6r^3}\right) + s \sin \alpha \left(-\frac{s^2}{6r^2} - \frac{y^2}{2r^2}\right) \\ y' &= y + s \sin \alpha - \frac{3s^2y - 3s^2y \sin^2 \alpha + s^3 \sin \alpha - s^3 \sin^3 \alpha}{6r^2} \\ y' &= y + s \sin \alpha - \frac{s^2y \cos^2 \alpha}{2r^2} - \frac{s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{6r^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Damit ist die Gleichung für y' erledigt, und wir gehen über zur Entwicklung für x' . Zur Bestimmung von $x' - x$ haben wir die Gleichung (6):

$$\sin \frac{x' - x}{r} = \frac{\sin \frac{s}{r}}{\cos \frac{y'}{r}} \cos \alpha$$

Dieses giebt bis zur dritten Ordnung entwickelt:

$$\begin{aligned}\frac{x' - x}{r} - \frac{(x' - x)^3}{6 r^3} &= \frac{\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6 r^3}}{1 - \frac{y'^2}{2 r^2}} \cos \alpha \\ \frac{x' - x}{r} - \frac{(x' - x)^3}{6 r^3} &= \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6 r^3} \right) \left(1 + \frac{y'^2}{2 r^2} \right) \cos \alpha \\ x' - x - \frac{(x' - x)^3}{6 r^2} &= s \cos \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6 r^2} + \frac{y'^2}{2 r^2} \right)\end{aligned}$$

Erste Näherung $x' - x = s \cos \alpha + \dots$

folglich:
$$\begin{aligned}x' - x &= \frac{(s \cos \alpha)^3}{6 r^2} + s \cos \alpha - \frac{s^3 \cos \alpha}{6 r^2} + \frac{s \cos \alpha y'^2}{2 r^2} \\ x' &= x + s \cos \alpha + \frac{s \cos \alpha y'^2}{2 r^2} - \frac{s^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{6 r^2} \quad (10)\end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Gleichung für x' erledigt, und wir gehen zur Entwicklung für die Ordinaten-Konvergenz. Zur Bestimmung von $\alpha - \alpha'$ haben wir die Gleichung (7), bei deren Entwicklungen man überall schon beim ersten Gliede stehen bleiben kann, weil dadurch schon rechts ein Glied von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ entsteht, über welches wir nicht hinaus gehen. Wir haben daher kurz aus (7):

$$\begin{aligned}\frac{\alpha - \alpha'}{2} + \dots &= \frac{\frac{y' + y}{2 r} - \dots}{1 - \dots} \frac{x' - x}{2 r} + \dots \\ \alpha - \alpha' &= \frac{y' + y}{2 r^2} (x' - x) \quad (11)\end{aligned}$$

Eine etwas andere Form bekommt man hiefür, wenn man $y' = y + s \sin \alpha + \dots$ nach (9) einsetzt, nämlich:

$$\alpha - \alpha' = (x' - x) \frac{y}{r^2} + \frac{(x' - x) s \sin \alpha}{2 r^2} \quad (12)$$

In (11) und (12) ist zur Reduktion auf Sekunden noch der Faktor $\varrho = 206 265''$ hinzu zu setzen.

Zusammenfassung.

Zur Übersicht führen wir noch eine abkürzende Bezeichnung ein, indem wir setzen:

$$s \sin \alpha = v \quad \text{und} \quad s \cos \alpha = u \quad (13)$$

Damit geben die Formeln (9), (10) und (12), letztere mit Zusetzung von ϱ :

$$y' = y + v - \frac{u^2 y}{2 r^2} - \frac{u^2 v}{6 r^2} \quad (14)$$

$$x' = x + u + \frac{u y'^2}{2 r^2} - \frac{u v^2}{6 r^2} \quad (15)$$

$$\alpha - \alpha' = u y \frac{\varrho}{r^2} + u v \frac{\varrho}{2 r^2} \quad \text{oder} \quad = u \frac{y + y'}{2} \frac{\varrho}{r^2} \quad (16)$$

Hiezu $\beta = \alpha' \pm 180^\circ$,

also:
$$\beta = \alpha \pm 180^\circ - u y \frac{\varrho}{r^2} - u v \frac{\varrho}{2 r^2} \quad (16a)$$

Die von r abhängigen Coefficienten dieser und einiger verwandter Formeln kann man bei gegebener geographischer Breite immer nach der Hilfstafel Seite [8]—[29] des Anhangs bestimmen; für die Breiten $\varphi = 45^\circ, 50^\circ, 55^\circ$ sind die Logarithmen dieser Coefficienten folgende (mit Weglassung der — 10 u. s. w.) und bei μ für Einheiten der 7ten Stelle:

φ	$\log \frac{1}{2r^2}$	$\log \frac{1}{6r^2}$	$\log \frac{\varrho}{r^2}$	$\log \frac{\varrho}{2r^2}$	$\log \frac{\mu}{2r^2}$	$\log \frac{\mu}{6r^2}$
45°	6.08969	5.61257	1.70514	1.40411	2.72747	2.25035
50°	6.08918	5.61206	1.70464	1.40361	2.72697	2.24985
55°	6.08869	5.61157	1.70415	1.40312	2.72648	2.24936

Wenn man in den Formeln (14), (15), (16) den Halbmesser $r = \infty$ setzt, d. h. wenn man die Kugel in die Ebene übergehen lässt, so bekommt man:

$$y' = y + s \sin \alpha \quad x' = x + s \cos \alpha \quad \alpha' = \alpha \quad (17)$$

Dieses sind die für die ebene Coordinaten-Rechnung gültigen Formeln.

Dasselbe hat man in anderer Form, wenn man nicht $r = \infty$, aber die Entfernung s und damit auch m und n sehr klein setzt; man sieht daraus, dass die sphärischen Formeln von selbst in die Formeln der Ebene übergehen, sobald die Entferungen so klein werden, dass sich das Anbringen der Korrektions-Glieder nicht lohnt.

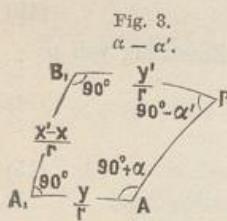
Unsere Schluss-Formeln (14), (15), (16) werden auch noch in manchen anderen Formen gebraucht, wie für die Ordinaten-Konvergenz schon bei (11) und (12) gezeigt wurde.

Auch die Ordinaten-Formel (14) kann umgeformt, d. h. etwa so geschrieben werden:

$$y' - y = s \sin \alpha - \frac{2}{3} \frac{y + y'}{2r^2} u^2 \quad (18)$$

Der algebraisch scheinbar störende Umstand, dass in der Gleichung (15) für x das erst zu bestimmende y' selbst vorkommt, ist für unsere Anwendungen unwesentlich, wenn y' zuerst bestimmt wird, um es für die Einsetzung in das Korrektions-Glied für x zu haben; sollte ausnahmsweise x allein zu bestimmen sein, so müsste man zur Berechnung des ersten Korrektions-Gliedes von x einen Näherungs-Wert von $y' = y + s \sin \alpha$ nehmen.

Geometrische Bedeutung der Ordinaten-Konvergenz.



Die Formel (11) hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung, es ist nämlich $\alpha - \alpha'$ der sphärische Excess des Vierecks $A P B_1 A_1$, dessen Fläche, eben, genähert

$$= \frac{y' + y}{2} (x' - x) \text{ ist.}$$

Man kann diese Bedeutung von $\alpha - \alpha'$ unmittelbar leicht nachweisen, nämlich nach Fig. 3. ist der Excess des Vierecks:

$$90^\circ + 90^\circ + (90^\circ + \alpha) + (90^\circ - \alpha') - 360^\circ = \alpha - \alpha' \quad (19)$$

Dieses ist dieselbe Anschauung, welche auch auf die Meridian-Konvergenz (§ 45.) angewendet werden kann.

Rechen-Hilfsmittel für die Korrektions-Glieder der Soldner schen Formeln.

Wenn man zu häufiger Anwendung dieser Coordinaten-Formeln Schemata lithographiert, und hiebei die konstanten Coefficienten-Logarithmen $\log \frac{1}{2r^2}$, $\log \frac{\varrho}{2r^2}$ u. s. w. mit vordruckt, so geht die Rechnung nach den Formeln (14), (15), (16) ziemlich rasch; doch sind auch schon mehrfach besondere Hilfsmittel angewendet worden.

In unserem Anhang Seite [44] haben wir zwei kleine Tabellen I. und II. für die Korrektions-Glieder der Formeln (14), (15), (16) gegeben, insofern alle diese Glieder im wesentlichen die Form $\frac{A^2 B}{2r^2}$ oder $\frac{A B}{r^2} \varrho$ haben, doch sind diese Tabellen I. und II. auf Seite [44] nicht zum eigentlichen Rechnen bestimmt, sondern nur zur Übersicht, oder als Hauptwerte zu graphischen Darstellungen, oder auch zur Unterstützung von Rechnungen mit dem Rechenschieber u. dergl.

Eine ausführlichere, für $\varphi = 51^\circ$ gültige, zum unmittelbaren praktischen Gebrauch bestimmte Tabelle der Werte $\frac{A^2 B}{2r^2}$ ist enthalten in dem Werke: „Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmess-Kunst von F. G. Gauss“, 2. Aufl. 1892, II. Teil, S. 54—61.

Graphische Hilfsmittel für die Soldner schen Korrektions-Glieder sind bei der badischen Landes-Vermessung benutzt worden (uns jedoch nicht näher bekannt geworden). Drei Schichten-Tafeln für den vorliegenden Zweck giebt Franke, „Die Grundlehren der trigonometrischen Vermessung“, Leipzig 1879, Anhang Tafel I., II., III.

Alle diese Hilfsmittel sind aber kaum im stande, das unmittelbare Ausrechnen der Korrektions-Glieder zu ersetzen, zumal man bei solchen Rechnungen, zum Schutz gegen die vielen Abrundungs-Häufungen die einzelnen Glieder meist auf 0,001^m ausrechnet, um im Schlussergebnis 0,01^m noch scharf zu haben, und hiezu ist das Ausrechnen der Glieder im vorgedruckten Schema mit 4—5 stelligen Logarithmen immer noch das Beste.

Die Soldner schen Korrektions-Glieder sind zwar alle von der Ordnung $1:r^2$, aber unter sich doch gewissermassen von verschiedener Ordnung, je nachdem $s \sin \alpha$, $s \cos \alpha$ oder y , y' selbst, mehr noch, je nachdem $s^2 \sin^2 \alpha$, $s^2 \cos^2 \alpha$ oder y^2 , y'^2 darin auftreten, denn die $s \sin \alpha = v$ und $s \cos \alpha = u$ sind im allgemeinen erheblich kleiner als die y , und deswegen ist das Glied $\frac{u y'^2}{2r^2}$ in (15) das erheblichste von allen.

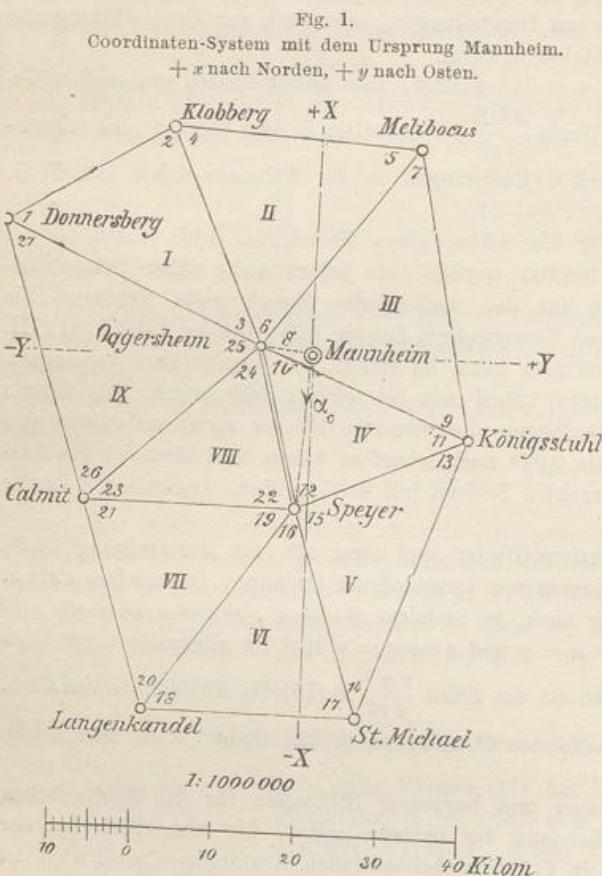
Wir werden später bei den konformen Coordinaten (§ 52.) finden, dass dort solche Glieder mit y^2 nicht vorkommen.

Die Unmöglichkeit genauer und bequemer Hilfstafeln für die Soldner schen Korrektions-Glieder ist ein Übelstand des Systems selbst, der namentlich bei der Vergleichung mit den später in § 52. zu behandelnden konformen Coordinaten zu Tage tritt.

§ 47. Beispiel der Soldnerschen Coordinaten-Berechnung.

Zu einem zusammenhängenden Zahlen-Beispiel, an welchem der ganze Gang der Soldner schen Coordinaten-Berechnung gezeigt werden kann, eignet sich sehr gut der nördliche Teil des badischen Netzes, den wir schon früher mehrfach behandelt haben.

Dieses in der nachfolgenden Fig. 1. dargestellte Netz wurde aus badischen und einigen anderen Winkeln zusammengesetzt und (unabhängig von den amtlichen Berechnungen) in sich selbst ohne weitere Anschlüsse ausgeglichen und 1870 veröffentlicht in den „astronom. Nachrichten“ 75. Band, S. 289—306 „über die Genauigkeit süddeutscher Triangulierungen“, und jene Ausgleichung ist auch unverändert in den ersten zwei Auflagen dieses Werkes 1873 und 1878 aufgenommen, dagegen in 3. Aufl. I. Band, 1888, S. 194—204 schärfer neu berechnet, wobei die Winkel sich teilweise um $0,001''$ oder $0,002''$ geändert haben. In der 4. Aufl. I. Band, 1895, S. 174 ist die Ausgleichung nicht mehr aufgenommen, weshalb wir nun die ausgeglichenen Winkel und Seiten von 3. Aufl. I. Band, 1888, S. 202—203 hier benutzen, wie sie in dem nachfolgenden Abrisse (S. 265) sich darstellen.



coordinaten-Nullpunkt, durch welchen der Meridian als x -Axe geht, ist das Azimut gleich dem Richtungswinkel, während in allen anderen Punkten die Richtungswinkel sich von den Azimuten unterscheiden.

Wir geben sofort den ganzen Abriss des Netzes mit ausgeglichenen Richtungswinkeln α und ausgeglichenen Entfernungen $\log s$, obgleich zwar alle $\log s$ als Ergebnisse der Netzausgleichung eingesetzt werden können, die Spalten der Richtungswinkel α aber erst allmählich im Laufe der nachfolgenden Coordinatenrechnung sich füllen werden.

Das Netzbild mit Andeutung des Coordinaten-Systems ist in nebenstehender Fig. 1. gezeichnet.

Von dem Punkt Mannheim Sternwarte, der als Coordinaten-Nullpunkt dient, zählt die amtliche badische Vermessung $+ x$ nach Süden und $+ y$ nach Westen, während wir nun, dem allgemeineren Gebrauche in Deutschland entsprechend, $+ x$ nach Norden und $+ y$ nach Osten zählen wollen.

Auf der Sternwarte Mannheim wurde das Azimut nach Speyer astronomisch gemessen, von Norden über Osten gezählt:

Azimut Mannheim-Speyer
 $= 183^\circ 40' 25,291''$ (1)

Dieses Azimut Mannheim-Speyer wird man unter der Bezeichnung *Richtungswinkel* in dem nachfolgenden Ausgleichsabriss S. 265 wieder finden, denn im Coor-

Abriss der Triangulierung des Netzes Fig. 1. S. 264 mit Soldnerschen Coordinaten.

Stationen und Zielpunkte	Richtungswinkel			Entfernung		
	sphärisch α	Redukt. $\delta \alpha$	eben $\alpha_0 = \alpha + \delta \alpha$	sphärisch $\log s$	Redukt. $\delta \log s$	eben $\log s_0$
<i>1. Mannheim.</i>						
Speyer	183° 40' 25,29"	- 0,02	183° 40' 25,27"	4.275 4362·8	+ 0·0	4.275 4362·8
Oggersheim	273 42 22,23	+ 0,00	273 42 22,23	3.779 1890·3	+ 0·3	3.779 1890·6
<i>2. Speyer.</i>						
Mannheim	3° 40' 25,23"	+ 0,04	3° 40' 25,27"	4.275 4362·8	+ 0·0	4.275 4362·8
Königsstuhl	65 10 11,04	- 0,25	65 10 10,79	4.358 8019·0	+ 1·1	4.358 8020·1
St. Michael	161 20 31,86	+ 1,13	161 20 32,99	4.430 2529·8	+ 0·8	4.430 2530·6
Langenkandel	215 0 1,15	- 0,63	215 0 0,52	4.502 8974·0	+ 5·0	4.502 8979·0
Calmit	270 34 57,86	+ 0,00	270 34 57,86	4.418 4219·3	+ 0·3	4.418 4219·6
Oggersheim	345 59 7,49	+ 0,13	345 59 7,62	4.296 5476·9	+ 0·3	4.296 5477·2
<i>3. Oggersheim.</i>						
Melibocus	35° 38' 31,00"	- 0,07	35° 38' 30,93	4.507 0618·5	+ 1·9	4.507 0620·4
Mannheim	93 42 22,24	- 0,01	93 42 22,23	4.779 7890·3	+ 0·3	3.779 1890·6
Königsstuhl	110 37 58,62	+ 0,14	110 37 58,76	4.435 7945·9	+ 0·9	4.435 7946·8
Speyer	165 59 7,85	- 0,23	165 59 7,62	4.296 5476·9	+ 0·3	4.296 5477·2
Calmit	228 30 28,54	- 1,02	228 30 27,52	4.456 1549·3	+ 7·7	4.456 1557·0
Donnersberg	294 51 17,21	+ 1,17	294 51 18,38	4.549 3120·0	+ 5·6	4.549 3125·6
Klobberg	336 22 4,82	+ 0,75	336 22 5,57	4.479 8976·0	+ 7·2	4.479 8983·2
<i>4. Calmit.</i>						
Oggersheim	48° 30' 26,93"	+ 0,59	48° 30' 27,52"	4.456 1549·3	+ 7·7	4.456 1557·0
Speyer	90 34 57,88	- 0,02	90 34 57,86	4.418 4219·3	+ 0·3	4.418 4219·6
Langenkandel	163 12 53,76	- 1,29	163 12 52,47	4.439 5852·2	+ 26·9	4.439 5879·1
Donnersberg	342 23 54,18	+ 3,44	342 23 57,62	4.550 1058·1	+ 52·3	4.550 1110·4
<i>5. Donnersberg.</i>						
Klobberg	57° 29' 38,98"	+ 0,08	57° 29' 39,06"	4.375 9182·8	+ 13·2	4.375 9196·0
Oggersheim	114 51 18,88	+ 0,50	114 51 18,38	4.549 3120·0	+ 5·6	4.549 3125·6
Calmit	162 23 59,80	- 2,18	162 23 57,62	4.550 1058·1	+ 52·3	4.550 1110·4
<i>6. Klobberg.</i>						
Melibocus	92° 51' 35,28"	- 0,02	92° 51' 35,26"	4.489 5442·5	+ 0·3	4.489 5442·8
Oggersheim	156 22 6,51	- 0,94	156 22 5,57	4.479 8976·0	+ 7·2	4.479 8983·2
Donnersberg	237 29 40,80	- 1,74	237 29 39,06	4.375 9182·8	+ 13·2	4.375 9196·0
<i>7. Melibocus.</i>						
Königsstuhl	169° 13' 40,29"	+ 1,49	169° 13' 41,78"	4.560 7787·3	+ 13·9	4.560 7801·2
Oggersheim	215 38 30,55	+ 0,38	215 38 30,93	4.507 0618·5	+ 1·9	4.507 0620·4
Klobberg	272 51 35,26	+ 0,00	272 51 35,26	4.489 5442·5	+ 0·3	4.489 5442·8
<i>8. Königsstuhl.</i>						
St. Michael	199° 2' 30,38"	+ 1,23	199° 2' 31,61"	4.569 8618·7	+ 9·2	4.569 8622·9
Speyer	245 10 10,59	+ 0,20	245 10 10,79	4.358 8019·0	+ 1·1	4.358 8020·1
Oggersheim	290 37 58,96	- 0,20	290 37 58,76	4.435 7945·9	+ 0·9	4.435 7046·8
Melibocus	349 13 43,21	- 1,43	349 13 41,78	4.560 7787·3	+ 13·9	4.560 7801·2
<i>9. St. Michael.</i>						
Königsstuhl	19° 2' 32,78"	- 1,17	19° 2' 31,61"	4.569 8618·7	+ 9·2	4.569 8622·9
Langenkandel	268 48 10,93	+ 0,86	268 48 11,79	4.429 4468·0	+ 0	4.429 4468·0
Speyer	341 20 32,27	- 0,27	341 20 32,00	4.430 2529·8	+ 0·8	4.430 2530·6
<i>10. Langenkandel.</i>						
Speyer	34° 59' 59,18"	+ 1,34	35° 0' 0,52"	4.502 8974·0	+ 5·0	4.502 8979·0
St. Michael	88 48 10,91	+ 0,88	88 48 11,79	4.429 4468·0	+ 0·0	4.429 4468·0
Calmit	343 12 50,62	+ 1,85	343 12 52,47	4.439 5852·2	+ 26·9	4.439 5879·1

Zuerst müssen wir die nötigen Konstanten für die Soldnerschen Glieder zweiter Ordnung bilden:

Der Coordinaten-Nullpunkt hat die geographische Breite rund $\varphi = 49^\circ 30'$, und damit bilden wir nach Seite [20] des Anhangs die für uns nötigen konstanten Coefficienten-Logarithmen:

$$\left. \begin{array}{l} \log \frac{1}{2r^2} = 6.08923 \quad \log \frac{1}{6r^2} = 5.61211 \quad \log \frac{1}{3r^2} = 5.91314 \\ \log \frac{\varrho}{r^2} = 1.70469 \quad \log \frac{\varrho}{2r^2} = 1.40366 \quad \log \frac{\varrho}{6r^2} = 0.92654 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Wir beginnen mit dem schon bei (1) angegebenen Ausgangswerte

$$\text{Mannheim-Speyer } \alpha_0 = 183^\circ 40' 25,291'' \text{ und } \log s = 4.275\,4362\cdot8 \quad (3)$$

Damit können wir sofort die Coordinaten y', x' von Speyer berechnen, und zwar vereinfachen sich diesesmal die allgemeinen Formeln deswegen, weil die Ausgangscoordinaten y, x für Mannheim beide Null sind. Setzt man also $y = 0$ und $x = 0$ in den Formeln (13)–(16) § 46, S. 261, so bekommt man:

$$\left. \begin{array}{l} s \sin \alpha_0 = v \quad s \cos \alpha_0 = u \\ \text{Speyer} \quad y' = v - \frac{u^2 v}{6r^2} \quad , \quad x' = u + \frac{u v^2}{3r^2}, \\ \alpha' = \alpha_0 - \frac{\varrho}{2r^2} u v \end{array} \right\} \quad (4)$$

Nun rechnen wir hiernach mit 7stelligen Logarithmen (mit einer an sich unsicheren, durch Interpolation nach Schrön erhaltenen 8. Kontrollstelle 0·1):

$$\left. \begin{array}{r|c} \log s & 4.275\,4362\cdot8 \\ \alpha_0 = 183^\circ 40' 25,291'' & \log \sin \alpha_0 & 8.806\,6825\cdot0_n \\ \hline \log v & 3.082\,1187\cdot8_n \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{r|c} \log s & 4.275\,4362\cdot8 \\ \log \cos \alpha_0 & 9.999\,1066\cdot6_n \\ \hline \log u & 4.274\,5429\cdot4_n \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v = -1208,144^m \\ u = -18816,678^m \end{array} \quad (5)$$

Hiezu die Korrektions-Glieder nach (4):

$$\left. \begin{array}{r|c} \log u^2 & 8.5491 \\ \log v & 3.0821_n \\ \hline \log (-1 : 6r^2) & 5.6121_n \\ \hline & 7.2433 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{r|c} \log u & 4.2745_n \\ \log v^2 & 6.1642 \\ \hline \log (1 : 3r^2) & 5.9131 \\ \hline & 6.3518_n \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} + 0,0017 \\ - 0,0002 \end{array} \quad (6)$$

Diese kleinen Beträge zu (5) hinzunehmend hat man:

$$\text{Speyer} \quad y = -1208,142^m \quad x = -18816,678^m \quad (7)$$

Endlich noch die Ordinaten-Konvergenz:

$$\left. \begin{array}{r|c} \log u & 4.2745_n \\ \log v & 3.0821_n \\ \hline \log (-\varrho : 2r^2) & 1.4037_n \\ \hline & 8.7603_n \end{array} \right. \quad - 0,058'' \quad (8)$$

Man hat also nun in Zusammenfassung:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Richtungs-Winkel Mannheim-Speyer} & \alpha = 183^\circ 40' 25,291'' \\
 \text{hiezu nach (8):} & & -0,058 \\
 \hline
 & \alpha' = 183^\circ 40' 25,233'' \\
 & & + 180^\circ
 \end{array}$$

$$\text{Also Richtungs-Winkel Speyer-Mannheim } \alpha_2 = 3^\circ 40' 25,233'' \quad (9)$$

Nun kann man die Richtungs-Winkel aller von Speyer ausgehenden Strahlen angeben, denn man braucht nur die auf Speyer ausgeglichenen Winkel mit α_2 zusammenzusetzen. Dazu brauchen wir, wie der Anblick des Netzbildes Fig. 1, S. 264 zeigt, die ausgeglichenen Dreieckswinkel der Station Speyer, welche nach Band I, 3. Aufl. 1888, S. 202, 203 sind:

Mannheim	...	=	61° 29' 45,804"	{
Königsstuhl	[15]	=	96 10 20,829	
St. Michael	[16]	=	53 39 29,285	
Langenkandel	[19]	=	55 34 56,714	
Calmit	[22]	=	75 24 9,630	
Oggersheim	...	=	17 41 17,738	

Wenn man diese 6 Winkel zu dem soeben berechneten $3^{\circ} 40' 25,233''$ nacheinander addiert, so erhält man die sämtlichen Richtungswinkel, wie sie für die Station 2, Speyer auf S. 265 angegeben sind, auf $0,01''$ abgerundet.

Nach diesem ersten Beispiele können wir kurz sagen, dass auch die zweite vom Nullpunkt Mannheim ausgehende Richtung Mannheim-Oggersheim ebenso wie Mannheim-Speyer behandelt wird, und dann auch den Abriss 3. Oggersheim auszufüllen gestattet, wie auf S. 265 zu sehen ist.

Nach diesem kommen aber die allgemeinen Coordinatenformeln von (14)–(16) § 46, S. 261, deren Anwendung an dem Beispiel Speyer-Langenkandel gezeigt werden soll:

Aus dem soweit ausgefüllten Abrisse S. 265 entnimmt man hiezu:

Speyer-Langenkandl	$\alpha = 215^\circ 0' 1,150'$	und	$\log s = 4.502\ 8974\cdot 0$
$\log s$	4.502 8974·0	$\log s$	4.502 8974·0
$\log \sin \alpha$	9.758 5947·8 _n	$\log \cos \alpha$	9.913 3628·3 _n
$\log v$	4.261 4921·8 _n	$\log u$	4.416 2602·3 _n
	$v = -18\ 259,639$	$u = -26\ 077,156$	
Speyer (7) gegeben:	$y = -1\ 208,142$	$x = -18\ 816,678$	
	$y + v = -19\ 467,781$	$x + u = -14\ 893,834$	

Korrektions-Glieder für y .			Korrektions-Glieder für x .		
$\log u^2$	8.8825	$\log u^2$	8.8825	$\log u$	4.4163 _n
$\log y$	3.0821 _n	$\log n$	4.2615 _n	$\log y'^2$	8.5786
$\log(-1:2r^2)$	6.0892 _n	$\log(-1:6r^2)$	5.6121 _n	$\log(1:2r^2)$	6.0892
	8.0038		8.7061		9.0841 _n
+ 0.010		+ 0.051		- 0.121	+ 0.036

Zusammenfassung:

$$\begin{array}{r}
 y + v = -19\,467,781^m \\
 + 0,010 \\
 + 0,051 \\
 \hline
 \text{Langenkandel: } y' = -19\,467,720
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x + u = -44\,893,834^m \\
 - 0,121 \\
 + 0,036 \\
 \hline
 x' = -44\,893,919
 \end{array}$$

Korrektions-Glieder für α :

$$\begin{array}{r|l}
 \log u & 4.4163_n \\
 \log y & 3.0821_n \\
 \log(-\varrho : r^2) & 1.7047_n \\
 \hline
 & 9.2031_n \\
 & - 0,160
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 \log u & 4.4163_n \\
 \log v & 4.2615_n \\
 \log(-\varrho : 2r^2) & 1.4037_n \\
 \hline
 & 0.0815_n \\
 & - 1,206
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{Statt dessen kann auch die} \\
 \text{Rechnung geführt werden nach} \\
 \text{der zweiten Formel (16) § 46. S. 261} \\
 \alpha' - \alpha = u \frac{y + y'}{2} \frac{\varrho}{r^2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Zusammenfassung: } \alpha = 215^\circ 0' 1,150'' \\
 - 0,160 \\
 - 1,206 \\
 \hline
 \alpha' = 214^\circ 59' 59,784'' \\
 \pm 180^\circ
 \end{array}$$

$\alpha_{10} = 34^\circ 59' 59,784''$ = Richtungs-Winkel Langenkandel-Speyer.

Mit diesem Richtungs-Winkel α_{10} und mit den auf Langenkandel ausgeglichenen Dreiecks-Winkeln kann man nun von neuem einen orientierten Abriss für die Station 10. Langenkandel aufstellen, wie auf S. 265 zu sehen ist.

In dieser Weise wird in dem ganzen Netze auf verschiedenen Wegen herum gerechnet, wobei zahlreiche Proben sowohl für die Richtungs-Winkel als auch für die Coordinaten entstehen, z. B. nachdem die beiden Stationen 2. Speyer und 3. Oggersheim erledigt sind, kann man nach 4. Calmit von beiden Seiten her rechnen, und man wird finden:

$$\begin{array}{lll}
 \text{von 2. Speyer her:} & 4. Calmit & y_4 = -27\,414,066^m \quad x_4 = -18\,550,134^m \\
 & " 3. Oggersheim her: & ,065 \quad ,135
 \end{array}$$

also hinreichende Übereinstimmung. Ebenso auch die Richtungs-Winkel:

$$\begin{array}{lll}
 \text{von 2. Speyer her:} & \text{Richtungs-Winkel (4.2)} & = 90^\circ 34' 57,882'' \\
 & " 3. Oggersheim her: & (4.3) = 48^\circ 30' 26,932''
 \end{array}$$

Diese beiden Richtungs-Winkel werden in den Abriss der Station Calmit eingesetzt, und geben mit den auf Calmit ausgeglichenen Dreiecks-Winkeln Proben, welche in unserem Falle zu Abänderungen von $0,002''$ und $0,003''$ geführt haben, was jedoch auf S. 265, wo alles auf $0,01''$ abgerundet ist, nicht mehr bemerklich werden kann.

Man sieht, dass die Stations-Abrisse von S. 265 in Hinsicht auf die Richtungs-winkel allmählich entstehen. Die Endwerte der Coordinaten sind folgende:

Punkt	y	x	
1. Mannheim . . .	0,000 ^m	0,000 ^m	
2. Speyer	— 1 208,142	— 18 816,676	Rechtwinklige sphä-
3. Oggersheim . . .	— 6 001,777	+ 388,767	rische Soldnersche
4. Calmit	— 27 414,066	— 18 550,184	Coordinaten aller
5. Donnersberg . . .	— 38 145,688	+ 15 278,872	Punkte des Netzes
6. Klobberg	— 18 104,628	+ 28 049,296	Fig. 1. S. 264. Null-
7. Melibocus	+ 12 727,470	+ 26 509,100	punkt Mannheim mit
8. Königsstuhl	+ 19 525,476	— 9 223,075	+ x nach Norden,
9. St. Michael	+ 7 407,498	— 44 332,386	und + y nach Osten.
10. Langenkandel . . .	— 19 467,721	— 44 893,918	

Vergleichungen dieser Coordinaten mit den amtlichen Coordinaten von Baden, Bayern Hessen, und Bemerkungen dazu, wurden gegeben in Band I, Aufl. 3, 1888, S. 203—204, II. Band Aufl. 2, 1878, S. 272 und astr. Nachr., 75. Band, 1870, Nr. 1795—1796, S. 289—306 und S. 367.

Der grosse Abriss von S. 265 wäre für die Zwecke der Soldnerschen Coordinaten-Behandlung genügend, wenn er die sphärischen Richtungs-Winkel α und die sphärischen Entfernungen $\log s$ enthielte. Wir haben aber auch noch die ebenen Richtungs-Winkel α_0 und die ebenen Entfernungen s_0 dazu berechnet, nach den einfachen Formeln:

$$\tan \alpha_0 = \frac{y' - y}{x' - x}$$

$$s_0 = \frac{y' - y}{\sin \alpha_0} = \frac{x' - x}{\cos \alpha}$$

wobei die Coordinaten x, y, x', y' selbst die sphärischen in der vorstehenden Tabelle (10) enthaltenen sind. Die Differenzen $\delta \alpha$ und $\delta \log s$ sind dann einfach aus $\alpha_0 - \alpha$ und $\log s_0 - \log s$ erhalten. Wie man diese $\delta \alpha$ und $\delta \log s$ selbstständig berechnet, wird im folgenden § 48. gezeigt werden.

Wir haben diese $\delta \alpha$ und $\delta \log s$ auf S. 265 mit aufgenommen, auch wegen der späteren Vergleichung mit den konformen Coordinaten.

§ 48. Bestimmung von Entfernung und Richtungs-Winkeln aus Soldnerschen Coordinaten.

Es handelt sich um Umkehrung der bisherigen in § 46.—47. behandelten Aufgabe, und um die Übersicht zu gewinnen, wollen wir an die entsprechenden einfachen Aufgaben der Ebene erinnern. Man hat bekanntlich in der Ebene:

$$y' - y = s \sin \alpha \quad x' - x = s \cos \alpha \quad (a)$$

$$\tan \alpha = \frac{y' - y}{x' - x} \quad \text{und} \quad s = \frac{y' - y}{\sin \alpha} = \frac{x' - x}{\cos \alpha} \quad (b)$$

$$\text{oder} \quad s = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2} \quad (c)$$

Während in § 46. die sphärischen Analogien zu den ebenen Formeln (a) behandelt worden sind, handelt es sich jetzt darum, auch zu den umgekehrten For-

meln (b) und (c) das zu finden, was entsprechend auf der Kugel gilt, d. h. wir stellen die Aufgabe: Gegeben sind die sphärischen Coordinaten zweier Punkte P und P' , nämlich:

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ und } y \text{ Coordinaten von } P \\ x' \text{ und } y' \quad " \quad " \quad P' \end{array} \right\} \quad (1)$$

Gesucht ist:

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Entfernung } PP' = s \\ \text{der Richtungs-Winkel } (PP') = \alpha \\ " \quad " \quad (P'P) = \beta = \alpha' \pm 180^\circ \end{array} \right\} \quad (2)$$

I. Gemeinsame Formeln für s und α .

Man kann diese Aufgabe lösen durch Umkehrung von (14), (15) § 46. S. 261, wobei in den Korrektions-Gliedern $u = x' - x$ und $v = y' - y$ gesetzt wird. Auf diese Weise erhält man:

$$s \sin \alpha = (y' - y) + \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2} = (y' - y) + \delta y \quad (3)$$

$$s \cos \alpha = (x' - x) - \frac{(x' - x)y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x)(y' - y)^2}{6 r^2} = (x' - x) + \delta x \quad (4)$$

Die hier geschriebenen Zeichen δy und δx sollen nur die Zusammenfassung der Korrekturen-Glieder ausdrücken, denn man hat nun weiter:

$$\tan \alpha = \frac{(y' - y) + \delta y}{(x' - x) + \delta x} \quad (5)$$

$$s = \frac{(y' - y) + \delta y}{\sin \alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{(x' - x) + \delta x}{\cos \alpha} \quad (6)$$

Um auch den Gegenrichtungs-Winkel β zu finden, braucht man nur die Bezeichnungen für die Punkte P und P' umzukehren, was wir nicht durch besondere Formeln von der Form (5) und (6) anzugeben für nötig halten (vgl. das nachfolgende Zahlen-Beispiel).

Statt dessen kann man aber auch die Formel (16) § 46. S. 261 anwenden:

$$\alpha' = \alpha - (x' - x)(y' + y) \frac{\varrho}{2 r^2} \quad (7)$$

$$\text{oder} \quad \alpha' = \alpha - (x' - x)y \frac{\varrho}{r^2} - (x' - x)(y' - y) \frac{\varrho}{2 r^2} \quad (7a)$$

$$\text{und dann:} \quad \beta = \alpha' \pm 180^\circ \quad (7b)$$

Damit sind alle Bedürfnisse befriedigt; es ist jedoch aus vielen Gründen erwünscht, die Entfernung s auch ohne die Richtungs-Winkel oder andererseits einen oder beide Richtungs-Winkel ohne die Entfernung zu bestimmen.

II. Einzelformel für s .

Um die Entfernung s allein aus den Coordinaten abzuleiten, kann man sofort die Gleichungen (3) und (4) benützen, denn wenn man diese quadriert und addiert, so erhält man:

$$\begin{aligned} s^2 &= \left((y' - y) + \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2} \right)^2 \\ &\quad + \left((x' - x) - \frac{(x' - x)y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x)(y' - y)^2}{6 r^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Wenn man die Quadrierungen ausführt und dabei alle Glieder von der Ordnung $1:r^2$ vernachlässigt, so erhält man:

$$s^2 = (y' - y)^2 + \frac{(x' - x)^2 (y' - y) y}{r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)^2}{3 r^2}$$

$$+ (x' - x)^2 - \frac{(x' - x)^2 y'^2}{r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)^2}{3 r^2}$$

Zusammengefasst und geordnet giebt dieses:

$$s^2 = (y' - y)^2 + (x' - x)^2 + \frac{(x' - x)^2}{3 r^2} \left(3 y (y' - y) + 2 (y' - y)^2 - 3 y'^2 \right)$$

$$s^2 = (y' - y)^2 + (x' - x)^2 - \frac{(x' - x)^2}{3 r^2} \left(y^2 + y y' + y'^2 \right) \quad (8)$$

Hier bezeichnen wir die ersten Glieder, welche der Rechnung mit ebenen Coordinaten entsprechen mit s_0^2 , d. h.:

$$(y' - y)^2 + (x' - x)^2 = s_0^2 \quad (9)$$

und da man in den Korrektions-Gliedern s_0 mit s verwechseln kann, wird (8) geben:

$$s^2 = s_0^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{3 r^2} (y^2 + y y' + y'^2) \right)$$

$$s = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6 r^2} (y^2 + y y' + y'^2) \right) \text{ oder } = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6 r^2} \frac{y'^3 - y^3}{y' - y} \right) \quad (10)$$

oder logarithmisch:

$$\log s = \log s_0 - \frac{\mu}{6 r^2} \cos^2 \alpha (y^2 + y y' + y'^2) \quad (11)$$

III. Einzelformel für α .

Um auch für α eine unmittelbare Formel zu bekommen, denken wir uns die Formeln (3) und (4) so zerlegt:

$$\begin{aligned} s \sin \alpha &= (y' - y) + d y \\ s \cos \alpha &= (x' - x) + d x \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (12)$$

wo die Bedeutung von $d y$ und $d x$ sich durch Vergleichung mit (3) und (4) giebt, d. h. es sind $d y$ und $d x$ die negativen Werte der oben mit δy und δx bezeichneten Zusammenfassungen, oder ausführlich:

$$\begin{aligned} d y &= \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2} \\ d x &= -\frac{(x' - x) y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x) (y' - y)^2}{6 r^2} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (13)$$

Wir wollen auch α selbst entsprechend zerlegt denken in $\alpha_0 + d \alpha$ und haben dann:

$$\alpha = \alpha_0 + d \alpha = \arctan \frac{(y' - y) + d y}{(x' - x) + d x} \quad (14)$$

Nach dem Taylor'schen Satze gibt dieses:

$$\alpha_0 = \operatorname{arc tang} \frac{y' - y}{x' - x} \quad (15)$$

und

$$d\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'-y}{x'-x}\right)^2} \frac{d y'}{x' - x} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y'-y}{x'-x}\right)^2} \frac{d x}{(x' - x)^2} \quad (16)$$

$$d\alpha = \frac{x' - x}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} d y' - \frac{y' - y}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} d x \quad (16)$$

Setzt man die oben bei (13) erklärten Bedeutungen von $d y'$ und $d x$ ein, so erhält man aus (16):

$$d\alpha = \frac{(x' - x)y}{2r^2} \cos^2 \alpha + \frac{(x' - x)(y' - y)}{6r^2} \cos^2 \alpha + \frac{y'^2}{2r^2} \cos \alpha \sin \alpha \\ - \frac{(x' - x)(y' - y)}{6r^2} \sin^2 \alpha \quad (17)$$

Dieses kann auch so geschrieben werden:

$$d\alpha = \frac{(x' - x)y}{2r^2} \cos^2 \alpha + \frac{y'^2}{4r^2} \sin 2\alpha + \frac{(x' - x)(y' - y)}{6r^2} \cos 2\alpha \quad (18)$$

Nützlicher ist noch eine andere Umformung von (17), welche im dritten Gliede von (17) den Faktor $\sin^2 \alpha$ erzeugt, nämlich:

$$d\alpha = \frac{x' - x}{6r^2} \cos^2 \alpha (2y + y') + \frac{x' - x}{6r^2} \sin^2 \alpha \left(\frac{3y'^2}{y' - y} - (y' - y) \right)$$

$$\text{hier ist } \frac{3y'^2}{y' - y} - (y' - y) = 2y + y' + \frac{y^2 + yy' + y'^2}{y' - y}$$

und setzt man dieses in das vorhergehende ein, so bekommt man:

$$d\alpha = \frac{x' - x}{6r^2} (2y + y') + \frac{x' - x}{6r^2 s^2} (y'^3 - y^3) \quad (19)$$

Dieses $d\alpha$ ist die Verbesserung, welche an dem Näherungswert α_0 von (15) noch anzubringen ist; man kann also im Zusammenhang für den Richtungs-Winkel von einem Punkte P (mit x, y) nach P' (mit x', y') schreiben, zugleich mit Zusatzung der nötigen ϱ :

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\varrho}{6r^2} (x' - x) (2y + y') + \frac{\varrho}{6r^2} \frac{x' - x}{s^2} (y'^3 - y^3) \quad (20)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\varrho}{6r^2} (x' - x) (2y + y') + \frac{\varrho}{6r^2} (y^2 + yy' + y'^2) \sin \alpha \cos \alpha \quad (20a)$$

Auf den jenseitigen Punkt angewendet giebt diese Formel:

$$\alpha' = \alpha_0 + \frac{\varrho}{6r^2} (x - x') (y + 2y') + \text{zweites Glied von oben.}$$

Diese beiden Formeln geben subtrahiert:

$$\alpha' - \alpha = \frac{\varrho}{2r^2} (x' - x) (y + y') \quad (21)$$

Dieses ist wieder die Formel für die Ordinaten-Konvergenz nach (11) § 46. S. 261, was auch unmittelbar eingesehen werden kann.

IV. Zahlenbeispiele.

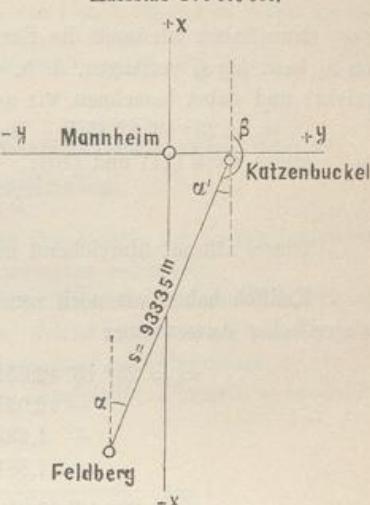
Um die vorstehenden Formeln anzuwenden, kann man in den Zahlenangaben von § 47. reiche Gelegenheit finden, indem aus den Coordinaten von (10) S. 269 sich die Richtungs-Winkel und die Entfernungen des grossen Abrisses S. 265 wieder rückwärts finden lassen müssen. Dieses als Übung anheimgebend, wollen wir ein grösseres Zahlenbeispiel hier durchrechnen, bei welchem die Korrektions-Glieder mehr ausmachen.

Nach nebenstehender Fig. 1. nehmen wir die zwei Punkte Katzenbuckel und Feldberg in dem badischen Coordinatensystem (1870—1871 von uns festgelegte und ins badische System eingerechnete Gradmessungspunkte). Die mittlere Breite ist rund = 49° und dazu

$$\log \frac{1}{r^2} = 6.39031.$$

Die nachfolgenden Rechnungen sind nicht blos 7 stellig sondern mit dem 10 stelligen Thesaurus gemacht, um die Proben formell jedenfalls bis auf $0,001''$ zum Stimmen zu bringen, was bei diesem Schulbeispiel formell erwünscht ist.

Fig. 1.
Massstab 1:5 000 000.



$$\begin{array}{ll} K, \text{ Katzenbuckel } & y' = + 42 176,169^m \\ F, \text{ Feldberg } & y = - 34 075,071 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x' = - 1575,546^m \\ x = - 179 239,479 \end{array}$$

$$y' - y = + 76 251,240 \quad x' - x = + 177 663,933$$

$$\text{Hiezu werden die Korrektions-} \left\{ \begin{array}{l} \delta y \\ \delta x \end{array} \right. \text{glieder nach (3) u. (4) berechnet:} \left\{ \begin{array}{l} -13,210 \\ +9,854 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -3,881 \\ +4,229 \end{array} \right.$$

$$(y' - y) + \delta y = + 76 247,884 \quad (x' - x) + \delta x = + 177 664,281$$

damit geben die Formeln (5) und (6):

$$(F, K) = \alpha = 23^{\circ} 13' 38,920'' \quad \log s = 5.286 3099 \cdot 9 \quad s = 193 334,779^m \quad (21)$$

Die Umkehrung der Bezeichnungen giebt:

$$F, \text{ Feldberg} \quad y' = - 34 075,071^m \quad x' = - 179 239,479^m$$

$$K, \text{ Katzenbuckel} \quad y = + 42 176,169 \quad x = - 1575,546$$

$$\text{Korrektionsglieder} \left\{ \begin{array}{l} y' - y = - 76 251,240 \\ \delta y \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} +16,350 \\ -9,854 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x' - x = - 177 663,933 \\ \delta x \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} +2,534 \\ -4,229 \end{array} \right.$$

$$\text{Zähler} = - 76 244,744 \quad \text{Nenner} = - 177 665,628$$

damit wieder nach (5) und (6):

$$(K, F) = \beta = 203^{\circ} 13' 35,275'' \quad \log s = 5.286 3099 \cdot 8 \quad s = 193 334,778^m \quad (22)$$

Durch (21) und (22) ist also bereits die Entfernung s auf $0,001^m$ sicher gestellt.

Um auch die Richtungs-Winkel α und β zu versichern, hat man nach (7) und (7 a) die Differenz beider Richtungs-Winkel und zwar bei (7 a) abermals doppelt, je nachdem man die Bezeichnungen P und P' entsprechend F und K , oder umgekehrt, wählt; man bekommt für unser Beispiel:

$$\text{aus (7): } \alpha' - \alpha = -3,646'' \quad (23)$$

$$\text{aus (7 a): } \alpha' - \alpha = +30,674'' - 34,320'' = -3,646'' \quad (23 \text{ a})$$

$$\text{oder } " : \beta' - \beta = +37,966 - 34,320 = +3,646'' \quad (23 \text{ b})$$

Diese 3 Werte stimmen unter sich, und mit der Differenz von (21) und (22), welche $3,645''$ beträgt, auf $0,001''$.

Nun haben wir noch die Formeln (10) und (11), welche zuerst eine Berechnung von s_0 bzw. $\log s_0$ verlangen, d. h. eine Berechnung, welche ebenen Coordinaten entspricht; und dabei berechnen wir auch zugleich einen ebenen Wert α_0 :

$$\alpha_0 = 23^\circ 13' 42,356'' \quad \log s_0 = 0,286\,3122\cdot4 \quad s_0 = 193\,335,782'' \quad (24)$$

$$\text{Hiezu nach (11) und (10):} \quad \begin{array}{r} -22\cdot6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} -1,004 \\ \hline \end{array}$$

$$\log s = 5,286\,3099\cdot8 \quad s = 193\,334,778 \quad (25)$$

Dieses stimmt hinreichend mit (21) und (22).

Endlich haben wir noch verschiedene Formeln für $d\alpha$. Die Formel (18) gibt in zweifacher Anwendung:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_0 = 23^\circ 13' 42,356'' & \beta_0 = 203^\circ 13' 42,356'' \\ -12,951 & -16,030 \\ +1,633 & +1,066 \\ +7,881 & +7,881 \\ \hline \alpha = 23^\circ 13' 38,919'' & \beta = 203^\circ 13' 35,273'' \end{array} \quad (26)$$

Endlich gibt die Formel (20) ebenfalls zweifach:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_0 = 23^\circ 13' 42,356'' & \beta_0 = 203^\circ 13' 42,356'' \\ -3,897 & -7,543 \\ +0,460 & +0,460 \\ \hline \alpha = 23^\circ 13' 38,919'' & \beta = 203^\circ 13' 35,273'' \end{array} \quad (27)$$

Damit ist alles mit zahlreichen Proben berechnet, man sieht, dass man mit solchen sphärischen Coordinaten alles rechnen kann, was auch in der Ebene vorkommt, allein die neben der Hauptrechnung herlaufenden Korrekutions-Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ machen doch ziemlich viele Mühe und wir wollen gleich hier bemerken, dass bei den konformen Coordinaten, welche wir später (§ 50.) kennen lernen werden, die Nebenrechnungen mit $1:r^2$ erheblich einfacher und zugleich viel übersichtlicher werden.

Ein weiteres Zahlenbeispiel mit Soldnerschen Coordinaten, nämlich sphärisches Rückwärts-Einschneiden bei gegebenen Coordinaten dreier Zielpunkte hatten wir in 2. Aufl., II. Band 1878, S. 278—279 ausführlichst und in 3. Aufl., III. Band 1890, S. 276—277 noch im Auszug gebracht, welches nun übergangen werden mag.

Die „Soldnerschen“ Coordinaten, welche in den vorstehenden § 46.—48. behandelt wurden, sind zuerst öffentlich mitgeteilt von Bohnenberger in der Abhandlung „De computandis dimensionibus trigonometricis etc.“ Tübingen 1826, § 15—16, und Bohnenberger sagt dazu in § 16: „formulae (entsprechend unseren (14), (15), (16) § 46. S. 261) convenient cum iis, quibus usus est cel. Soldner in computandis dimensionibus bavaricis.“ In Württemberg sind diese Coordinaten zur Landesvermessung eingeführt und Bohnenbergers Entwicklungen stets hochgehalten worden, wie namentlich zu ersehen ist aus „Pross, Lehrbuch der praktischen Geometrie“, Stuttgart 1838, S. 314 und aus dem amtlichen Werke von Kohler, „die Landesvermessung des Königreichs Württemberg u. s. w. 1858“, S. 125—146.

Von Württemberg aus gelangten diese Coordinaten auch in die Bayerische geodätische Litteratur, nämlich in Bauernfeinds „Elemente der Vermessungskunde, 1. Auflage, II. Band 1858“, S. 201–206, wo (ohne Quellenangabe) ein Auszug aus Bohnenberger „De computandis etc.“ § 15–17 mit drei Zahlenbeispielen Bohnenbergers gegeben sind als „Berechnung einiger Dreiecke der württembergischen Vermessung.“

Soldners Entwicklungen, von 1810 stammend, wurden erst 1873 veröffentlicht in „Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage“, München 1873, S. 263–281.

Alle diese Schriften geben die Grundformeln (14)–(16) § 46. S. 261 und in Betreff der Umkehrung nur die Formeln (3)–(7) S. 270. Die weiteren Formeln (10)–(20) S. 271–272 sind zuerst aufgestellt in unserer 1. Auflage, „Taschenbuch der praktischen Geometrie 1873“, S. 328.

§ 49. Karten-Zeichnung nach rechtwinkligen sphärischen (Soldnerschen) Coordinaten.

Man benutzt die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten zur Karten-Zeichnung, indem man dieselben wie rechtwinklige ebene Coordinaten behandelt.

Dadurch erhält man ein verzerrtes Bild der krummen Erdoberfläche in der Ebene, und es ist unsere Aufgabe, die Verzerrungen, welche hier, wie bei allen anderen ebenen Abbildungen der Erdoberfläche unvermeidlich sind, zu untersuchen.

Hiezu brauchen wir nur die bereits in § 48. entwickelten Formeln anzuwenden.

Wir haben von (10) und (9) § 48. S. 271.

$$s = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6 r^2} (y^2 + y' y + y'^2) \right) \quad (1)$$

$$s_0 = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2} \quad (2)$$

Indem wir in Fig. 1. die Punkte A und B mit ihren Coordinaten x, y und x', y' im ebenen System dargestellt haben, finden wir offenbar die Entfernung s_0 von (2) als geradlinige Entfernung AB , und man benutzt das Verhältnis dieser geradlinigen Karten-Entfernung s_0 zu der wahren Entfernung s zur Berechnung des Verzerrungs-Verhältnisses, d. h. man setzt:

$$v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{y^2 + y' y + y'^2}{6 r^2} \cos^2 \alpha \quad (3)$$

Für eine sehr kurze Linie s ist $y' = y$ zu setzen, und dann hat man:

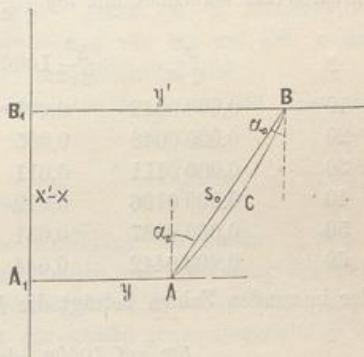
$$v = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \cos^2 \alpha \quad (4)$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für die Vergrößerung einer kurzen Linie in irgend einem Punkte mit der Ordinate y , in der Richtung α . Die Vergrößerung v ist nicht abhängig von der Abscisse x , sondern nur von der Ordinate y und von der Richtung α . In Bezug auf α erreicht v seine äußersten Werte mit $\alpha = 0^\circ$ oder 180° einerseits und mit $\alpha = 90^\circ$ oder 270° andererseits, nämlich:

$$\alpha = 0^\circ \text{ giebt } v_{\max} = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \text{ (Meridian, } x\text{-Axe)} \quad (5)$$

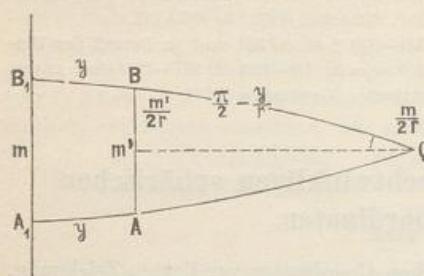
$$\alpha = 90^\circ, \dots, v_{\min} = 1 \quad (\text{West-Ost, } y\text{-Axe}) \quad (6)$$

Fig. 1.
Soldner'sche Coordinaten in ebener Darstellung.



Diese zwei Ergebnisse sind an und für sich leicht verständlich. In der West-Ost-Richtung werden die Ordinaten sowohl auf der Kugel als auch in der Ebene *gleich* aufgetragen, d. h. es ist $v = 1$; dagegen in der Nord-Richtung müssen die ebenen Massen zu gross erscheinen, weil die in Wirklichkeit konvergierenden Ordinaten y in der ebenen Zeichnung parallel sind.

Fig. 2.



Hiezu ist Fig. 2. gezeichnet mit dem Masse m in der Abscissen-Axe selbst und einem Masse m' parallel der Abscissen-Axe, im Abstand y . In der Ebene werden aber die Ordinaten y parallel, also m' gleich m dargestellt, und das Vergrösserungs-Verhältnis ist daher $= \frac{m}{m'}$. Nach Fig. 2. ist AB

ein Parallelkreisbogen vom Halbmesser $r' = r \cos \frac{y}{r}$ und da bei Q der Winkel $\frac{m}{r}$ sich findet, hat man:

$$\begin{aligned} m' &= AB = \frac{m}{r} r' = m \cos \frac{y}{r} \\ \frac{m'}{m} &= \cos \frac{y}{r} = 1 - \frac{y^2}{2r^2} \quad \text{oder} \quad \frac{m}{m'} = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Dieses ist eine Bestätigung von (5).

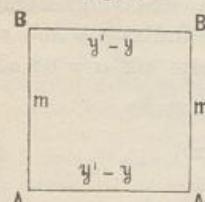
Zur Übersicht der linearen Verzerrungs-Verhältnisse haben wir nach (5) folgende Zahlen-Werte berechnet mit $\log \frac{1}{2r^2} = 6.08918$ für $\varphi = 50^\circ$.

y	$\frac{y^2}{2r^2}$	$\frac{y^2}{2r^2} 1000^m$	y	$\frac{y^2}{2r^2}$	$\frac{y^2}{2r^2} 1000^m$
10 ^{km}	0,000 0012	0,001 ^m	70 ^{km}	0,000 0602	0,060 ^m
20	0,000 0048	0,005	80	0,000 0786	0,079
30	0,000 0111	0,011	90	0,000 0995	0,099
40	0,000 0196	0,020	100	0,000 1228	0,123
50	0,000 0307	0,031	150	0,000 2763	0,276
60	0,000 0442	0,044	200	0,000 4912	0,491

oder in runden Zahlen beträgt die Verzerrung

$$\left. \begin{aligned} 5^m &\text{ auf } 1000^m \text{ oder } \frac{1}{20000} \text{ für } y = 64 \text{ Kilometer} \\ 10^m &\text{ auf } 1000^m \text{ oder } \frac{1}{10000} \text{ für } y = 90 \text{ Kilometer} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Fig. 3.



Wenn ein rechteckiges Kartenblatt $A'B'A'B'$ (Fig. 3.) in der beschriebenen Weise behandelt wird, so erscheint zwar der Südrand $A'A'$ und der Nordrand $B'B'$ in richtiger Grösse, dagegen der Westrand $A'B$ und der Ostrand $A'B'$ werden etwas zu gross.

Wir wollen annehmen, der Westrand $A'B$ habe die Ordinate $y = 90000^m$ und der Ostrand $A'B'$ habe $y' = 100000^m$, dann wird nach der Zahlen-Übersicht (8), in der Zeichnung der Westrand um 0,0099 % und der Ostrand um 0,0123 %

zu gross, oder wenn $A B = A' B' = 1^m$ Papiergrösse hat, so giebt das hier einen Fehler von nur etwa $0,1^m$, der aber bei $y = 200^km$ rasch auf $0,5^m$ ansteigt.

Solche Verzerrungen mögen in der Karten-Zeichnung und auf dem Messtisch unschädlich sein, in der Messung und Berechnung von Polygon-Zügen sind sie es nicht.

Geht ein solcher Zug von 1000^m Länge in der Meridian-Richtung von einem trigonometrischen Punkte zu einem zweiten trigonometrischen Punkt, so wird, wenn gar keine Messungs-Fehler vorkommen, doch der Zug die Entfernung beider Punkte um 10^cm kleiner geben als die Coordinaten der Punkte, so lange man nur die ebene Coordinaten-Rechnung anwendet.

In Bayern, wo die Ordinaten in dem *einen* System des Münchner Meridians bis zu rund 200 Kilometer betragen, mussten daher in der Zugsberechnung besondere sphärische Korrekturen angebracht werden, über welche berichtet wird in der „Instruktion für neue Katastermessungen in Bayern“, 1885, § 23 und in „Technische Anleitung“ u. s. w. von Dr. J. H. Franke, München 1889, S. 121.

Wir wollen aber gleich hier bemerken, dass die Soldnerschen Coordinaten-Verzerrungen hauptsächlich deswegen schädlich wirken, weil sie nach verschiedenen Seiten verschieden sind. Wir werden später die konformen Coordinaten kennen lernen, bei welchen die Verzerrung in einem Punkte nach allen Richtungen gleich ist, und es ist leicht einzusehen, dass bei konformen Coordinaten jene bayrischen besonderen Reduktionen der Züge überflüssig würden, weil sie einfach als allgemeine Massstabs-Veränderung (etwa als konstante logarithmische Reduktion) auf weitem Gebiete konstant den trigonometrischen Netzehrlern zuzuschlagen wären, ganz ebenso wie die von der Höhe des Landes über dem Meere herrührenden Reduktionen, welche nach § 9. S. 67 für $h = 100^m$ den Betrag von 16^{mm} auf 1^m geben. Z. B. München mit rund 500^m Höhe hat hieraus eine Massstabsvergrösserung von 8^m auf 1^m , welche, weil nach allen Seiten gleich, auch nicht besonders berücksichtigt wird.

In Württemberg und Baden gehen die Ordinaten bis rund 100 Kilometer, in Preussen bis 70 Kilometer.

Weitere Ausführungen.

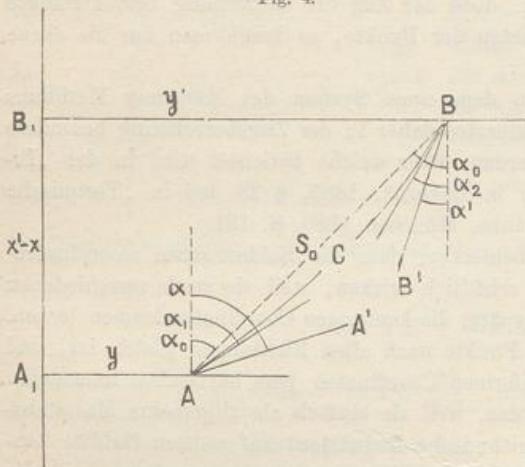
Wenn die Fig. 1. S. 275 nicht bloss eine Abbildung der Punkte A und B von der Kugel auf die Ebene vorstellen soll, sondern auch eine Abbildung der Linie $A B$, d. h. des auf der Kugel gezogenen Gross-Kreisbogens $A B$, so ist zuerst einzusehen, dass in Fig. 1. die Gerade $A B = s_0$ *nicht* das Abbild jenes Bogens $A B$ ist, sondern der Bogen $A C B$.

Allerdings in Hinsicht auf die Länge ist die Gerade $A B = s_0$ und der Bogen $A C B$ in Fig. 1. bei der von uns überhaupt eingehaltenen Genauigkeit von $\frac{1}{r^2}$ nicht zu unterscheiden, denn die Pfeilhöhe des Bogens $A C B$ ist nur von der Ordnung $\frac{s^3}{r^2}$, und daraus kann man schliessen, dass der Krümmungs-Halbmesser der Kurve von der Ordnung $\frac{r^2}{s}$, und endlich dass der Unterschied zwischen dem Bogen $A C B$ und der Sehne $A B$ nur von der Ordnung $\frac{s^5}{r^4}$ ist, was in allen unseren bisherigen Entwicklungen vernachlässigt wurde.

Dagegen in Hinsicht auf die *Richtungen* in A und B ist der Bogen $A C B$

und die Sehne AB in Fig. 1. durchaus nicht zu verwechseln, und wenn der Bogen ACB in Fig. 1. das Soldnersche Projektions-Abbild des sphärischen Bogens AB auf der Urbildkugel Fig. 1. S. 257 ist, dann sind die Richtungs-Winkel, welche diesem Bogen (bzw. seinen Tangenten in A und B) gegen die x -Axe zukommen, *nicht* die Richtungs-Winkel α und α' des Urbildes, weil die Abbildung nicht konform ist.

Fig. 4.



Dieses ist in Fig. 4. nochmals besonders dargestellt, und aus einer besonderen Untersuchung, welche in „Zeitschr. für Verm.“ 1891, S. 289—294 mitgeteilt wurde, stellen wir, ohne auf alles Einzelne einzugehen, folgendes zusammen: A und B sind zwei Soldnersche Projektions-Punkte mit den Coordinaten $x y$ und $x' y'$. Die Soldnerische Abbildung des sphärischen Bogens AB ist die Curve $A'CB'$ von Fig. 4., deren Tangenten AA' und BB' gewisse Richtungs-Winkel α_1 und α_2 haben, welche aber weder den bisher betrachteten α und α' noch den α_0 gleich sind; für α_0 hat man:

$$\tan \alpha_0 = \frac{y' - y}{x' - x}$$

Dazu nach (20a) § 48. S. 272:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{x' - x}{6 r^2} (2y + y') + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{6 r^2} (y^2 + yy' + y'^2) \quad (10)$$

Dann nach „Zeitschr. f. Verm.“ 1891, S. 292:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = \frac{x' - x}{6 r^2} (2y + y') (1 + \sin^2 \alpha) \quad (11)$$

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{y^2}{2 r^2} \sin \alpha \cos \alpha \quad (12)$$

Bei konformer Projektion verschwindet $\alpha - \alpha_1$.

§ 50. Rechtwinklige konforme Coordinaten.

Wir haben gefunden, dass bei den rechtwinkligen Soldnerschen Coordinaten das Vergrösserungs-Verhältnis in der Ebene nach den verschiedenen Richtungen, welche von einem Punkt ausgehen, selbst verschieden ist, es fand sich nämlich in (5) und (6) § 49, S. 275, indem wir nun statt v das Zeichen m nehmen:

$$m_x = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \text{ in der Richtung der } x\text{-Axe}$$

$$m_y = 1 \text{ in der Richtung der } y\text{-Axe}$$

Diese Vergrösserungs-Verhältnisse beziehen sich auf eine Zeichnung, in welcher die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten als rechtwinklige ebene Coordinaten, im

übrigen aber in natürlicher Grösse aufgetragen werden, so dass die Grosskreisbögen x und y auf der Kugel sich nachher im Abbild in der Ebene als Gerade darstellen.

Wir wollen nun eine andere Art der ebenen Abbildung betrachten, bei welcher das Vergrösserungs-Verhältnis in jedem Punkte nach allen Richtungen dasselbe sein soll.

Man nennt eine solche Abbildung „konform“ nach dem Vorgange von Gauss, welcher die allgemeine Theorie solcher Abbildungen aufgestellt und die konformen Abbildungen zuerst in die trigonometrischen Berechnungen eingeführt hat.

Unter *konformer* Abbildung im allgemeinen versteht man eine solche geometrische Beziehung zwischen zwei Flächen, dass jedem Punkte der einen Fläche ein bestimmter Punkt der anderen Fläche entspricht, und dass das Abbild dem Urbild in den kleinsten Teilen *ähnlich* ist.

Die letztere Bedingung ist durch nebenein stehende Fig. 1. und Fig. 2. deutlicher gemacht in diesem Sinne:

Es seien A, B, C drei unter sich sehr nahe liegende Punkte einer gegebenen Fläche (Urbild) und $A' B' C'$ die entsprechenden Punkte einer anderen Fläche (Abbild); die Abbildung soll nach einem solchen Gesetze erfolgen, dass das kleine Dreieck $A' B' C'$ dem entsprechenden kleinen Dreieck $A B C$ ähnlich wird, dass also die Winkel α, β, γ beider Dreiecke einander gleich sind und dass zwischen den Seiten ein konstantes Verhältnis besteht:

$$\frac{A' B'}{A B} = \frac{B' C'}{B C} = \frac{C' A'}{C A} = m \quad (1)$$

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen gehen wir über zu den rechtwinkligen konformen Coordinaten, welche Gauss etwa um 1820—1830 in der Hannoverschen Landesvermessung eingeführt hat, aber wir geben zunächst nur die sphärische Theorie mit Gliedern bis zu $1:r^2$ einschliesslich, d. h. das Analogon zu den in § 46. behandelten Soldnerschen Coordinaten.

In Fig. 3. wird die Erde kugelförmig dargestellt mit dem Nordpol N , dem Südpol N' und einem Meridian $N O N'$. Alle Grosskreise, welche rechtwinklig auf diesem Meridian von O stehen, müssen sich in den Polen Q und Q' des Meridians schneiden.

Zwei solche auf dem Haupt-Meridian rechtwinklige Grosskreise sind die beiden Bögen $Q D Q'$ und $Q E Q'$, welche zur Bestimmung der rechtwinkligen Coordinaten zweier Punkte F und G dienen, indem $O D = x$ die Abscisse von F und $D F = y$ die Ordinate von F ist, und

Fig. 1.
Urbild.

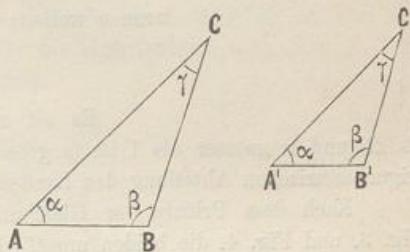


Fig. 2.
Abbild.

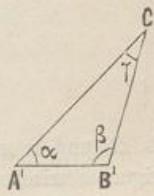
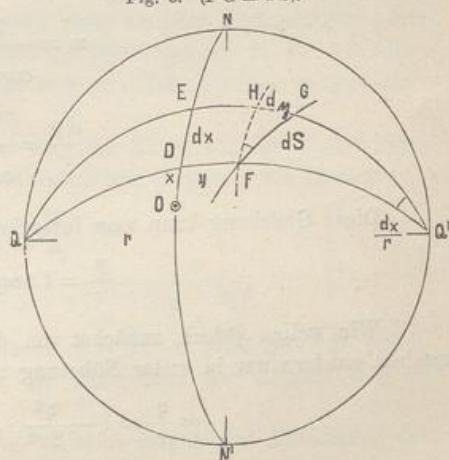


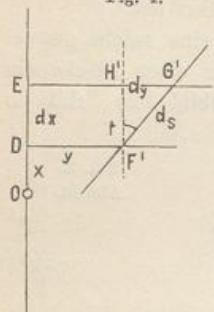
Fig. 3. ($F G = dS$).



ebenso ist OE die Abscisse und EG die Ordinate von G , wobei $DF = EH$, also FH eine geodätische Parallelle zu DE .

Die Koordinatenlinien zwischen O und FG sind geradlinig abgebildet in Fig. 4., indem DF' und EG' parallel und beide rechtwinklig auf ODE sind, mit $OD = x$ und $DE = dx$ in beiden Systemen gleich, oder im Sinne der Abbildung kongruent,

Fig. 4.



während $DF' = y$ mit $DF = y$ nicht gleich ist, auch EG' nicht gleich mit EG , sondern es sollen die Abbildungs-Ordinaten y im Vergleich mit den Urbilds-Ordinaten γ gewisse Verzerrungen erleiden, deren Gesetz dadurch bestimmt wird, dass das rechtwinklige Differential-Dreieck $F'HG'$ dem Dreieck FHG ähnlich wird. Indem man die Hypotenzen in diesen Dreiecken mit ds und dS bezeichnet, wird man das Verhältnis dieser Hypotenzen betrachten, welches wir m nennen wollen:

$$\frac{ds}{dS} = m \quad (2)$$

Es sei auch gleich bemerkt, dass immer ds grösser als dS und m grösser als 1 ist (s grösser als S nach feststehender Bezeichnung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme).

Nach dem Prinzip der Gleichung (1) mit Fig. 1. und Fig. 2. sollen nun in Fig. 3. und Fig. 4. die beiden unendlich kleinen Dreiecke FGH und $F'G'H'$ einander ähnlich sein, woraus folgt:

$$\frac{F'H'}{FH} = \frac{H'G'}{HG} = m \quad (3)$$

Hierbei ist $F'H = dx$ $H'G' = dy$

und FH als Parallelkreisbogen im Abstande γ von DE hat einen Parallelkreishalbmesser $r' = r \cos \frac{\gamma}{r}$, und da bei Q' der Winkel $= \frac{dx}{r}$ sich findet, hat man:

$$FH = r' \frac{dx}{r} = dx \cos \frac{\gamma}{r} \quad \text{und} \quad HG = d\gamma \quad (4)$$

Aus (3) und (4) hat man:

$$m = \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{r}} = \frac{dy}{d\gamma} \quad (5)$$

$$\frac{dy}{r} = \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{r}} \frac{d\gamma}{r} \quad (6)$$

Diese Gleichung kann man integrieren, nämlich:

$$\frac{\gamma}{r} = l \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2r} \right) \quad (7)$$

Wir wollen jedoch zunächst von der strengen Integration keinen Gebrauch machen, sondern nur in erster Näherung rechnen:

$$\cos \frac{\gamma}{r} = 1 - \frac{\gamma^2}{2r^2}, \quad \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{r}} = 1 + \frac{\gamma^2}{2r^2}$$

also nach (5):

$$dy = \left(1 + \frac{y^2}{2r^2}\right) dy \quad (8)$$

$$y = y + \frac{y^3}{6r^2} \quad (9)$$

Dadurch ist die Beziehung zwischen y und η bestimmt und ebenso auch das Vergrößerungsverhältnis m ; indessen kann dabei in den Korrektionsgliedern auch η und y vertauschen, also:

$$m = 1 + \frac{\eta^2}{2r^2} \quad \text{oder } m = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \quad (10)$$

$$\text{und } \frac{1}{m} = 1 - \frac{\eta^2}{2r^2} \quad \text{oder } \frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2r^2}$$

Dieses gilt in differentialem Sinne in einem Punkte nach allen Richtungen, oder in einem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck, wie z. B. $F'G'H'$ Fig. 4., gilt derselbe Wert m für beide Katheten und für die Hypotenuse.

Wir gehen nun von einem unendlich kleinen Bogen über zu einem endlichen Bogen AB in Fig. 5., dessen Endpunkte A und B die Projektions-Koordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ haben, und wir überzeugen uns zuerst, dass in Fig. 3. und Fig. 4. der Bogen FG sich in eine Linie $F'G'$ abbildet, welche bei unendlich kleiner Ausdehnung als Gerade gilt, welche aber bei endlicher Entfernung nicht mehr geradlinig wird, sondern krummlinig, wie in Fig. 5. zu sehen ist, in welcher die Kurve AB als Abbild eines entsprechenden Bogens der Kugel auftritt, während die Gerade AB lediglich Hilfslinie in der Projektion ist.

Von dieser Kurve AB in Fig. 5. kann man auch alsbald sagen, dass sie gegen den Abscissenmeridian ON konkav sein muss, denn das geradlinige Viereck A_1B_1BA hat eine Winkelsumme = 360° , während das entsprechende sphärische Viereck wegen des sphärischen Excessen mehr als 360° Winkelsumme haben muss. Da aber wegen der Konformität die richtige Winkelsumme in der Abbildung erhalten werden muss, wird die konforme Abbildung der Linie AB sich in dem Sinne gekrümmt darstellen müssen, wie Fig. 5. zeigt.

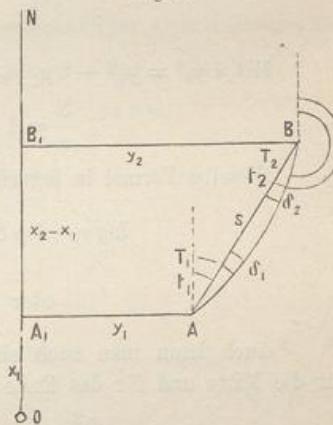
Mit den Bezeichnungen von Fig. 5. hat man für die geradlinige Entfernung s und den Richtungswinkel t_1 in dem ebenen rechtwinkligen Systeme, wie immer:

$$\begin{aligned} \tan t_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ s &= \frac{y_2 - y_1}{\sin t_1} = \frac{x_2 - x_1}{\cos t_1} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (11)$$

In erster Näherung kann die Sehnenlänge AB der Bogenlänge AB gleichgesetzt werden, oder es kann mit ds sowohl das Differential der Geraden AB als auch des Bogens AB bezeichnet werden.

Andererseits sei S die sphärische in Fig. 5. nicht dargestellte Entfernung der Punkt A und B , dann besteht die Differentialgleichung:

Fig. 5.



$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{m} ds = \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right) ds \\ S &= s - \int \frac{y^2}{2r^2} ds = s - \int \frac{y^2}{2r^2} \frac{dy}{\sin t} \\ S &= s - \frac{1}{2r^2 \sin t} \frac{y^3}{3} + \text{Integr.-Const.} \end{aligned}$$

Zwischen den Grenzen y_1 und y_2 giebt dieses:

$$\begin{aligned} S &= s - \frac{1}{6r^2 \sin t} (y_2^3 - y_1^3) \\ S &= s - \frac{1}{6r^2} \frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2 - y_1} \frac{y_2 - y_1}{\sin t} = s - \frac{1}{6r^2} \frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2 - y_1} s \\ \frac{S}{s} &= 1 - \frac{1}{6r^2} \frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2 - y_1} = 1 - \frac{1}{6r^2} (y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Dieses ist bereits eine brauchbare Formel, man kann sie aber noch passend umformen durch Einführen der Mittel-Ordinate

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_0 \quad (12a)$$

Mit $4y_0^2 = y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2$ wird (12) auf diese Form gebracht:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{12r^2} (y_1^2 + 4y_0^2 + y_2^2) \quad (13)$$

Dieselbe Formel in logarithmischer Form lautet:

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{12r^2} (y_1^2 + 4y_0^2 + y_2^2) \quad (14)$$

$$\text{oder } = \frac{\mu}{12r^2} (y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 + y_2^2) \quad (15)$$

Auch kann man noch eine andere Form bilden, indem man für den Anfang, für die Mitte und für das Ende der Strecke drei Werte m ausrechnet in dieser Weise:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + \frac{y_1^2}{2r^2} & m_0 &= 1 + \frac{(y_1 + y_2)^2}{8r^2} & m_2 &= 1 + \frac{y_2^2}{2r^2} \\ \text{oder } \frac{1}{m_1} &= 1 - \frac{y_1^2}{2r^2} & \frac{1}{m_0} &= 1 - \frac{(y_1 + y_2)^2}{8r^2} & \frac{1}{m_2} &= 1 - \frac{y_2^2}{2r^2} \\ \text{und dann } & & \frac{s}{S} &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

oder auch logarithmisch:

$$\log s - \log S = \frac{\log m_1 + 4 \log m_0 + \log m_2}{6} \quad (17)$$

Wenn die Differenzen $(y_2 - y_1)$ und $(x_2 - x_1)$ verhältnismässig klein sind, gegen die y_1 und y_2 selbst, so dient die Formel:

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{8r^2} (y_1 + y_2)^2 + \frac{\mu}{24r^2} (y_2 - y_1)^2 \quad (18)$$

Wenn $(y_2 - y_1)$ sehr klein ist im Vergleich mit y_1 und y_2 , so kann man das zweite Glied hier gegen das erste vernachlässigen.

Übergehend zur Bestimmung der Richtungs-Reduktionen knüpfen wir nochmals an die Betrachtung an, welche im Vorstehenden zu der Erkenntnis geführt hat, dass

die konforme Abbildung des Grosskreisbogens FG von Fig. 3. sich in Fig. 5. als eine flache Kurve darstellen muss, welche in Fig. 5. nach rechts hin konvex sein muss.

Diese Betrachtung giebt auch sofort die Summe der beiden kleinen Winkel δ_1 und δ_2 , denn diese Summe $\delta_1 + \delta_2$ muss gleich dem sphärischen Excess des Vierecks sein, d. h. auf $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich genau:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2 r^2} \quad (19)$$

Wenn die beiden Punkte A und B sehr nahe zusammenrücken, so giebt dieses die Differentialformel:

$$2 \delta = \frac{d x \cdot y}{r^2} \quad (20)$$

Die Formel (19) ist nichts anderes als die Ordinaten-Konvergenz, welche auch bei den Soldnerschen Koordinaten § 46. in (12) und (19) S. 261 u. 262 auf zwei verschiedenen Wegen so gefunden worden ist.

Nun betrachten wir in Fig. 6. ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Ursprung im Punkte A liegt, dessen Abscissenrichtung $+ \xi$ von A nach B und dessen Ordinatenrichtung $+ \eta$ rechtwinklig zu AB liegen soll. Wenn in diesem Systeme die flache Kurve AB durch eine Gleichung zwischen ξ und η dargestellt ist, so kann der Krümmungs-Halbmesser R dieser flachen Kurve hinreichend genähert dargestellt werden durch die Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} \quad (21)$$

Wenn man ausserdem mit 2δ wie bei (20) die Bogenkrümmung auf die Erstreckung des Bogenelementes ds bezeichnet, so hat man:

$$ds = R \cdot 2 \delta \quad (22)$$

also aus (20)–(22) die Differentialgleichung für η :

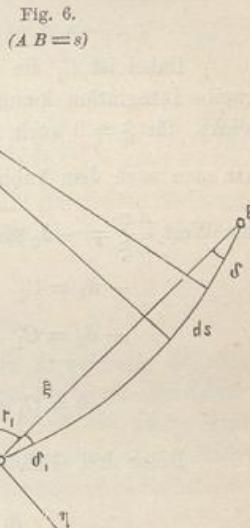
$$\frac{d^2 \eta}{d \xi^2} = \frac{y}{r^2} \frac{d x}{d s}$$

Da man aber auch hinreichend genähert $ds = d \xi$ setzen darf, so haben wir aus dem Vorstehenden die Differential-Gleichung der Kurve AB :

$$\frac{d^2 \eta}{d \xi^2} = \frac{y}{r^2} \frac{d x}{d \xi}$$

Dieses ist zunächst ohne Vorzeichen entwickelt, wenn jedoch die Kurve mit ihrer konkaven Seite gegen die ξ -Axe liegt, wie in Fig. 6., so muss die zweite Ableitung negativ sein, also:

$$-\frac{d^2 \eta}{d \xi^2} = \frac{y}{r^2} \frac{d x}{d \xi} \quad (23)$$



Nach dem Anblick von Fig. 6. hat man in erster Näherung:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \xi \cos t_1 \quad \text{und} \quad y = y_1 + \xi \sin t_1 \\ \frac{dx}{d\xi} &= \cos t_1 \end{aligned}$$

also aus (22):

$$-\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{y_1}{r^2} \cos t_1 + \frac{\xi}{r^2} \sin t_1 \cos t_1 \quad (24)$$

$$\text{oder} \quad -\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = A + B \xi \quad (25)$$

wobei die Bedeutung von A und B aus der Vergleichung von (24) und (25) folgt:

$$A = \frac{y_1}{r^2} \cos t_1 \quad B = \frac{\sin t_1 \cos t_1}{r^2} \quad (26)$$

Die Gleichung (25) wird zweimal integriert:

$$-\frac{d\eta}{d\xi} = C_1 + A\xi + \frac{B\xi^2}{2} \quad (27)$$

$$-\eta = C_1\xi + \frac{A\xi^2}{2} + \frac{B\xi^3}{6} \quad (28)$$

Dabei ist C_1 die Integrations-Konstante für die erste Integration, und für die zweite Integration kommt keine Konstante mehr hinzu, weil, wie man sofort überblickt, für $\xi = 0$ auch $\eta = 0$ werden muss. Um die Konstante C_1 zu bestimmen, hat man nach dem Anblick von Fig. 6., dass $\xi = 0$ den Wert $\frac{d\eta}{d\xi} = +\delta_1$ und $\xi = s$ den Wert $\frac{d\eta}{d\xi} = -\delta_2$ geben muss, ebenso muss auch $\xi = s$ den Wert $\eta = 0$ geben, also:

$$-\delta_1 = C_1$$

$$+\delta_2 = C_1 + As + \frac{Bs^2}{2}$$

$$0 = C_1s + \frac{As^2}{2} + \frac{Bs^3}{6}, \quad \text{oder} \quad 0 = C_1 + \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{6}$$

Diese drei Gleichungen geben:

$$\delta_1 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{6} \quad \text{und} \quad \delta_2 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{3} \quad (29)$$

Oder wenn man die Bedeutungen von A und B nach (26) einsetzt:

$$\delta_1 = \frac{s \cos t_1}{6r^2} (3y_1 + s \sin t_1) \quad \text{und} \quad \delta_2 = \frac{s \cos t_1}{6r^2} (3y_1 + 2s \sin t_1) \quad (30)$$

Endlich, da $s \sin t_1 = y_2 - y_1$ und $s \cos t_1 = x_2 - x_1$ ist, kann man dieses auch so schreiben, zugleich mit Zusetzung von ϱ :

$$T_1 - t_1 = \delta_1 = \frac{\varrho}{6r^2} (x_2 - x_1) (2y_1 + y_2) \quad (31)$$

$$T_2 - t_2 = \delta_2 = \frac{\varrho}{6r^2} (x_1 - x_2) (y_1 + 2y_2) \quad (32)$$

Diese Formeln werden von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme meist in dieser Form geschrieben:

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{4r^2} (x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - \frac{\varrho}{12r^2} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (33)$$

$$T_2 - t_2 = \frac{\varrho}{4r^2} (x_1 - x_2)(y_2 + y_1) - \frac{\varrho}{12r^2} (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \quad (34)$$

Diese Formeln, welche mit den vorhergehenden algebraisch identisch sind, sollen dazu dienen, die relative Kleinheit der zweiten Teile auszudrücken für den Fall, dass die Coordinaten-Differenzen $(x_2 - x_1)$ und $(y_2 - y_1)$ verhältnismässig klein sind gegen die Ordinaten y_1 und y_2 selbst, was bei Triangulierung III. Ordnung entfernt von der Axe eintritt; und dann kann man häufig die zweiten Glieder in (33) und (34) gegen die ersten Glieder sogar vernachlässigen.

Gleichung der Kurve A B.

Nachdem die Coefficienten A, B nebst der Integrations-Konstanten C_1 bestimmt sind, kann auch die Kurvengleichung nach (23) angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \eta &= +\delta_1 \xi - \frac{A \xi^2}{2} - \frac{B \xi^3}{6} = \frac{A s}{2} \xi + \frac{B s^2}{6} \xi - \frac{A \xi^2}{2} - \frac{B \xi^3}{6} \\ \eta &= \frac{A \xi}{2} (s - \xi) + \frac{B \xi^2}{6} (s^2 - \xi^2) = \frac{y_1 \xi}{2 r^2} \cos t_1 (s - \xi) + \frac{\xi \sin t_1 \cos t_1}{6 r^2} (s^2 - \xi^2) \end{aligned}$$

oder nach Potenzen von ξ geordnet mit $s \sin t_1 = y_2 - y_1$:

$$\eta = \xi \frac{s \cos t_1}{6 r^2} (2 y_1 + y_2) - \frac{\xi^2}{2 r^2} y_1 \cos t_1 - \frac{\xi^3}{6 r^2} \sin t_1 \cos t_1 \quad (35)$$

Hierach erscheint die Kurve A B von Fig. 6. dargestellt durch eine Gleichung dritten Grades, aus welcher man auch nochmals rasch zur Probe die δ_1 und δ_2 durch Differentieren bestimmen kann.

Ausrechnung der konstanten Coefficienten.

Die vorstehenden Formeln finden zur Zeit am meisten Anwendung bei dem grossen über ganz Preussen sich erstreckenden konformen System der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme, dessen x -Axe im 31ten Längengrad ($3^\circ 41,25''$ westlich von der Berliner Sternwarte) und dessen Nullpunkt auf der Breite $52^\circ 42' 2,53251''$ in diesem Meridian liegt. Der mittlere Erdkrümmungs-Halbmesser für diese Breite, gewöhnlich mit A bezeichnet, ist:

$$\log A = 6.805\ 0274\ 003$$

und damit sind folgende Konstanten berechnet, indem bei den Coefficienten [mit μ der Wert $\log \mu = 6.6377843$ von S. 193 für Einheiten der 7ten Logarithmenstelle angenommen ist.

$$\begin{array}{llll} \log \frac{1}{2A^2} = 6.0889152 & \log \frac{1}{4A^2} = 5.7878852 & \log \frac{1}{6A^2} = 5.6117939 & \log \frac{1}{12A^2} = 5.3107640 \\ \log \frac{\mu}{2A^2} = 2.7266995 & \log \frac{\mu}{8A^2} = 2.1246395 & \log \frac{\mu}{6A^2} = 2.2495773 & \log \frac{\mu}{24A^2} = 1.6475183 \\ \log \frac{\varrho}{2A^2} = 1.4033403 & \log \frac{\varrho}{4A^2} = 1.1023103 & \log \frac{\varrho}{6A^2} = 0.9262191 & \log \frac{\varrho}{12A^2} = 0.6251891 \end{array}$$

Für die Mittelbreite von Deutschland kann man annehmen $\varphi = 50^\circ$ und den mittleren Krümmungs-Halbmesser

$$\log r = 6.804\,8936\cdot173$$

und dafür gelten die folgenden Coefficienten:

$$\begin{array}{l|l|l|l} \log \frac{1}{2r^2} = 6.089\,1828 & \log \frac{1}{4r^2} = 5.788\,1528 & \log \frac{1}{6r^2} = 5.612\,0615 & \log \frac{1}{12r^2} = 5.311\,0315 \\ \log \frac{\mu}{2r^2} = 2.726\,9671 & \log \frac{\mu}{8r^2} = 2.124\,9071 & \log \frac{\mu}{6r^2} = 2.249\,8458 & \log \frac{\mu}{24r^2} = 1.647\,7858 \\ \log \frac{\varrho}{2r^2} = 1.403\,6079 & \log \frac{\varrho}{4r^2} = 1.102\,5779 & \log \frac{\varrho}{6r^2} = 0.926\,4866 & \log \frac{\varrho}{12r^2} = 0.625\,4567 \end{array}$$

Gewöhnlich braucht man diese Coefficienten nur 4—5 stellig, für alle Fälle haben wir sie hier 7 stellig hergesetzt.

In den Hilfstafeln des Anhanges Seite [45] und [46] haben wir einige Funktionen zur konformen Projektion ausgerechnet, nämlich $\log m = \frac{\mu}{2A^2} y^2$ auf Seite [46], zunächst bis $y = 100\,000^m$ mit kleinem Intervall von 1000^m und unten am Schlusse zur allgemeinen Übersicht nur 5 stellig bis $y = 690^km$.

Dazwischen von $y = 230^km$ bis 255^km ist eine besondere Gebrauchstafel für die Gegend von Hannover, welche aber auch auf dem ganzen 35^km breiten Streifen Göttingen—Hannover—Hamburg—Kiel und östlich Neisse—Breslau—Posen—Stolp, gebraucht werden kann. Die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme hat eine solche Tafel für ganz Preussen; es kann sich jedermann für einen gerade in Arbeit genommenen Bereich eine solche Tafel selbst rasch berechnen nach der Gleichung:

$$\log m = \frac{\mu}{2A^2} y^2 = [2.726\,700] y^2$$

Allerdings bei grossen y kommt noch ein Glied vierter Ordnung hinzu, so dass man hat:

$$\log m = \frac{\mu}{2A^2} y^2 - \frac{\mu}{12A^4} y^4 = [2.726\,6995] y^2 - [8.33849] y^4$$

Dieses werden wir erst später behandeln können.

Die andere Tafel Seite [45] giebt oben die Coordinaten-Vergrösserung

$$Y - y = \frac{y^3}{6A^2} = [5.611\,794] y^3$$

wobei Y dasselbe bedeutet wie y in den vorstehenden Entwicklungen zu Fig. 3. S. 279, wo y die sphärische Ordinate ist. Dann der untere Teil von Seite [45] giebt die differentiale Coordinaten-Verzerrung $\frac{y^2}{2r^2}$ oder konforme allgemeine Linear-Verzerrung zusammen mit der Höhenreduktion $\frac{h}{r}$, worauf im späteren § 52. weitere Schlüsse gegründet werden sollen.

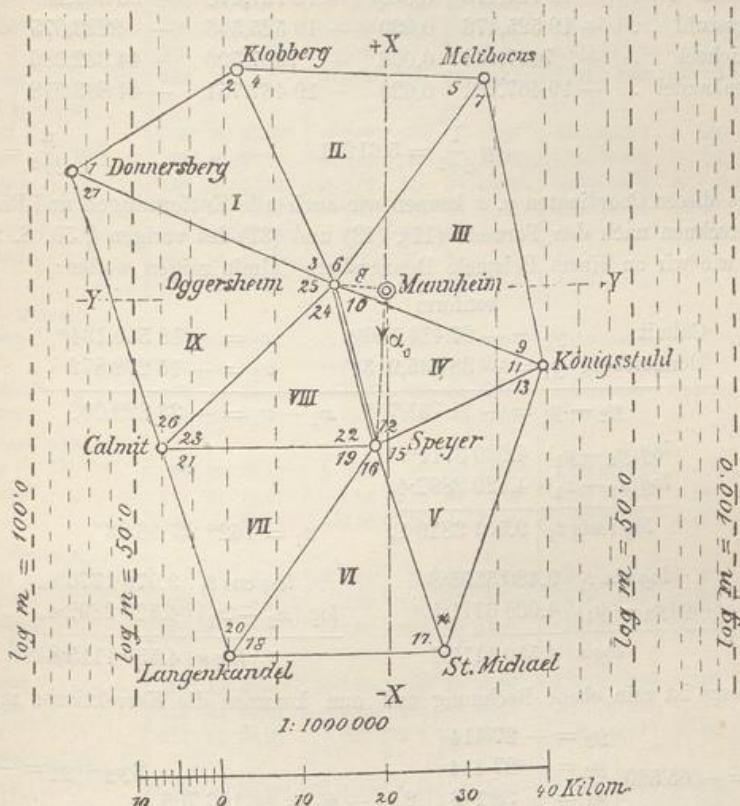
§ 51. Beispiel der konformen Coordinaten-Berechnung.

In nachstehender Fig. 1. wird unser Pfälzer Netz von § 47. nochmals vorgeführt, im wesentlichen wie früher, nur mit einer Schar von Parallel-Linien mit konstantem y , also parallel zur x -Axe, deren Bedeutung im Nachfolgenden erklärt werden wird, während zunächst nur das Netz an sich gebraucht wird.

Wir haben dieses Pfälzische Triangulierungs-Netz, welches in § 47 in Soldnerschen Coordinaten behandelt worden ist, nun in konforme Coordinaten umgerechnet und zwar für die Mittelbreite $\varphi = 49^\circ 30'$ mit den Konstanten:

$$\log r = 6.804\ 8686, \quad \log \frac{1}{6r^2} = 5.61211, \quad \log \frac{\mu}{2r^2} = 2.72702 \quad (1)$$

Fig. 1.



Wenn man (abweichend von der Bezeichnung γ in § 50.) die Soldnerschen Ordinaten mit y und die konformen Ordinaten mit Y bezeichnet, so hat man nach (9) § 50. S. 281:

$$Y = y + \frac{y^3}{6r^2} = y + [5.612\ 11] y^3 \quad (2)$$

und zur Übersicht der Differenzen $Y - y$ kann man den oberen Teil der Tabelle Seite [45] des Anhangs benützen, obgleich derselbe für die Breite $52^\circ 42'$ gilt, während unser Pfälzisches Netz die Mittelbreite $49^\circ 30'$ hat, denn für kleine Ordinaten y macht das fast keinen Unterschied.

Nach vorstehender Formel (2) sind die $X - y$ in folgender Tabelle berechnet:

Punkt	y Soldner	$\frac{y^3}{6r^2} = X - y$	X konform	x	$\log m$ $= \mu \frac{y^2}{2r^2}$
1. Mannheim . . .	0,000 ^m	^m	0,000 ^m	0,000 ^m	0·0
2. Speyer	— 1208,142	0,000	— 1208,142	— 18 816,676	0·1
3. Oggersheim . .	— 6001,777	0,001	— 6001,778	+ 388,767	1·9
4. Calmit	— 27 414,066	0,084	— 27 414,150	— 18 550,134	40·1
5. Donnersberg . .	— 38 145,688	0,227	— 38 145,915	+ 15 278,872	77·6
6. Klobberg	— 18 104,628	0,024	— 18 104,652	+ 28 049,296	17·5
7. Melibocus	+ 12 727,470	0,008	+ 12 727,478	+ 26 509,100	8·6
8. Königsstuhl . . .	+ 19 525,476	0,030	+ 19 525,506	— 9223,075	20·3
9. St. Michael . . .	+ 7407,498	0,002	+ 7407,500	— 44 332,386	2·9
10. Langenkandel . .	— 19 467,721	0,030	— 19 467,751	— 44 893,918	20·2

$$\log \frac{1}{6r^2} = 5.61211$$

$$\log \frac{\mu}{2r^2} = 2.72702$$

Aus diesen Coordinaten y, x können wir auch alle Entfernungen und Richtungswinkel berechnen nach den Formeln (11), (13) und (31) des vorigen § 50. S. 281, 282 und 284, wie wir an einem Beispiele Donnersberg-Calmit zeigen wollen:

konform			
Calmit	$y_2 = - 27 414,150^m$	$x_2 = - 18 550,134^m$	
Donnersberg	$y_1 = - 38 145,915$	$x_1 = + 15 278,872$	
	$y_2 - y_1 = + 11 731,765$	$x_2 - x_1 = - 33 829,006$	
$\log(y_2 - y_1)$	4.030 6711·5		
$\log(x_2 - x_1)$	4.529 2892·4 _n		
$\log \tan t_1$	9.501 3819·1 _n	$t_1 = 162^\circ 23' 56,83''$	
$\log \sin t_1$	9.480 5595·8	$\log \cos t_1$	9.979 1776·6 _n
$\log(y_2 - y_1)$	4.030 6711·5	$\log(x_2 - x_1)$	4.529 2892·4 _n
$\log s$	4.550 1115·7	$\log s$	4.550 1115·8

Dieses ist rein ebene Rechnung und nun kommen die Korrekturen mit $1:r^2$.

$y_2 = - 27 414$	$y_2 = - 27 414$	$2y_2 + y_1 = - 92 974$	
$y_1 + y_2 = - 65 560$	$y_1 = - 38 146$	$2y_1 + y_2 = - 103 706$	
	$y_1 = - 38 146$		
$\log(y_1 + y_2)$	4.81 664	$\log(2y_2 + y_1)$	4.96 836 _n
$\log(y_1 + y_2)^2$	9.63 328	$\log(x_2 - x_1)$	4.52 929 _n
$\log(\mu : 2r^2)$	2.72 701	$\log(\varrho : 6r^2)$	0.92 654
$\log \frac{(y_1 + y_2)^2}{2r^2}$	2.36 029	$\log(T_1 - t_1)$	0.47 165
$\frac{(y_1 + y_2)^2}{2r^2} = 229\cdot24$		$T_1 - t_1 = + 2,962''$	
		$T_2 - t_2 = - 2,656''$	

Abriss der Triangulierung des Netzes Fig. 1. S. 287 mit konformen Coordinaten.

Stationen und Zielpunkte	Richtungswinkel			Entfernung		
	sphärisch <i>T</i>	<i>t</i> — <i>T</i>	eben <i>t</i>	sphärisch <i>log s</i>	<i>log s</i> — <i>log S</i>	eben <i>log s</i>
<i>1. Mannheim.</i>						
Speyer	183° 40' 25,29"	— 0,02"	183° 40' 25,27"	4.275 4362·3	+ 0·0	4.275 4362·3
Oggersheim	273 42 22,23	+ 0,00	273 42 22,23	3.779 1890·8	+ 0·6	3.779 1891·4
<i>2. Speyer.</i>						
Mannheim	8° 40' 25,23"	+ 0,04"	8° 40' 25,27"	4.275 4362·3	+ 0·0	4.275 4362·3
Königsstuhl	65 10 11,05	— 0,14	65 10 10,91	4.358 8019·1	+ 6·2	4.358 8025·3
St. Michael	161 20 31,87	+ 0,11	161 20 31,98	4.430 2529·9	+ 0·8	4.430 2530·7
Langenkandel	215 0 1,16	— 0,48	215 0 0,68	4.502 8974·0	+ 7·4	4.502 8981·4
Calmit	270 34 57,83	+ 0,02	270 34 57,85	4.418 4219·3	+ 14·0	4.418 4233·3
Oggersheim	345 59 7,47	+ 0,14	345 59 7,61	4.296 5476·5	+ 0·8	4.296 5477·3
<i>3. Oggersheim.</i>						
Melibocus	35° 38' 31,00"	— 0,02"	35° 38' 30,98"	4.507 0618·9	+ 2·2	4.507 0621·1
Mannheim	93 42 22,23	— 0,00	93 42 22,23	4.779 7890·8	+ 0·6	4.779 7891·4
Königsstuhl	110 37 58,62	+ 0,06	110 37 58,68	4.435 7946·2	+ 5·3	4.435 7951·5
Speyer	165 59 7,82	— 0,21	165 59 7,61	4.296 5476·5	+ 0·8	4.296 5477·3
Calmit	228 30 28,54	— 0,63	228 30 27,91	4.456 1549·5	+ 16·9	4.456 1566·4
Donnersberg	294 51 17,20	+ 0,63	294 51 17,83	4.549 3120·2	+ 30·6	4.549 3150·8
Klobberg	336 22 4,82	+ 0,70	336 22 5,52	4.479 8976·1	+ 8·4	4.479 8984·5
<i>4. Calmit.</i>						
Oggersheim	48° 30' 26,94"	+ 0,97"	48° 30' 27,91"	4.456 1549·5	+ 16·9	4.456 1566·4
Speyer	90 34 57,90	— 0,05	90 34 57,85	4.418 4219·3	+ 14·0	4.418 4233·3
Langenkandel	163 12 53,74	— 1,65	163 12 52,09	4.439 5851·8	+ 29·8	4.439 5881·6
Donnersberg	342 23 54,17	+ 2,66	342 23 56,83	4.550 1057·9	+ 57·8	4.550 1115·7
<i>5. Donnersberg.</i>						
Klobberg	57° 29' 38,99"	+ 1,02"	57° 29' 40,01"	4.375 9183·2	+ 44·0	4.375 9227·2
Oggersheim	114 51 18,87	— 1,04	114 51 17,88	4.549 3120·2	+ 30·6	4.549 3150·8
Calmit	162 23 59,79	— 2,96	162 23 56,83	4.550 1057·9	+ 57·8	4.550 1115·7
<i>6. Klobberg.</i>						
Melibocus	92° 51' 35,28"	— 0,03"	92° 51' 35,25"	4.489 5442·7	+ 4·6	4.489 5447·3
Oggersheim	156 22 6,51	— 0,99	156 22 5,52	4.479 8976·1	+ 8·4	4.479 8984·5
Donnersberg	237 29 40,81	— 0,80	237 29 40,01	4.375 9183·2	+ 44·0	4.375 9227·2
<i>7. Melibocus.</i>						
Königsstuhl	169° 13' 40,29"	+ 1,36"	169° 13' 41,65"	4.560 7787·6	+ 14·1	4.560 7801·7
Oggersheim	215 38 30,55	+ 0,43	215 38 30,98	4.507 0618·9	+ 2·2	4.507 0621·1
Klobberg	272 51 35,26	— 0,01	272 51 35,25	4.489 5442·7	+ 4·6	4.489 5447·3
<i>8. Königsstuhl.</i>						
St. Michael	199° 2' 30,37"	+ 1,38"	199° 2' 31,75"	4.569 8613·6	+ 10·3	4.569 8623·9
Speyer	245 10 10,60	+ 0,31	245 10 10,91	4.358 8019·1	+ 6·2	4.358 8025·3
Oggersheim	290 37 58,95	— 0,27	290 37 58,68	4.435 7946·2	+ 5·3	4.435 7951·5
Melibocus	349 13 43,21	— 1,56	349 13 41,65	4.560 7787·6	+ 14·1	4.560 7801·7
<i>9. St. Michael.</i>						
Königsstuhl	19° 2' 32,77"	— 1,02"	19° 2' 31,75"	4.569 8613·6	+ 10·3	4.569 8623·9
Langenkandel	268 48 10,93	— 0,00	268 48 10,93	4.429 4468·0	+ 5·1	4.429 4473·1
Speyer	341 20 32,27	— 0,29	341 20 31,98	4.430 2529·9	+ 0·8	4.430 2530·7
<i>10. Langenkandel.</i>						
Speyer	34° 59' 59,80"	+ 0,88"	35° 0' 0,68"	4.502 8974·0	+ 7·4	4.502 8981·4
St. Michael	88 48 10,92	+ 0,01	88 48 10,93	4.429 4468·0	+ 5·1	4.429 4473·1
Calmit	343 12 50,61	+ 1,48	343 12 52,09	4.439 5851·8	+ 29·8	4.439 5881·6

Jordan, Handb. d. Vermessungskunde. 4. Aufl. III. Bd.

Zu 22924, welches $= 4 \log m_0$ ist, nehmen wir die schon in der Tabelle S. 288 stehenden $\log m_2 = 40\cdot1$ und $\log m_1 = 77\cdot6$ für Calmit und Donnersberg und daraus für unsere Strecke:

$$\log s - \log S = \frac{77\cdot6 + 229\cdot24 + 40\cdot1}{6} = 57\cdot8 \quad (3)$$

In Zusammenfassung haben wir also:

$\log s = 4.550\ 1115\cdot7$	$t_1 = 162^\circ 23' 56,83''$	$t_2 = 342^\circ 23' 56,83''$
$- 57\cdot8$	$+ 2,96$	$- 2,66$
<hr/> $\log S = 4.550\ 1057\cdot9$	<hr/> $T_1 = 162^\circ 23' 59,79''$	<hr/> $T_2 = 342^\circ 23' 54,17''$
	Donnersberg	Calmit

(4)

So sind diese Werte in dem Abrisse von S. 289 eingesetzt, und der ganze Abriss ist so entstanden, da wir die Coordinaten als gegeben angenommen haben.

Wenn umgekehrt die ganze Triangulierung mit einer Basis und einem Ausgangsazimut bezw. Ausgangsrichtungswinkel berechnet wird, so hat man im wesentlichen dasselbe zu thun. Man rechnet am bequemsten vorläufige Coordinaten nur etwa auf 1" genau, die man ja zu anderen Zwecken meist ohnehin braucht, die Dreieckseiten S hat man aus der Netzausgleichung und Netzberechnung; rechnet man dazu alle $\log s - \log S$ und zunächst nur das erste $t - T$, so kann man die ganzen Coordinaten-Rechnung in der Ebene durchführen und braucht nur noch die sämtlichen $t - T$ zuzufügen, um den ganzen Abriss von S. 289 aufzustellen. In dieser Weise haben wir schon früher das Hannoversche Stadt-Netz im konformen System der Landesaufnahme behandelt in unserem I. Band, 4. Aufl. 1895, Abriss S. 204.

Die Vergleichung dieses Verfahrens mit der Soldnerschen Methode (Abriss § 48, S. 265) fällt zum Nachteil der Soldnerschen Methode und zum Vorteil der konformen Methode aus.

Tabellarische und graphische Behandlung der Reduktionen.

Da das Vergrößerungsverhältnis m nur von der Ordinate y abhängt, kann man es leicht tabulieren, z. B. für das Pfälzische Netz mit $\varphi = 49^\circ 30'$ und $\log r = 6.80487$ hat man die Hauptwerte

$$\begin{array}{rcccccc|c} y & 10\ 000^m & 20\ 000^m & 30\ 000^m & 40\ 000^m & 50\ 000^m & & (5) \\ \log m = \frac{\mu y^2}{2r^2} & 5\cdot3 & 21\cdot3 & 48\cdot0 & 85\cdot3 & 133\cdot4 & & \end{array}$$

Eine ausführliche Gebrauchstabelle wäre leicht herzustellen. Wir wollen darauf hier nicht eingehen, aber noch die graphische Behandlung der Sache bemerken. Man kann das Netzbild mit einer Schar von Parallelen zur x -Axe, also Parallelen für konstante y überziehen, welche gewissen runden Werten von m oder von $\log m$ entsprechen und damit kann man für jeden Punkt sein $\log m$ abstechen.

In unserem Falle ist

$$\begin{aligned} \log m &= \frac{\mu}{2r^2} y^2 \quad \text{mit } \log \frac{\mu}{2r^2} = 2.72\ 702 - 10 \\ y &= \sqrt{\frac{2r^2}{\mu} \log m} = [3.63\ 649] \sqrt{\log m} \end{aligned} \quad (6)$$

Danach ist folgendes berechnet:

$$\begin{aligned} \log m &= 10 \cdot 0 & 20 \cdot 0 & 30 \cdot 0 & 40 \cdot 0 & 50 \cdot 0 & 60 \cdot 0 & 70 \cdot 0 & 80 \cdot 0 & 90 \cdot 0 & 100 \cdot 0 \\ y &= 13,7^{km} & 19,4 & 23,7 & 27,4 & 30,6 & 33,5 & 36,2 & 38,7 & 41,1 & 43,3^{km} \end{aligned}$$

Hiernach sind die Parallelen in Fig. 1. gezeichnet; man kann daraus z. B. abnehmen (S. 287):

Donnersberg	Mitte	Calmit
78	57	40
$\log s - \log S = \frac{78 + 4 \cdot 57 + 40}{6} = \frac{78 + 228 + 40}{6} = \frac{346}{6}$		
$\log s - \log S = 57,7$		

Dieses soll dasselbe sein wie das frühere 57,8 in (3).

In dem kleinen Netzbilde von Fig. 1. ist die graphische Interpolation für $\log m$ wohl nicht völlig genügend, aber jedenfalls zur Kontrolle der Rechnung nützlich; hat man Netze II. und III. Ordnung entfernt von der Hauptaxe, wo die $\log m$ grösser und die Parallelen mehr gleichabständig werden, so wird das Verfahren sehr gut. Wir betrachten noch die Reduktionen der Richtungen:

$$\begin{aligned} T_1 - t_1 &= \frac{\varrho}{6r^2} (x_2 - x_1) (2y_1 + y_2) = \frac{\varrho}{2r^2} (x_2 - x_1) y' \text{ mit } y' = \frac{2y_1 + y_2}{3} \\ T_2 - t_2 &= \dots \dots \dots = \frac{\varrho}{2r^2} (x_1 - x_2) y'' \text{ mit } y'' = \frac{y_1 + 2y_2}{3} \end{aligned}$$

Hier kann man auch die y' , y'' geradezu mit dem Zirkel abnehmen, sowie die $x_2 - x_1$, wenn man dieselben nicht ohnehin schon in der Rechnung stehen hat, und da $\frac{\varrho}{2r^2} = \frac{1}{395}$ für Kilometer, so kann man glatt mit dem Rechenschieber rechnen:

$$T_1 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{395} y' \text{ und } T_2 - t_2 = \frac{x_1 - x_2}{395} y''$$

z. B. S. 287	Donnersberg	Calmit
$x_2 - x_1 = -33,8^{km}$	$y' = -34,6^{km}$	$x_1 - x_2 = +33,8^{km}$
$T_1 - t_1 = +2,96''$		$y'' = -31,0^{km}$
		$T_2 - t_2 = -2,66''$

§ 52. Vergleichung der kongruenten und der konformen Coordinaten.

Das im vorigen § 51. behandelte System der rechtwinkligen konformen Coordinaten x , y hat die Eigenschaft, dass es von einem Teil der Kugeloberfläche eine ebene Darstellung bietet, welche dem Urbilde in den kleinsten Teilen ähnlich ist.

Diese Eigenschaft, welcher Gauss die Benennung „konforme“ Abbildung gegeben hat, wollen wir durch Vergleichung der Verzerrungsformeln für das Soldnersche und für das Gauss'sche System näher untersuchen. Wir nennen dabei die Soldnerschen Coordinaten *kongruente* Coordinaten, weil die Ordinaten y ebenso wie die Abscissen x in geodätischem Sinne kongruent abgebildet werden, d. h. ein Landmesser, welcher längs einer abgesteckten Ordinate y mässen, ohne zu wissen, dass er sich auf einer *krummen* Fläche befindet, und dann seine Messung in einer Zeichnungsebene auftrüge, würde für y eine Gerade erhalten, welche dem Bogen y auf der Kugel an linearer Ausdehnung gleich ist.

Zuerst betrachten wir die beiden Formeln für die lineare Projektionsverzerrung, nämlich (10) § 48. S. 271 und (12) § 50. S. 282, und indem wir beidemal die Bezeichnungen der Landesaufnahme anwenden, nämlich S für die wahre (sphärische) Entfernung und s für die Projektions-Entfernung, haben wir zur Vergleichung:

$$\text{Soldner, kongruent } \frac{s}{S} = 1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 r^2} \cos^2 t \quad (1)$$

$$\text{Gauss, konform } \frac{s}{S} = 1 + \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 r^2} \quad (2)$$

Lässt man die y alle einander gleich werden, so bekommt man daraus wieder das Vergrösserungsverhältnis in differentialem Sinne:

$$\text{kongruent } m_1 = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \cos^2 t \quad (3)$$

$$\text{konform } m_2 = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \quad (4)$$

Von diesen beiden Werten ist m_2 in einem Punkte nach allen Richtungen hin konstant, dagegen m_1 veränderlich zwischen den äussersten Werten $1 + \frac{y^2}{2 r^2}$ und 1, deren Zwischenwert $= 1 + \frac{y^2}{4 r^2}$ ist; und dieser Zwischenwert ist auch gleich dem durch Integration zu findenden Mittelwert, weil $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi$.

Man kann auch leicht die Flächen vergleichen: Ein Streifen $\Delta x dy$ im Urbild wird abgebildet werden:

$$\text{kongruent } dF_1 = \Delta x \left(1 + \frac{y^2}{2 r^2}\right) dy$$

$$\text{konform } dF_2 = \Delta x \left(1 + \frac{y^2}{2 r^2}\right) dy \left(1 + \frac{y^2}{2 r^2}\right) = \Delta x \left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right) dy$$

Als Integral zwischen den Grenzen 0 und y giebt dieses, wenn $y \Delta x = F$ gesetzt wird:

$$\text{kongruent } F_1 = F \left(1 + \frac{y^2}{6 r^2}\right)$$

$$\text{konform } F_2 = F \left(1 + \frac{y^2}{3 r^2}\right)$$

und das Verhältnis beider:

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \quad (5)$$

Einige Zahlenwerte von $\frac{y^2}{2 r^2}$ haben wir bereits in (8) § 49. S. 276 ausgerechnet,

man sieht daraus, dass z. B. für $y = 30\,000^m$ die lineare Verzerrung $\frac{y^2}{2 r^2} = 0,000011$ oder 11 Milliontel oder 11^{mm} auf 1^m ist, und dass auch die konforme Flächenverzerrung um 11 Milliontel grösser ist als die kongruente Flächenverzerrung.

Man kann in diesen Betrachtungen auch noch weiter gehen, und so habe ich in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1875, S. 27—34 eine theoretische Betrachtung angestellt

über die Quadratsummen der linearen Projektions-Verzerrungen in beiden Fällen, und gefunden, dass die konforme Projektion eine solche Quadratsumme Ω giebt, welche bei konstantem Grenzwert X sich zu der entsprechenden Quadratsumme ω der kongruenten Projektion verhält $\Omega : \omega = 8 : 3$, und dass für $\Omega = \omega$ die Grenzordinate X des konformen Systems sich zu der entsprechenden Grenzordinate y des kongruenten Systems verhält $X : y = 0,82 : 1$; und hiernach dürfte die konforme Projektion nur auf 82 % der Fläche ausgedehnt werden, welche der kongruenten (Soldner'schen) Projektion zugänglich ist.

Alle Messungsfehler sind hiebei gleich Null gesetzt.

Diese Verzerrungs-Vergleichungen Ω und ω , welche von der „Zeitschr. f. Verm. 1875“, S. 27—34 auch noch in unserem „Handbuch d. Verm., 2. Aufl. 1878“, S. 276 bis 278 abgedruckt waren, haben wir vor kurzem in der „Zeitschr. f. Verm. 1896“, S. 249 einer neuen Bearbeitung unterzogen, auf welche wir zurückkommen werden.

Solche Integrationen für die linearen Verzerrungselemente in verschiedenen Formen, z. B. auch nach den neueren Theorieen von Tissot 1881 (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1896“, S. 210—213) geben aber ein einseitiges theoretisches Kriterium, welches in der Praxis nicht Stand hält, und namentlich für Landesvermessungen mit Triangulierungen zu vollständigen Fehlschlüssen führt.

Die Theorie jener Ω und ω erscheint sofort in ganz anderem Lichte, wenn man auch die bisher gleich Null gesetzten Messungsfehler zuzieht, d. h. wenn man von der Theorie zur Praxis übergeht.

Z. B. in Preussen wurde festgesetzt, dass die linearen Fehler, die durch die Benützung der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten als ebene Coordinaten entstehen, nicht grösser als $\frac{1}{20\,000}$ oder 5^{cm} auf 1^{km} sein sollen (F. G. Gauss, „die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, 1. Aufl. 1876“, S. 299 und „Zeitschr. f. Verm. 1896“, S. 196 und 200) und schon damit wird jener Theorie der Ω und ω u. s. w. der praktische Boden entzogen, denn jene Fehler werden bei Einhaltung der Grenze $y = 64^{\text{km}}$ nicht grösser als 5^{cm} auf 1^{km}, mag man die Benützung in der Ebene nach Soldner kongruent oder nach Gauss konform machen.

Die Flächenprojektionsfehler sind verschwindend klein im Vergleiche mit den Fehlern, welche beim wirklichen Feldmessen mit Messlatten, Winkelstiel und s. w. entstehen; und grössere Flächen, welche polygonometrisch an das System angeschlossen werden, nehmen von den Projektionsverzerrungsfehlern den unschädlichen Anteil in sich auf.

Der lineare Projektionsfehler von 0,005 % oder 5^{cm} auf 1000^m oder 0,05^{mm} auf 1^m oder auch 0,25^{mm} auf 5^m, kann auch verglichen werden mit dem metronomisch zulässigen Fehler von 1,6^{mm} an einer hölzernen Messlatte, welcher immer noch das Sechsfache des Projektionsfehlers ist.

Die oben berichtete Theorie der $\Omega : \omega$ hat ein rein *lineares* Messungsverfahren vorausgesetzt:

Wenn man in jedem Punkt nach allen Richtungen kleine Linien gezogen und dadurch die ganze Aufnahme bewirkt denkt... d. h. es ist ein spekulatives Messungsverfahren vorausgesetzt, welches es praktisch nicht gibt. Der Schwerpunkt unserer modernen Vermessungen liegt nicht in den linearen Messungen, sondern in den *Winkel-*

messungen, von denen wir nachher (bei den Gleichungen (6) und (7) unten zu handeln haben werden).

Es ist auch der Gedanke ausgesprochen worden, bei konformen Coordinaten, mit grossen Gebieten, z. B. mit Ordinaten y , die grösser als $70\,000^m$ sind, für alle weiter von der Coordinatenaxe abliegenden Gemarkungen besondere Reduktionen der Strecken oder Flächenangaben einzuführen.

Wenn die Projektions-Verzerrungsfehler praktisch zu gross werden, so müsste man nicht bloss bei *konformen* Coordinaten besondere Reduktionen der Strecken und der Flächen einführen, sondern bei den Soldner'schen Coordinaten wäre das noch viel mehr nötig — ja man müsste im Soldner'schen System nicht bloss gemarkungswise Reduktionen anbringen, sondern, wie ein Kollege sich ausdrückte, man müsste eine ganze *Windrose* von Massstäben anbringen, nach jeder Richtung einen besonderen.

Wenn man ausnahmsweise mit den Verzerrungsfehlern an die Messungsfehler herankommt, was bei feinen Stadtvermessungen oder auch z. B. in Bayern wegen der grossen Ordinaten eintreten kann, dann bringt die Soldner'sche ungleiche Verzerrung ganz ungeheuerliche Widerwärtigkeiten, welche zu ersehen sind aus der „Instruktion für neue Katastermessungen in Bayern“, 1885 § 23. und noch deutlicher in technische Anleitung etc. Dr. J. H. Franke, München 1889, S. 121. Alles was dort im Interesse der Rechnungserleichterung etc. gesagt ist, wird mit einem Schlag überflüssig, wenn die Projektion konform ist.

Der Schwerpunkt unserer modernen Vermessungen liegt nicht in den linearen Messungen, sondern in den *Winkel*messungen, und während für erstere der Satz gilt „Es ist darnach zu trachten, die vernachlässigten Größen möglichst klein zu machen, nicht aber nach allen Richtungen möglichst gleich —“, gilt für Triangulierungen gerade das Gegenteil, hier ist darnach zu trachten, die Verzerrungen nach allen Richtungen möglichst gleich zu machen, damit die Dreiecke ähnlich bleiben. In der Triangulierung III. Ordnung gestattet die konforme Projektion auf viel weitere Gebiete ohne alle sphärische Korrekturen von der Ordnung $1:r^2$ auszudehnen, als die Soldner'sche, weil die schlimmsten Glieder der Soldner'schen Methode bei der konformen Projektion fortfallen.

Um dieses zu zeigen, machen wir die Vergleichung der Richtungsreduktionen, nämlich nach (20)—(21) § 48. S. 272 und (31) § 50. S. 284 beidemal mit den Bezeichnungen der Landesaufnahme, T für sphärischen und t für ebenen Richtungswinkel:

$$\text{Soldner, kongr. } T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6r^2} (x_2 - x_1)(2y_1 + y_2) + \frac{\varrho}{6r^2} \sin t_1 \cos t_1 (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \quad (6)$$

$$\text{Gauss, konform } T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6r^2} (x_2 - x_1) (2y_1 + y_2) \quad (7)$$

Das schlimmste Glied $\frac{x_2 - x_1}{6r^2 s^2} (y_2^3 - y_1^3)$ von Soldner fällt bei Gauss rundweg fort. Wir wollen dieses Glied noch besonders betrachten:

$$\varrho \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{6r^2 s^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) = \varrho \frac{\sin t \cos t}{6r^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

Bei einer Kleintriangulierung entfernt von der Hauptaxe sind die $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ verhältnismässig klein gegen die y selbst, sie gelten als von nächster kleinerer Ordnung, und damit haben wir den wichtigen Satz:

Die trigonometrischen Verzerrungsfehler der Gauss'schen Kleintriangulierung entfernt von der Axe sind nur von nächst kleinerer Ordnung als bei der schwerfälligen Soldnerschen Triangulierung.

Zu näherer Ausführung wollen wir die sämtlichen $y_1 y_2 \dots$ kurz mit y und die $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ mit dx und dy bezeichnen, dann wird:

Soldner, kongruent	Gauss, konform
$T - t = \varrho \frac{y}{2r^2} (dx + y \sin t \cos t)$	$T - t = \varrho \frac{y dx}{2r^2}$

(8)

Setzt man in runden Zahlen für Triangulierung III. Ordnung $dx = 5000^m$, dagegen y als sehr gross $= 100\,000^m$ und $t = 45^\circ$, so wird:

Soldner, kongruent	Gauss, konform
$T - t = 1,3'' + 12,7'' = 14,0''$	$T - t = 1,3''$

also bei Gauss rund $1''$, was in III. Ordnung leicht zu verschmerzen ist, aber bei Soldner $14''$.

Das ist die Richtungsverzerrung. Die lineare Verzerrung gibt bei Soldner in diesem Fall ein Schwanken im Logarithmus zwischen 0.00005 und 0.00000, d. h. Unmöglichkeit auch nur mit 5 stelligen Logarithmen glatt eben zu rechnen, während bei Gauss das lineare Element als Mittelwert bereits in den Anschluss-Coordinaten II. Ordnung steckt und dem Rechner in III. Ordnung gar nicht mehr zu Gesicht kommt.

Hiebei ist auch die Höhenreduktion in Vergleichung zu ziehen, welche wir früher bei der Basismessung in § 9. S. 67 erwähnt haben. Wenn in der Höhe h über dem Meere eine Strecke s unmittelbar, z. B. mit Messlatten, gemessen ist, so kann sie nicht unmittelbar mit einer Triangulierungsseite verglichen werden, sondern sie muss auf den Meereshorizont reduziert werden $s \left(1 - \frac{h}{r}\right)$. Die Reduktion $\frac{s h}{r}$ hat nach S. 67 für $h = 100^m$ den Betrag $15,7^{mm}$ auf 1000^m oder 15,7 Milliontel.

Diese Höhenreduktion wirkt der Netzverzerrung günstig entgegen, denn eine Strecke s geht infolge der Höhenreduktion und der Netzreduktion über in:

$$s \left(1 - \frac{h}{r} + \frac{y^2}{2r^2}\right)$$

Eine Übersichtstafel dazu haben wir auf Seite [45] des Anhangs berechnet. Man entnimmt daraus z. B., dass bei 400^m Höhe und Ordinaten $y = 70^km$ die Gesamtreduktion allgemein nahezu gleich Null ist, wenn die Projektion konform ist, dagegen schwankend zwischen Null und 6^{cm} auf 1^km , wenn die Projektion kongruent (nach Soldner) ist. (Auch dieses wollen wir später noch näher behandeln.)

Für die Höhenreduktion haben wir bisher vorausgesetzt, dass die Triangulierung selbst mit ihrer Basis auf den Meereshorizont reduziert sei, was die Regel ist. Es gibt aber auch Ausnahmen, z. B. in Württemberg ist der Triangulierungshorizont 844 Pariser Fuss $= 274,16^m$ über dem Meere, was eine logarithmische Reduktion $186 \cdot 6$ oder 43^{mm} auf 1^km bringt, welche zwar der Soldnerschen Netzreduktion $\frac{y^2}{2r^2} \cos^2 t$ entgegen wirkt, aber nicht nach allen Richtungen wirksam, weil die Projektion nicht konform ist.

Eine Gesamtreduktion ist auch in Mecklenburg eingeführt. Die Netzreduktion ist dort $1 + \frac{x^2}{2r^2}$, weil die Hauptaxe nicht meridional, sondern westöstlich liegt. Der Maximalwert $1 + \frac{x^2}{2r^2}$ ist logarithmisch = 357·0, und deswegen wurde eine Gesamt-reduktion = 178·5 eingeführt, oder = 41,1^{mm} für 1^{km}, welche einer Höhenreduktion für $h = 262,4^m$ gleichkommt, d. h. die Mecklenburgische Triangulierungsergebnisse sind mit einer solchen Gesamtmasstab-Veränderung versehen, als ob der Horizont der Basis und die Triangulierung im Ganzen 262,4^m über dem Meere wäre.

Dadurch wurde erreicht, dass die Gesamt-Netzreduktion in dem ganzen Bereich von rund 80^{km} südlich und 80^{km} nördlich von dem Normalparallel nur zwischen den Grenzen von rund + 4^{cm} auf 1^{km} und - 4^{cm} auf 1^{km} sich bewegt, während sie sonst auf 8^{cm} für 1^{km} gestiegen wäre.

Nach all diesem ist an den grossen Vorteilen der Konformität für Triangulierung und Katastervermessungen nicht zu zweifeln.

Mit Zurückgreifen auf 1875 haben wir daher zwei Sätze:

I. Satz 1875. Wenn man eine Landesvermessung durch unendlich viele kleine Streckenmessungen machen würde und dabei auch alle Messungsfehler, selbst = Null setzte und wenn man die Quadratsumme aller Strecken-Verzerrungs-Fehler als einziges Kriterium annähme, so würde die Soldner'sche Projektion mit etwa ein Fünftel der Fläche im Vorteil sein.

II. Satz 1896. Wenn man eine Landesvermessung nach moderner Art mit Triangulierung und Polygonzügen macht, so ist die konforme Projektion unbedingt weit im Vorteil: man kann dann mit dem Messungsgebiet so weit gehen (ohne andere Rücksichten und alles in III. Ordnung als eben behandeln) als es die praktischen Erwägungen der linearen Fehler gestatten, d. h. wenn man in letzterer Hinsicht den preussischen Bestimmungen folgen will, bis zu einer Ordinatenlänge $y =$ rund 100^{km}.

Zum Schlusse wollen wir noch die beiden Triangulierungs-Abrisse von § 47. S. 265 und § 51. S. 289 in dem Sinn vergleichen, dass wir die Mittelwerte der Richtungs-Reduktionen und der logarithmischen Seiten-Reduktionen bilden. Dieses gibt:

	durchschnittliche Richtungs-Reduktion	durchschnittliche Seiten-Reduktion	logarithmische Seiten-Reduktion
kongruent S. 265	± 0,70"		± 7·5
konform S. 289	± 0,64		± 13·6

In der kongruenten Projektion sind die linearen Reduktionen im Vorteil und in der konformen Projektion sind die Richtungen im Vorteil; d. h. was wir allgemein erkannt haben, zeigt sich auch in den Zahlenbeispielen bestätigt. Doch ist der vorliegende Fall des Netzes Fig. 1. S. 287 zum Veranschaulichen der Vorteile der Konformität wenig geeignet, weil die Axe durch das Netz selbst hindurch geht und keine grossen Ordinaten vorkommen.

Wir wollen auch noch einen Blick auf das Hannover'sche Stadttriangulierungs-netz III. Ordnung werfen, welches in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 204 in konformen Coordinaten der Landesaufnahme und S. 207 in kongruenten Kataster-Coordinaten berechnet ist. Obgleich die konformen Ordinaten im Mittel $y = 245000^m$

und die kongruenten Ordinaten nur $y = 23000^m$ lang sind, war doch die konforme Berechnung bequemer als die Soldner sche kongruente, weil bei ersterer die Reduktionen sich viel bequemer in Richtungs-Reduktionen und Entfernung-Reduktionen trennen, von denen außerdem die letzteren sich leicht tabellarisch erledigen lassen. (Vgl. die Hilfstafel für $\log \frac{\mu}{2 A^2} y^2$ auf S. [46] des Anhangs.)

Noch in anderem Sinne wollen wir die beiden Stadtnetz-Triangulierungs-Coordinaten vergleichen: In dem vorgeschriebenen Kataster-System Celle ist im Mittel $y = 23000^m$ und dazu nehmen wir im Mittel $x_2 - x_1 = 3000^m = dx$, und damit rechnen wir nach der Formel (8):

$$\begin{array}{ll} \text{kongruent} & T - t = 0,17'' + 0,67 = 0,84'' \\ \text{konform} & T - t = \dots \dots \dots 0,17'' \end{array}$$

Die konforme Reduktion $0,17''$ ist gerade an der Grenze der Vernachlässigungszulassung für das grundlegende Netz einer feinen Stadtvermessung, während $0,84''$ schon zu gross ist. Wegen dieser Beträge von $0,84''$ etc. haben wir uns damals entschlossen, die auf $0,1''$ ausgeglichenen Triangulierung noch in den 6 Hauptpunkten sphärisch zu rechnen; mit $0,17''$ hätten wir das wohl auch schon ersparen können.

Alle diese Vergleichungen gestatten bereits ein Urteil zu fällen, das zu Gunsten der konformen Projektion, und zu Ungunsten der kongruenten Soldner schen Projektion sich stellen wird; wir werden jedoch in einem späteren Kapitel nochmals auf diese Sache zurückkommen.

§ 53. Sphärische geographische Coordinaten φ, λ und rechtwinklige Coordinaten x, y .

Die geographischen Breiten und Längen φ und λ lediglich auf die Erde als Kugel bezogen, haben wenig praktischen Wert, denn die Abplattung der Erde ist bei diesen Coordinaten viel einflussreicher als bei den rechtwinkligen Coordinaten x, y .

Trotzdem haben wir die Aufgabe, φ und λ aus x und y zu berechnen, und nachher umgekehrt, hier in dem Kapitel über *sphärische* Coordinaten mit aufgenommen, weil es möglich sein wird, durch kleine Kunstgriffe den Übergang von der Kugel zum Ellipsoid noch soweit klar zu machen (in dem nachfolgenden § 54.), als zum ersten Verständnis unserer heutigen Landesvermessungen und Katastervermessungen und zur Einsicht in die Feld- und Landmesser-Anweisungen der deutschen Staaten nötig ist.

Die verschiedenen Beziehungen zwischen geographischen Coordinaten φ, λ und rechtwinkligen Coordinaten x, y werden wir in zwei Aufgaben darstellen, und zwar zuerst:

I. Gegeben x und y . Gesucht φ und λ .

Nach Fig. 1. und Fig. 2. S. 298 nehmen wir folgende Aufgabe:

Gegeben ist die Breite φ_0 eines angenommenen Coordinaten-Ursprungs O und dazu die rechtwinkligen Coordinaten x, y eines Punktes P .

Gesucht ist die Breite φ_2 des Punktes P , der Längen-Unterschied λ zwischen O und P und die Meridian-Konvergenz γ für P und P_1 .

Die Abscissen x sollen nach Norden positiv, die Ordinaten y nach Osten positiv, und die Längen λ ebenfalls nach Osten positiv gezählt werden.

Aus Fig. 1. entnehmen wir sofort die Beziehung zwischen der Ursprungsbreite φ_0 , der Fußpunktsbreite φ_1 und der Abscisse x , nämlich:

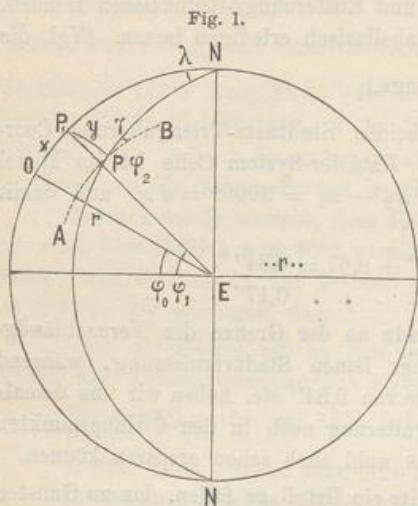
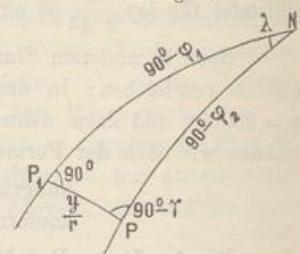


Fig. 1.

Fig. 2.
Rechtwinkliges Dreieck NP_1P
von Fig. 1.



$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{x}{r} \text{ bzw. } = \frac{x}{r} \varrho \quad (1)$$

Alles weitere wird durch das rechtwinklige sphärische Dreieck NP_1P geliefert, weshalb wir dieses Dreieck in Fig. 2. nochmals besonders herausgezeichnet haben. Dieses Dreieck gibt zuerst die Cosinus-Gleichung:

$$\cos(90^\circ - \varphi_2) = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cos \frac{y}{r}$$

oder ohne 90° :

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \left(1 - \frac{y^2}{2r^2}\right)$$

umgekehrt:

$$\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = \frac{y^2}{2r^2} \sin \varphi_1$$

Nun ist aber in erster Näherung (z. B. nach S. 179):

$$\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_2) \cos \varphi_1$$

also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y^2}{2r^2} \tan \varphi_1 \quad (2)$$

Zweitens gibt das rechtwinklige Dreieck Fig. 2. zur Bestimmung von λ :

$$\tan \lambda = \frac{\tan \frac{y}{r}}{\sin(90^\circ - \varphi_1)} = \frac{\tan \frac{y}{r}}{\cos \varphi_1} = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} \right)$$

Die arc tang-Reihe, S. 172, gibt:

$$\lambda = \operatorname{arc} \tan \lambda = \tan \lambda - \frac{(\tan \lambda)^3}{3}$$

$$\lambda = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} \right) - \frac{y^3}{3r^3 \cos^3 \varphi_1}$$

Wenn man die Glieder mit y^3 zusammenordnet, so bekommt man:

$$\lambda = \frac{y}{r \cos \varphi_1} - \frac{y^3}{3r^3} \frac{\tan^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1} \quad (3)$$

Drittens giebt das rechtwinklige Dreieck Fig. 2. zur Bestimmung von γ :

$$\begin{aligned} \tan(90^\circ - \gamma) &= \frac{\tan(90^\circ - \varphi_1)}{\sin \frac{y}{r}} \quad \text{oder} \quad \tan \gamma = \sin \frac{y}{r} \tan \varphi_1 \\ \tan \gamma &= \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right) \tan \varphi_1 \\ \gamma &= \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right) \tan \varphi_1 - \frac{y^3}{3r^3} \tan^3 \varphi_1 \\ \gamma &= \frac{y}{r} \tan \varphi_1 - \frac{y^3}{6r^3} \tan \varphi_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \end{aligned} \quad (4)$$

Durch diese Gleichungen (1) — (4) ist unsere Aufgabe gelöst, wir wollen aber noch zwei neue Gleichungen bilden, welche (3), (4) entsprechen, aber überall statt der Fußpunkts-Breite φ_1 die Breite φ_2 enthalten sollen. Zur Bestimmung von λ nimmt man dann:

$$\sin \lambda = \frac{\sin \frac{y}{r}}{\sin(90^\circ - \varphi_2)} = \frac{\sin \frac{y}{r}}{\cos \varphi_2} = \frac{1}{\cos \varphi_2} \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right)$$

Die \arcsin -Reihe, S. 172, giebt:

$$\begin{aligned} \lambda &= \arcsin \lambda = \sin \lambda + \frac{(\sin \lambda)^3}{6} \\ \lambda &= \frac{1}{\cos \varphi_2} \left(\frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right) + \frac{y^3}{6r^3 \cos^3 \varphi_2} \\ \lambda &= \frac{y}{r \cos \varphi_2} + \frac{y^3}{6r^3} \frac{\tan^2 \varphi_2}{\cos \varphi_2} \end{aligned} \quad (5)$$

Ferner zu einer zweiten Formel für γ aus Fig. 2.:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \gamma) &= \frac{\tan \frac{y}{r}}{\tan(90^\circ - \varphi_2)}, \quad \sin \gamma = \tan \frac{y}{r} \tan \varphi_2 \\ \sin \gamma &= \left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} \right) \tan \varphi_2 \\ \gamma &= \left(\frac{y}{r} + \frac{y^3}{3r^3} \right) \tan \varphi_2 + \frac{y^3}{6r^3} \tan^3 \varphi_2 \\ \gamma &= \frac{y}{r} \tan \varphi_2 + \frac{y^3}{6r^3} \tan \varphi_2 (2 + \tan^2 \varphi_2) \end{aligned} \quad (6)$$

Mit diesen Formeln (1) — (6) haben wir den zu Anfang vorgesetzten Zweck erreicht, und zwar bei λ und γ sogar doppelt.

Ohne zwingenden Grund fürs folgende wollen wir auch noch für λ statt der beiden zweigliederigen Formeln (3) und (5) eine eingliederige Formel bilden, nämlich:

$$\lambda = \frac{y}{r} \sec \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} = \frac{y}{r} \sec \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{3} \right) \quad (7)$$

Man kann diese bequeme Formel (7) leicht rückwärts begründen, indem man setzt:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} &= \varphi_1 - \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \cos \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} &= \cos \varphi_1 + \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \varphi_1 = \cos \varphi_1 \left(1 + \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2) \tan \varphi_1 \right) \\ \sec \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} &= \frac{1}{\cos \varphi_1} \left(1 - \frac{2}{3}(\varphi_1 - \varphi_2) \tan \varphi_1 \right) \end{aligned}$$

Wegen (2) gibt dieses:

$$\sec \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} = \frac{1}{\cos \varphi_1} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y^2}{r^2} \tan^2 \varphi_1 \right)$$

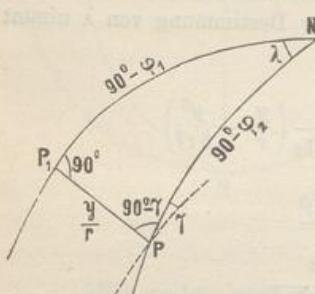
Dieses in (7) gesetzt, führt zurück auf (3), womit (7) bewiesen ist.

Man kann eine Umformung ähnlicher Art auch für die Meridian-Konvergenz machen, denn (4) oder (6) lässt sich auf diese Form bringen:

$$\gamma = \frac{y}{r} \sin \frac{2\varphi_1 + \varphi_2}{3} \sec \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} \quad (8)$$

II. Gegeben φ, λ . Gesucht x, y .

Fig. 1.



Die Umkehrung der vorigen Aufgabe heisst:

Gegeben sind die geographischen Coordinaten φ_1, λ eines Punktes P , und zwar die Länge λ bezogen auf den Meridian eines gegebenen Coordinaten-Systems, dessen Ursprungs-Breite φ_0 ebenfalls gegeben ist.

Gesucht sind die rechtwinkligen Coordinaten x, y des Punktes P , und die Meridian-Konvergenz γ .

Auch diese Aufgabe lässt sich mittelst des rechtwinkligen Dreiecks, das wir in Fig. 1. wieder haben, leicht lösen.

Zur Bestimmung von $\varphi_1 - \varphi_2$ hat man:

$$\cos \lambda = \frac{\tan(90^\circ - \varphi_1)}{\tan(90^\circ - \varphi_2)} = \frac{\tan \varphi_2}{\tan \varphi_1}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \right) \tan \varphi_1 = \tan \varphi_2 \quad \text{oder} \quad \tan \varphi_1 - \tan \varphi_2 = \frac{\lambda^2}{2} \tan \varphi_1$$

Andererseits ist in erster Näherung

$$\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1}$$

also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \quad (9)$$

Bei den Entwicklungen für λ und γ kann man wieder wie im ersten Teil entweder alles auf φ_1 oder auf φ_2 beziehen, wir wollen die *beiden* Entwicklungen nebeneinander hersetzen, ohne Erläuterungen durch Worte, welche nach dem vorhergehenden nicht mehr nötig sein werden.

$$\tan \lambda = \frac{\tan \frac{y}{r}}{\cos \varphi_1} = \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3} \right) \cos \varphi_1$$

$$y = r \lambda \cos \varphi_1 + \frac{r \lambda^3}{3} \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1$$

$$\cos(90^\circ - \gamma) = \sin \lambda \cos(90^\circ - \varphi_1)$$

$$\sin \gamma = \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{6} \right) \sin \varphi_1$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1$$

$$\sin \lambda = \frac{\sin \frac{y}{r}}{\cos \varphi_2} = \left(\lambda - \frac{\lambda^3}{6} \right) \cos \varphi_2$$

$$y = r \lambda \cos \varphi_2 - \frac{r \lambda^3}{6} \cos \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 \quad (10)$$

$$\cos(90^\circ - \varphi_2) = \cot \lambda \cot(90^\circ - \gamma)$$

$$\tan \gamma = \tan \lambda \sin \varphi_2 = \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3} \right) \sin \varphi_2$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi_2 + \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi_2 \cos^2 \varphi_2 \quad (11)$$

Der Gang der Auflösung würde nun so sein, dass man zuerst nach (9) aus der gegebenen Breite φ_2 die Fußpunkts-Breite φ_1 ableitet, und daraus, durch die Differenz gegen die Ursprungs-Breite φ_0 , die Abscisse x berechnet, nämlich:

$$x = (\varphi_1 - \varphi_0) r \quad \text{bezw.} \quad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varrho} r \quad (12)$$

Darauf hat man für y und γ je zwei Formeln, nämlich (10) für y , und (11) für γ , woraus man nach Umständen die eine oder andere auswählen kann, um y und γ zu berechnen. Oder man kann auch zur Probe Doppelrechnung anwenden.

Die Doppel-Formeln (10) und (11), welche zweigliederig sind, kann man auch in je eine eingliederige Formel überführen, in ähnlicher Weise wie dieses früher bei (7) und (8) gezeigt wurde. Man findet:

$$\text{Umwandlung von (10): } y = r \lambda \cos \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3} \quad (13)$$

$$\text{, , , (11): } \gamma = \lambda \sin \frac{2\varphi_1 + \varphi_2}{3} \quad (14)$$

§ 54. Übergang zum Ellipsoid.

Nachdem wir die rein *sphärischen* Beziehungen zwischen den geographischen Coordinaten und den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im vorigen § 53. kennen gelernt haben, müssen wir auch die *sphäroidischen* Beziehungen hiefür, wenigstens in erster Näherung herstellen.

Zuerst behandeln wir die Rektifikation des Meridian-Bogens x zwischen den Breiten φ_0 und φ_1 , wofür in (1) § 53. S. 298 die Gleichung gefunden wurde:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = x \frac{\varrho}{r} \quad \text{oder} \quad x = (\varphi_1 - \varphi_0) \frac{r}{\varrho} \quad (1)$$

Wenn die Abscisse x nicht auf einem Kreisbogen vom Halbmesser r , sondern auf dem Bogen einer Meridian-Ellipse abgewickelt wird, so kann man doch, wenn x nicht sehr gross ist, die Rechnung mit einem Kreisbogen führen, dessen Halbmesser aber dann gleich dem Meridian-Krümmungshalbmesser M für die Mittelbreite $\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$

zu nehmen ist, wie wir bereits in § 35. ausführlich gezeigt haben (nämlich bei (11) S. 210 und dann nochmals besonders bei (43) S. 218—219).

Wir haben dabei gefunden, dass der Fehler dieses Näherungs-Verfahrens in unseren Breiten nur etwa 5''' auf 1° beträgt (vgl. die Hilfstafel für g , S. 219), so dass namentlich bei den kleinen Geltungsbereichen, welche z. B. die 40 Preussischen Kataster-Coordinatensysteme haben, jenes Verfahren ganz zulässig und zugleich sehr bequem ist.

Ausserdem kann man auch eine Hilfstafel von der Art Seite [38] des Anhangs benützen, über welche auf S. 216 das Nötige gesagt wurde.

Dieses war rasch erledigt, etwas mehr Überlegung ist nötig, um für die Kugel, welche im vorigen § 53. mit dem unbestimmten Halbmesser r algebraisch eingeführt wurde, einen greifbaren Halbmesser in Zahlen zu finden.

In dieser Beziehung finden wir, dass die Übertragung auf das Ellipsoid wesentlich erleichtert wird durch den Umstand, dass der Ordinaten-Bogen y , weil er rechtwinklig zum Ursprungs-Meridian ist, mit seinen Endpunkten in nicht wesentlich ver-

schiedenen Breiten liegt, weshalb wir uns erlauben dürfen, die Ordinate y zu betrachten als liegend auf einem Kreisbogen, dessen Halbmesser der Quer-Krümmungshalbmesser N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 ist.

Wir machen also die Annahme

$$r = N_1 = \frac{c}{V_1} = \frac{c}{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_1}} \quad (2)$$

gültig für die Fusspunkts-Breite φ_1 . Die Formel für N_1 wurde früher in § 32. (22) S. 197 entwickelt und statt der Ausrechnung in Zahlen für den einzelnen Fall können wir uns kurzer Hand der Hilfstafel auf Seite [8]—[29] des Anhangs bedienen.

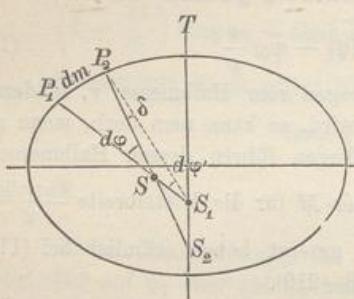
Diese Annahme reicht aus zur Berechnung von λ und γ aus gegebenen φ_1 und y oder umgekehrt, aber zur Berechnung von φ_2 oder φ , d. h. der Breite des Endpunktes einer Ordinate y müssen wir noch eine dritte Überlegung machen, zu welcher wir einen neuen Begriff einführen:

Der verkürzte Breiten-Unterschied.

Von allen Wirkungen der Elliptizität der Erdoberfläche ist die bedeutendste und niemals zu vernachlässigende, wenn überhaupt von der Elliptizität die Rede ist, die Abweichung zweier aufeinander folgender Normalen in einem Meridian, wodurch der kleine Winkel δ entsteht, der in der nachstehenden Fig. 1. eingezeichnet ist.

Wir werden diesen Winkel δ näher untersuchen.

Fig. 1.
 $d\varphi' = d\varphi - \delta$.



In Fig. 1. seien $P_1 S_1$ und $P_2 S_2$ zwei Normalen einer Meridian-Ellipse, welche sich nicht in einem Punkte der Umdrehungsaxe sondern in einem anderen Punkte S schneiden, und zwar unter einem Winkel $d\varphi$, welcher gleich der Differenz der Breiten φ_1 und φ_2 beider Punkte P_1 und P_2 ist, d. h.:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = d\varphi \quad (1)$$

Wenn ferner der Meridianbogen $P_1 P_2 = dm$ gesetzt wird, und der Meridian-Krümmungshalbmesser für die Mittelbreite $= M$ (d. h. nahezu $M = P_1 S = P_2 S$), so hat man für Differentialbetrachtung:

$$dm = M d\varphi \quad (2)$$

Andererseits kann man in erster Näherung auch setzen:

$$dm = N d\varphi' \quad (\text{wo } P_1 S_1 = N) \quad (3)$$

Es ist also das Verhältnis von (2) und (3):

$$\frac{d\varphi}{d\varphi'} = \frac{N}{M} \quad (4)$$

und daraus ergibt sich die Differenz:

$$\delta = d\varphi - d\varphi' = d\varphi \left(1 - \frac{d\varphi'}{d\varphi}\right) = d\varphi \left(1 - \frac{M}{N}\right) \text{ oder } = d\varphi \frac{M}{N} \left(\frac{N}{M} - 1\right) \quad (5)$$

Hiebei ist nach (25) § 32. S. 197:

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi \quad (6)$$

Da das Produkt $e'^2 \cos^2 \varphi$ sehr häufig vorkommt, bezeichnen wir es besonders, wie schon früher in (b) S. 208, indem wir setzen:

$$e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2, \quad \text{also } V^2 = 1 + \eta^2 \quad (7)$$

Damit wird nach (5):

$$\delta = \frac{d \varphi}{V^2} \eta^2 \quad (8)$$

Diese Formeln geben Veranlassung, eine neue Benennung einzuführen für den Winkel $d\varphi'$ von Fig. 1., welcher mit der Bezeichnung $\Delta\varphi'$ auch in Fig. 2. wiederkehrt.

Wenn allgemein $\Delta\varphi$ ein kleiner Breiten-Unterschied ist, so ist der entsprechende auf die Erdaxe reduzierte Wert $\Delta\varphi'$ nach (4) und (6):

$$\Delta\varphi' = \frac{\Delta\varphi}{V^2} = \text{verkürzter Breiten-Unterschied} \quad (9)$$

Zu jedem gegebenen kleinen Breiten-Unterschied kann man den entsprechenden „verkürzten Breiten-Unterschied“ $\Delta\varphi'$ mit Hilfe von V^2 nach unserer Hilfstafel Seite [8]—[29] des Anhangs leicht berechnen; es sei z. B.: $\varphi_1 = 49^\circ 30'$, $\varphi_2 = 50^\circ 30'$, also $\Delta\varphi = 1^\circ = 3600''$ und die Mittelbreite $\varphi = 50^\circ 0'$, dann hat man:

$\log \Delta\varphi$	3.556 303
von Seite [21]: $\log V^2$	0.001 204
$\log \Delta\varphi'$	3.555 099 $\Delta\varphi' = 3590,04''$ $\Delta\varphi' = 0^\circ 59' 50,04''$

Der verkürzte Breiten-Unterschied dient dazu, um in erster Näherung sphäroidische Bögen auf einen Mittelpunkt in der Erdaxe zu reduzieren.

In Fig. 2. ist K ein solcher Mittelpunkt in der Erdaxe, aber unter dem Ellipsoidmittelpunkt gelegen. Hat man einen Bogen $P_1 P_2 = s$, so kann man zuerst einen Centriwinkel σ berechnen:

$$\frac{s}{N} = \sigma \quad (10)$$

Dabei ist $N = P_1 K$ der Quer-Krümmungs-Halbmesser des Ausgangspunktes P_1 .

Diese Art der Reduzierung auf einen Zentralpunkt K ist, wie mehrfach betont, nur genähert, sie ist aber um so besser, je kleiner der Breiten-Unterschied ist, um den es sich dabei handelt. Deswegen ist das Verfahren genügend für unsere Aufgabe der Breitenbestimmung aus rechtwinkligen Coordinaten $x y$, denn hiebei steht der Ordinatenbogen y rechtwinklig auf dem Abscissen-Meridian x und deswegen werden die Fusspunktsbreite φ_1 von y und die Endbreite φ nicht sehr von einander verschieden sein.

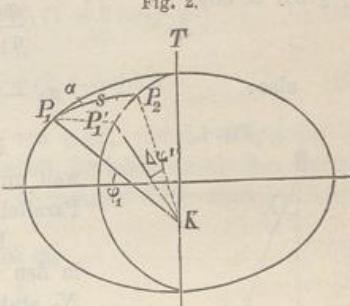


Fig. 2.

§ 55. Sphäroidische Coordinaten φ , λ und x , y .

Um die sphärischen Formeln von § 53. mit Hilfe von § 54. auf das Ellipsoid zu übertragen, nehmen wir zuerst die Formel (2) S. 298 zur Hand, nämlich:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y^2}{2r^2} \tan \varphi_1 \quad (1)$$

Zuerst ist für r der Quer-Krümmungs-Halbmesser N_1 der Fusspunkts-Breite φ_1 zu setzen, also:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{y}{2N_1^2} \tan \varphi_1 \quad (2)$$

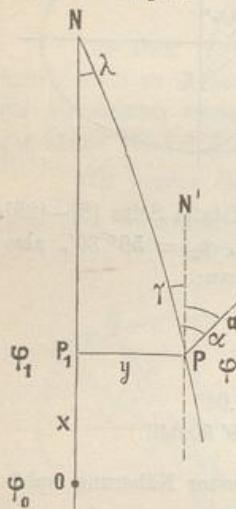
Diese Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ ist sphärisch berechnet, d. h. „verkürzt“ in dem früher in § 54. erörterten Sinne; die wirkliche Breiten-Differenz $\varphi_1 - \varphi$ wird daher nach (4) § 54. S. 302:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{N}{M} = V^2 \quad (3)$$

also:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{V^2}{2} \frac{y^2}{N_1^2} \tan \varphi_1 \quad (4)$$

Fig. 1.



Dabei wird V^2 als zur Breite φ_1 gehörig genommen, weil unter der Breite φ_1 Berührungs des y -Bogens mit dem Parallelkreis stattfindet.

Da wir nun nichts mehr weiter zu thun haben, als in den sphärischen Formeln von § 53. S. 298—300 überall N_1 statt r und φ statt φ_2 zu schreiben und die nötigen ϱ zuzusetzen, erhalten wir mit Benützung der vorstehenden (1) und (4) und im Anschluss an nebenstehende Fig. 1. folgendes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gegeben } \varphi_0, x, y \\ \text{Gesucht } \varphi_1, \varphi, \lambda \text{ und } \gamma \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$\text{Auflösung: } \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{x}{M} \varrho \quad (6)$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{V^2}{2} \frac{y^2}{N_1^2} \varrho \tan \varphi_1 \quad (7)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{x}{M} \varrho - \frac{V^2}{2} \frac{y^2}{N_1^2} \varrho \tan \varphi_1 \quad (8)$$

$$(3) \text{ S. 298: } \lambda = \frac{y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{y^3}{3N_1^3 \cos \varphi_1} \varrho \tan^2 \varphi_1 \quad (9)$$

$$(5) \text{ S. 299 oder: } \lambda = \frac{y}{N_1 \cos \varphi} + \frac{y^3}{6N_1^3 \cos \varphi} \varrho \tan^2 \varphi \quad (10)$$

$$(4) \text{ S. 299: } \gamma = \frac{y}{N_1} \varrho \tan \varphi_1 - \frac{y^3}{6N_1^3} \varrho \tan \varphi_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \quad (11)$$

$$(6) \text{ S. 299 oder: } \gamma = \frac{y}{N_1} \varrho \tan \varphi + \frac{y^3}{6N_1^3} \varrho \tan \varphi (2 + \tan^2 \varphi) \quad (12)$$

Nun wollen wir noch die Haupt-Coefficienten [1] und [2] unserer Hilfstafel von S. [8]—[29] des Anhangs einführen, nämlich:

$$\frac{\varrho}{M} = [1] \text{ für die Mittelbreite } \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \quad (13)$$

$$\frac{\varrho}{N_1} = [2] \text{ für die Fusspunkts-Breite } \varphi_1 \quad (14)$$

Damit werden die vorstehenden Formeln:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + [1] x \quad (6*)$$

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{([2] y)^2 V^2}{2 \varrho} \tan \varphi_1 \quad (7*)$$

$$\varphi = \varphi_0 + [1] x - \frac{([2] y)^2}{2 \varrho} V^2 \tan \varphi_1 \quad (8*)$$

$$\lambda = \frac{[2] y}{\cos \varphi_1} - \left(\frac{[2] y}{\cos \varphi_1} \right)^3 \frac{1}{3 \varrho^2} \sin^2 \varphi_1 \quad (9*)$$

$$\text{oder } \lambda = \frac{[2] y}{\cos \varphi} + \left(\frac{[2] y}{\cos \varphi} \right)^3 \frac{1}{6 \varrho^2} \sin^2 \varphi \quad (10*)$$

$$\lambda = [2] y \tan \varphi_1 - \frac{([2] y)^3}{6 \varrho^2} \tan \varphi_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \quad (11*)$$

$$\text{oder } \lambda = [2] y \tan \varphi + \frac{([2] y)^3}{6 \varrho^2} \tan \varphi (2 + \tan^2 \varphi) \quad (12*)$$

Nachdem wir den ersten Teil der Formeln von § 53. von der Kugel auf das Ellipsoid übertragen haben, kann keine Schwierigkeit bestehen, auch den zweiten Teil jener Formeln von § 53. S. 300—301 so zu übertragen. Wir schreiben hiefür sofort die Ergebnisse:

$$\text{Gegeben } \varphi, \lambda \text{ nebst } \varphi_0 \quad (15)$$

$$\text{Gesucht } x, y, \gamma \quad (16)$$

$$(9) \text{ S. 300: } \varphi_1 = \varphi + \frac{V^2}{2 \varrho} \lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (17)$$

$$(12) \text{ S. 301: } x = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]} \quad (18)$$

$$(10) \text{ S. 300: } y = \frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_1 + \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{3 \varrho^2} \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 \quad (19)$$

$$\text{oder } y = \frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{6 \varrho^2} \cos \varphi \sin^2 \varphi \quad (20)$$

$$(11) \text{ S. 300: } \gamma = \lambda \sin \varphi_1 - \lambda^3 \frac{1}{6 \varrho^2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \quad (21)$$

$$\text{oder } \gamma = \lambda \sin \varphi + \lambda^3 \frac{1}{3 \varrho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (22)$$

Nun geben wir auf S. 308—309 ein Zahlen-Beispiel sowohl für die Formeln (7*)—(12*), als auch für deren Umkehrung (17)—(22). Da die ganze Rechnung mit allen Einzelzahlen angegeben ist, wird zur Erklärung nichts weiter nötig sein; auch einige vorübergehend eingeführte Zwischen-Bezeichnungen (a), (b) u. dgl. erklären sich selbst als kleine Übergangshilfen, mit Rücksicht auf Raummangel.

Die Coefficienten-Logarithmen $\log [1]$, $\log [2]$, $\log V^2$, $\log (1 + t^2)$, $\log (2 + t^2)$, sind aus den verschiedenen Hilfstafeln unseres Anhangs entnommen.

Im Übrigen sei nur noch bemerkt, dass man das Vorzeichen von y oder λ nicht in der ganzen Rechnung durchführen muss, wie bei uns theoretisch nötig war, man braucht nur am Schlusse zu merken, dass y , λ und γ immer gleiche Zeichen haben.

Der im nachstehenden Beispiele S. 308 und 309 benützte Coordinaten-Nullpunkt Celle ist einer der 40 preussischen Kataster-Nullpunkte, welche im Jahre 1879 eingeführt worden sind.

Meridianbögen und Breiten-Differenzen.

Bei den kleinen Geltungsbereichen der Preussischen Kataster-Coordinaten-Systeme wird die Beziehung zwischen der Abscisse x und der Breiten-Differenz $\varphi_1 - \varphi_0$ hinreichend genau durch den Meridian-Krümmungs-Halbmesser M der Mittelbreite gegeben, nämlich:

$$x = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varrho} M \quad \text{oder} \quad = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{[1]}$$

wobei M der Meridian-Krümmungs-Halbmesser für die Mittelbreite $\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}$ ist, oder [1] der entsprechende Coefficient nach (13) S. 304.

Indessen bei grösserer Ausdehnung empfiehlt sich andererseits eine allgemeine Tafel der Meridianbögen, z. B. diejenige, welche auf S. 216 erwähnt wurde, welche auch in unserem Anhange Seite [38] von $10'$ zu $10'$ gegeben ist, oder besser in neuer Berechnung Seite [55]—[57] von $1'$ zu $1'$.

Bei Benützung einer solchen Tafel braucht man für den Coordinaten-Nullpunkt mit gegebener Breite φ_0 nur ein für allemal den Meridianbogen-Wert B_0 zu bestimmen, um dann für jede andere Breite φ_1 den zugehörigen Wert B_1 und dann $x = B_1 - B_0$ zu finden.

Für den Wert $\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709''$, welcher zu dem Coordinaten-Nullpunkt Celle gehört, haben wir die fragliche Interpolation schon beispielshalber aus anderer Veranlassung behandelt, nämlich am Schluss von § 35. S. 220 wurde gefunden $B_0 = 5\ 832\ 371,046^m$ als Meridianbogen vom Äquator bis zu dem Punkte Celle.

Hat man längere Zeit mit Punkten eines Geltungsbereiches zu thun, so kann man auch noch weiteres allgemein tabellarisch vorbereiten, man kann z. B. eine Tafel anlegen, welche für gegebene Fusspunkts-Breite φ_1 sofort die Abscisse x giebt oder umgekehrt. Z. B. in der Gegend von Hannover-Linden, im Geltungsbereiche Celle, benützen wir folgende Hilfstafel:

Geographische Breite = φ	Meridianbogen = B	$B - B_0 = x$	Δx
Celle $52^\circ 37' 32,6709''$	$5\ 832\ 371,046^m$	0,000 m	
.....
$52^\circ 30'$	5 818 380,341	— 13 990,705 m	1854,399 m
52 29	5 816 525,942	— 15 845,104	1854,393
52 28	5 814 671,549	— 17 699,497	1854,388
52 27	5 812 817,162	— 19 553,885	1854,382
52 26	5 810 962,779	— 21 408,267	1854,378
52 25	5 809 108,401	— 23 262,645	1854,372
52 24	5 807 254,029	— 25 117,017	1854,367
52 23	5 805 399,662	— 26 971,384	1854,361
52 22	5 803 545,301	— 28 825,745	1854,357
52 21	5 801 690,944	— 30 680,102	1854,351
52 20	5 799 836,593	— 32 534,453	

Man sieht übrigens aus dem Zusammenhang dieser Zahlenwerte, dass wenn man den Meridian von Celle als x -Axe benützen will, damit der Punkt Celle als Nullpunkt für die Berechnung gar keine Rolle spielt; man könnte gerade so gut z. B. $\varphi_0 = 52^\circ 30'$ als Nullpunktsbreite nehmen, dann würden alle x um 13 990,705 m grösser; alle Differenzen der x und alles Übrige blieben aber gleich.

Die Abscissen x eines solchen Coordinaten-Systems können beliebig lang sein, sie könnten z. B. vom Äquator bis zum Nordpol hingehen, wenn man eine Tafel der durchgehenden Meridianbögen benützt.

Das führt auf den Gedanken, dass man z. B. den Meridian von Celle auch so benützen könnte, dass die x schlechthin = B gesetzt würden, mit Weglassung einer runden Zahl, etwa 5000 000; dann bekäme Celle als Zufallspunkt die Abscisse $x = 832\,371,046^m$ und die Ordinate $y = 0,000^m$.

In diesem Sinne, d. h. mit Zählung der x vom Äquator der Erde an, wollen wir auch noch die beiden Formeln (17) und (18) zusammen so schreiben:

$$x = \frac{\varphi - \varphi_0}{[1]} + \frac{V^2 \lambda^2}{2 \varrho [1]} \sin \varphi \cos \varphi \quad (23)$$

Setzt man hier $\varphi_0 = 0$, d. h. zählt man vom Äquator an, so nimmt das erste Glied von (23) den Wert B an, d. h. den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ , und da im zweiten Gliede $[1] = \frac{\varrho}{M}$ und $V^2 = \frac{N}{M}$ ist, so hat man:

$$x = B + \frac{\lambda^2}{2 \varrho^2} N \sin \varphi \cos \varphi = B + \frac{\lambda^2}{2 \varrho} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{[2]} \quad (24)$$

Dabei wird N oder $[2]$ zur Breite φ gehörig genommen, während wir es früher zur Fußpunkts-Breite φ_1 genommen haben. Solche und ähnliche Unterscheidungen würden sich erst in den höheren Gliedern, die hier nicht mehr mit genommen sind, ausdrücken. Wir werden der Formel (24) oder ähnlichen, auch später wieder begegnen.

Rechnungs-Formular der preussischen Kataster-Anweisung IX, vom 25. Oktober 1881.

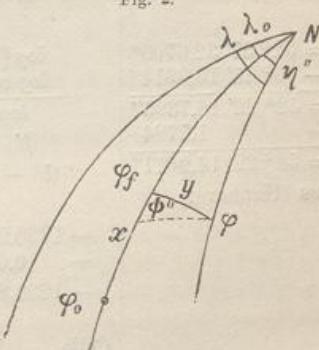
Da in Preussen die Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in Form von geographischen Coordinaten geschehen, der Feld- und Landmesser aber rechtwinklige Coordinaten haben muss, kommt die gegenseitige Verwandlung solcher Coordinaten so oft vor, dass die Kataster-Anweisung hiefür ein „Trig. Form. 6.“ gegeben hat.

Die dazu nötigen Hilfstafeln sind aber in der amtlichen Anweisung IX. nicht enthalten, sondern es wird hiefür verwiesen auf die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst von F. G. Gauss 1876 und 2. Aufl. 1892. Als Quellenschrift für die Methode des Form. 6. wird angegeben: „Börsch, Anleitung zur Berechnung der rechtw. sphär. Coordinaten u. s. w. 1868, 1869, S. 19 und 1885, S. 91“. Na-mentlich die Rechnung mit Additamenten, welche unsern Gliedern dritter Ordnung $\frac{\lambda^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{6}$

u. s. w. entspricht, ist aus Börsch in das preussische Kataster übergegangen.

Das erwähnte Form. 6. betrifft nur die Verwandlung der geographischen Coordinaten in rechtwinklige Coordinaten, und nicht umgekehrt; auch ist die Berechnung der Meridian-Konvergenz nicht mit aufgenommen.

Fig. 2.



Geographische Coordinaten φ, λ aus rechtwinkligen Coordinaten x, y .

Coordinaten-Nullpunkt Celle mit $\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709''$ $L_0 = 27^\circ 44' 54,8477''$
 Gegeben Ägidius $x = -28308,394^m$ $y = -23271,813^m$

Genäherte Berechnung von $\varphi_1 - \varphi_0$ aus x nach 20000^m giebt $10' 47,1''$
 der Hilfstafel Seite [39] des Anhangs; mit 8000 $4' 18,85$
 rund $\varphi = 52\frac{1}{2}^\circ$ 300 $9,70$
 \qquad 8 $0,24$

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} = 52^\circ 29' 54,72'' \quad \varphi_0 = 52^\circ 37' 32,67''$$

$$\text{Genähert } \varphi_1 = 52^\circ 22' 16,78''$$

Damit geben die Hilfstafeln des Anhangs:

mit φ_m Seite [33], $\log [1] = 8.509\ 9477\cdot 2$	mit φ_1 Seite [33], $\log [2] = 8.508\ 8706\cdot 9$ \qquad [21], $\log V^2 = 0.001\ 086$
--	--

$\varphi_1 = \varphi_0 + [1]x$	$\lambda = \frac{[2]y}{\cos \varphi_1} - \left(\frac{[2]y}{\cos \varphi_1} \right)^3 \frac{1}{3\rho^2} \sin^2 \varphi_1$ oder: $\varphi = \varphi_1 - \frac{([2]y)^2}{2\rho} V^2 \tan \varphi_1$	$\gamma = [2]y \tan \varphi_1 - \frac{([2]y)^3}{6\rho^2} t_1 (1+2t)$ oder: $\gamma = [2]y \tan \varphi + \frac{([2]y)^3}{6\rho^3} t (2+t^2)$
$\log [1] \mid 8.509\ 9477\cdot 2$ $\log x \mid 4.451\ 9152\cdot 3$ $\log [1] x \mid 2.961\ 8629\cdot 5$ $[1] x = -915,9314''$	$\log [2] \mid 8.508\ 8706\cdot 9$ $\log y \mid 4.366\ 8302\cdot 2$ $\log [2] y \mid 2.875\ 7009\cdot 1$ $\log \cos \varphi_1 \mid 9.785\ 7153\cdot 5$ $\log (b) \mid 3.089\ 9855\cdot 6$ $(b) = -1230,2278''$	$\log [2] y \mid 2.875\ 7009\cdot 1$ $\log \tan \varphi_1 \mid 0.113\ 0011\cdot 1$ $\log (c) \mid 2.988\ 7020\cdot 2$ $(c) = -974,3209''$
$\log ([2]y^2) \mid 5.751\ 402$ $\log \tan \varphi_1 \mid 0.113\ 001$ $\log V^2 \mid 0.001\ 086$ $- (1:2\rho) \mid 4.384\ 545$ <hr/> $\log (a) \mid 0.250\ 034$ $(a) = -1,7784''$	$\sin^2 \varphi_1 \mid 9.2700 \quad (b')^3 \mid 9.2699$ $(b')^3 \mid 9.7974 \quad \sin^2 \varphi \mid 9.7974$ $- (1:3\rho^2) \mid 8.8940 \quad (1:6\rho^2) \mid 8.5930$ $(c) \mid 7.9614 \quad + (e') \mid 7.6603$ $+ 0.0091'' \quad - 0.0046''$	$([2]y^3) \mid 8.6271 \quad ([2]y)^3 \mid 8.6271$ $t_1 \mid 0.1130 \quad t \mid 0.1130$ $(1+2t^2) \mid 0.6399 \quad (2+t^2) \mid 0.5661$ $-(1:6\rho^2) \mid 8.5930 \quad (1:6\rho^2) \mid 8.5930$ $(d) \mid 7.9730 \quad + (d') \mid 7.8992$ $+ 0.0094'' \quad - 0.0079''$
Celle $\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709''$ $+ [1]x = -0^\circ 15' 15,9314$ $\varphi_1 = 52^\circ 22' 16,7395''$ $(a) = -1,7784$ $\varphi = 52^\circ 22' 14,9611''$ Ägidius (Hannover).	$\log [2] y \mid 2.875\ 7009\cdot 1$ $\log \cos \varphi \mid 9.785\ 7202\cdot 1$ $\log (b') \mid 3.089\ 9807\cdot 0$ $(b') = -1230,2141''$ $(b) - (c) \quad (b') + (c')$ $- 1230,2278'' \quad - 1230,2141''$ $+ 0.0091 \quad - 0.0046$ $- 1230,2187'' \quad - 1230,2187''$	$\log [2] y \mid 2.875\ 7009\cdot 1$ $\log \tan \varphi \mid 0.112\ 9933\cdot 7$ $(c') \mid 2.988\ 6942\cdot 8$ $(c') = -974,3035''$ $(c) - (d) \quad (c') + (d')$ $- 974,3209'' \quad - 974,3035''$ $+ 0.0094 \quad - 0.0079$ $- 974,3115 \quad - 974,3114$
Celle $\lambda = -0^\circ 20' 30,2187''$ Ägidius $L_0 = 27^\circ 44' 54,8477$		Meridian-Convergenz $\gamma = -16' 14,311''$
Ägidius $L = 27^\circ 24' 24,6290''$		

Rechtwinklige Coordinaten x, y aus geographischen Coordinaten φ, λ .

Coordinaten-Nullpunkt Celle	$\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709''$	$L_0 = 27^\circ 44' 54,8477''$
Gegeben Ägidius	$\varphi = 52^\circ 22' 14,9611''$	$L = 27^\circ 24' 24,6290''$
Differenzen $\varphi - \varphi_0 = - 15' 17,7098''$	$\lambda = - 0^\circ 20' 30,2187''$	$\lambda = - 1230,2187''$

$\varphi_1 = \varphi + \frac{V^2}{2\varrho} \lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi$	$\log \lambda$	3.089 9823·2
	$\log \lambda^2$	6.179 965
$\varphi_1 - \varphi_0 = x$	$\log \sin \varphi$	9.898 714
[1]	$\log \cos \varphi$	9.785 720
Anhang Seite [21] giebt . . .	$\log V^2$	0.001 086
	$\log (1:2\varrho)$	4.384 545
	$\log (\alpha)$	0.250 030
		(a) = 1,7784"

$$\begin{array}{l} \varphi = 52^\circ 22' 14,9611'' \\ + (a) \quad \quad \quad + 1,7784 \end{array}$$

Mit φ_1 giebt die Hilfstafel Seite [33] des Anhangs:

$$\log [2] = 8.508 8706·9$$

und mit φ_m giebt dieselbe Hilfstafel Seite [33]:

$\log [1]$	8.509 9477·2
hiezu $\log (\varphi_1 - \varphi_0)$	2.961 8629·5
$\log x$	4.451 9152·3
$x = - 28308,394^m$	

$$\begin{array}{l} \varphi_1 = 52^\circ 22' 16,7395'' \\ \text{Celle} \quad \varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709'' \\ \varphi_1 - \varphi_0 = - 15' 15,9314'' \\ \quad = - 915,9314 \end{array}$$

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2} = 52^\circ 29' 54,7052''$$

$y = \frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_1 + \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{3\varrho^2} \cos \varphi_1 \sin^2 \varphi_1$	oder	$y = \frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{[2]} \frac{1}{6\varrho^2} \cos \varphi \sin^2 \varphi$
1 : [2] 1.491 1293·1	(b) 4.3668·n	1 : [2] 1.491 1293·1
λ 3.089 9823·2·n	λ^2 6.1800	λ 3.089 9823·2·n
$\cos \varphi_1$ 9.785 7153·5	$\sin^2 \varphi_1$ 9.7974	$\cos \varphi$ 9.785 7202·1
(b) 4.366 8269·8·n	(1 : 3 ϱ^2) 8·8940	(b') 4.366 8318·4·n
	(c) 9.2382·n	(c') 8.9372

$$(b) = - 23 271,639$$

$$(b') = - 23 271,900$$

$$(c) = - 0,173$$

$$(c') = + 0,087$$

$$y = - 23 271,812$$

$$y = - 23 271,813$$

$\gamma = \lambda \sin \varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6\varrho^2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1$	oder	$\gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3\varrho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi$
λ 3.089 9823·2·n	$\lambda \sin \varphi_1$ 2.9887·n	λ 3.089 9823·2·n
$\sin \varphi_1$ 9.898 7164·6	λ^2 6.1800	$\sin \lambda \varphi$ 2.9887·n
$\lambda \sin \varphi_1$ 2.988 6987·8·n	$\cos^2 \varphi_1$ 9.5714	λ^2 6.1800
	(-1 : 6 ϱ^2) 8.5930·n	$\cos^2 \varphi$ 9.5714
	(d) 7.3331	(1 : 3 ϱ^2) 8.8940
		(d') 7.6341·n

$$\lambda \sin \varphi_1 = - 974,3136''$$

$$\lambda \sin \varphi = - 974,3072''$$

$$(d) = + 0,0022''$$

$$(d') = - 0,0043''$$

$$\gamma = - 974,3114''$$

$$\gamma = - 974,3115''$$

Schluss-Ergebnis: Ägidius $y = - 23 271,813^m \quad x = - 28 308,394^m$

Meridian-Konvergenz $\gamma = - 16' 14,311''$.

In Fig. 2. S. 307 sind die Bezeichnungen dieses Formulars eingeschrieben, es ist nämlich:

- φ_0 die Breite des Coordinaten-Ursprungs,
- φ_f die Breite des Ordinaten-Fusspunktes,
- φ die Breite des gesuchten Punktes,
- λ_0 die Länge des Coordinaten-Ursprungs,
- λ die Länge des gesuchten Punktes,
- x und y die gesuchten Coordinaten.

Dabei ist x von φ_0 bis φ_f auf dem Meridian nördlich positiv, südlich negativ gezählt und y rechtwinklig zum Meridian östlich positiv, westlich negativ gezählt.

Die Aufgabe lautet: Aus gegebenen φ_0 , φ , λ_0 , λ die Coordinaten x , y zu berechnen.

Die Differenz $\lambda - \lambda_0$ wird in Sekunden verwandelt, mit η'' bezeichnet, und weiter kommt die Breiten-Differenz $\varphi_f - \varphi = \psi''$ in Betracht, welche aus η'' berechnet wird nach der Formel

$$\psi'' = \eta''^2 q \quad (25)$$

Dieses entspricht unserer Formel (17) S. 305 für $\varphi_1 - \varphi$, d. h.:

$$\varphi_1 - \varphi = \lambda^2 \frac{V^2}{2\varrho} \sin \varphi \cos \varphi \quad (26)$$

Daraus ergiebt sich, dass der Faktor q in der Formel (25), umgesetzt in unsere Bezeichnungen der Formel (26), diese Bedeutung hat:

$$q = \frac{V^2}{2\varrho} \sin \varphi \cos \varphi \quad (27)$$

Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, dass das hier gebrauchte $\frac{V^2}{2\varrho}$ auch in den Formeln und Tafeln der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme vorkommt mit der Bezeichnung (3), wie wir in § 39. S. 228 schon angegeben haben. In einem Formular kann man den konstanten Logarithmus $\log(1 : 2\varrho) = 4.384\,545$ gedruckt aufnehmen, so dass also eine Tafel für $\log V^2$, welche man zu sehr vielen anderen Zwecken ohnehin braucht, genügt; auch $\log \sin \varphi$ und $\log \cos \varphi$ nehmen wir lieber besonders, als vereinigt in der Tafel für $\log q$, weil es hier angezeigt ist, mindestens 6 stellig scharf zu rechnen.

Nachdem man in dem genannten Formular 6. ψ'' zu φ addiert, und damit φ_f erhalten hat, kann man aus der Differenz $\varphi_f - \varphi_0$ die Abscisse x berechnen. Das Formular bedient sich hiezu der schon oben (S. 306) von uns citierten und beschriebenen Hilfstafel von F. G. Gauss, wobei aber zu bemerken ist, dass die Interpolation eine Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen verlangt. Auch unsere Rechnung auf S. 309 mit der Mittelbreite φ_m ist hier noch nicht die beste; auf ein bequemeres Rechnungsverfahren, nach der Formel (37) § 35. S. 218 werden wir später zurückkommen; auch ist hier die neue Tafel Seite [55]—[57] zuzuziehen.

Um vollends die Ordinate y zu erhalten, rechnet jenes Formular 6. mit Längen-Sekunden L und mit Additamenten, wodurch in anderer Form dasselbe erhalten wird, wie durch die Reihen-Entwicklung (19) S. 305.

Wenn man unser Beispiel Ägidius von S. 309 nach dem fraglichen Formular 6. behandelt, so bekommt man in dem Teile für y :

$\varphi_f = 52^\circ 22' 16,7395''$	$\eta = 0^\circ 20' 30,2187''$			
$\log \eta'' = \log 1230,2187''$	3.089 9823		<i>log</i>	
Addit.-Tafel für 3.089 + 2 $A\eta''$	51	43,2605	1.6361	
Tafel der $\log L$ für $\varphi = 52^\circ 23'$ $\log L$	1.276 7268	$A 1''$	1.4354	
Interpolation für — 43,2605'', $A \log L$	1179			3.0815
<i>log tang (y : r)</i>	4.366 8321			
Addit.-Tafel für 4.367 — 2 A_y	— 19			
<i>log y</i>	4.366 8302			
$y = 23271,81^m$				

Diesem entspricht bei unserer Rechnung S. 309:

Hilfstafel Seite [33] für $52^\circ 22' 15''$, $\log [2]$	8.508 8707·0			
$\log (1 : [2])$	1.491 1293·0		(b')	4.3668
$\lambda = 0^\circ 20' 30,2187'' = 1230,2187$, $\log \lambda$	3.089 9823·2		λ^2	6.1800
$\varphi = 52^\circ 22' 14,9611''$	9.785 7202·1		$\sin^2 \varphi$	9.7974
(oder Formel (13) S. 301 mit $\cos 52^\circ 22' 15,5539''$)	$\log (b')$	4.366 8318·3	$-(1 : 6 \varrho^2)$	8.5930 _n
	(b') = 23271,900		$\log (c')$	8.9372 _n
			(e') = — 0,087	
			$y = 23271,813^m$	

Es mag unentschieden bleiben, welche der verschiedenen Rechnungen die bessere ist, wir haben aber die Vergleichung hier hergesetzt, weil die Landmesser oft den Wunsch haben, ausser der ihnen durch amtliches Formular vorgeschriebenen Rechnung eine unabhängige Kontrollrechnung nebenher zu haben.

Bemerkung über die geographischen Längen und Breiten.

Die geographischen Längenunterschiede λ werden teils in Bogenmass teils in Zeitmass angegeben, zu deren gegenseitiger Verwandlung unsere Hilfstafel auf Seite [42] des Anhangs benutzt werden kann.

Als Beispiel wollen wir im System der Preussischen Landesaufnahme nehmen:

Berlin, Rauenberg	$\lambda_0 = 31^\circ 2' 4,9280'' = 2h 4m 8,328533^s$
Celle	$\lambda = 27^\circ 44' 54,8477'' = 1h 50m 59,666514^s$

$$\text{Differenz } \lambda_0 - \lambda = 3^\circ 17' 10,0803'' = 0h 13m 8,672019^s$$

Bei der Benützung der Hilfstafel Seite [42] kann man beliebig viele Dezimalen schreiben, obgleich nur 0,0001^s angegeben ist. Z. B. für vorstehendes $\lambda_0 - \lambda$ hat man:

$3^\circ 17' 10,0803''$	$0h 13m 8,672019^s$		
$17' =$	$1m 8s$	$8s =$	$2' 0''$
$10'' =$	$0,666 667s$	$0,6s =$	$9,0''$
$0,08'' =$	$0,005 333s$	$0,07s =$	$1,05''$
$0,0003'' =$	$0,000 020s$	$0,002s =$	$0,030''$
		$0,00002s =$	$0,00030''$
Summe	$0h 13m 8,672 020^s$	Summe	$3^\circ 17' 10,08030''$

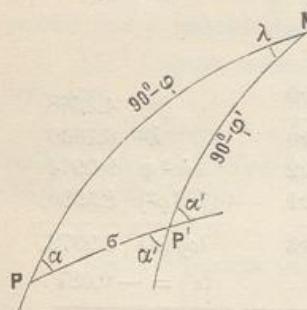
Was die Zahlenschärfe solcher Angaben, ebenso wie auch für geographische Breiten, betrifft, so kommt die etwaige astronomische Messung dabei für uns nicht in Betracht (vgl. § 26, S. 162 bis 163). In geodätischer Beziehung gelten Längen und Breiten nur als Mass-Bestimmungen auf der Oberfläche des Ellipsoids; und da z. B. 1'' in Breite rund = 30 Meter ist, so bringt 0,001'' immer noch 0,03^m oder 3 Centimeter, und man muss daher geographische Coordinaten auf 0,0001'' oder gar auf 0,00001'' genau angeben, wenn man die Genauigkeit geodätischer Messungen, mit der immer formell etwas übertrieben nötigen Schärfe, durch geographische Längen und Breiten ausdrücken will.

§ 56. Entfernung und Azimute aus geographischen Coordinaten.

Die Einführung des verkürzten Breiten-Unterschiedes nach § 54. S. 302 genügt bereits, um auf mässige Ausdehnung von Dreiecken III. Ordnung mit geographischen Coordinaten Entfernungen und Azimute zu berechnen.

Indem wir zunächst die Aufgabe rein sphärisch betrachten, haben wir im Anschluss an Fig. 1. folgendes:

Fig. 1.
Sphärisches Polardreieck.



Wenn zwei Punkte P und P' durch ihre geographischen Breiten φ und φ' nebst ihrem geographischen Längen-Unterschied λ gegeben sind, so wird dadurch ein sphärisches Dreieck NPP' bestimmt, dessen Seite $NP = 90^\circ - \varphi$, dessen Seite $NP' = 90^\circ - \varphi'$ und dessen Winkel bei $N = \lambda$ ist.

Man kennt also von dem Dreieck zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, und daher ist auch die dritte Seite σ und die beiden anderen Dreiecks-Winkel α und $180^\circ - \alpha'$ bestimmt, d. h. man kann dann die Entfernung beider Punkte $PP' = \sigma$ und die beiden Azimute in P und in P' , bezw. $= \alpha$ und $= \alpha'$ berechnen.

Wenn man die Gaußschen (bzw. Neperschen) Gleichungen von § 27. S. 165 auf unseren Fall anwendet, so bekommt man:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\alpha' + \alpha}{2} &= \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \\ \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\alpha' + \alpha}{2} &= \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \\ \cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2} &= \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \sin \frac{\lambda}{2} \\ \cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} &= \cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Wir wollen die Mittelwerte besonders bezeichnen:

$$\frac{\varphi' + \varphi}{2} = \varphi_0 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \alpha_0 \quad (2)$$

Wenn σ und λ klein sind, so werden auch $\varphi' - \varphi$ und $\alpha' - \alpha$ klein und dann hat man genähert aus (1):

$$\left. \begin{aligned} \sigma \sin \alpha_0 &= \cos \varphi_0 \lambda \\ \sigma \cos \alpha_0 &= \varphi' - \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\alpha' - \alpha = \sin \varphi_0 \lambda \quad (3)$$

Die beiden ersten Gleichungen (2) geben:

$$\tan \alpha_0 = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\varphi' - \varphi} \quad (4)$$

$$\sigma = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\varphi' - \varphi}{\cos \alpha_0} \quad \text{oder} \quad \sigma = \sqrt{(\varphi' - \varphi)^2 + (\lambda \cos \varphi_0)^2} \quad (5)$$

Diese sphärischen Formeln kann man auf das Ellipsoid übertragen, wenn man nur überall nach (9) § 54. S. 303 den verkürzten Breiten-Unterschied $\frac{\varphi' - \varphi}{V^2} = (\varphi' - \varphi) \frac{M}{N}$

an Stelle des sphärischen Breiten-Unterschiedes setzt, und im übrigen den Quer-Krümmungs-Halbmesser N der Mittelbreite $\frac{\varphi + \varphi'}{2}$ als Kugelhalbmesser r zu Grunde legt.

Die Aufgabe sei mit Bezugnahme auf Fig. 2. so gefasst:

Gegeben sind zwei Punkte auf dem Ellipsoid, mit den Breiten φ und φ' und mit dem Längen-Unterschied λ ; es soll die Entfernung beider Punkte $= s$, linear auf dem Ellipsoid, und die beiden Azimute α und α' berechnet werden.

Die Gleichungen (3), (4) und (5) geben:

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \sin \frac{\varphi + \varphi'}{2} \quad (6)$$

$$\tan \alpha_0 = \tan \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{(\varphi' - \varphi) \frac{M}{N}}$$

$$s = \frac{s}{N} = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} = \frac{(\varphi' - \varphi) \frac{M}{N}}{\cos \alpha_0}$$

oder $s = \frac{s}{N} = \sqrt{((\varphi' - \varphi) \frac{M}{N})^2 + (\lambda \cos \varphi_0)^2}$

Wir wollen diese Formeln etwas umstellen, und auch die nötigen ϱ zusetzen, wodurch wir erhalten:

$$\tan \alpha_0 = \frac{N \lambda \cos \varphi_0}{M(\varphi' - \varphi)} = V^2 \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\varphi' - \varphi} \quad (7)$$

$$s = \frac{\frac{N}{\varrho} \lambda \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\frac{M}{\varrho} (\varphi' - \varphi)}{\cos \alpha_0} \quad (8)$$

oder $s = \sqrt{\left(\frac{N}{\varrho} \lambda \cos \varphi_0\right)^2 + \left(\frac{M}{\varrho} (\varphi' - \varphi)\right)^2} \quad (9)$

Oder endlich wenn man $\frac{\varrho}{M} = [1]$ und $\frac{\varrho}{N} = [2]$ setzt, wie in unseren Hilfs-tafeln angenommen ist, (vgl. § 40, S. 230) kann man die Formeln auch so schreiben:

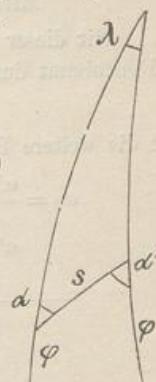
$$\tan \alpha_0 = \tan \frac{\alpha' + \alpha}{2} = \frac{\frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_0}{\frac{\varphi' - \varphi}{[1]}} \quad (10)$$

$$s = \frac{\frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\frac{\varphi' - \varphi}{[1]}}{\cos \alpha_0} \quad (11)$$

oder $s = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{[2]} \cos \varphi_0\right)^2 + \left(\frac{\varphi' - \varphi}{[1]}\right)^2} \quad (12)$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir die zwei trigonometrischen Hauptpunkte der Stadt Hannover, welche nach Mitteilung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme von 1887 folgende geographische Coordinaten haben:

Fig. 2.



Ägidius . . .	$\varphi' = 52^\circ 22' 14,9611''$	$L' = 27^\circ 24' 24,6290''$	}	(13)
Wasserturm . . .	$\varphi = 52^\circ 21' 49,9080''$	$L = 27^\circ 22' 25,0168''$		
Differenzen	$\varphi' - \varphi = +0^\circ 0' 25,0531''$	$\lambda = 0^\circ 1' 59,6122''$		
	= 25,0531''	= 119,6122''		
Mittel φ_0	= 52° 22' 2,43455"			

Mit dieser Mittelbreite geht man in die Hilfstafel des Anhangs Seite [22] ein, und entnimmt durch leichte Interpolation:

$$\log [1] = 8.509\,9574 \quad \log [2] = 8.508\,8708$$

und die weitere Rechnung nach den Formeln (6) und (10)–(12) giebt:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 71^\circ 6' 37,69''$$

$$\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 0' 47,36''$$

$\alpha' = 71^\circ 7' 25,05''$	$\log s = 3.378\,7016$	}
$\alpha = 71^\circ 5' 50,33''$	$s = 2391,672^m$	

(14)

Azimute und Richtungswinkel.

Während die verschiedenen Coordinaten φ , λ und x , y in ihrer Bedeutung für die Kartenzzeichnung sofort verständlich sind, bedürfen oft die Begriffe von Azimut und Richtungswinkel und ihrer Differenz-Meridiankonvergenz, noch anderer Klarlegung, wozu unser mehrfach benütztes Beispiel Wasserturm-Ägidius, das in Fig. 3. S. 315 dargestellt ist, dienen soll.

In Fig. 3. ist Celle, (Stadtkirche, Helmstange) nordöstlich von Hannover, der Nullpunkt, auf welchen sich die rechtwinkligen Coordinaten von W und A beziehen; es sind also die Geraden $A A'$ und $W W'$ Parallelen zu dem Meridian von Celle, folglich $W'WA = a$ und $WAA' = a'$ die Richtungswinkel (Preuss. Katasterbezeichnung „Neigungen“) der Geraden WA in W und A .

Das sind dieselben Winkel, welche in Fig. 2. S. 259 mit α und α' bezeichnet waren, während wir jetzt, mit Änderung der Buchstaben-Bezeichnungen, die Richtungswinkel mit a , dagegen die Azimute mit α bezeichnen, so dass die Meridian-Konvergenzen in W und A diese sind:

$$-\gamma = \alpha - a \quad , \quad -\gamma' = \alpha' - a' \quad (15)$$

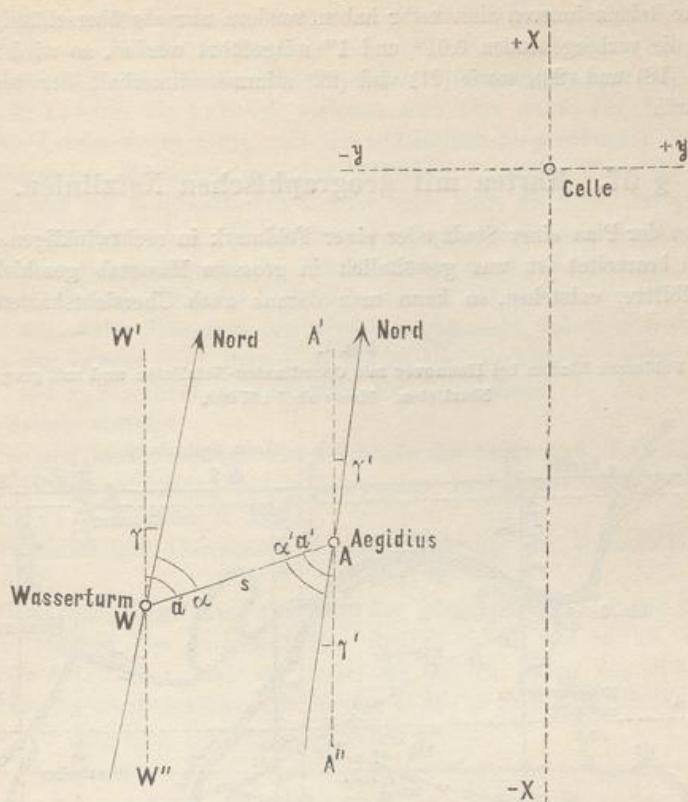
Wir bemerken, dass hier γ und γ' negativ sind, weil in unserem Falle Fig. 3. die Ordinaten y negativ sind, und γ stets das Vorzeichen von y hat.

Der Gang unserer Berechnungen ist dieser:

Punkt	Geogr. Breite	Geogr. Länge	}	(16)
Celle, Stadtkirche . . .	52° 37' 32,6709''	27° 44' 54,8477''		
Ägidius (Hannover) . . .	52° 22' 14,9611''	27° 24' 24,6290''		
Wasserturm (Linden) . . .	52° 21' 49,9080''	27° 22' 25,0168''		

Wie man hieraus, unter Annahme des Punktes Celle als Coordinaten-Nullpunkt, die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes Ägidius berechnet, haben wir auf S. 309 ausführlichst gezeigt, und da man für den zweiten Punkt Wasserturm dieselbe Berechnung machen kann, ist nachgewiesen, auf welche Weise man zu den rechtwinkligen Coordinaten von Ägidius und Wasserturm gelangt, nämlich:

Fig. 3.



$$\begin{array}{ll} \text{Ägidius} & y' = -23 271,813^m \quad x' = -28 308,394^m \\ \text{Wasserturm} & y = -25 538,489^m \quad x = -29 071,472^m \\ \hline \text{Differenzen} & y' - y = + 2 266,676 \quad x' - x = + 763,078 \end{array} \quad (17)$$

Dadurch ist die Linie Wasserturm-Ägidius nach Entfernung und Richtung festgelegt im ebenen rechtwinkligen (Soldnerschen) Coordinatensystem:

$$\log WA = 3.878\,7020 \quad WA = s = 23 91,674^m \quad (18)$$

$$a = (WA) = 71^\circ 23' 39,0'' \quad a' = (AW) \pm 180^\circ = 251^\circ 23' 39,0'' \quad (19)$$

Andererseits haben wir oben bei (14) gefunden:

$$s = 2391,672^m \quad \alpha = 71^\circ 5' 50,3'' \quad \alpha' = 71^\circ 7' 25,0'' \quad (20)$$

Die Vergleichung von (19) und (20) giebt:

$$a - \alpha = 17' 48,7'' \quad a' - \alpha' = 16' 14,0'' \quad (21)$$

Dieses muss stimmen mit der Berechnung von γ auf S. 309 für Ägidius und mit der entsprechenden Berechnung für Wasserturm, nämlich:

$$\gamma = -17' 48,9'' \quad \gamma' = -16' 14,3'' \quad (22)$$

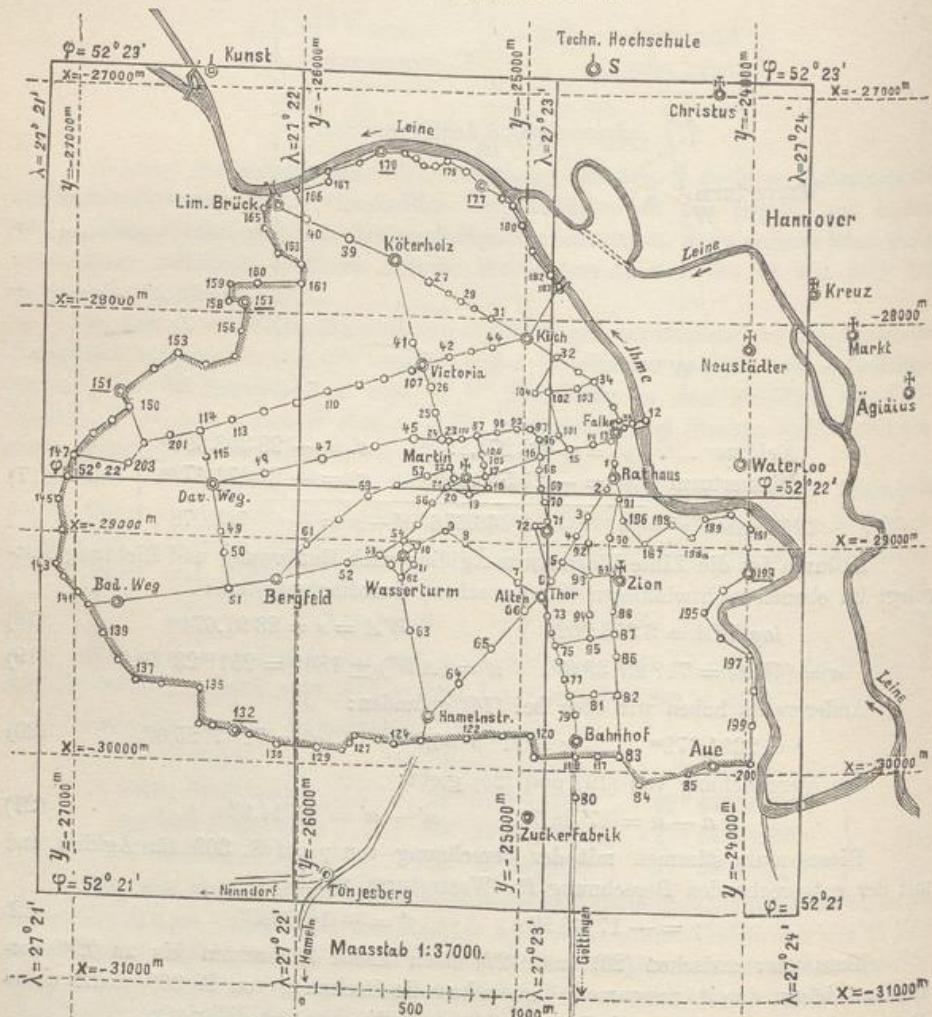
Dass hier zwischen (20) und (22) noch kleine Differenzen bis zu $0,3''$ vorkommen, hängt damit zusammen, dass schon die Rechnung von S. 309 nicht unbedingt auf $1'''$ sicher ist, weshalb auch (18) und (20) um $2'''$ differieren.

Wenn man bedenkt, dass bei solchen Verhältnissen die letzten Stellen $0,001''$ und $0,1''$ gar keinen inneren Sinn mehr haben, sondern nur als überschüssige Kontrollstellen für die vorhergehenden $0,01''$ und $1''$ mitgeführt werden, so wird man sagen: die Proben (18) und (20), sowie (21) und (22) stimmen innerhalb der beabsichtigten Rechenschärfe.

§ 57. Karten mit geographischen Netzlinien.

Wenn der Plan einer Stadt oder einer Feldmark in rechtwinkligen sphärischen Koordinaten bearbeitet ist, was gewöhnlich in grossem Massstab geschieht, so dass viele Einzelblätter entstehen, so kann man daraus auch Übersichtskarten und topo-

Fig. 1.
Stadt und Feldmark Linden bei Hannover mit Koordinaten-Netzlinien und mit geographischen Netzlinien. Massstab 1 : 37 000.



graphische Karten kleinen Massstabes herstellen, in welchen immer wieder das quadratische Netz der rechtwinkligen Coordinaten den festen Rahmen für die Zeichnung und Vervielfältigung bietet.

Bei topographischen Karten in 1 : 25 000 und wohl auch schon bei Stadt-Übersichtskarten in 1 : 5 000 bis 1 : 10 000 verlangt man aber wegen des Anschlusses an die allgemeine Landes-Topographie, und zur allgemeinen geographischen Orientierung, die Einzeichnung von Meridianen und Parallelkreisen für runde Werte der geographischen Längen und der geographischen Breiten, oder kurz, die Einzeichnung von geographischen Netzlinien, welche die Karte in geographische Trapeze einteilen.

Die Bestimmungsstücke hiefür bekommt man durch die Formeln, welche wir in § 55. entwickelt und durch die Rechenschemata S. 308 und S. 309 erläutert haben. Insbesondere das zweite Schema S. 309 wird hier gebraucht, indem man für gegebene runde Werte der Längen und Breiten L und φ die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten y und x berechnet, und darnach die Trapez-Ecken in das rechtwinklige Coordinaten-System einträgt.

Als Beispiel hiefür nehmen wir die Karte der Stadt und Gemarkung Linden bei Hannover, deren Aufnahme wir in den Jahren 1887—1889 gemacht haben (vgl. hiezu II. Band, 4. Aufl. 1893, S. 353).

Die rechtwinkligen Coordinaten beziehen sich auf das Preussische Katasternsystem 27. Celle.

Die Gemarkung liegt etwa zwischen den geographischen Längen $27^{\circ} 21'$ und $27^{\circ} 24'$ und zwischen den geographischen Breiten $52^{\circ} 21'$ und $52^{\circ} 23'$, sie umfasst also 6 Minuten-Abteilungen; und wir haben für die 12 Ecken des entsprechenden Minuten-Netzes die rechtwinkligen Coordinaten y und x nach dem Schema von S. 309 berechnet, wie in folgender Übersicht angegeben ist.

	$\lambda = 27^{\circ} 21'$	$\lambda = 27^{\circ} 22'$	$\lambda = 27^{\circ} 23'$	$\lambda = 27^{\circ} 24'$
$\varphi = 52^{\circ} 23'$	$y = -27\ 135,04m$ $x = -26\ 896,63m$	$y = -26\ 000,36m$ $x = -26\ 902,74m$	$y = -24\ 865,68m$ $x = -26\ 908,61m$	$y = -23\ 731,00m$ $x = -26\ 914,22m$
$\varphi = 52^{\circ} 22'$	$y = -27\ 145,25m$ $x = -28\ 750,98m$	$y = -26\ 010,14m$ $x = -28\ 757,09m$	$y = -24\ 875,04m$ $x = -28\ 762,96m$	$y = -23\ 739,94m$ $x = -28\ 768,56m$
$\varphi = 52^{\circ} 21'$	$y = -27\ 155,47m$ $x = -30\ 605,30m$	$y = -26\ 019,93m$ $x = -30\ 611,45m$	$y = -24\ 884,40m$ $x = -30\ 617,32m$	$y = -23\ 748,87m$ $x = -30\ 622,90m$

Man kann diese Coordinaten in ihren Differenzen durch die Meridianbögen und Parallelbögen der Tafeln auf Seite [38]—[41] unseres Anhangs kontrollieren, z. B. in dem Meridian von $\lambda = 27^{\circ} 21'$ haben wir aus dem vorstehenden:

$$\begin{array}{lll} \varphi = 52^{\circ} 23' & x = -26\ 896,63m & \Delta x = 1854,35m \\ \varphi = 52^{\circ} 22' & x = -28\ 750,98m & \Delta x = 1854,32m \\ \varphi = 52^{\circ} 21' & x = -30\ 605,30m & \end{array}$$

Nach der Tafel Seite [38] des Anhangs ist zwischen $52^{\circ} 20'$ und $52^{\circ} 30'$ der Meridianbogen = $18\ 543,748m$, also für 1 Minute $m = 1\ 854,37m$, was mit den vorstehenden Werten Δx insofern genügend stimmt, als für genauere Rechnung schärfere Interpolation in der Tafel Seite [38] nötig wäre, und eine kleine Abweichung zwischen m und Δx auch in der Soldnerschen Projektion begründet ist.

Um auch die Ordinaten-Differenzen zu kontrollieren, könnte man die Längen-Grade der Tafel Seite [36]—[37] oder Seite [41] des Anhangs benützen, wobei aber viel zu interpolieren wäre; sicherer geht man zu Wege durch die unmittelbare Berechnung von 1 Längenminute nach § 36. S. 220, nämlich:

$$l' = \frac{N \cos \varphi}{\varrho'} = \frac{60 \cos \varphi}{[2]}$$

wo $\log \varrho' = 3.536\,2739$ ist, und $\log N$ aus der Hilfstafel Seite [20] oder $\log [2]$ auf Seite [33] des Anhangs gefunden wird, z. B. für $\varphi = 52^\circ 23'$ findet man $\log N = 6.805\,5547$ oder sofort $\log [2] = 8.508\,8704$ und damit nach vorstehender Formel $l' = 1134,69^m$, während die Ordinaten auf dem Parallel von $\varphi = 52^\circ 23'$ nach der obigen Tabelle geben:

$\lambda = 27^\circ 21'$	$y = -27\,135,04^m$	$\Delta y = 1134,68^m$
$\lambda = 27^\circ 22'$	$y = -26\,000,36^m$	$\Delta y = 1134,68^m$
$\lambda = 27^\circ 23'$	$y = -24\,865,68^m$	$\Delta y = 1134,68^m$
$\lambda = 27^\circ 24'$	$y = -23\,731,00^m$	$\Delta y = 1134,68^m$

Diese Δy stimmen hinreichend mit dem vorhin berechneten $l' = 1134,69^m$.

Als zweites Beispiel dieser Art nehmen wir das in Preussen eingeführte Gradnetz für topographische Karten.

Das Netz der Meridiane und Parallelkreise für eine topographische Karte kann man auf zweierlei Art herstellen, entweder unmittelbar durch Konstruktion der Trapeze aus den Meridianbögen und den Parallelbögen, oder durch Einrechnen der Trapez-Eckpunkte in ein rechtwinkliges Coordinatensystem, das man zu Katastervermessungen, Stadtvermessungen und dergl. ohnehin hat.

Wir wollen dieses an dem Beispiele der zwei Messtischblätter der topographischen Abteilung der Landesaufnahme zeigen, auf welche die Stadt- und Feldmark von Hannover mit Linden fällt, wie in Fig. 2. S. 319 gezeichnet ist.

Die zwei Trapeze $ABCD$ und $CDEF$ liegen zwischen den Breiten $52^\circ 30'$, $52^\circ 24'$, $52^\circ 18'$ und zwischen den Längen $27^\circ 20'$ und $27^\circ 30'$ und haben Seitenlängen, welche in Tabellen verfügbar sind, auf Seite [41] des Anhangs, woraus wir entnehmen:

$$\begin{aligned} \varphi &= 52^\circ 30' \quad AB = 11\,316,99^m \\ &\quad 52^\circ 24' \quad CD = 11\,342,65^m \\ &\quad 52^\circ 18' \quad EF = 11\,368,27^m \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} AC &= BD = 11\,126,31^m \\ CE &= DF = 11\,126,12^m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dazu auch die Flächen:

$$ABC D = 126,0591 \text{ km}^2 \text{ und } CDEF = 126,3423 \text{ km}^2$$

Wenn man etwa diese Masse nicht vorrätig hat, aber wenigstens die Krümmungs-Halbmesser M für den Meridian und N für den Querbogen, so kann man die Trapezseiten ebenfalls berechnen, z. B.:

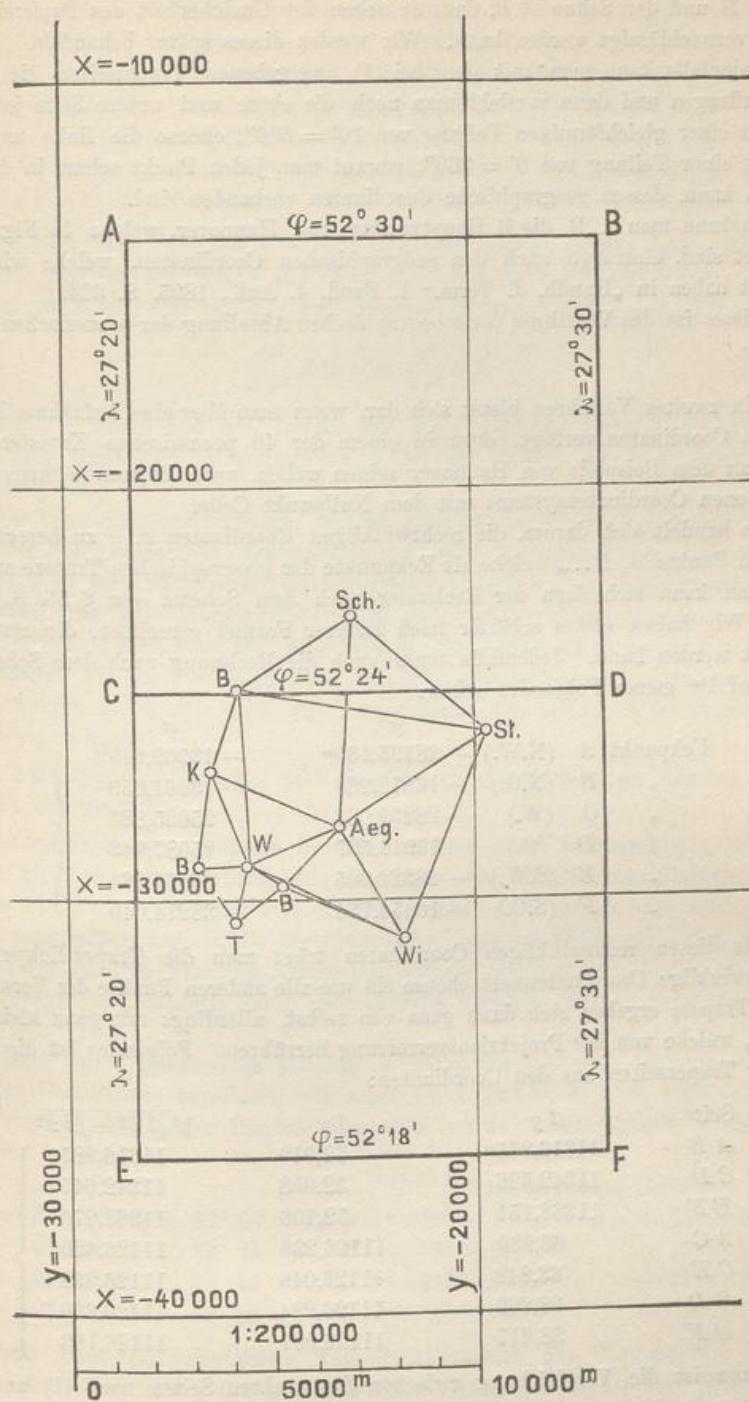
$$AC = \frac{M}{\varrho} 6' = \frac{360}{[1]} \quad (2)$$

$$AB = \frac{N}{\varrho} 10' \cos \varphi = \frac{600}{[2]} \quad (3)$$

wobei M oder [1] zur Mittelbreite von A und C , und N oder [2] zu der Breite von A und B selbst gehört.

Die Linien AB , CD , EF sind streng genommen ein wenig gekrümmt zu zeichnen, doch macht das im Massstab 1:25 000 für die preussischen Messtischblätter

Fig. 2.



so wenig aus, nämlich höchstens $0,1''$ als Querabweichung in der Mitte zwischen dem Bogen $A B$ und der Sehne $A B$, dass es neben der Unsicherheit des Papiereinganges u. s. w. vernachlässigt werden kann. Wir werden dieses später behandeln.

Jedenfalls kann man mit den bei (1) angegebenen Trapezseiten die Trapeze scharf auftragen und dann versieht man noch die obere und untere Seite jedes Trapezes mit einer gleichförmigen Teilung von $10' = 600''$, ebenso die linke und rechte Seite mit einer Teilung von $6' = 360''$, worauf man jeden Punkt scharf in das Blatt eintragen kann, dessen geographische Coordinaten vorhanden sind.

So kann man z. B. die 6 Hauptpunkte von Hannover, welche in Fig. 2. eingezeichnet sind, eintragen nach den geographischen Coordinaten, welche wir früher mitgeteilt haben in „Handb. d. Verm.“ I. Band, 4. Aufl., 1895, S. 324.

Dieses ist das Verfahren der topographischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme.

Ein zweites Verfahren bietet sich dar, wenn man über eine Aufnahme in rechtwinkligen Coordinaten verfügt, etwa in einem der 40 preussischen Katastersysteme, wie wir an dem Beispiele von Hannover zeigen wollen, unter Zugrundlegung des vorgeschriebenen Coordinatensystems mit dem Nullpunkt Celle.

Es handelt sich darum, die rechtwinkligen Coordinaten x, y zu berechnen für diejenigen Punkte A, B, \dots , welche als Eckpunkte der geographischen Trapeze auftreten.

Man kann sich dazu der Rechnung nach dem Schema von § 55, S. 309 bedienen. Wir haben etwas schärfer nach anderer Formel gerechnet, die erst später mitgeteilt werden kann. Jedenfalls muss auch die Rechnung nach dem Schema von S. 309 auf $1''$ genau Folgendes geben:

Eckpunkt	y	x	
A (N.W.)	— 28195,133 ^m	— 13909,649 ^m	
" B (N.O.)	— 16878,268	— 13961,659	
" C (W.)	— 28259,063	— 25035,885	
" D (O.)	— 16916,537	— 25087,943	
" E (S.W.)	— 28322,905	— 36161,934	
" F (S.O.)	— 16954,754	— 36214,040	

Mit diesen rechtwinkligen Coordinaten trägt man die Trapez-Eckpunkte in das rechtwinklige Coordinatenetz ebenso ein wie alle anderen Punkte der Vermessung, und die Trapeze ergeben sich dann ganz von selbst, allerdings mit ganz kleinen Änderungen, welche von der Projektionsverzerrung herrühren. Folgendes ist die Berechnung der Trapezseiten aus den Coordinaten:

Seite	Δy	Δx	$\sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$	
AB	11316,865 ^m	52,010	11316,985 ^m	
CD	11342,526	52,058	11342,645	
EF	11368,151	52,106	11368,270	
AC	63,930	11126,236	11126,420	
CE	63,842	11126,049	11126,232	
BD	38,269	11126,284	11126,350	
DF	38,217	11126,097	11126,163	

Dann ist die Vergleichung zwischen den wahren Seiten nach (1) und deren Projektionen in (5):

Trapezseite	wahr	Projektion	Differenz	
A B	11316,99 ^m	11136,99 ^m	0,0 ^m	
C D	11342,65	11142,65	0,0	
E F	11368,27	11368,27	0,0	
A C	11126,31	11126,42	+ 0,11	(6)
C E	11126,12	11126,23	+ 0,11	
B D	11126,31	11126,35	+ 0,04	
D F	11126,12	11126,16	+ 0,04	

Die Süd- und Nord-Seiten werden in der Projektion richtig dargestellt, wie es sein muss, dagegen die West- und Ost-Seiten sind in der Projektion zu gross um 0,11^m und um 0,04^m, was von der Projektionsverzerrung herrührt, nämlich:

$$\frac{y^2}{2r^2} A C \text{ oder } \frac{y^2}{2r^2} C E$$

Mit $y = 28200$ und $y = 16900$, und $\log r = 6.8040$ giebt dieses gerade die oben bei (6) erhaltenen Abweichungen 0,11^m und 0,04^m, womit alles rechnerisch sichergestellt ist.

Die Projektionsverzerrungen, welche nach (6) höchstens 1:100 000 betragen, sind in der topographischen Kartenzeichnung ganz unmerklich, es sind dieselben, welche auch in der viel feineren Katasterzeichnung schon vernachlässigt werden.

Wenn man den Trapezrahmen nach den rechtwinkligen Coordinaten (4) aufgetragen hat, bekommt man also innerhalb der äussersten Zeichenschärfe von 0,05^{mm} genau dasselbe wie bei der Behandlung mit den unmittelbaren Trapezseiten von (1), und im übrigen giebt sich auch die Vergleichung der beiden Verfahrungsarten aus dem bisherigen leicht:

I. Auftragen des Trapezes nach den Massen (1) giebt einen Rahmen für geographische Coordinaten.

II. Auftragen des Trapezes in dem Rahmen eines rechtwinkligen (Kataster-) Systemes giebt die Möglichkeit, alle Kataster- oder Stadtvermessungs-Coordinaten (z. B. die 114 Punkte in unserem I. Bande, „Handb. d. Verm. 4. Aufl. 1895“, S. 400 bis 401) unmittelbar auch in die topographische Karte zu übertragen, oder kurz alles Kataster- und Stadtvermessungs-Material in seinem eigenen Coordinatensystem auch für die Topographie lediglich durch geometrische Verkleinerung zu verwerten.

Ausser den 6 Eckpunkten von Fig. 2. haben wir auch noch drei andere Trapezecken nach Coordinaten berechnet, wie schon im I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 407 zu dem Netzbild S. 411 jenes Bandes angegeben wurde, nämlich, mit Wiederholung von N W:

Katastersystem Celle			
$L = 27^\circ 20'$, $\varphi = 52^\circ 30'$	$y = -28195,18^m$	$x = -13909,65^m$	
27 40	52 30	- 5561,31	- 13987,55
27 20	52 12	- 28386,66	- 47287,79
27 40	52 12	- 5599,09	- 47365,11

Wenn man trigonometrische Kataster-Aufnahmen zur Topographie benutzen will, so ist es das erste, die geographischen Netzlinien in solcher Weise einzurechnen, nicht bloss die eigentlichen Trapez-Ecken der topographischen Abteilung

der Landesaufnahme, sondern wie wir es bei Linden gethan haben, enger, etwa von Minute zu Minute.

Wenn die Flurkarten gar nicht mathematisch orientiert sind, (wie z. B. in einem grossen Teile der Provinz Hannover), ist es immer noch rationeller, durch einige rasch und rauh eingemessene und eingerechnete Rückwärtsschnitte zuvor das x, y -System in die Flurkarten hinein zu interpolieren, und dann nach der vorher genannten Methode zu verfahren, als sich nur auf das empirische Zusammenstimmen nach Wegrecken u. s. w. auf dem Messtische zu verlassen.

§ 58. Geographische Coordinaten φ, λ und konforme rechtwinklige Coordinaten x, Y .

Zwischen den kongruenten Coordinaten x, y und den konformen Coordinaten x, Y bestehen nach § 50. die einfachen Beziehungen:

$$x = x \quad y = Y - \frac{Y^3}{6r^2} \quad (1)$$

Wenn man daher φ und λ in x und y umwandeln kann und umgekehrt, so hat man auch φ und λ als Funktion von x und Y und umgekehrt; sei es, dass man nur die y und Y vermöge (1) zahlenmässig verwandelt, etwa mit einer Hilfstafel S. [45] des Anhangs, oder auch indem man die Einsetzung von Y statt y analytisch durchführt.

Wir wollen dieses thun und dazu die Formeln von § 55. nochmals hersetzen, aber um den Coordinaten-Nullpunkt ganz aus dem Spiele zu lassen mit der Annahme, dass die Abscissen x stets vom Äquator an gezählt werden. Bezeichnet man dann mit B den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ und mit x den Meridianbogen vom Äquator bis zur Fusspunktsbreite φ_1 , so hat man aus § 55. folgende Formeln (S. 304):

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho y^2}{2N_1^2} V_1^2 \tan \varphi_1 \\ \lambda = \frac{\varrho y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{\varrho y^3}{3N_1^3} \sin^2 \varphi_1 \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{\varrho y}{N_1} \tan \varphi_1 - \frac{\varrho y^3}{6N_1^3} \tan \varphi_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho y^2}{2N_1^2} V_1^2 \tan \varphi_1 \\ \lambda = \frac{\varrho y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{\varrho y^3}{3N_1^3} \sin^2 \varphi_1 \\ \gamma = \frac{\varrho y}{N_1} \tan \varphi_1 - \frac{\varrho y^3}{6N_1^3} \tan \varphi_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \end{array} \right\} \quad (4)$$

und die Umkehrung (S. 307 und S. 305):

$$\left. \begin{array}{l} x = B + \frac{\lambda^2 N}{2\varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi \\ y = \frac{N \lambda}{\varrho} \cos \varphi - \frac{N \lambda^3}{6\varrho^3} \sin^2 \varphi \cos \varphi \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = B + \frac{\lambda^2 N}{2\varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi \\ y = \frac{N \lambda}{\varrho} \cos \varphi - \frac{N \lambda^3}{6\varrho^3} \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ \gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3\varrho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = B + \frac{\lambda^2 N}{2\varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi \\ y = \frac{N \lambda}{\varrho} \cos \varphi - \frac{N \lambda^3}{6\varrho^3} \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ \gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3\varrho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi \end{array} \right\} \quad (7)$$

Wenn man hier y durch Y nach (1) ersetzt, so giebt das bei (2) keine Änderung innerhalb der hier eingehaltenen Grössenordnung, und bei (3) und (4) gestaltet sich die Umformung leicht, so dass man im ganzen hat:

$$\text{konform} \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho}{2 N_1^2} V_1^2 \tan \varphi_1 \\ \lambda = \frac{\varrho}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{\varrho}{6 N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\lambda = \frac{\varrho}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{\varrho}{6 N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{\varrho}{N_1} \tan \varphi_1 - \frac{\varrho}{3 N_1^3} \frac{\tan \varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} \quad (10)$$

Bei der Umwandlung der zweiten Gruppe (5)–(7) bleibt auch wieder x und ausserdem γ unverändert, und bei (6) verfährt man in üblicher Weise genähert, wodurch man rasch erhält:

$$\text{konform} \left\{ \begin{array}{l} x = B + \frac{\lambda^2 N}{2 \varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi \\ Y = \frac{N \lambda}{\varrho} \cos \varphi + \frac{N \lambda^3}{6 \varrho^3} \cos \varphi \cos 2 \varphi \end{array} \right. \quad (11)$$

$$Y = \frac{N \lambda}{\varrho} \cos \varphi + \frac{N \lambda^3}{6 \varrho^3} \cos \varphi \cos 2 \varphi \quad (12)$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3 \varrho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (13)$$

Diese Formeln (8)–(10) und (11)–(13) stimmen in erster Näherung überein mit den Gaußschen Formeln nach Wittstein und Schreiber; die letzteren genaueren Formeln haben noch höhere Glieder, welche wir erst in einem späteren Kapitel finden werden.

Es ist in dem Gange der Rechnung begründet, dass bei λ und γ alles in der Fußpunktsbreite φ_1 ausgedrückt ist und bei y und γ alles in der Breite φ des Punktes selbst; aber wenn mit φ begonnen wird, kann man es auch zu λ und γ benützen, und andererseits, wenn $x - B$ berechnet ist, hat man auch φ_1 , und deshalb mögen zur Kontrolle auch noch folgende Formel-Gruppen erwünscht sein, zuerst zu der Gruppe (8)–(10):

$$\text{konform} \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_1 - \frac{\varrho}{2 N_1^2} V_1^2 \tan \varphi_1 \\ \lambda = \frac{\varrho}{N_1} \frac{Y}{\cos \varphi} - \frac{\varrho}{6 N_1^3} \frac{Y^3 \cos 2 \varphi}{\cos^3 \varphi} \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{\varrho}{N_1} \frac{Y}{\cos \varphi} - \frac{\varrho}{6 N_1^3} \frac{Y^3 \cos 2 \varphi}{\cos^3 \varphi} \quad (15)$$

$$\gamma = \frac{\varrho}{N_1} Y \tan \varphi + \frac{\varrho}{6 N_1^3} \frac{Y^3 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \quad (16)$$

und andererseits zu der Gruppe (11)–(13):

$$\text{konform} \left\{ \begin{array}{l} x = B + \frac{\lambda^2 N}{2 \varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi \\ \varphi_1 = \varphi + \frac{V^2 \lambda^2}{2 \varrho} \sin \varphi \cos \varphi \end{array} \right. \quad (17)$$

$$Y = \frac{N \lambda}{\varrho} \cos \varphi_1 + \frac{N \lambda^3}{6 \varrho^3} \cos^3 \varphi_1 (1 + 2 \tan^2 \varphi_1) \quad (18)$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{\varrho} \sin \varphi_1 - \frac{\lambda^3}{6 \varrho^2} \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \quad (19)$$

Nach den vorstehenden Formeln (11) und (12) bzw. (17) und (18) haben wir für die Übungsmessungen in der Gegend von Hannover und namentlich Hildesheim, Salzdetfurth, ein Coordinatensystem angelegt, dessen x -Axe der 28^{te} Längengrad ist,

mit Zahlung der x vom Äquator der Erde an, aber mit Abkürzung um rund 5 000 000^m. Die Längen λ stehen daher zu den Längen L der Landesaufnahme in der Beziehung $\lambda = L - 28^\circ$.

Wir wollen die Rechnung für einen Punkt nach den Formeln (11) und (12) hier hersetzen:

$$\begin{array}{ll} \text{Ägidius } L = 27^\circ 24' 24,6290'' & \varphi = 52^\circ 22' 14,9611'' \\ L_0 = 28^\circ & \varphi_0 = 52^\circ 20' \\ \hline \lambda = - 0^\circ 35' 35,3710'' & \Delta \varphi = + 2' 14,9611'' \\ \lambda = - 2135,3710'' & \Delta \varphi = 134,9611'' \end{array}$$

Aus dem Anhang Seite [33] entnimmt man für $\varphi = 52^\circ 22' 15''$ den Wert $\log [2] = \log (\varrho : N) = 8.508\,8707$, und für die Mittelbreite $52^\circ 21' 7''$ den Wert $\log [1] = 8.509\,9585$,

aus Seite [38] für $\varphi = 52^\circ 22'$ $B_0 = 5\,799\,836,593$

logarithmisch auszurechnen $\Delta \varphi : [1]$ = 4 171,095

$$\begin{array}{rcl} \frac{\lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi}{2 \varrho} & . & = 165,598 \\ \hline \end{array}$$

$$X = 5\,804\,173,286 \quad (20)$$

Weiter wird logarithmisch ausgerechnet nach der Formel (12):

$$\frac{N \lambda \cos \varphi}{\varrho} = \frac{\lambda \cos \varphi}{[2]} = \dots - 403\,94,557^m$$

$$+ \frac{\lambda \cos \varphi}{[2]} \frac{\lambda^2}{6 \varrho^2} \cos 2 \varphi \dots + 0,184^m$$

$$\text{konform } Y = - 403\,94,373^m \quad (21)$$

Konforme Coordinaten Y und x in dem System mit $L = 28^\circ$ und $\varphi = 0^\circ$.

Punkt	Geographische Coordinaten		Rechtw. konf. Coordinaten		Höhe über N. N.
	L	φ	Y	x	
Ägidius	27° 24' 24,6290''	52° 22' 14,9611''	- 40 394,37 ^m	+ 804 173,29	125,37 ^m Kn.
Wasserturm	27 22 25,0168	52 21 49,9080	- 42 663,69	+ 803 418,07	111,96 R.
Wehrstedt, Kirchturm	27 40 45,8901	52 2 40,8138	- 21 992,64	+ 767 753,55	143,98 Kn.
Sauberg, Pyramide .	27 42 30,3539	52 3 31,0969	- 19 995,69	+ 769 314,50	317,19 Pf.
Defurth, Kirchturm .	27 41 16,75	52 4 29,21	- 21 390,13	+ 771 116,35	123,40 Unt.
Wesseln, Pyramide .	27 43 56,5389	52 4 37,5592	- 18 846,32	+ 771 362,23	293,27 Pf.
Wesseln, Kirchturm .	27 42 0,37	52 5 4,64	- 20 554,95	+ 772 207,79	111,50 Kn.
Gross-Düngen, Pyr. .	27 41 4,4376	52 5 8,8156	- 21 619,28	+ 772 341,35	195,01 Pf.
Gross-Düngen, Kirch. .	27 41 15,03	52 5 46,53	- 21 412,60	+ 773 505,02	121,84 Kn.
Klein-Düngen, Pyr. .	27 42 44,6860	52 5 22,8490	- 19 708,97	+ 772 767,11	142,35 Pf.
Heinde, Pyramide .	27 43 34,8237	52 6 40,5926	- 18 745,39	+ 775 166,06	146,97 Pf.
Heinde, Kirchturm .	27 42 24,25	52 6 2,78	- 20 093,05	+ 774 002,68	
Lechstedt, Kirchturm .	27 41 39,3608	52 6 54,7459	- 20 940,62	+ 775 612,21	163,04 Kn.
Breinum, Pyramide .	27 38 41,4808	52 2 39,6577	- 24 863,44	+ 767 744,30	228,90 Pf.
Almstedt, Pyramide .	27 37 43,3101	52 3 47,2945	- 25 461,30	+ 769 840,10	359,15 Pf.
Welfenhöhe, Pyramide	27 39 35,04	52 4 1,98	- 23 330,93	+ 770 283,52	292,54 Ob.
Hammberg, Pyramide .	27 38 58,3354	52 4 44,5595	- 24 023,68	+ 771 602,73	306,33 Pf.
Eggenstedt, Kirchturm	27 39 42,7418	52 6 11,6524	- 23 165,55	+ 774 290,28	117,22 Kn.
Bodenburg, Schlosst. .	27 40 33,2205	52 1 41,2544	- 22 242,21	+ 765 929,45	186,91 Kn.

Bei den Höhenangaben bedeutet Kn. = Knopfmitte, R. = Rand des Turmes, Pf. = Pfeileroberfläche (= Oberfläche des trigonometrischen Signalsteins), Unt. = Unterer Dachrand, Ob. = Oberer Rand = höchster Punkt.

Die Coordinatenrechnung ist nur auf Centimeter geführt, also mit $\pm 0,01^m$, was für den vorliegenden Zweck genügte.

Rechnet man zur Kontrolle von (21) auch noch nach den Formeln (17) und (18), so findet man $\varphi_1 = 52^\circ 22' 20,3192''$ und dann $Y = -403\ 93,196 - 1,174 = -403\ 94,370^m$, was mit dem früheren (21) hinreichend stimmt.

Dieses ist konformes Y , und wenn man kongruentes y haben will, so hat man noch zu rechnen $\frac{Y^3}{6r^2} = 0,270^m$, was zu dem Vorigen giebt kongruent $y = -403\ 94,100^m$.

Also in Zusammenfassung, zugleich für Wasserturm:

	kongruent y	konform Y	$X - 5000\ 000 = x$
Ägidius	-40394,10 ^m	-40394,37 ^m	+804173,29 ^m
Wasserturm	-42663,42	-42663,69	+803418,07

Diese Y und x sind in der Tabelle S. 324 eingesetzt.

Auf beschränktem Gebiete kann man die x noch weiter kürzen, etwa durch konstantes Weglassen von 700 000^m.

§ 59. Die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme des Deutschen Reiches.

Eine Übersicht der Deutschen rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, welche zugleich ein gutes Stück Geschichte der Deutschen Vermessungen überhaupt vor Augen führt, haben wir in Fig. 1. S. 326 gebildet.

Im Folgenden haben wir die aus verschiedenen Quellen gesammelten geschichtlichen Angaben über die verschiedenen Landes- und Provinzial-Coordinaten-Systeme zusammengestellt, obgleich unsere Theorien teilweise noch nicht soweit gediehen sind, um alles im Einzelnen zu verstehen. In einem späteren Kapitel wird weiter darüber zu handeln sein, inzwischen genügt die Kenntnis der rechtwinkligen kongruenten (Soldnerschen) Coordinaten (§ 46.) und der rechtwinkligen konformen Coordinaten (§ 50.) zum allgemeinen Verständnis, jedenfalls in geschichtlicher Beziehung.

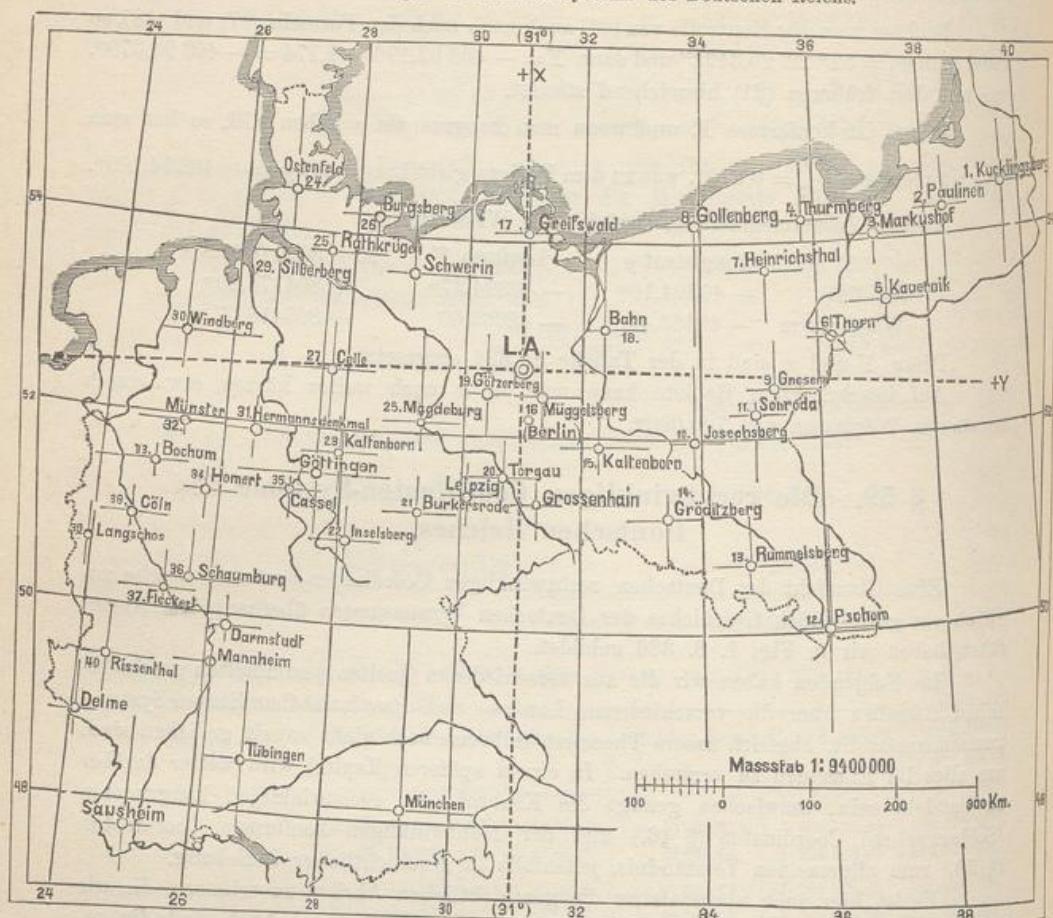
Es ist hier auch nochmals an die geschichtlichen Abrisse zu erinnern, die wir schon im I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 479—551 gegeben haben. Auch sind die geschichtlichen Abschnitte in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen, 1881“, zu ziehen.

Über die rechtwinkligen geodätischen Coordinaten im Allgemeinen ist vorauszuschicken, dass dieselben ohne Zweifel französischen Ursprungs sind, sie wurden schon 1734 von Cassini angewendet, zuerst wohl lediglich als zusammengesetzte rechtwinklige ebene Coordinaten und schrittweise auf kurze Entfernungen geradezu in der Form von ebenen Coordinaten behandelt, und Clairaut erkannte darin den unwillkürlich betretenen Weg zur geodätischen Linie (Helmert, höhere Geodäsie I, S. 240).

Soldner hat in der monatlichen Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde 11. Band 1805, S. 7—23 eine Abhandlung über die kürzeste Linie auf dem Sphäroide geschrieben, in welcher er auf S. 15—17 auch auf die rechtwinkligen Coordinaten kommt, und als „gewöhnliche Methode“ den Perpendikel und

Abstand zu finden“, die ebene Rechnung mit $a \sin \alpha$ und $a \cos \alpha$ anführt, so dass also anzunehmen ist, dass Soldners spätere Behandlung der Sache in Bayern sich hieraus entwickelt hat.

Fig. 1.
Die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme des Deutschen Reichs.



Bayern.

Das Bayerische Coordinaten-System wurde im Jahr 1810 von Soldner angelegt, mit der Mitte des nördlichen Frauenturms in München als Coordinaten-Ursprung, und dem Meridian dieses Punktes als Abscissen-Axe. Weiteres hierüber giebt das amtliche Werk: „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, München 1873“, S. 253.

Dieses System gilt nur für das eigentliche rechtsrheinische Bayern; für die bayerische Pfalz gilt derselbe Nullpunkt Mannheim wie für Baden.

Die *eine* Bayerische Meridian- x -Axe, welche durch den Münchener Frauenturm geht, war zur Zeit der Anlage dieses Systems, da es sich nur um Messtisch-Aufnahmen in 1 : 5000 handelte, genügend, und für die Übersichtlichkeit des ganzen nützlich.

Die grössten Ordinaten dieses Systems sind östlich bei Passau $y = 56\,000$ Ruten = 163^{km} und nordwestlich bei Aschaffenburg $y = 64\,000$ Ruten = 187^{km} , was eine Verzerrung $\frac{y^2}{2r^2} = 0,00043$ oder $0,43^{\text{m}}$ auf 1^{km} giebt. Da diese Verzerrung in der Kleinmessung Schwierigkeiten bereitet, hat man sich bis jetzt geholfen durch Einführung von Lokal-Systemen mit schießen x -Axen, d. h. mit solchen Axen, welche gegen den Meridian des Nullpunkts um die Meridian-Konvergenz verdreht sind.

Vergl. hierzu: „Technische Anleitung zu den trigonometrischen Netz- und Coordinaten-Rechnungen von Dr. J. H. Franke, München 1889“, S. 14 und S. 99. Ferner „Transformation rechtwinkliger Coordinaten, Astr. Nachr., 126. Band 1890“, S. 355, System I, und „Korrespondenz-Blatt des bayerischen Geometer-Vereins, Band IX, München Februar 1894“, Nr. 1., „Betrachtungen über das Coordinaten- und Blatt-System der bayerischen Landesvermessung von Dr. J. H. Franke“, S. 1–21.

Da Bayern durch den Übergang von der Messtischzeichnung zu der trigonometrischen Rechnung jetzt Veranlassung hat, zwei neue Axen westlich und östlich von München anzulegen, so wäre das die beste, vielleicht in 100 Jahren nicht so schön wiederkehrende Gelegenheit, unbeschadet der alten Messtischeinteilung, die neuen Axen meridional und mit *konformen* Coordinaten anzulegen.

Württemberg.

Die Sternwarte von Tübingen als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems, und der Meridian von Tübingen, als x -Axe, wurde von Bohnenberger schon im vorigen Jahrhundert für seine Karte von Schwaben angenommen, das dabei orientierende Azimut Tübingen-Kornbühl wurde schon 1792 gemessen, und auch bis heute beibehalten, obgleich die Messung von 1819 eine Änderung um $15''$ ergab, so dass also das heutige Württembergische System um $15''$ gegen den Meridian von Tübingen verdreht ist.

Am Anfang dieses Jahrhunderts rechnete Bohnenberger in Württemberg rechtwinklige geodätische Coordinaten schrittweise wie eben, was bei der damaligen Genauigkeit der Messungen auf Minuten genügte. Bohnenberger hat aber auch alsbald die wichtigste Aufgabe, welche sich hieran anschliesst, meisterhaft gelöst, nämlich die Umformung zwischen rechtwinkligen und geographischen Coordinaten und umgekehrt.

In dieser Sache scheint uns Bohnenberger's Verdienst höher zu stehen als Soldners; die wenigen \sin - und \cos -Entwicklungen Soldners waren viel leichter als die Formeln zwischen x , y und φ , λ , welche Bohnenberger im Jahre 1802 veröffentlicht und schon vor 100 Jahren angewendet hat, mindestens ebenso gut und teilweise besser als heute 1896 geschieht; und das System im Ganzen, mit rechtwinkligen und geographischen Coordinaten hat Bohnenberger schon vor Soldner gehabt, er berichtet 1826 in seiner Schrift *De computandis dimensionibus etc.* § 16. über seine Formeln für rechtwinklige Coordinaten: „conveniunt cum iis, quibus usus est cel. Soldner in computandis dimensionibus bavaricis“.

Alles, was wir hierüber Geschichtliches finden konnten, haben wir gesammelt und veröffentlicht in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen, 1882“, I. S. 244 bis 259.

Baden.

Die topographische Vermessung des Grossherzogtums Baden wurde schon frühe auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System bezogen, mit der Sternwarte in

Mannheim als Nullpunkt und mit dem Meridian von Mannheim als x -Axe. Das zur Orientierung dienende Azimut Mannheim-Speyer (vgl. § 47. S. 264) ist schon im Jahre 1820 von Nicolai gemessen worden. Die Coordinaten waren früher als eben berechnet; das heutige sphärische rechtwinklige System der badischen Katastervermessung stammt etwa aus der Zeit von 1840; dasselbe wurde von dem Obergeometer Rheiner eingeführt.

Hessen-Darmstadt.

In dem „Gesetz, die Vollendung des Immobiliar-Katasters betreffend“ und Instruktion vom 30. Juni 1824, wird in Art. 3. bestimmt: „Sphäroidische Coordinaten, der Meridian von Darmstadt soll hiebei als Hauptaxe angenommen werden“. Über einige Eigentümlichkeiten der Hessischen rechtwinkligen Coordinaten haben wir in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen“, S. 289, berichtet.

Hannover.

Für die Hannoversche Landesvermessung hat Gauss schon frühzeitig ein rechtwinkliges sphäroidisches konformes Coordinaten-System mit dem Ursprung Göttingen und dem Meridian von Göttingen als x -Axe angeordnet, dessen Theorie wir in erster Näherung in § 50. u. § 58. behandelt haben. Die vollständige Theorie dieses klassischen Coordinatensystems können wir erst in einem späteren Kapitel bringen.

Zur Geschichte dieser Coordinaten entlehnen wir aus dem Berichte von Gädé in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1885, S. 113, 145, 161, 177, 193, 225 Folgendes:

Im Anschluss an die dänische Gradmessung, welche 1816 von Schumacher begonnen wurde, führte Gauss die geodätischen Messungen des Gradbogens zwischen Göttingen und Altona in den Jahren 1821—1823 aus (Netzbild hiezu gibt unser I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 493).

Eine weitere Ausdehnung gegen Westen zum Zweck eines neuen Anschlusses, der ursprünglich nicht projektiert war, erfuhren die Gauss'schen Dreiecke 1824 und 1825. Dabei wurden außer dem wissenschaftlichen Interesse der Gradmessung sehr frühe auch die Zwecke der Landesvermessung ins Auge gefasst. „Es ist jetzt allgemein anerkannt, dass eine genaue Landesvermessung ohne eine gehörige Triangulierung unmöglich ist“ (Gauss 1824). Im Jahre 1823 hat Gauss eigens auf dem Ägidius-turm in Hannover, der nicht zu den Gradmessungspunkten gehörte, Winkelmessungen zu topographischen Aufnahmen angestellt. Aus solchen Nebenmessungen erzielte Gauss 1821—1825 über 400 gut bestimmte Punkte, im ganzen wurden es 2600. Diese Punkte wurden nach Coordinaten berechnet und auf die Messtische aufgetragen. „Die Angabe der Lage von einem beliebigen Anfangspunkt (der Göttinger Sternwarte) bis auf wenige Fuss genau, muss als die Hauptausbeute betrachtet werden.“

Am 25. März 1828 wurde die Ausdehnung der Triangulierung über das ganze Königreich befohlen, sie fand ihren Abschluss 1844. (Das Netzbild der Hauptdreiecke mit 89 Punkten im Massstab 1:1 000 000 ist enthalten in „Papens Geogr. Karte des Königreichs Hannover und Herzogtums Braunschweig“.)

Im Jahre 1830 schrieb Gauss: „Späterhin könnte es geraten sein, das Verzeichnis von 2600 Punkten durch den Druck zu veröffentlichen, für den Augenblick noch nicht, erstlich weil eine wissenschaftliche Entwicklung der Zahlen nur in Verbindung mit der Entwicklung der mir eigentümlichen mathematischen Theorien gegeben werden kann, welche ich in etwa 3—4 Abhandlungen zu liefern beabsichtige.“ (Davon sind nur die „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ 1845 und 1846 erschienen.) Der Abschluss der rechnerischen Bearbeitung der Landesvermessung hat sich bis 1848 verzögert. Im Jahre 1859, 4 Jahre nach Gauss' Tode, wünschte das Ministerium die Herausgabe durch den Druck, den aber der Generalstab ablehnte, „weil die Coordinaten nicht nur einen ausserordentlich relativen Wert haben und viele derselben unzuverlässig und gar falsch sind; von solchen müsste das Verzeichnis zuvor gesäubert werden“.

Die Theorie dieser Coordinaten ist der Wissenschaft gerettet worden in dem Werke: „Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung von Oskar Schreiber, Hauptmann im Königl. Hannov. 1. Jäger-Bataillon Hannover, Hahnsche Hofbuchhandlung 1866“.

Die Vorrede dieses Werkes von Wittstein (Mai 1866) sagt: Selbst in Hannover, wo auf Grundlage der Gauss'schen Projektion fortwährend topographische Aufnahmen stattgefunden haben, war die Kenntnis der Fundamente dieser Projektion so gut wie verloren gegangen, und man arbeitete nur unter dem Einflusse einer Art von Tradition nach überlieferten Schablonen. Es kam darauf an, die vorhandenen Andeutungen und Bruchstücke aufzusuchen, mit Sorgfalt an dieselben anzuknüpfen, und so den Versuch zu wagen, die analytischen Entwicklungen, welche Gauss schon besessen haben muss, vollständig wieder ins Leben zu rufen.

Bald darauf erschien auch: „Allgemeines Coordinaten-Verzeichnis als Ergebnis der Hannoverschen Landesvermessung aus den Jahren 1821—1844, abgedruckt zum Zwecke der Benützung bei den Vermessungsarbeiten zur Vorbereitung der anderweitigen Regelung der Grundsteuer, Hannover 1868“, Druck von Wilh. Riemschneider, mit einer Einleitung von Wittstein, enthaltend die wichtigsten Coordinaten-Formeln mit Gliedern von der Ordnung $1:r^2$ einschliesslich.

Inzwischen war Hannover preussisch geworden, und man dachte daran, die Gauss'schen Coordinaten auch zur Katastervermessung zu benützen, welche bisher gemarkungsweise mit Kette und Bussole u. dergl. gemacht worden war.

Dabei verfiel man aber auf den Gedanken, die Coordinaten nach der politischen Kreis-Einteilung des Landes in 31 Partialsysteme zu zerstückeln. Wittstein hatte für die 31 neuen Nullpunkte die Meridian-Konvergenzen und Vergrösserungs-Coëfficienten m zu berechnen, und darnach wurden die Partialsysteme umgerechnet. Die Stadt Hannover bekam den neuen Nullpunkt Osterwald, dessen Reduktionsformeln in unserem II. Bande, 3. Aufl. 1888, S. 196—197 mitgeteilt sind.

Katastersekretär Clotten in Hannover (gestorben etwa 1887), welcher über die Vermessungen im ehemaligen Königreich Hannover mehreres geschrieben hat (Zeitschr. f. Verm. 1881, S. 22, 292, 376, 425, 445 und 1882 S. 22, 256) hat uns früher manches über die Übergangszeit nach 1866 mitgeteilt. Da man in der konformen Projektion in jedem Punkte einen Vergrösserungsfaktor $m = 1 + \frac{y^2}{2r^2}$ berechnen kann, scheint man geglaubt zu haben, dass man bezirksweise solche Reduktions-Coëfficienten rechnen und benützen müsse, und dieser Irrtum kann der Grund für jene Zerlegung des Gauss'schen Systems in 31 Partialsysteme gewesen sein, indem man dann mit der Zerlegung soweit ging, bis man glaubte, jene $1 + \frac{y^2}{2r^2}$ hinreichend genau = 1 setzen zu können.

Die 31 konformen Partialsysteme wurden 1879 wieder abgeschafft, und durch neue Systeme nach süddeutscher (Soldner'scher) Art ersetzt, mit den Nullpunkten 27. Celle, 28. Kaltenborn, 29. Silberberg, 30. Windberg u. s. w.

Als Hannoveraner hätten wir gewünscht, die alte klassische Göttinger Axe (schon aus Pietät gegen Gauss) zu erhalten und dadurch in der Übergangszeit 1880 bis 1890 viele Umrechnungsmühe zu ersparen, und später eine durchgreifende Kritik der alten Coordinaten zu ermöglichen. Östlich von dem Göttinger Meridian sind Ordinaten von nur etwa 70^{km} Länge, mit Ausnahme des Kreises Dannenberg in der nordöstlichen Ecke, der aber von dem 9^{km} nach Osten verschobenen System 27. Celle auch ausgeschieden und dem System 23. Magdeburg zugeteilt ist. (Vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1896“, S. 197—199.)

Kurhessen.

Die Triangulierung von Gerling hatte ursprünglich kein rechtwinkliges Coordinaten-System, dagegen wurden die Längen und Breiten aller 48 Hauptpunkte im Anschluss an Göttingen berechnet (Gerling, „Beiträge zur Geographie Kurhessens, Cassel 1839“, S. 200—204). An diese geographischen Coordinaten wurden dann von

den Kataster-Behörden rechtwinklige Partial-Systeme angeschlossen, mit dem Kirchturm der jeweiligen Gemarkung als Ursprung und dem Meridian des jeweiligen Kirchturms als x -Axe. Wo der Anschluss an die Haupt-Triangulierung fehlte, mass man eine kleine Basis mit Messlatten und ein Azimut durch korrespondierende Sonnenhöhen, für jede Gemarkung besonders.

Als um das Jahr 1853 die General-Katastervermessungen in den Provinzen Hanau und Fulda ausgeführt und auf das übrige Hessen ausgedehnt werden sollten, wurden die geographischen Coordinaten der für Kataster-Vermessungen brauchbaren trigonometrischen Punkte in rechtwinklige sphärische Coordinaten für den Indifferenzpunkt Cassel, Martinsturm, umgerechnet (mit Erddimensionen nach Walbeck, vgl. S. 334).

(Vorstehendes ist zusammengestellt aus gütiger Mitteilung von Herrn Landesvermessungsamt Kaupert, sowie Gehrmann, in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen II.“, S. 105.)

Thüringen-Gotha.

In einer Schrift „Über die Ergänzung der topographischen Aufnahme und Kartierung von Deutschland in Bezug auf Thüringen, von C. Frhrn. von Gross, Kammerherrn etc., Weimar 1848“ ist auf S. 33—72 eine von dem Astronomen und Geodäten Hansen in Gotha verfasste „Instruktion für die Ausführung der Triangulation“ veröffentlicht, welche in mancher Beziehung interessant ist, und in Hinsicht auf Coordinaten eine Meridian- x -Axe annimmt, von welcher die geographischen Längen nach Osten + 10°, + 20° u. s. w., nach Westen — 10°, — 20° u. s. w. gezählt werden. Auf diesem Meridian ist die Polhöhe 50° 36' als Nullpunkt für die Abscissen x bestimmt. Die rechtwinkligen Coordinaten werden zuerst genähert als *eben* berechnet, ξ, η , S. 51, worauf noch Korrekturen von der Ordnung $\frac{s^3}{2r^2}$ (S. 53 $\varrho' = \frac{1}{2r^2}$) hinzukommen, wodurch Coordinaten x, y erhalten werden, „auf der krummen Oberfläche der Erde, jedoch in einem etwas anderen Sinne, wie man diese Coordinaten früher aufgefasst hat“ (S. 53). Die Theorie dieser Coordinaten wird nicht mitgeteilt, die angegebenen Formeln (S. 53) sind in Bezug auf x und y symmetrisch (was bei den Soldner-schen und Gauss-schen Formeln nicht der Fall ist) und können durch Zufügung weiterer einfacher Glieder ebenfalls von der Ordnung $\frac{s^3}{r^2}$ (S. 72) in die rechtwinkligen *ebenen* Coordinaten der stereographischen Projektion übergeführt werden.

Nach neuesten Mitteilungen über die Thüringischen Vermessungen ist diese Hansen-sche Instruktion von 1848 mit ihren eigenartigen Coordinaten x, y nur Entwurf geblieben.

Nassau.

Das Herzogtum Nassau hat etwa um 1855 ein rechtwinkliges System mit dem Ursprung Schaumburg nach Soldners Theorie angenommen. (Weiteres s. „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 315—316 und I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 535.)

Preussen, Landesaufnahme.

In Preussen sind sehr lange die Punkte nur nach geographischen Coordinaten berechnet worden.

Bessel hat sich mit der Frage der Coordinaten gelegentlich beschäftigt, aber in „astr. Nachr., 1. Band Nr. 3 vom Dezember 1821“ nur die *ebenen* Coordinaten

„das Resultat der Formeln $x = s \sin \alpha + \dots$ und $y = s \cos \alpha + \dots$ “ in Betracht gezogen, wie in der „Bayerischen Landesvermessung“ S. 253 bemerkt wird.

Eine lithographierte „Instruktion für die topographischen Arbeiten des Königl. Preussischen Generalstabes“ von dem Chef des Generalstabes der Armee von Müffling, Berlin den 15. Januar 1821, giebt für Berechnung geographischer Coordinaten die nötigen Gebrauchsformeln, welche entsprechend sind einer Abhandlung von Soldner „Über die kürzeste Linie auf dem Sphäroide“ in der monatlichen Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde 1805, S. 7—23.

Die Einführung rechtwinkliger Coordinaten in die Preussischen Generalstabsmessungen geschah erst nach 1870 durch General Schreiber, welcher die Sache auch in die Öffentlichkeit gebracht hat durch eine autographierte Schrift „Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme vom 8. September 1877“, welche er zur Verfügung stellte für das Werk Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen, I. Band 1882“, S. 151—164. Dort findet sich auch auf S. 103 bis 121 eine nach Schreiber'schen Angaben von uns bearbeitete Darstellung der Rechnungsvorschriften für geographische Coordinaten, deren Gebrauchsformeln und Tabellen schon in unserem Citate auf § 39. S. 228 erwähnt sind. Was die von Schreiber eingeführten rechtwinkligen Coordinaten betrifft, so beruhen sie auf einer konformen Doppelprojektion, nämlich zuerst konforme Projektion des Ellipsoids auf die Kugel nach Gauss' Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“, erste Abhandlung 1843, und dann konforme Projektion der Kugel auf die Ebene, deren erste Näherungen wir bereits in § 50.—52. behandelt haben. Alles weitere hierüber auf ein späteres Kapitel versparend, müssen wir hier nur noch zur allgemeinen Orientierung folgendes bemerken:

Die geographischen Längen und Breiten, welche die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme veröffentlicht, stützen sich alle auf *einen* Fundamentalpunkt, die Sternwarte Berlin, bzw. deren Übertragung auf den benachbarten Triangulierungspunkt Rauenberg, woselbst auch ein die ganze Landesaufnahme orientierendes Azimut Marienturm bestimmt wurde. Die hiefür noch heute benützten Annahmen wurden im Jahre 1859 gemacht, und insbesondere dabei die geographische Länge der Sternwarte $= 31^{\circ} 3' 41,25''$ östlich von Ferro (d. h. $11^{\circ} 3' 41,25''$ östlich von Paris) angenommen. Nach neueren telegraphischen Bestimmungen ist diese Länge erheblich anders, nämlich $31^{\circ} 3' 28,30''$, oder um $12,95''$ kleiner als die Annahme von 1859.

Diesen Betrag $12,95''$ müsste man an allen Längenangaben der Landesaufnahme abziehen, wenn man dieselben mit neueren astronomischen Bestimmungen in Übereinstimmung bringen wollte. Indessen kämen dann noch viele andere Reduktionen für Lotabweichungen u. s. w. hinzu, und für die Feld- und Landmessung, wo es sich immer nur um Differenzen geographischer Längen handelt, kommt eine konstante Verschiebung überhaupt nicht in Betracht.

Die astronomischen Bestimmungen auf dem Fundamentalpunkt Rauenberg bei Berlin, insbesondere das für die Landesaufnahme massgebende Orientierungs-Azimut daselbst, sind in neuerer Zeit wiederholt worden, und es hat das Azimut gegen früher die Differenz $3,88''$ ergeben. („Veröffentlichung des K. Preuss. geodätischen Instituts, astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung“, Berlin 1889, S. 186.)

Hiezu ist auch noch anzuführen: von Schmidt, „Projektionsmethode der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme“, Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 385—401 und 409—418, mit Fundamentalzahlen S. 386—387. Das konforme

System der Landesaufnahme hat als x -Axe den Meridian von 31° Länge (Berlin). Als Nullpunkt dient der Punkt mit der Breite $52^{\circ} 42' 2,53251''$, entsprechend der Breite $52^{\circ} 40'$ auf der Gauss'schen konformen Kugel, der mittlere Krümmungs-Halbmesser A dieser Breite ist gegeben durch $\log A = 6.805\,0274\cdot003$. Die Ordinaten gehen westlich bis $y = 540^{km}$ bei Metz und östlich bis $y = 622^{km}$ bei Lyck. Die Verzerrungsverhältnisse sind daher sehr bedeutend; wie aus der Hilfstafel Seite [46] des Anhangs zu sehen, geht $\log m$ bis 0.002 oder m selbst bis 1,0046 oder $4,6^{mm}$ auf 1^m , so dass schon die Excentricitäten bei exzentrischen Theodolit-Aufstellungen und ähnliche örtliche Masse dem Verhältnis m entsprechend reduziert werden müssen. Aus diesem Grunde, d. h. seiner Grösse wegen, ist dieses System zur unmittelbaren praktischen Anwendung nicht geeignet, es findet seinen Hauptzweck in dem Zusammenhalt der Triangulierungen I.—II. Ordnung.

Innerhalb eines schmalen Streifens von etwa 100^{km} links und rechts vom Berliner Meridian könnten aber die konformen Coordinaten der Landesaufnahme unmittelbar praktisch benutzt werden.

Preussen, Katastervermessung.

Auch in der Preussischen Katastervermessung haben die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme grösserer Ausdehnung verhältnismässig spät Eingang gefunden.

In der Broschüre von General Baeyer „Mein Entwurf zur Anfertigung einer guten Karte u. s. w., Berlin 1868“, welche für die geschichtliche Entwicklung des Preussischen Vermessungswesens die beste Quelle ist, werden die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme, welche damals schon seit einem halben Jahrhundert sich in Süddeutschland bewährt hatten, nicht erwähnt. (Auch eine Notiz in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 529 mag hier zugezogen werden.)

Die „Anweisung vom 7. Mai 1868 für das Verfahren bei den Vermessungs-Arbeiten in den Provinzen Schleswig-Holstein, Hannover und Hessen-Nassau, zweite Ausgabe, Berlin 1870“, sagt in § 40. S. 35: „Zum Zwecke des weiteren Gebrauches der trigonometrischen Messungen ist die Lage der Dreieckspunkte gegeneinander nach rechtwinkligen Coordinaten zu berechnen, welche auf die wirkliche Mittagslinie eines nach der Bestimmung des Katasterinspektors hiezu zu wählenden geeigneten Punktes zu beziehen sind.“

Über die rechtwinkligen Coordinaten-Systeme in den Preussischen Rheinlanden haben wir folgende Mitteilung von F. G. Gauss in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen 1881“, S. 165:

Durch die Instruktion vom 12. März 1822 wurde allgemein eingeführt, dass die Detailnetze durch Netze höherer Ordnung miteinander verbunden, sowie dass die Dreiecksseiten derselben aus Seiten I. Ordnung abgeleitet und nach diesen orientiert wurden.

Für sämtliche Punkte sollten rechtwinkelige Coordinaten berechnet werden, welche sich für die Punkte I. Ordnung auf den Kölner Dom und dessen Meridian, für die Punkte II. bis IV. Ordnung auf einen passenden, in dem betreffenden Distrikt liegenden Punkt I. Ordnung und dessen Meridian beziehen sollten. Hierzu ist abgewichen worden, indem für die Punkte II. bis IV. Ordnung nicht der Meridian des als Ausgangspunkt für die Coordinaten benutzten Punktes I. Ordnung, sondern die durch diesen gelegte Parallele zum Meridian von Köln als Abscissenaxe angenommen und die ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung berechneten Coordinaten durch Addition derselben zu denen des Ausgangspunktes sämtlich nominell auf den Kölner Dom bezogen wurden. Thatsächlich bestand demnach aber auch ferner eine grössere Zahl von Coordinaten-Systemen. Der Umfang derselben richtete sich nach der Einteilung der Arbeitsbezirke und war sehr verschieden von einzelnen Gemeindebezirken bis zu einigen Kreisen. Für die Punkte, welche in mehreren

Systemen vorkamen, wurden in jedem System andere Abstände vom Meridian und Perpendikel des Kölner Doms berechnet, da die Berechnung der Coordinaten, als in der Ebene liegend, die gegenseitige Übereinstimmung der Bezifferung nicht ermöglichte.

In den östlichen Provinzen Brandenburg, Pommern, Sachsen, Schlesien, Posen, Preussen sind vor 1876 keine umfangreichen genauen Parzellaraufnahmen ausgeführt worden, allgemeine Coordinaten-Systeme waren nicht vorhanden.

In dem Werke F. G. Gauss, „die trig. und polygon. Rechnungen der Feldmesskunst 1876“, S. 297—301 werden die Soldnerischen Coordinaten nach süddeutschen Quellenschriften erwähnt und ein Zahlenbeispiel mit dem Nullpunkt Berlin Marienkirchturm gegeben.

Dieselben Nullpunkt Marienkirche hatte auch die Stadtvermessung von Berlin vorläufig; die Coordinaten wurden aber transformiert auf den Nullpunkt Rathaussturm, welcher für die Stadtvermessung beibehalten wurde. (Zeitschr. f. Verm. 1881, S. 14.)

Die „Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten bei Erneuerung der Karten und Bücher des Grundsteuerkatasters, Berlin 1881“, giebt in dem Anhang S. 337—351 die „Bestimmungen vom 29. Dezember 1879 über den Anschluss der Spezial-Vermessungen an die trigonometrische Landes-Vermessung“. Dadurch werden 40 Coordinaten-Nullpunkte festgestellt, die wir in unserer Übersichtskarte S. 326 aufgezeichnet haben.

Oldenburg.

Als Nullpunkt des rechtwinkligen Coordinaten-Systems dient der Schlossturm zu Oldenburg, der durch diesen Punkt gelegte Meridian dient als Abscissenaxe mit $+x$ nach Süden, $-x$ nach Norden, und entsprechend wird $+y$ nach Westen und $-y$ nach Osten gezählt.

Über die durch Güte der Herren Vermessungs-Inspektor Treiss und Vermessungs-Direktor Scheffler in Oldenburg erhaltenen geodätischen Schriften von 1836 und von 1838 haben wir bereits in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 537—539 berichtet, und um nicht wiederholen zu müssen, verweisen wir auf jene erste Mitteilung, welche aber in Hinsicht auf die Art der rechtwinkligen Coordinaten noch nicht zu einem Schlussergebnis gelangen konnte.

Inzwischen haben wir auch noch die geographischen Coordinaten zugezogen mit Rücksicht auf die dabei benützten Erddimensionen. Es ist nämlich in dem Werke „Ergebnisse der 1835—1837 ausgeführten Triangulierung des Herzogtums Oldenburg, abgeleitet aus der Hannoverschen Gradmessung“ auf S. 1 angegeben: „Bei allen Rechnungen ist unterstellt worden, dass unsere Erde ein Ellipsoid, das Abplattungsverhältnis = 1 : 302,78, der mittlere Erdmeridiangrad = 57009,76 Toisen sei“.

Dieses sind die bekannten Walbeckischen Erddimensionen, welche wir schon in der Einleitung § 1. S. 8—9 erwähnt haben, und es kam nun die Aufgabe, dieselben zur Coordinatenrechnung herzurichten. Dazu haben wir zuerst berechnet:

$$\text{Meridianquadrant } Q = 10\,000\,268,30^m, \log Q = 7.0000117,$$

dann nach § 35. S. 215, Gleichung (24 b) und Tabelle unten:

$$\text{mit } \alpha = 1 : 302,78, \log a = 6.804\,6093.$$

$$\text{Dazu auch } \log b = 6.803\,1726, \log c = 6.806\,0460$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2, \log e^2 = 7.819\,1850, \log e'^2 = 7.822\,0585$$

$$\log(1 - e^2) = \log \frac{1}{1 + e'^2} = 9.997\,1265$$

Dann eine Tabelle der $\log [1]$ und $\log [2]$ nach S. 230:

Hilfstafel für Walbecks Erddimensionen.

φ	$\log \frac{\rho}{M} = \log [1]$	$\log \frac{\rho}{N} = \log [2]$
52° 30'	8.509 9797	—
52° 40'	509 9676	121
52° 50'	509 9556	120
53° 0'	509 9435	121
53° 10'	509 9314	121
53° 20'	509 9194	120
53° 30'	509 9074	120
53° 40'	500 8953	121

Damit berechneten wir ein Dreieck Crapendorf-Windberg-Quekenberg, dessen Lage auf unserem Netzbilde von § 21. S. 129 insofern angegeben ist, als die Punkte Windberg und Quekenberg dort im westlichen Teile geradezu vorkommen, und Crapendorf ungefähr in der Gegend von Cloppenburg angenommen werden kann.

Aus den geographischen Coordinaten dieser drei Punkte, welche bereits in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 538 angegeben sind, haben wir die Berechnung nach den sphäroidischen Mittelbreitenformeln unseres späteren § 77. (aber mit den [1] und [2] nach Walbecks Erddimensionen) gemacht und folgende Entfernungen und Azimute gefunden:

	$\log S$	Azimut	Winkel
1. Crapendorf			
Quekenberg	4.587 4672	209° 17' 7,07''	
Windberg	4.535 6446	277 1 53,18	67° 44' 46,11''
2. Windberg			
Crapendorf	4.535 6446	96° 37' 40,47''	
Quekenberg	4.611 1920	117 49 42,35	61° 12' 1,88''
3. Quekenberg			
Crapendorf	4.587 4672	29° 3' 48,39''	
Windberg	4.611 1930	338 0 33,23	51° 3' 15,16''
			180° 0' 3,15''

Die Winkelsumme $180^{\circ} 0' 3,15''$ stimmt auch, wenigstens innerhalb $0,1''$ mit dem sphärischen Excess, und die $\log S$ stimmen mit den Sinus der Winkel wenigstens bis zur 6ten Stelle genau, die Rechnung mag also innerhalb der hier nötigen Genauigkeit als stimmend gelten. Nun haben wir aus den rechtwinkligen Coordinaten, die ebenfalls schon in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 538 mitgeteilt sind, die Entfernungen zweifach berechnet, erstens unter der Annahme, dass die rechtwinkligen Coordinaten kongruent nach Soldner und zweitens dass dieselben konform nach Gauss seien; Folgendes ist die Vergleichung:

Dreiecksseite	$\log S_0$ Oldenburg	$\log S_1$ aus φ und λ	$\log s$ eben	$\log S'$ Soldner	$\log S''$ konform
1. Windberg-Quekenberg	4.611 1937	4.611 1930	4.611 2004	4.611 1933	4.611 1922
2. Crapendorf-Quekenberg	4.587 4703	4.587 4672	4.587 4690	4.587 4668	4.587 4662
3. Windberg-Crapendorf	4.535 6451	4.535 6446 $= \log S'$	4.535 6443 $= \log S_1$	4.535 6442	4.535 6401

Die Oldenburgischen $\log S_0$ sind entnommen aus dem Generalbericht für die mitteleuropäische Gradmessung für 1865, Seite 26, Dreieck Nr. VIII, mit dem Verwandlungslogarithmus 0.575 9082 zum Übergang von Preussischen Ruten in Meter. Dort sind auch die Dreieckswinkel angegeben, bis zu 1" abweichend von unseren aus φ, λ rückwärts berechneten Winkeln.

Bleiben wir nun bei den vorstehenden Seitenvergleichungen stehen, so stimmen am besten $\log S_1$ und $\log S'$ unter sich, und — soweit aus diesen wenigen Vergleichungen Schlüsse gezogen werden dürfen — müsste man nun annehmen, dass die Oldenburgischen Coordinaten bereits in den Jahren 1835 und 1836 dieselben waren, wie die gleichzeitigen Bayerischen und Württembergischen Coordinaten von Soldner und Bohnenberger.

Mecklenburg.

Mecklenburg ist zur Zeit der einzige Staat in Deutschland, der die Vorteile der Konformität bis zu den Katasterkarten sich nutzbar gemacht hat. Dort ist das konforme Prinzip praktisch geodätisch in I.—III. Ordnung der Triangulierung erhalten geblieben durch den mecklenburgischen Geodäten Paschen, welcher als unmittelbarer Schüler von Gauss auf der Universität Göttingen in die feinen geodätischen Ideen des Meisters eingeweiht wurde und in sein Heimatland Mecklenburg zurückgekehrt, das Gelernte zur Anwendung gebracht hat, in einer von der hannoverschen abweichenden, der geographischen Erstreckung von West nach Ost angepassten Form.

Es ist die konforme Kegelprojektion mit Berührung nach dem Mittelparallel des Landes in der Breite $P = 53^\circ 45'$, und entsprechend ist das Coordinatenystem so angelegt, dass die x -Axe in dem Meridian des Schlossturmes von Schwerin liegt und die y -Axe rechtwinklig dazu in der Breite $53^\circ 45'$. Allerdings wurde dazu noch eine Verschiebung der x um den konstanten Betrag 13919,812" vorgenommen, um den Nullpunkt in den Schweriner Schlossturm selbst zu verlegen, aber das hat nur formelle Bedeutung; denn in allen Fällen theoretischer Rechnung mit den Mecklenburgischen Coordinaten muss man die ursprünglichen von der Breite $53^\circ 45'$ aus gerechneten Abscissen x benützen. Die Linear-Verzerrung ist in erster Näherung übereinstimmend mit derjenigen des Gauss'schen konformen Systems, nämlich in Mecklenburg $m = 1 + \frac{x^2}{2r^2}$ entsprechend dem Gauss'schen $1 + \frac{y^2}{2r^2}$, weil die x an Stelle der y treten, und ebenso gehen auch die übrigen Formeln von § 50. in erster Näherung in die Mecklenburgischen Formeln über, wenn man überall x und y vertauscht.

In Hinsicht auf die Verzerrung $m = 1 + \frac{x^2}{2r^2}$ hat aber Mecklenburg durch einen kleinen Kunstgriff den Maximalwert auf die Hälfte reduziert, indem ein Zwischenwert

eingeschaltet wurde gleich der Hälfte des Maximalwertes, und da bei der Ausdehnung von $0^\circ 45'$ in der Breite oder $82,5^{\text{km}}$ von dem Normalparallel nach Süden und nach Norden der Maximalwert $\log m = 0.0000371$ beträgt, was $85,4^{\text{mm}}$ auf 1^{km} entspricht, so ist die lineare Maximalverzerrung durch jene Verschiebung in ganz Mecklenburg auf den Maximalwert von rund 4^{cm} auf 1^{km} beschränkt worden.

Die Theorie der Mecklenburgischen Projektion können wir erst in einem späteren Kapitel dieses Bandes behandeln; das amtliche Werk hierüber ist:

Grossherzoglich Mecklenburgische Landes-Vermessung. V. Teil. Die konforme Kegelprojektion und ihre Anwendung auf das trigonometrische Netz I. Ordnung. Herausgegeben im Auftrage der Grossherzoglichen Ministerien des Innern und der Finanzen, Abteilung für Domänen und Forsten, von Dr. W. Jordan, Professor an der technischen Hochschule in Hannover, Karl Mauck, Kammeringenieur in Schwerin, R. Vogeler, Kammeringenieur in Schwerin. Mit einer lithographischen Netzkarte. Schwerin 1895. Zu beziehen durch die Stiller'sche Hofbuchhandlung (J. Ritter).

Vgl. hiezu auch „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 257—263.

Sachsen.

Im Bereiche des Königreichs Sachsen sind auf unserer Übersichtskarte zwei Punkte, Grossenhain und Leipzig eingetragen, und zwar nach einer Mitteilung von Nagel vom 5. Mai 1889, wornach als eigentlicher Nullpunkt für Sachsen der Pfeiler für den Basis-Zwischenpunkt ist, welcher den Namen Grossenhain führt. Der Pfeiler B. Leipzig auf der Pleissenburg in Leipzig gilt nur als Coordinatenanfang für die Leipziger Stadt-Vermessung.

Dabei hat man in Sachsen (nach Mitteilung von Fuhrmann in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 266—270) noch eine Art Lokal-Systeme angenommen, in welchen bezirksweise wie eben gerechnet werden kann, aber mit dem Opfer des Zusammenschlusses im Ganzen.

Elsass-Lothringen.

Für die Kataster-Vermessung von Elsass-Lothringen wurden zwei Coordinaten-Nullpunkte angenommen, Delme und Sausheim, worüber eine erste Mitteilung von Vermessungs-Kontrolleur Rodenbusch gemacht wurde in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1888, S. 545—552. Die amtlichen Angaben hiezu sind enthalten in dem Werke: „Anweisung vom 30. Januar 1889 für das Verfahren bei der Stück-Vermessung von Gemarkungen zum Zwecke der Errichtung von Kataster-Urkunden, Strassburg 1889“, S. 9.

Schlussbetrachtung.

Die Übersichtskarte der deutschen Coordinaten-Systeme und der Rückblick auf ihre allmähliche Entstehung zeigen beide ein treues Abbild der ungleichen politischen Entwicklung der einzelnen Staaten unseres Vaterlandes.

In geodätischer Beziehung haben wir diese Ungleichheit in der Vergangenheit nicht zu beklagen. Aus der 100jährigen Arbeit der *Bohnenberger*, *Soldner*, *Rheiner*, *Schleiermacher*, *Gauss*, *Paschen*, *Schreiber*, und wie sie alle heißen, ist eine solche Fülle von Erfahrungen verfügbar geworden, dass wir heute, um das richtige zu treffen, fast keine eigene Arbeit mehr aufzuwenden, sondern nur noch richtig auszuwählen brauchen.

Die Coordinaten-Systeme unserer Landesvermessungen sind von grundlegender Bedeutung für die Vermessungen selbst, für die mathematische Festlegung und für

die zeichnerische Darstellung der Vermessungs-Ergebnisse, und aus diesem Grunde ist der Wert und die Dauer einer Landesvermessung zum grössten Teil durch die mehr oder weniger gute Wahl eines Coordinaten-Systems bedingt.

Eine für die ganze Erde zu Land und zu Wasser gütige Art der Punktbestimmung durch geographische Coordinaten (geogr. Breiten und Längen) ist auch bei den Landesvermessungen immer angewendet worden, und in manchen Vermessungen wurden die geographischen Netzlinien für Längen und Breiten als einziger mathematischer Zusammenhalt genommen.

Allein diese geographischen Netzlinien liegen dem Feld- und Landmesser, der im Kleinen misst, zu fern, sie passen nicht in sein tägliches Geschäft mit rechten Winkeln, denn die Meridiane eines Landes sind zwar für das Feldmessen als Gerade zu betrachten, aber sie sind unter sich nicht parallel, und die Parallelkreise sind nicht gerade.

Der Feldmesser muss *rechtwinklige* Coordinaten haben, und zwar solche, die auf die Erdkrümmung Rücksicht nehmen und den Übergang zwischen der Kleinvermessung und den höheren geodätischen Rechnungen mit geographischen Coordinaten vermitteln.

In dieser Beziehung haben die süddeutschen Landesvermessungen, namentlich Bayern und Württemberg unter Soldner und Bohnenberger am Anfang dieses Jahrhunderts bahnbrechend gewirkt, die Systeme jener Vermessungen waren nachahmungswert, so lange man nichts besseres hatte.

Das ist nun aber der Fall seit 1866, da die Gauss'sche konforme Projektion durch Wittstein-Schreiber der Öffentlichkeit übergeben ist; und im nächsten Jahrhundert wird die konforme Projektion nach Gauss'schem Prinzip ebenso unbestritten als zweckmässigste für Landesvermessungen und Katasteraufnahmen gelten, wie heute die vor kaum 2 Jahrzehnten noch für „unausführbar“ erklärte Gauss'sche Ausgleichung der Kataster-Dreiecksmessungen.

Zwischenbemerkung.

Mit den geographischen Coordinaten sind wir so weit in der Theorie der Geodäsie gelangt, als zum praktischen Verständnis unserer deutschen Landesvermessungen im Ganzen nötig ist.

Für weitergehende Zwecke ist nun der richtige Weg zur geodätischen Linie vorgezeigt, welche in unserem nächsten Kapitel VI. behandelt werden wird.

Wenn nun trotzdem noch in diesem Kapitel V. eine Anzahl rein sphärischer Aufgaben abgehandelt wird, so hat das den Zweck der Vorbereitung von späteren sphäroidischen Aufgaben.

Eine Aufgabe spielt dabei eine durchlaufende Rolle, nämlich Herstellung der Beziehungen zwischen den geographischen Coordinaten zweier Punkte einerseits und der Entfernung nebst den Azimuten ihrer Verbindungsstrecke andererseits, oder umgekehrt, in verschiedenem Zusammenhang.

Wir haben dieses früher „Hauptaufgabe der höheren Geodäsie“ genannt, werden aber nun das mehr bezeichnende Wort „*Polardreieck*“ anwenden.

Das Polardreieck spielt in der Geodäsie eine gleich wichtige Rolle wie das astronomische oder nautische Dreieck (Pol-Zenit-Stern) in der praktischen Astronomie. Auch eine von Gauss gebrauchte Bezeichnung *T* oder *t* für das Azimut und dann auch für Richtungswinkel der Geodäsie scheint auf jene Verwandtschaft hinzudeuten, indem das Azimut in dem geodätischen Polardreieck dem Stundenwinkel *t* des astronomischen Dreiecks entspricht.

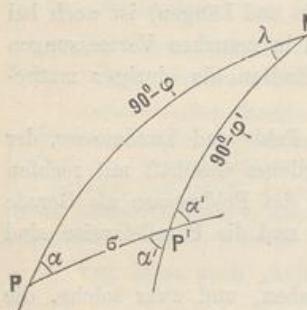
§ 60. Das sphärische Polar-Dreieck.

Wir knüpfen nochmals an den früheren § 56. an und setzen auch die Fig. 1. von S. 312 nochmals her.

Jordan, Handb. d. Vermessungskunde. 4. Aufl. III. Bd.

Zwei Punkte P und P' haben die geographischen Breiten φ und φ' und zwischen sich den geographischen Längenunterschied λ . Der Verbindungsbogen PP' als grösster Kreisbogen hat den Wert σ als Centriwinkel am Erdmittelpunkt und die Azimute α und α' an seinen Endpunkten. Der Halbmesser der Kugel, auf welcher das Dreieck $PP'N$ liegend angenommen ist, kommt nicht in Betracht.

Fig. 1.



Unsere Aufgabe wird eine zweifache sein:

- entweder* ist φ , φ' , λ gegeben und
 σ , α , α' gesucht
- oder es ist φ , σ , α gegeben und
 φ' , λ , α' gesucht.

Da wir uns hier nur mit der rein *sphärischen* Lösung der fraglichen Aufgaben beschäftigen, und da wir einsehen, dass es sich in beiden Fällen nur darum handelt, ein sphärisches Dreieck aus zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel aufzulösen, liegen im Grundsatz keine Schwierigkeiten vor, und es handelt sich also nur darum, die verschiedenen Auflösungs-Formen, welche die sphärische Trigonometrie für unsern Fall bietet, zu betrachten, und für unsere Zwecke zurecht zu legen (wozu Gauss in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“, erste Abhandlung, 1843, art. 16. und 17. die Wege gezeigt hat).

Ehe wir zu unseren Formel-Entwicklungen und zur numerischen Anwendung von sphärischen Formeln übergehen, wollen wir zwei scharf (mit 10 stelligen Logarithmen) berechnete Beispiele voraus schicken, welche in verschiedener Weise als Normalbeispiele dienen können:

Kleines sphärisches Normal-Beispiel.
(Bezeichnungen nach Fig. 1.)

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 49^\circ 30' 0'' \quad \varphi' = 50^\circ 30' 0'' \quad \lambda = 1^\circ 0' 0'' \\ \varphi_0 = \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' 0'' \quad \frac{\varphi' - \varphi}{2} = 0^\circ 30' 0'' \quad \frac{\lambda}{2} = 0^\circ 30' 0'' \\ \alpha_0 = \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 44' 0,2384'' \quad \alpha' - \alpha = 0^\circ 45' 57,89393'' \\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,9470'' \quad \frac{\sigma}{2} = 0^\circ 35' 39,74093'' \\ \alpha' = 33^\circ 6' 59,1854'' \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,48186'' \\ \alpha = 32^\circ 21' 1,2914'' \quad \sigma = 4279,48186'' \end{array} \right\} \quad (1)$$

Grosses sphärisches Normal-Beispiel.
(Bezeichnungen nach Fig. 1.)

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 45^\circ 0' 0'' \quad \varphi' = 55^\circ 0' 0'' \quad \lambda = 10^\circ 0' 0'' \\ \varphi_0 = \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' 0'' \quad \frac{\varphi' - \varphi}{2} = 5^\circ 0' 0'' \quad \frac{\lambda}{2} = 5^\circ 0' 0'' \\ \alpha_0 = \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 49' 54,6437'' \quad \alpha' - \alpha = 7^\circ 41' 51,67100'' \\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 3^\circ 50' 55,8355'' \quad \frac{\sigma}{2} = 5^\circ 55' 51,32153'' \\ \alpha' = 36^\circ 40' 50,4792'' \quad \sigma = 11^\circ 51' 42,64306'' \\ \alpha = 28^\circ 58' 58,8082'' \quad \sigma = 42702,64306'' \end{array} \right\} \quad (2)$$

I. Gegeben $\varphi, \varphi', \lambda$. **Gesucht** σ, α, α' .**1a. Die Gauss'schen Gleichungen der sphärischen Trigonometrie.**

Wenn man die Gauss'schen bzw. Neper'schen Gleichungen von § 27. S. 165 auf unseren Fall anwendet, so bekommt man, ebenso wie schon bei (1) § 56. S. 312 mit den Abkürzungen φ_0 und α_0 für die Mittelwerte, folgendes:

$$\left. \begin{array}{lcl} \sin \frac{\sigma}{2} \sin \alpha_0 & = & \cos \varphi_0 \sin \frac{\lambda}{2} \\ \sin \frac{\sigma}{2} \cos \alpha_0 & = & \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \\ \cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2} & = & \sin \varphi_0 \sin \frac{\lambda}{2} \\ \cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} & = & \cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Wenn man die erste und zweite, dann die dritte und vierte dieser Gleichungen dividiert, und zur Abkürzung für das folgende, die Zeichen Z und N , Z' und N' für die Zähler und Nenner der entstehenden Brüche einführt, so erhält man:

$$\left. \begin{array}{lcl} \tan \alpha_0 & = & \frac{\cos \varphi_0 \sin \frac{\lambda}{2}}{\sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2}} = \frac{Z}{N} \\ \sin \frac{\sigma}{2} & = & \frac{Z}{\sin \alpha_0} = \frac{N}{\cos \alpha_0} \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{lcl} \tan \frac{\alpha' - \alpha}{2} & = & \frac{\sin \varphi_0 \sin \frac{\lambda}{2}}{\cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\lambda}{2}} = \frac{Z'}{N'} \\ \cos \frac{\sigma}{2} & = & \frac{Z'}{\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}} = \frac{N'}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir nach (1):

$$\varphi = 49^\circ 30' 0'' \quad \varphi' = 50^\circ 30' 0'' \quad \lambda = 1^\circ 0' 0'' \quad (6)$$

also $\varphi_0 = 50^\circ 0' 0''$, $\frac{\varphi' - \varphi}{2} = 0^\circ 30' 0''$, $\frac{\lambda}{2} = 0^\circ 30' 0''$

Die logarithmische Rechnung giebt:

$\log Z$	7.748 9093·6	$\log Z'$	7.825 0958·3
$\log N$	7.940 8253·2	$\log N'$	9.999 9669·3
$\log \tan \alpha_0$	9.808 0840·4	$\log \tan \frac{\alpha' - \alpha}{2}$	7.825 1289·0
$\log \sin \frac{\sigma}{2}$	8.015 9282·7	$\log \cos \frac{\sigma}{2}$	9.999 9766·3
$\alpha_0 = 32^\circ 44' 0,238''$		$\frac{\sigma}{2} = 0^\circ 35' 39,741''$	
$\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,947''$		$\sigma = 1^\circ 11' 19,482''$	
$\alpha' = 33^\circ 6' 59,185''$			
$\alpha = 32^\circ 21' 1,291''$			

Von den beiden Bestimmungen für $\frac{\sigma}{2}$, nämlich aus $\sin \frac{\sigma}{2}$ und aus $\cos \frac{\sigma}{2}$ ist in diesem Falle, da σ klein ist, nur die erste scharf, während die zweite aus \cos , nur als summarische Probe benutzt werden kann.

Ib. Einzelformeln für σ , α und α' .

Zur Bestimmung von σ allein dient die Cosinusformel S. 164:

$$\cos \sigma = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos \lambda \quad (8)$$

Da aber in unseren Fällen immer σ klein ist, kann man nicht geradezu nach $\cos \sigma$ rechnen; indessen kann man die vorstehende Formel leicht umformen, indem man setzt:

$$\cos \sigma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} \quad \text{und} \quad \cos \lambda = 1 - 2 \frac{\sin^2 \lambda}{2}$$

Damit findet man leicht:

$$\sin \frac{\sigma}{2} = \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \cos \varphi \cos \varphi' \sin^2 \frac{\lambda}{2}} \quad (9)$$

Man rechnet dann mit einem Hilfswinkel μ ähnlich wie bei der Bestimmung einer Hypotenuse aus zwei Katheten:

$$\begin{aligned} \tan \mu &= \frac{\sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}}{\sin \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \varphi \cos \varphi'}} \\ \sin \frac{\sigma}{2} &= \frac{\sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}}{\sin \mu} \quad \text{oder} \quad = \frac{\sin \frac{\lambda}{2} \sqrt{\cos \varphi \cos \varphi'}}{\cos \mu} \end{aligned}$$

Unser kleines Normal-Beispiel (1) S. 338 giebt:

$\log \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}$	7.940 8418·6	(10)
$\log \sin \frac{\lambda}{2} \sqrt{\dots}$	7.748 8693·3	
$\log \tan \mu$	0.191 9725·3	
$\log \sin \frac{\sigma}{2}$	8.015 9282·7	
$\mu = 57^\circ 16' 11,981''$		
$\frac{\sigma}{2} = 0^\circ 35' 39,741''$		
$\sigma = 1^\circ 11' 19,482''$		

Auch für die Azimute α und α' giebt die sphärische Trigonometrie unmittelbare Lösungen, nämlich nach den \cotg -Formeln von S. 164:

$$\cotg \alpha = \frac{\tan \varphi' \cos \varphi}{\sin \lambda} - \sin \varphi \cotg \lambda \quad (11)$$

$$\cotg (\alpha' \pm 180^\circ) = \frac{\tan \varphi \cos \varphi'}{\sin \lambda} - \sin \varphi' \cotg \lambda \quad (12)$$

Unser grosses Normal-Beispiel (2) giebt hiefür folgende Anwendung:

$$\varphi = 45^\circ 0', \quad \varphi' = 55^\circ 0', \quad \lambda = 10^\circ 0'$$

$$\cotg \alpha = 5,815 512 455 - 4,010 201 831 = 1,805 310 624$$

$$\log \cotg \alpha = 0.256 5519·4 \quad \alpha = 28^\circ 58' 58,808'' \quad (13)$$

Dagegen giebt das kleine Normal-Beispiel (1):

$$\begin{aligned}\varphi &= 49^\circ 30', \quad \varphi' = 50^\circ 30', \quad \lambda = 1^\circ 0' \\ \cot \alpha &= 45,142\ 3983 - 43,563\ 6286 = 1,578\ 7697 \\ \log \cot \alpha &= 0.198\ 3187\cdot8 \quad \alpha = 32^\circ 21' 1,290''\end{aligned}\quad (13\text{ a})$$

Wenn φ und φ' nahezu gleich sind, und λ klein ist, so geben die Formeln (11) und (12) keine scharfen Bestimmungen, weil dabei eine Differenz zweier nicht sehr verschiedener Werte auszurechnen ist, wie (13 a) mit $45,14\dots - 43,56\dots$ deutlich zeigt.

Man kann noch manche andere Auflösungs-Formen für die vorgelegte erste Aufgabe I. finden, wie sich aus der Analogie mit der zweiten Aufgabe II. ergeben wird, zu der wir nun übergehen.

II. Gegeben φ, σ, α . Gesucht $\varphi', \lambda, \alpha'$.

IIa. Auflösung durch die Gauss'schen Gleichungen.

Die Anwendung der Gauss'schen bzw. Neper'schen Gleichungen von S. 165 auf unseren Fall giebt:

$$\left. \begin{aligned}\tan \frac{\alpha' + \lambda}{2} &= \frac{\sin \frac{90^\circ - \varphi + \sigma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{90^\circ - \varphi - \sigma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{Z}{N} \\ \sin \frac{90^\circ - \varphi'}{2} &= \frac{Z}{\sin \frac{\alpha' + \lambda}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\alpha' + \lambda}{2}}\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned}\tan \frac{\alpha' - \lambda}{2} &= \frac{\cos \frac{90^\circ - \varphi + \sigma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{90^\circ - \varphi - \sigma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{Z'}{N'} \\ \cos \frac{90^\circ - \varphi'}{2} &= \frac{Z'}{\sin \frac{\alpha' - \lambda}{2}} = \frac{N'}{\cos \frac{\alpha' - \lambda}{2}}\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Bei unserem kleinen Normal-Beispiel (1) ist:

$$\text{Gegeben } \varphi = 49^\circ 30' 0'' \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,482'' \quad \alpha = 32^\circ 21' 1,291''$$

Man hat also zur Anwendung von (14) und (15):

$\frac{90^\circ - \varphi + \sigma}{2}$	$= 20^\circ 50' 39,741''$	$\frac{\alpha}{2}$	$= 16^\circ 10' 30,646''$
$\frac{90^\circ - \varphi - \sigma}{2}$	$= 19^\circ 39' 20,259''$		
$\log Z$	8.996 1858·3	$\log Z'$	9.415 5449·8
$\log N$	9.509 2708·3	$\log N'$	9.956 3857·0
$\log \tan \frac{\alpha' + \lambda}{2}$	9.486 9150·0	$\log \tan \frac{\alpha' - \lambda}{2}$	9.459 1592·8
$\log \sin \frac{90^\circ - \varphi'}{2}$	9.528 8096·8	$\log \cos \frac{90^\circ - \varphi'}{2}$	9.973 6708·5

$$\begin{aligned} \frac{\alpha' + \lambda}{2} &= 17^\circ 3' 29,592'' & \frac{90^\circ - \varphi'}{2} &= 19^\circ 45' 0,000'' \\ \frac{\alpha' - \lambda}{2} &= 16^\circ 3' 29,592'' & 90^\circ - \varphi' &= 39^\circ 30' 0,000'' \\ \alpha' &= 33^\circ 6' 59,184'' & \varphi' &= 50^\circ 30' 0,000'' \\ \lambda &= 1^\circ 0' 0,000'' \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (15a)$$

IIb. Einzel-Formeln für φ' , α' und λ .

Zur Bestimmung von φ' aus φ , σ und α hat man die Cosinus-Formel S. 164 und für α' und λ hat man je eine der Cotangentialen-Formeln (9) S. 164 anzuwenden. Man erhält auf diesem Wege folgende drei Auflösungen:

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \cos \sigma + \cos \varphi \sin \sigma \cos \alpha \quad (16)$$

$$\cotg \alpha' = \frac{\cos \sigma \cos \alpha - \sin \sigma \tan \varphi}{\sin \alpha} \quad (17)$$

$$\cotg \lambda = \frac{\cotg \sigma \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (18)$$

Zur Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel haben wir:

Gegeben $\varphi = 49^\circ 30' 0''$, $\sigma = 1^\circ 11' 19,482''$, $\alpha = 32^\circ 21' 1,291''$

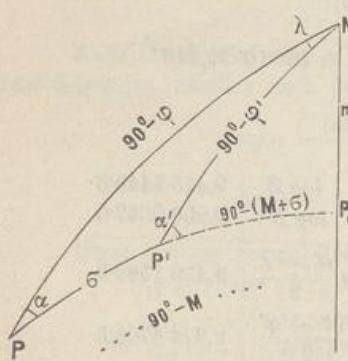
Die Ausrechnung nach (16), (17) und (18) giebt:

$$\begin{aligned} \sin \varphi' &= 0,760\,2423 + 0,011\,3823 = 0,771\,6246 \\ \log \sin \varphi' &= 9.887\,4061 \quad \varphi' = 50^\circ 30' 0,00'' \\ \cotg \alpha' &= 1,578\,4299 - 0,045\,3947 = 1,533\,0352 \\ \log \cotg \alpha' &= 0.185\,5521 \quad \alpha' = 33^\circ 6' 9,19'' \\ \cotg \lambda &= \frac{31,297\,9570 - 0,642\,3847}{\sin \alpha} = \frac{30,655\,5723}{\sin \alpha} \\ \log \cotg \lambda &= 1.758\,0785 \quad \lambda = 1^\circ 0' 0,00'' \end{aligned} \quad (19)$$

An diesen drei Auflösungs-Formeln ist nichts auszusetzen; sie geben φ' , α' und λ einzeln mit gewöhnlicher Schärfe. Der von manchen Rechnern gescheute mehrfache Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen und umgekehrt, kann nötigenfalls durch Benützung von Additions- und Subtraktions-Logarithmen vermieden werden.

IIc. Rechtwinklige Projektion des Nordpols auf die Seite σ .

Fig. 2.
Hilfswinkel M und m .



In Fig. 2., welche etwas anders gezogen ist als die frühere Fig. 1., aber im wesentlichen dasselbe darstellt, ist von dem Nordpol N eine Senkrechte NP_0 auf die verlängerte PP' gefällt, wodurch sowohl die Länge m dieser Senkrechten selbst, als auch die Länge PP_0 bestimmt ist, welche wir mit $90^\circ - M$ bezeichnen wollen.

Da nun das grosse rechtwinklige Dreieck PNP_0 durch unsere gegebenen φ und α vollständig bestimmt ist, und da durch Abtragen von $PP' = \sigma$ auf PP_0 auch der Punkt P' , und damit das zweite kleinere rechtwinklige Dreieck $P'NP_0$, bestimmt ist, sowie auch damit das schiefwinklige Restdreieck $PP'N$, ist nun unsere ganze Aufgabe auf die Be-

handlung zweier rechtwinkliger sphärischer Dreiecke zurückgeführt, weshalb wir die nötigen Formeln (die man auch rein goniometrisch aus den Formeln (16), (17), (18) herleiten könnte) sofort in der zur Rechnung nötigen Auffeinanderfolge hier hersetzen.

Zur Bestimmung von M und m hat man:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} M &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cos \alpha} \\ \cos m &= \frac{\sin \varphi}{\sin M} \quad \text{oder} \quad \cos m = \frac{\cos \varphi \cos \alpha}{\cos M} \\ \sin m &= \sin \alpha \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Nachdem so M und m bestimmt und versichert sind, hat man weiter:

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{\operatorname{tang} m}{\cos(M + \sigma)} \quad (21)$$

$$\sin \varphi' = \cos m \sin(M + \sigma) \quad \operatorname{tang} \varphi' = \operatorname{tang}(M + \sigma) \cos \alpha' \quad (22)$$

$$\sin \lambda = \frac{\sin \sigma \sin \alpha'}{\cos \varphi} = \frac{\sin \sigma \sin \alpha}{\cos \varphi'} \quad (23)$$

Die Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel mit den gegebenen Werten φ , α und σ nach (1), führt auf die Hilfswinkel:

$$M = 54^\circ 11' 19,61'' \quad m = 20^\circ 20' 7,75''$$

womit die Werte φ' , α' und λ sich wie früher ergeben.

II d. Rechtwinklige Coordinaten x , y für den Punkt P' .

In Fig. 3. ist der Meridian PN gerade gezogen, und durch $P'P_1$ eine Senkrechte angedeutet, welche von P' auf den Meridian von P gefällt wurde, so dass die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten $PP_1 = x$ und $P_1P' = y$ zur Anschauung kommen. Diese Werte x und y sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} \sigma \cos \alpha \quad (24)$$

$$\text{und } \sin y = \sin \sigma \sin \alpha, \operatorname{tang} y = \sin x \operatorname{tang} \alpha \quad (25)$$

Mit x hat man auch $\varphi + x$ und $90^\circ - (\varphi + x)$ die Kathete NP_1 des grossen rechtwinkligen Dreiecks NP_1P' , welches φ' und λ gibt, nämlich:

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\operatorname{tang} y}{\cos(\varphi - \sigma)} \quad (26)$$

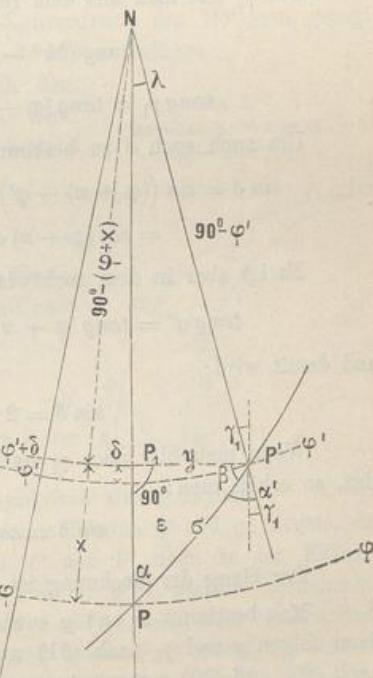
$$\text{und } \begin{cases} \sin \varphi' = \sin(\varphi + x) \cos y \\ \operatorname{tang} \varphi' = \operatorname{tang}(\varphi + x) \cos \lambda \end{cases} \quad (27)$$

Endlich nach dem Sinussatz:

$$\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\cos \varphi'} \quad (28)$$

Diese einfache und naheliegende Auflösung hat Gauss (in Art. 16. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abteilung, Göttingen 1843“) noch verfeinert, erstens

Fig. 3.
Rechtwinklige Coordinaten
 $PP_1 = x$, $P_1P' = y$.



dadurch, dass der kleine Breiten-Unterschied δ zwischen den Punkten P_1 und P' für sich dargestellt wurde, und zweitens dadurch, dass auch die Meridian-Konvergenz γ_1 zwischen P_1 und P' und ausserdem der sphärische Excess ε des rechtwinkligen Dreiecks PP_1P' beigezogen wurde.

Denkt man sich diese drei kleinen Werte δ , γ_1 und ε bestimmt, so ist die Breite bestimmt durch:

$$(90^\circ - \varphi') - (90^\circ - (\varphi + x)) = \delta \\ \varphi' = \varphi + x - \delta \quad (29)$$

ferner für die Azimute:

$$\alpha' - \gamma_1 + \beta = 90^\circ \quad \text{und} \quad \alpha + \beta = 90^\circ + \varepsilon \\ \text{woraus:} \quad \alpha' - \alpha = \gamma_1 - \varepsilon \quad (30)$$

Um den sphärischen Excess ε zu bestimmen, haben wir die schon in § 44. S. 245 benützte Entwicklung:

$$\cot \alpha \cot \beta = \cos \sigma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \cos \alpha \cos \beta = \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \cos(\alpha + \beta) = -\sin \varepsilon = -2 \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \sin \varepsilon = 2 \sin \alpha \frac{\sin x}{\sin \sigma} \sin^2 \frac{\sigma}{2} \\ \sin \varepsilon = \tan \frac{\sigma}{2} \sin x \sin \alpha \quad (31)$$

Für γ_1 hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck NP_1P' :

$$\tan(90^\circ - \gamma_1) = \frac{\tan(90^\circ - (\varphi + x))}{\sin y} \\ \tan \gamma_1 = \tan(\varphi + x) \sin y = \tan(\varphi + x) \sin \sigma \sin \alpha \quad (32)$$

Um auch noch δ zu bestimmen, hat man zunächst nach (29):

$$\sin \delta = \sin((\varphi + x) - \varphi') = \sin(\varphi + x) \cos \varphi' - \cos(\varphi + x) \sin \varphi' \\ = \cos(\varphi + x) \cos \varphi' (\tan(\varphi + x) - \tan \varphi')$$

Es ist aber in dem rechtwinkligen Dreieck NP_1P' :

$$\tan \varphi' = \tan(\varphi + x) \cos \lambda = \tan(\varphi + x) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right)$$

und damit wird:

$$\sin \delta = 2 \sin(\varphi + x) \cos \varphi' \sin^2 \frac{\lambda}{2}$$

Wenn man hier noch γ_1 nach (32) zuzieht und $\cos \varphi' \sin \lambda = \sin y$ berücksichtigt, so erhält man:

$$\sin \delta = \cos(\varphi + x) \tan \frac{\lambda}{2} \tan \gamma_1 \quad (33)$$

Der Gang der Rechnung ist nun folgender:

Man bestimmt x und y sowie auch λ wie im einfachen Fall, nach (24), (25), (26), dann folgen ε und γ_1 nach (31) und (32) und δ nach (33), worauf man φ' und α' nach (29) und (30) zusammensetzen kann.

Die Anwendung auf unser kleines Normal-Beispiel gestaltet sich so:

$$\text{Gegeben } \varphi = 49^\circ 30' 0'' \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,482'' \quad \alpha = 32^\circ 21' 1,291''$$

Nach (24), (25), (26) findet man:

$$x = 1^\circ 0' 15,420'' \quad y = 0^\circ 38' 9,813'' \quad \lambda = 1^\circ 0' 0,000''$$

Die Formeln (31), (32), (33) liefern:

$$\varepsilon = 0^\circ 0' 20,0687'' \quad \gamma_1 = 0^\circ 46' 17,9616'' \quad \delta = 0^\circ 0' 15,4199''$$

und nun setzt man so zusammen:

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 = 0^\circ 46' 17,9616'' & x = 1^\circ 0' 15,420'' \\ \varepsilon = 0^\circ 0' 20,0687'' & \delta = 0^\circ 0' 15,420'' \\ \hline \gamma - \varepsilon = 0^\circ 45' 57,8929'' = \alpha' - \alpha, & x - \delta = 1^\circ 0' 0,000'' \\ \alpha = 32^\circ 21' 1,291'' & \varphi = 49^\circ 30' 0,000'' \\ \hline \alpha' = 33^\circ 6' 58,184'' & \varphi' = 50^\circ 30' 0,000'' \end{array}$$

Der Vorteil dieser Berechnung im Vergleich mit allen früher beschriebenen besteht darin, wenn σ selbst klein ist (was hier immer der Fall ist), dass dann auch alle andern, die Endergebnisse beeinflussenden Grössen $x, y, \gamma_1, \varepsilon$ selbst *klein* sind, und daher aus *sin* oder *tang* sich sehr scharf berechnen lassen.

Man kann durch diese verfeinerten Formeln in Hinsicht auf Rechenschärfe, mit einer gewöhnlichen 7 stelligen Logarithmentafel nahe dasselbe erreichen, wozu man mit den früheren Formeln nahezu 10 stellige Logarithmen braucht.

Bemerkungen zur Meridian-Konvergenz.

Nachdem schon am Schlusse von § 45. S. 256—257 zur Wort-Erklärung und zur sachlichen Begriffsbestimmung der „Meridian-Konvergenz“ das Nötigste gesagt worden ist, können wir noch mit beistehender Fig. 3. einiges zufügen:

Die Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$ ist gleich dem sphärischen Excesse γ des Vierecks $A B P' P$ Fig. 3., denn da dieses Viereck bei A und B rechte Winkel hat, besteht die Gleichung:

$$90^\circ + 90^\circ + (180^\circ - \alpha) + \alpha' - 360^\circ = \gamma$$

d. h. $\alpha' - \alpha = \gamma$ (a)

Bezeichnet man ferner mit ε den sphärischen Excess des Dreiecks $P' P N$, welches bei N den Längen-Unterschied λ enthält, so hat man:

$$\lambda + \alpha + (180^\circ - \alpha') - 180^\circ = \varepsilon$$

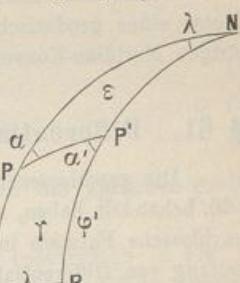
d. h. $\lambda = (\alpha' - \alpha) + \varepsilon$ oder $\alpha' - \alpha = \lambda - \varepsilon$ (b)

Das letzte ist auch unmittelbar klar, indem λ der Excess des ganzen Dreiecks $A B N$ sein muss.

Diese beiden Gleichungen (a) und (b) sind sphärisch streng richtig.

Wenn die beiden Punkte P und P' auf gleichen Breiten φ und φ' liegen, so ist der Winkel, den die Meridian-Tangenten von P und P' oben in der Erdaxe einschliessen, genau gleich $\lambda \sin \varphi$, wie man aus Fig. 1. § 61. alsbald entnehmen kann; und das kann man auch so aussprechen, dass $\lambda \sin \varphi$ gleich dem sphärischen Excess des Vierecks $A B P' P$ ist, wenn $\varphi = \varphi'$ und wenn $P P'$ nicht als Grosskreisbogen der Kugel, sondern als Parallelkreisbogen, parallel dem Äquator $A B$ auf-

Fig. 3.
Meridian-Konvergenz.
 $\alpha' - \alpha = \gamma$.



gefasst wird. Das Viereck hat dann 4 Winkel, welche alle $= 90^\circ$ sind, aber der Parallelkreisbogen PP' hat dann eine geodätische Krümmung $= \lambda \sin \varphi$, welche bei der Kegelabwicklung sich auch in der Ebene darstellen lässt.

Im gewöhnlichen Sinne ist dieses $\lambda \sin \varphi$ aber durchaus nicht die genaue Meridian-Konvergenz $\alpha' - \alpha$ für zwei Punkte unter gleichen Breiten $\varphi' = \varphi$, denn dazu müsste PP' ein Grosskreisbogen sein.

Was in diesem Falle $\alpha' - \alpha$ wird, das lässt sich aus der Gleichung (5) S. 339 leicht entnehmen, diese giebt für $\varphi' = \varphi$ den Wert

$$\tan \frac{\alpha' - \alpha}{2} = \tan \frac{\lambda}{2} \sin \varphi \quad (c)$$

Das kann man auch unmittelbar begründen, wenn man in Fig. 1. S. 338 $\varphi' = \varphi$ nimmt und bei N den Halbierungsbogen für $\frac{\lambda}{2}$ rechtwinklig auf PP' zieht.

Die Gleichung (c) giebt allerdings in erster Näherung $\alpha' - \alpha = \lambda \sin \varphi$, wie immer in erster Näherung, aber streng gilt dieses $\lambda \sin \varphi$ nur für zwei Meridian-tangentialen unter den gleichen Breiten $\varphi' = \varphi$.

Um diese Begriffe auch sofort für die späteren Berechnungen mit der geodätischen Linie festzustellen, müssen wir nun im Anschluss an Fig. 1. sagen: Unter Meridian-Konvergenz zwischen zwei Punkten P und P' verstehen wir die Differenz der Azimute α und α' , welche der verbindenden geodätischen Linie PP' in P und P' in dem Sinne von Fig. 3. zukommen.

Indessen eine absolut im Sprachgebrauch der Geodäsie feststehende Definition ist auch dieses nicht; wir werden später finden, dass Gauss in seiner konformen Projektion der Hannoverschen Landesaufnahme mit dem Worte Meridian-Konvergenz wieder etwas anderes bezeichnet hat, was zwar in erster Näherung mit dem Gesagten übereinstimmt, aber in aller Strenge gar nicht ohne jene besondere Projektionsart definiert werden kann.

Wenn nichts Besonderes bemerkt ist, werden wir das Wort Meridian-Konvergenz in dem Sinne von $\alpha' - \alpha$ nach Fig. 3. S. 345 für PP' als geodätische Linie anwenden.

Damit kann man auch den Satz bilden, dass der sphärische bzw. sphäroidische Excess eines geodätischen Dreiecks gleich der algebraischen Summe der drei zugehörigen Meridian-Konvergenzen ist.

§ 61. Differential-Gleichungen des sphärischen Polar-Dreiecks.

Die geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie, welche wir im vorigen § 60. behandelt haben, erfüllen nicht alle Bedürfnisse; es ist in vielen Fällen nützlich, geschlossene Formeln in Reihen aufzulösen, und der erste Schritt hiezu ist die Aufstellung von Differential-Formeln.

Wir betrachten in Fig. 1. S. 347 das schon früher benutzte sphärische Dreieck $PP'N$, jedoch nehmen wir nun an, dass die Entfernung PP' der beiden betrachteten Punkte sehr klein $= ds$ werde, wodurch auch alle anderen Differenzen $\varphi' - \varphi$, $\alpha' - \alpha$, λ klein werden, was wir in Fig. 1. und Fig. 2. durch Differential-Zeichen $d\varphi$, $d\alpha$ u. s. w. angedeutet haben.

Wir betrachten in Fig. 1. eine Kugel mit zwei Punkten P und P' , deren Entfernung $PP' = ds$ klein ist. Die Breiten dieser Punkte seien bzw. φ und $\varphi + d\varphi$, so dass die kleine Breiten-Differenz $d\varphi$ zwischen den Parallelkreisen von P und P'

erscheint. Durch die beiden Meridiane NP und NP' kommt auch der Längenunterschied $d\lambda$ zum Ausdruck und werden die Azimute des Bogens ds in P und in P' bestimmt, diese Azimute seien bzw. α und $\alpha + d\alpha$.

Fig. 1.

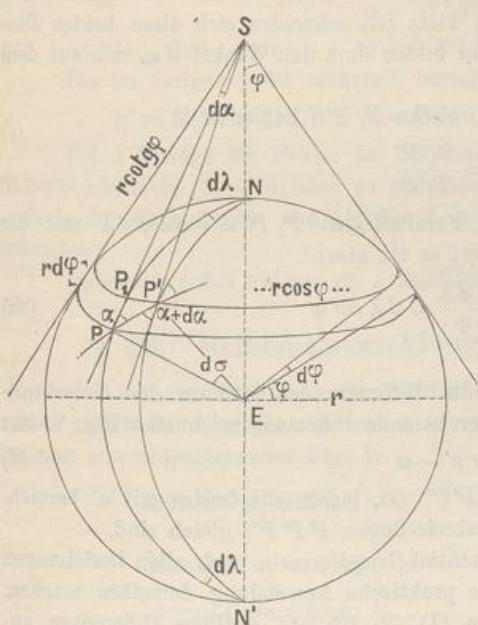
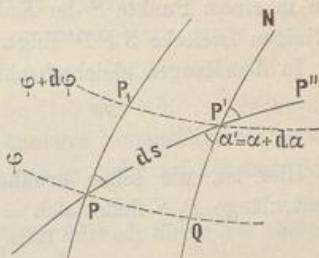


Fig. 2
Besonderer Teil von Fig. 1.
 $PP' = ds = r d\sigma$



Man kann nun auf die beiden Punkte P und P' mit ihren Breiten φ , $\varphi + d\varphi$, Azimuten α , $\alpha + d\alpha$ und ihrer Entfernung $d\sigma$ und dem Längenunterschied $d\lambda$ die allgemeinen Gauss'schen Formeln (3) § 60. S. 339 anwenden; und wenn man dabei, im Sinne der Differential-Rechnung, $\sin \frac{d\sigma}{2} = \frac{d\sigma}{2}$, $\cos \frac{d\sigma}{2} = 1$ setzt u. s. w., so geben die drei ersten jener Gleichungen (3) § 60. S. 339 folgendes:

$$d\sigma \sin \alpha = d\lambda \cos \varphi \quad (1)$$

$$d\sigma \cos \alpha = d\varphi \quad (2)$$

$$d\alpha = d\lambda \sin \varphi \quad (3)$$

Diese sind die sehr wichtigen Differential-Gleichungen des sphärisch-geodätischen Polar-Dreiecks.

Man kann diese Gleichungen (1), (2), (3) auch leicht geometrisch in Fig. 1. nachweisen, wozu zuerst das kleine, als rechtwinklig eben zu behandelnde Dreieck P_1PP' , welches in Fig. 2. besonders herausgezeichnet ist, dient. Dasselbe giebt mit $r d\sigma = ds$:

$$ds \sin \alpha = P_1P' \quad (1a)$$

$$ds \cos \alpha = P_1P \quad (2a)$$

Diese Gleichungen sind entsprechend (1) und (2), wozu für (2a) nur einzusehen ist, dass PP_1 ein Meridianbogen $= r d\varphi$ für den Halbmesser r oder kurz $= d\varphi$ für den Halbmesser 1 ist. Sodann für (1a) hat man den Parallelkreis-Halbmesser $p = r \cos \varphi$

zu betrachten (bzw. $= r \cos(\varphi + d\varphi)$, welcher mit $r = 1$ und für den Längen-Unterschied $d\lambda$ den Parallelkreis-Bogen $P_1 P' = d\lambda \cos \varphi$ giebt.

Während die zwei ersten Gleichungen (1) und (2) sich geradezu aus dem kleinen rechtwinkligen Dreieck PP_1P' geometrisch herleiten lassen, ist zur geometrischen Begründung der dritten Gleichung (3) die Betrachtung der Meridian-Tangenten PS und $P'S$ nötig. Insofern PP_1 unendlich klein ist, schneiden sich diese beiden Tangenten in einem Punkte S der Erdaxe und bilden dort den Winkel $d\alpha$, wie aus dem geradlinigen Dreiecke SPP' folgt.

In dem langen gleichschenkligen Dreiecke $P_1 P' S$ hat man

$$d\alpha = \frac{P_1 P'}{P_1 S}$$

Hier ist, wie schon erwähnt, der Parallelbogen $P_1 P' = r \cos \varphi d\lambda$ und die Tangentenlänge $P_1 S$ findet sich $= r \cot \varphi$; es ist also:

$$d\alpha = \frac{r \cos \varphi d\lambda}{r \cot \varphi} = d\lambda \sin \varphi \quad (3a)$$

womit die Gleichung (3) begründet ist.

Die Meridian-Konvergenz $d\alpha$ ist die Differenz der Azimute des Grosskreis-Bogens PP' in P und in P' , d. h. in der besonders herausgezeichneten Fig. 2. ist:

$$d\alpha = \alpha' - \alpha \quad (4)$$

wobei α' sowohl $= PP'Q$ als auch $= NP'P''$ ist, indem die *beiden* mit α' bezeichneten Schnittwinkel in P' für einen Grosskreis-Bogen $PP'P''$ gleich sind.

Nachdem wir so die wichtigen Differential-Grundformeln nach allen Beziehungen erörtert haben, wollen wir auch noch eine praktische Anwendung derselben machen.

Wenn man die Differential-Formeln (1), (2), (3) auf endliche Differenzen anwendet und dabei statt der allgemeinen Werte φ und α die Mittelwerte φ_0 und α_0 setzt, so hat man aus (1), (2), (3):

$$\frac{\varphi + \varphi'}{2} = \varphi_0 \quad \sigma \sin \alpha_0 = \lambda \cos \varphi_0 \quad (5)$$

$$\frac{\alpha + \alpha'}{2} = \alpha_0 \quad \sigma \cos \alpha_0 = \varphi' - \varphi \quad (6)$$

$$\alpha' - \alpha = \lambda \sin \varphi_0 \quad (7)$$

Dieses sind wieder dieselben Gleichungen wie (2)–(3) § 56. S. 312.

Aus (5) und (6) findet man:

$$\tan \alpha_0 = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\varphi' - \varphi} \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{\lambda \cos \varphi_0}{\sin \alpha_0} \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{\varphi' - \varphi}{\cos \alpha_0} \quad (9)$$

Man kann auch unmittelbar σ durch Quadrieren und Addieren von (5) und (6) finden:

$$\sigma = \sqrt{(\varphi' - \varphi)^2 + (\lambda \cos \alpha_0)^2} \quad (10)$$

Nachdem $\alpha' + \alpha = 2\alpha_0$ aus (8) und $(\alpha' - \alpha)$ aus (7) berechnet sind, hat man auch α' und α .

Wir wollen diese Näherungs-Formeln auf unser kleines sphärisches Normal-Beispiel anwenden:

$$\begin{aligned} \text{Gegeben} \quad \varphi &= 49^\circ 30' \quad \varphi' = 50^\circ 30' \quad \lambda = 1^\circ 0' = 3600'' \\ \varphi_0 &= 50^\circ 0' \quad \varphi' - \varphi = 1^\circ 0' = 3600''. \end{aligned}$$

Aus (8) findet man: $\alpha_0 = 32^\circ 43' 56,67''$ (11)

Aus (7) findet man: $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,88''$ (12)

$$\alpha' = 33^\circ 6' 55,55'' \quad (13)$$

$$\alpha = 32^\circ 20' 57,79'' \quad (14)$$

Aus (10) findet man: $\sigma = 4279,57'' = 1^\circ 11' 19,57''$ (15)

Die im vorigen § 60. mehrfach berechneten genaueren Werte sind:

$$\alpha' = 33^\circ 6' 59,19'' , \alpha = 32^\circ 21' 1,29'' , \sigma = 1^\circ 11' 19,48'' \quad (16)$$

Bei σ beträgt der Fehler des Näherungswertes (15) nur 0,09''. Die bequemen Näherungsformeln (5)–(10) sind zu manchen Berechnungen unmittelbar zu brauchen, z. B. in der Kartographie und überhaupt in Fällen, wo es nicht auf äußerste Schärfe ankommt.

Indessen werden wir nun zur Aufstellung genauerer Formeln dieser Art übergehen.

§ 62. Reihen-Entwicklungen mit der Mittelbreite.

Wir nehmen die Gaußschen Gleichungen (3) § 60. S. 339 nochmals vor; wir wollen jedoch die Bezeichnungen nun ein wenig anders wählen, nämlich nach An- deutung von untenstehender Fig. 1.

$$\text{Breiten: } \varphi_1 \text{ und } \varphi_2 , \quad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi , \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \beta \quad (1)$$

$$\text{Azimute: } \alpha_1 \text{ und } \alpha_2 , \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \alpha , \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \gamma \quad (2)$$

$$\text{Längen-Unterschied: } \lambda \quad (3)$$

$$\text{Verbindungs-Bogen: } \sigma \quad (4)$$

Damit werden die Gleichungen (3) § 60. S. 339:

Fig. 1.

$$\sin \frac{\sigma}{2} \sin \alpha = \sin \frac{\lambda}{2} \cos \varphi \quad (5)$$

$$\sin \frac{\sigma}{2} \cos \alpha = \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \quad (6)$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\lambda}{2} \sin \varphi \quad (7)$$

$$\cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\beta}{2} \quad (8)$$

Wir nehmen zuerst (5) und (6), welche entwickelt geben:

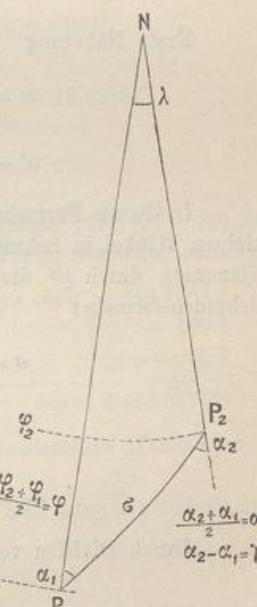
$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} \right) \sin \alpha = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{48} \right) \cos \varphi$$

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} \right) \cos \alpha = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48} \right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} \right)$$

Kürzer geschrieben:

$$\sigma \sin \alpha \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} \right) = \lambda \cos \varphi \left(1 - \frac{\lambda^2}{24} \right) \quad (9)$$

$$\sigma \cos \alpha \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} \right) = \beta \left(1 - \frac{\beta^2}{24} \right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} \right) \quad (10)$$



Hier kann man in den Korrektionsgliedern als erste Näherung setzen:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad (11)$$

Wenn man dieses in (9) und (10) links einsetzt, und dann nach $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ auflöst und ordnet, so findet man:

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{24} - \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24} \right) \quad (12)$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{2} \right) \quad (13)$$

Durch Division dieser zwei Gleichungen findet man $\tan \alpha$, und dann σ aus jeder einzeln. Man kann jedoch auch (12) und (13) quadrieren und addieren, und damit eine unmittelbare Formel für σ^2 finden, nämlich:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{12} (-3\beta^2 \lambda^2 + 2\beta^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \quad (14)$$

$$\text{oder } \sigma = \sqrt{\beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi} \left(1 - \frac{\beta^2 \lambda^2}{8 \sigma^2} + \frac{\beta^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi}{12 \sigma^2} - \frac{\lambda^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{24 \sigma^2} \right) \quad (14a)$$

Man kann diese Formel auch leicht aus (9) § 60. S. 348 herleiten.

Um auch die Meridian-Konvergenz zu erhalten, bilden wir zunächst aus (7) und (8) durch Division:

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \tan \frac{\lambda}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

Dieses ebenso wie das frühere entwickelt, giebt:

$$\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^3}{24} = \sin \varphi \frac{\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^3}{24}}{1 - \frac{\beta^2}{8}} = \frac{\sin \varphi}{2} \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{12} \right) \left(1 + \frac{\beta^2}{8} \right)$$

Erste Näherung $\gamma = \lambda \sin \varphi$, also $\gamma^3 = \lambda^3 \sin^3 \varphi + \dots$

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{\lambda^3 \sin^3 \varphi}{12} + \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2}{12} + \frac{\beta^2}{8} \right) \\ \alpha' - \alpha &= \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8} + \frac{\lambda^2}{12} \cos^2 \varphi \right) \end{aligned} \quad (15)$$

In diesen Formeln ist nach analytischem Masse gerechnet, und wenn man die kleinen Winkel in Sekunden haben will, muss man alle quadratischen Glieder in den Klammern durch ϱ^2 dividieren. Dieses giebt für (12), (13) und (15) die folgenden Gebrauchsformeln:

$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{24 \varrho^2} - \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24 \varrho^2} \right) \quad (16)$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left(1 - \frac{\lambda^2}{8 \varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{24 \varrho^2} \right) \quad (17)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma = \lambda \sin \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8 \varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{12 \varrho^2} \right) \quad (18)$$

Durch Division von (16) und (17) findet man auch:

$$\tan \alpha = \frac{\lambda \cos \varphi}{\beta} \left(1 + \frac{\beta^2}{24 \varrho^2} + \frac{\lambda^2}{12 \varrho^2} \right) \quad (19)$$

Die konstanten Coëfficienten zu den vorstehenden Formeln sind:

$$\log \frac{1}{8\varrho^2} = 8.468\ 0597 \quad \log \frac{1}{12\varrho^2} = 8.291\ 9685 \quad \log \frac{1}{24\varrho^2} = 7.990\ 9385 \quad (20)$$

Man kann die vorstehenden Formeln (17), (18), (19) auch logarithmisch anwenden, nämlich in dieser Form:

$$\log \sigma \sin \alpha = \log \lambda \cos \varphi + \frac{\mu}{24\varrho^2} \beta^2 - \frac{\mu}{24\varrho^2} \lambda^2 \sin^2 \varphi \quad (21)$$

$$\log \sigma \cos \alpha = \log \beta - \frac{\mu}{8\varrho^2} \lambda^2 + \frac{\mu}{24\varrho^2} \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad (22)$$

$$\log \gamma = \log \lambda \sin \varphi + \frac{\mu}{8\varrho^2} \lambda^2 + \frac{\mu}{12\varrho^2} \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad (23)$$

Man braucht dann statt (20) folgende Konstanten für 7. Logar.-Stelle:

$$\log \frac{\mu}{8\varrho^2} = 5.105\ 8441 \quad \log \frac{\mu}{12\varrho^2} = 4.929\ 7528 \quad \log \frac{\mu}{24\varrho^2} = 4.628\ 7228 \quad (24)$$

Wir wollen dieses Rechen-Verfahren auf unser kleines Normalbeispiel (1) § 60. S. 338 anwenden und zwar zuerst mit den Formeln (16), (17), (18).

$$\begin{array}{lll} \text{Gegeben} & \varphi_1 = 49^\circ 30' & \varphi_2 = 50^\circ 30' \\ \text{also} & \varphi = 50^\circ 0' & \beta = 1^\circ 0' = 3600'' \quad \lambda = 3600'' \end{array}$$

Die Rechnung nach (16), (17), (18) gibt:

$$\begin{array}{lll} \lambda \cos \varphi = 2314,0352'' & \beta = 3600,0000'' & \lambda \sin \varphi = 2757,7600'' \\ + 0,0294 & - 0,1371 & + 0,1050 \\ - 0,0172 & + 0,0189 & + 0,0289 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \sigma \sin \alpha = 2314,0474'' & \sigma \cos \alpha = 3599,8818'' & \gamma = 2757,8939'' \\ \hline & & \gamma = 0^\circ 45' 57,8939'' \end{array}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = 32^\circ 44' 0,2385'' \quad \sigma = 4279,4819''$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0^\circ 22' 58,9470'' \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,4819''$$

$$\alpha_2 = 33^\circ 6' 59,1855''$$

$$\alpha_1 = 32^\circ 21' 1,2915''$$

Ausserdem kann man auch die logarithmischen Formeln (21), (22), (23) anwenden, wobei man dasselbe, wie soeben, nur in anderer Form, bekommt, nämlich:

$\log \lambda \cos \varphi$	3.364 3700·0	$\log \beta$	3.556 3025·0	$\log \lambda \sin \varphi$	3.440 5564·7
	+ 55·1		- 165·4		+ 165·4
	- 32·3		+ 22·8		+ 45·5
$\log \sigma \sin \alpha$	3.364 3722·8	$\log \sigma \cos \alpha$	3.556 2882·4	$\log \gamma$	3.440 5775·6

Wenn man damit weiter rechnet, so bekommt man dieselben Werte α , σ , γ u. s. w. wie vorhin.

Wenn man etwa σ selbst nicht braucht, so rechnet man $\tan \alpha$ geradezu aus der Formel (19), welche in unserem Falle gibt:

$$\log \tan \alpha = 9.808\ 0675·0 + 165·4 = 9.808\ 0840·4.$$

Dieses stimmt, wie es sein soll, mit der Differenz von $\log \sigma \sin \alpha$ und $\log \sigma \cos \alpha$.

Wir haben auch noch die Formel (14 a) auf das kleine Normalbeispiel mit $\beta = 1^\circ$, $\lambda = 1^\circ$, $\varphi = 50^\circ$ angewendet und gefunden:

$$\sigma = 4279,5747'' - 0,1153'' - 0,0093'' + 0,0318'' = 4279,4819'' = 1^\circ 11' 19,4819''$$

Man kann auch hier die Korrektionsglieder in logarithmischer Form berechnen.

Umkehrung der Formeln.

Man kann die Formeln (16), (17), (18) nicht bloss zur Bestimmung von σ , α_1 , α_2 bei gegebenem φ_1 , φ_2 , λ anwenden, sondern auch umgekehrt dazu, um bei gegebenen φ_1 , σ , α_1 die fehlenden φ_2 , λ , α_2 zu berechnen. Allerdings geht dieses nur auf indirektem Wege, indem Näherungs-Werte der Unbekannten benutzt und allmählich verbessert werden.

Auch sind dann einige Umformungen von (16), (17), (18) vorzunehmen; wir bilden zuerst durch Division von (16) und (18):

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{\beta^2}{8\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{12\varrho^2} - \frac{\beta^2}{24\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\varrho^2} \right)$$

In den Korrektionsgliedern gilt aber die erste Näherung

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi$$

und damit ergibt das vorstehende:

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{\sigma^2}{12\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\varrho^2} \right) \quad (25)$$

(17) und (16) geben umgestellt:

$$\beta = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{\lambda^2}{8\varrho^2} - \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{24\varrho^2} \right) \quad (26)$$

$$\lambda = \sigma \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{\beta^2}{24\varrho^2} + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{24\varrho^2} \right) \quad (27)$$

Man kann diese Gleichungen auch in logarithmischer Form anwenden, ähnlich wie (21), (22), (23), was wir aber hier nicht mehr besonders schreiben wollen.

Zu einer Zahlen-Anwendung wollen wir von unserem kleinen Normalbeispiel (1) § 60. S. 338 annehmen:

$$\text{Gegeben } \varphi_1 = 49^\circ 30' 0'', \quad \sigma = 1^\circ 11' 19,482'', \quad \alpha_1 = 32^\circ 21' 1,291'' \quad (28)$$

Für φ_2 und λ habe man von irgend wo her, z. B. von einer topographischen Karte, die Näherungswerte:

$$(\varphi_2) = 50^\circ 30' 10'', \quad \lambda = 1^\circ 0' 10'' = 3610'' \quad (29)$$

Nun nimmt man aus φ_1 und (φ_2) den genäherten Mittelwert $(\varphi) = 50^\circ 0' 5''$ und rechnet mit $(\lambda) = 3610''$, erstmals genähert $(\gamma) = (\lambda) \sin (\varphi) = 2765,48'' = 0^\circ 46' 5,48''$; davon die Hälfte zu α_1 nach (28) addiert, ergibt die erste Näherung für α :

$$(\alpha) = 32^\circ 44' 4''.$$

Nun rechnet man mit $(\varphi) = 50^\circ 0' 5''$ und $(\alpha) = 32^\circ 44' 4''$ und mit dem genau gegebenen $\sigma = 4279,482''$ die Hauptglieder der Formeln (25), (26), (27) aus, und erhält:

$$\begin{aligned} (\gamma) &= 2757,93'' & (\beta) &= 3599,76'' & (\lambda) &= 3600,14'' \\ &= 0^\circ 45' 57,93'' \end{aligned} \quad (30)$$

Mit diesem (γ) bildet man ein neues

$$(\alpha) = \alpha_1 + \frac{(\gamma)}{2} = 32^\circ 44' 0,25'' \quad (31)$$

Nun sind die Näherungen (β) und (λ) in (30) jedenfalls vollauf genügend zur Berechnung der Korrektions-Glieder in (25), (26), (27), und für die Haupt-Glieder hat man ausser dem gegebenen σ die bereits sehr gute Näherung (31), weshalb man die Ausrechnung nach (25), (26), (27) bereits fast endgültig machen kann. Wenn hiebei γ und β nicht völlig übereinstimmend erhalten werden mit den in beiden Hauptgliedern $\sigma \sin \alpha \tan \varphi$ und $\sigma \cos \alpha$ benützten Werten γ und β , so muss man die Rechnung mit verbesserten α und φ so lange wiederholen, bis völlige Übereinstimmung stattfindet.

Andere Form der Korrektions-Glieder.

Da in den Haupt-Gliedern nur α und φ , aber nicht λ vorkommt, kann man die allmähliche Verbesserung der Näherungswerte auf diese zwei Elemente, bezw. auf γ und β , beschränken; allerdings bei der ersten Näherung wird man λ nicht entbehren können, weil eine erste Näherung für γ wohl kaum anders als durch $\lambda \sin \varphi$ zu erhalten sein wird; hat man aber einmal eine solche erste Näherung für γ , so führt man diese auch möglichst unmittelbar in die Korrektions-Glieder ein. Dieses geschieht durch die Näherungs-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi, \quad \gamma^2 = \lambda^2 \sin^2 \varphi \\ \text{also auch} \quad \sigma^2 + \gamma^2 &= \beta^2 + \lambda^2 \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (32)$$

Damit schreibt man die Gleichungen (26) und (25) für unseren neuen Zweck so:

$$\beta = \sigma \cos \alpha \left(1 + \frac{\gamma^2}{24\varrho^2} + \frac{\lambda^2}{12\varrho^2} \right) \quad (33)$$

$$\gamma = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left(1 + \frac{\sigma^2}{12\varrho^2} + \frac{\gamma^2}{24\varrho^2} \right) \quad (34)$$

oder auch in logarithmischer Form, ähnlich wie (21), (22), (23).

Diese Gleichungen (33) und (34) geben nun eine indirekte Auflösung für φ_2 und α_2 bezw. für β und γ , ähnlich wie dieses schon bei (25), (26), (27) gezeigt wurde; die dritte Grösse λ kommt bei (33) und (34) nur in einem Korrektions-Gliede vor und wird, nachdem β und γ gefunden sind, endgültig durch die frühere Gleichung (27) bestimmt.

Das in vorstehendem beschriebene indirekte Berechnungs-Verfahren ist sehr genau, dasselbe ist auch (gegen erstes Vermuten) sehr bequem.

Gauss selbst sagt hierüber in Art. 20. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie zweite Abhandlung: „Die Bequemlichkeit dieses Verfahrens wird allerdings erst dann in ihren vollen Grösse fühlbar, wenn man sich die Hilfen des kleinen Mechanismus bei Handhabung derartiger Methoden zu eigen gemacht hat. Ich begnügen mich, hier nur anzudeuten, dass, was wie eine mehrfache Rechnung erscheint, nicht in der Form von mehreren getrennten Rechnungen, sondern wie eine einzige geschrieben werden soll, indem man bei jeder neuen Überarbeitung nur die letzten Ziffern ergänzt oder verbessert. Jedenfalls braucht man immer nur die letzte Rechnung aufzubewahren, und gerade darin besteht ein grosser Vorteil, zumal bei Messungen von bedeutendem Umfang, dass man dann den ganzen wesentlichen Kern der Berechnung für alle Dreiecksseiten im möglichst kleinen Raum und in der übersichtlichsten zu beliebiger Prüfung der Richtigkeit geeigneten Form besitzt.“

Jordan, Handb. d. Vermessungskunde. 4. Aufl. III. Bd.

§ 63. Weiter-Entwicklung bis zur 5. Ordnung.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 349.)

Man kann die vorstehenden Entwicklungen, welche bis zur 3. Ordnung, d. h. bis zu Gliedern β^3, λ^3 u. s. w. gehen, noch um eine Stufe weiter, d. h. bis β^5, λ^5 u. s. w. treiben. Allerdings hat das keinen unmittelbar praktischen Zweck, denn die Formeln werden dadurch so umständlich, dass man vorziehen müsste, nach den strengen geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie zu rechnen; indessen bietet die Entwicklung der Glieder 5. Ordnung das beste Mittel zur Gewinnung eines Urteils über die Grenzen der Anwendung der abgekürzten Formeln, und diese sphärischen Glieder 5. Ordnung werden auch später bei der analogen sphäroidischen Aufgabe von Bedeutung sein.

Wir nehmen nun von den strengen Gauss'schen Gleichungen (5)–(8) § 62. S. 349 nochmals zunächst die zwei ersten vor:

$$\sin \frac{\sigma}{2} \sin \alpha = \sin \frac{\lambda}{2} \cos \varphi \quad (1)$$

$$\sin \frac{\sigma}{2} \cos \alpha = \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

Diese entwickeln wir nun bis zur 5. Ordnung (vgl. S. 172):

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} + \frac{\sigma^5}{3840} \right) \sin \alpha = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^3}{48} + \frac{\lambda^5}{3840} \right) \cos \varphi \quad (3)$$

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48} + \frac{\sigma^5}{3840} \right) \cos \alpha = \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48} + \frac{\beta^5}{3840} \right) \left(1 - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^4}{384} \right) \quad (4)$$

Um diese Gleichungen nach $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ aufzulösen, denken wir uns links abgesondert:

$$\frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{24} + \frac{\sigma^4}{1920} \right) = 1 - x, \quad \text{d. h. } x = \frac{\sigma^2}{24} - \frac{\sigma^4}{1920}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 = 1 + \frac{\sigma^2}{24} + \frac{7\sigma^4}{5760} \quad (5)$$

Hier ist nach (14) § 62. S. 350:

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi - \frac{\beta^2 \lambda^2}{4} - \frac{\lambda^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{12} + \frac{\beta^2 \lambda^2}{6} \cos^2 \varphi \quad (6)$$

$$\text{also} \quad \sigma^4 = \beta^4 + \lambda^4 \cos^4 \varphi + 2 \beta^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi \quad (7)$$

Wenn man diese (6) und (7) in (5) einsetzt, und damit die rechten Seiten von (3) und (4) multipliziert, so erhält man die gewünschten Ausdrücke für $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$. Ebenso kann man auch die Reihe für die Meridian-Konvergenz γ finden, und durch $\sigma^2 \sin^2 \alpha + \sigma^2 \cos^2 \alpha$ hat man auch eine Reihe für σ^2 unmittelbar.

Da der Weg aller dieser Entwicklungen genügend gezeigt ist, schreiben wir sofort die Ergebnisse, und zwar zunächst:

$$\begin{aligned} \sigma \sin \alpha &= \lambda \cos \varphi \left\{ 1 + \frac{1}{24} (\beta^2 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5760} (7\beta^4 - 70\beta^2\lambda^2 + 3\lambda^4 + 54\beta^2\lambda^2 \cos^2 \varphi + 7\lambda^4 \cos^4 \varphi - 10\lambda^4 \cos^2 \varphi - 20\lambda^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

Ehe wir auch die Formeln für $\sigma \cos \alpha$ u. s. w. anschreiben, wollen wir eine bestimmte Ordnung der Glieder einführen und zur Abkürzung zwei neue Zeichen schreiben. Die Faktoren $\cos^2 \varphi$ und $\sin^2 \varphi$ kann man jedenfalls alle in $\cos^2 \varphi$ ausdrücken, und da dieselben immer in Verbindung mit λ^2 auftreten, stellen wir überall gleiche Potenzen von λ^2 und von $\cos^2 \varphi$ hervor, indem z. B. gesetzt wird:

$$\lambda^4 \cos^2 \varphi = \lambda^4 \cos^4 \varphi (1 + \tan^2 \varphi) \quad (9)$$

Der Parallel-Kreisbogen $\lambda \cos \varphi$ werde besonders bezeichnet, indem wir setzen:

$$\lambda \cos \varphi = p \quad \text{und} \quad \tan \varphi = t \quad (10)$$

Damit bekommen wir eine neue Schreibung der ersten Formel (8), und fügen sofort auch die übrigen Formeln dieser Art bei:

$$\sigma \sin \alpha = p \left\{ 1 + \frac{\beta^2 - p^2 t^2}{24} + \frac{7 \beta^4 - 2 \beta^2 p^2 (8 + 35 t^2) - 3 p^4 (8 t^2 - t^4)}{5760} \right\} \quad (11)$$

$$\sigma \cos \alpha = \beta \left\{ 1 - \frac{p^2 (2 + 3 t^2)}{24} + \frac{-4 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) + p^4 (-8 - 20 t^2 + 15 t^4)}{5760} \right\} \quad (12)$$

$$\gamma = p t \left\{ 1 + \frac{3 \beta^2 + 2 p^2}{24} + \frac{75 \beta^4 + 60 \beta^2 p^2 (1 - 2 t^2) + 24 p^4 (2 - t^2)}{5760} \right\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = & (\beta^2 + p^2) - \frac{\beta^2 p^2 (1 + 3 t^2) + p^4 t^2}{12} \\ & - \frac{2 \beta^4 p^2 (1 + 15 t^2) + 2 \beta^2 p^4 (1 + 10 t^2 - 15 t^4) + p^6 (5 + 12 t^2 - 4 t^4)}{2440} \end{aligned} \quad (14)$$

Die Formeln (11) und (12) für $\sigma \sin \alpha$ und $\sigma \cos \alpha$ wird man lieber in logarithmischer Form haben wollen, man kann daher dieselben entwickeln nach der Formel:

$$\log (1 + x) = \mu \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \quad (15)$$

$$\log \left(1 + \frac{A^2}{24} + \frac{B^4}{5760} \right) = \mu \left(\frac{A^2}{24} + \frac{1}{2} \frac{B^4 - 5 A^4}{2880} \right)$$

Auf diese Weise bekommt man, zugleich mit Zusetzung der nötigen ρ , folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \log \sigma \sin \alpha = & \log p + \frac{\mu}{24 \rho^2} (\beta^2 - p^2 t^2) \\ & + \frac{\mu}{2880 \rho^4} \left(\beta^4 - 2 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) - p^4 (12 t^2 + t^4) \right) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \log \sigma \cos \alpha = & \log \beta - \frac{\mu}{24 \rho^2} p^2 (2 + 3 t^2) \\ & - \frac{\mu}{2880 \rho^4} \left(2 \beta^2 p^2 (4 + 15 t^2) + p^4 (14 + 40 t^2 + 15 t^4) \right) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (17)$$

Hiebei hat man die Konstanten für β und p in Sekunden und für Einheiten der 7. Logarithmen-Stelle:

$$\log \frac{\mu}{24 \rho^2} = 4.6287228 \quad \log \frac{\mu}{2880 \rho^4} = 1.920691-10 \quad (18)$$

Die höheren Glieder in (16) und (17) kann man in dieser Form schreiben:

$$\mathcal{A}(\log \sigma \sin \alpha) = I \beta^4 - II \beta^2 \lambda^2 - III \lambda^4 \quad (5. \text{ Ordnung}) \quad (19)$$

$$\mathcal{A}(\log \sigma \cos \alpha) = - IV \beta^2 \lambda^2 - V \lambda^4 \quad (5. \text{ Ordnung}) \quad (20)$$

Die Coefficienten I, II u. s. w. haben wir für verschiedene Breiten φ ausgerechnet, wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist, wobei jedoch β und λ nicht wie bei (18) in Sekunden, sondern für (19) und (20) in Graden zu nehmen sind.

φ	$\log I$	$\log II$	$\log III$	$\log IV$	$\log V$
40°	6.1459	7.3786	6.6345	7.3786	7.3784
45°	6.1459	7.4247	6.6578	7.4247	7.3827
50°	6.1459	7.4663	6.6583	7.4663	7.3828
55°	6.1459	7.5031	6.6371	7.5031	7.3789
60°	6.1459	7.5351	6.5950	7.5351	7.3716

(21)

Ferner haben wir für eine Breite, $\varphi = 50^\circ$, die Glieder ausgerechnet, indem der Reihe nach β und $\lambda = 2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ$ gesetzt wurde. Die Ergebnisse dieser Ausrechnung zeigen folgende zwei Tabellen:

$\Delta(\log \sigma \sin \alpha)$, nach Formel (19), 5. Ordnung, für $\varphi = 50^\circ$.

$\beta =$	$\lambda = 2^\circ$	$\lambda = 4^\circ$	$\lambda = 6^\circ$	$\lambda = 8^\circ$	$\lambda = 10^\circ$
2°	- 0.053	- 0.304	- 1.012	- 2.615	- 5.724
4°	- 0.157	- 0.831	- 2.239	- 4.826	- 9.198
6°	- 0.247	- 1.621	- 4.201	- 8.426	- 14.902
8°	- 0.184	- 2.540	- 6.759	- 13.279	- 22.708
10°	+ 0.221	- 3.399	- 9.726	- 19.196	- 32.416

(22)

$\Delta(\log \sigma \cos \alpha)$, nach Formel (20), 5. Ordnung, für $\varphi = 50^\circ$.

$\beta =$	$\lambda = 2^\circ$	$\lambda = 4^\circ$	$\lambda = 6^\circ$	$\lambda = 8^\circ$	$\lambda = 10^\circ$
2°	- 0.085	- 0.805	- 3.551	- 10.640	- 25.314
4°	- 0.225	- 1.368	- 4.814	- 12.887	- 28.824
6°	- 0.460	- 2.903	- 6.921	- 16.632	- 34.677
8°	- 0.789	- 3.614	- 9.871	- 21.877	- 42.871
10°	- 1.210	- 5.299	- 13.664	- 28.620	- 53.405

(23)

In gleicher Weise haben wir auch die Formel (13) für die Meridian-Konvergenz behandelt; es fand sich:

$$\Delta(\gamma) = VI\lambda\beta^4 - VII\lambda^3\beta^2 + VIII\lambda^5 \quad (24)$$

wobei die Coefficienten folgende Werte haben:

φ	$\log VI$	$\log VII$	$\log VIII$
40°	4.4465	3.7291	3.6012
45°	4.4880	4.0901	4.3556
50°	4.5227	4.3068	3.0283
55°	4.5518	4.4606	1.6891 _n
60°	4.7560	4.5963	2.8772 _n

(25)

Insbesondere ist, für $\varphi = 50^\circ$, hiernach folgendes berechnet:

Korrektion 5. Ordnung für Meridian-Konvergenz nach Formel (13) für $\varphi = 50^\circ$.

$\beta =$	$\lambda = 2^\circ$	$\lambda = 4^\circ$	$\lambda = 6^\circ$	$\lambda = 8^\circ$	$\lambda = 10^\circ$
2°	0.0000''	- 0.0002''	- 0.0007''	- 0.0003''	+ 0.0030''
4°	+ 0.0014''	+ 0.0014''	- 0.0011''	- 0.0063''	- 0.0133''
6°	+ 0.0080''	+ 0.0127''	+ 0.0110''	+ 0.0006''	- 0.0192''
8°	+ 0.0263''	+ 0.0464''	+ 0.0547''	+ 0.0463''	+ 0.0174''
10°	+ 0.0650''	+ 0.1204''	+ 0.1569''	+ 0.1663''	+ 0.1411''

(26)

§ 64. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von σ .

Die sehr wichtigen Reihen, welche $\varphi' - \varphi$, $\alpha' - \alpha$ und λ in steigenden Potenzen der Entfernung σ ausdrücken, kann man auf mancherlei Arten entwickeln.

Wir wollen zuerst daran erinnern, dass bei gegebenem φ , α und σ die drei anderen Werte φ' , α' und λ sich durch geschlossene Formeln der sphärischen Trigonometrie angeben lassen, die wir schon in § 60. in (16)–(18) S. 342 angegeben haben. Jene Formeln kann man geradezu in Reihen entwickeln, wie bis zu σ^3 einschliesslich in unserer vorigen 3. Auflage 1890, in § 59. gemacht ist; wir wollen aber hier davon absehen und lieber gleich zu der Entwicklung nach dem Maclaurin schen Satze übergehen, welche beliebig weit ausgedehnt werden kann.

Die Anwendung dieses Satzes auf unseren Fall giebt bis zur 6ten Ordnung:

$$\varphi' - \varphi = \frac{d\varphi}{d\sigma} \sigma + \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} \frac{\sigma^3}{6} + \frac{d^4\varphi}{d\sigma^4} \frac{\sigma^4}{24} + \frac{d^5\varphi}{d\sigma^5} \frac{\sigma^5}{120} + \frac{d^6\varphi}{d\sigma^6} \frac{\sigma^6}{720} \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{d\lambda}{d\sigma} \sigma + \frac{d^2\lambda}{d\sigma^2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3\lambda}{d\sigma^3} \frac{\sigma^3}{6} + \frac{d^4\lambda}{d\sigma^4} \frac{\sigma^4}{24} + \frac{d^5\lambda}{d\sigma^5} \frac{\sigma^5}{120} + \frac{d^6\lambda}{d\sigma^6} \frac{\sigma^6}{720} \quad (2)$$

$$\alpha' - \alpha = \frac{d\alpha}{d\sigma} \sigma + \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3\alpha}{d\sigma^3} \frac{\sigma^3}{6} + \frac{d^4\alpha}{d\sigma^4} \frac{\sigma^4}{24} + \frac{d^5\alpha}{d\sigma^5} \frac{\sigma^5}{120} + \frac{d^6\alpha}{d\sigma^6} \frac{\sigma^6}{720} \quad (3)$$

Nach Ausführung der Differentiierungen ist in den erhaltenen Differential-Quotienten $\frac{d\varphi}{d\sigma}$, $\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}$ u. s. w. der Wert $\varphi' - \varphi = 0$ zu setzen, d. h. die Differential-

Quotienten sind für den Ausgangs-Wert φ und ebenso für den Ausgangs-Wert α auszurechnen.

Die ersten Differential-Quotienten erhalten wir aus (1), (2), (3) § 61. S. 347, nämlich in der für uns geeigneten Form:

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \cos \alpha \quad (4)$$

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \quad (5)$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \sin \alpha \tan \varphi \quad (6)$$

Nun leiten wir (4) weiter ab, und finden, mit Zuziehung von (6):

$$\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2} = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{d\sigma} = -\sin^2 \alpha \tan \varphi \quad (7)$$

Dieses nochmals abgeleitet giebt:

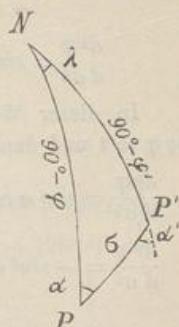
$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{d\alpha}{d\sigma} \tan \varphi - \sin^2 \alpha (1 + \tan^2 \varphi) \frac{d\varphi}{d\sigma}$$

also mit Rücksicht auf (6) und (4):

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \tan^2 \varphi - \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + \tan^2 \varphi)$$

$$\frac{d^3\varphi}{d\sigma^3} = -\sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + 3 \tan^2 \varphi) \quad (8)$$

Fig. 1.



Dieses wird abermals differentiiert:

$$\frac{d^4 \varphi}{d \sigma^4} = (-2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha) \sin \alpha \tan \varphi (1 + 3 \tan^2 \varphi) \quad (9)$$

$$- \sin^2 \alpha \cos \alpha 6 t (1 + t^2) \cos \alpha$$

$$\frac{d^4 \varphi}{d \sigma^4} = \sin^4 \alpha \tan \varphi (1 + 3 \tan^2 \varphi) - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tan \varphi (2 + 3 \tan^2 \varphi) \quad (10)$$

In dieser Weise kann man fortfahren, wir schreiben dabei wie gewöhnlich $\tan \varphi = t$ und damit wird:

$$\frac{d^5 \varphi}{d \sigma^5} = \sin^4 \alpha \cos \alpha (1 + 30 t^2 + 45 t^4) - 4 \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha (2 + 15 t^2 + 15 t^4) \quad (11)$$

$$\frac{d^6 \varphi}{d \sigma^6} = -\sin^6 \alpha t (1 + 30 t^2 + 45 t^4) + 4 \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha t (22 + 135 t^2 + 135 t^4) \quad (12)$$

$$- 8 \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha t (17 + 60 t^2 + 45 t^4)$$

Zu den Ableitungen von λ übergehend, haben wir nach (5):

$$\frac{d \lambda}{d \sigma} = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \lambda}{d \sigma^2} = \frac{\cos \alpha d \alpha}{\cos \varphi d s} + \sin \alpha \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{d \varphi}{d s} \quad (14)$$

also mit Berücksichtigung von (4) und (6):

$$\frac{d^2 \lambda}{d \sigma^2} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi + \sin \alpha \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cos \alpha$$

$$\frac{d^2 \lambda}{d \sigma^2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\tan \varphi}{\cos \varphi} = 2 \sin \alpha \cos \alpha \tan \varphi \sec \varphi \quad (15)$$

Da man bald bemerkt, dass der Nenner $\cos \varphi$, oder der Faktor $\sec \varphi$ sich in allen Gliedern der Entwicklung von λ einstellt, und dass die Potenzen von $\tan \varphi$ sich wie im vorigen Fall finden, schreibt man auch die Ableitung von $\sec \varphi$ stets in der Form $t \sec \varphi$, und damit bekommt man (überall $\tan \varphi = t$ gesetzt) weiter:

$$\frac{d^3 \lambda}{d \sigma^3} = 2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sin \alpha t t \sec \varphi$$

$$+ 2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + t^2) \sec \varphi \cos \alpha$$

$$+ 2 \sin \alpha \cos \alpha t t \sec \varphi \cos \alpha$$

$$\frac{d^3 \lambda}{d \sigma^3} = -\sin^3 \alpha \sec \varphi (2 t^2) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sec \varphi (1 + 3 t^2) \quad (16)$$

Auf diesem Wege findet man auch:

$$\frac{d^4 \lambda}{d \sigma^4} = 8 \sec \varphi t \left\{ -\sin^3 \alpha \cos \alpha (1 + 3 t^2) + \sin \alpha \cos^3 \alpha (2 + 3 t^2) \right\} \quad (17)$$

$$\frac{d^5 \lambda}{d \sigma^5} = 8 \sec \varphi \left\{ \sin^5 \alpha (t^2 + 3 t^4) - \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha (1 + 20 t^2 + 30 t^4) \right. \quad (18)$$

$$\left. + \sin \alpha \cos^4 \alpha (2 + 15 t^2 + 15 t^4) \right\}$$

$$\frac{d^6 \lambda}{d \sigma^6} = 16 \sec \varphi t \left\{ \sin^5 \alpha \cos \alpha (2 + 30 t^2 + 45 t^4) - \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha (26 + 150 t^2 + 150 t^4) \right. \quad (19)$$

$$\left. + \sin \alpha \cos^5 \alpha (17 + 60 t^2 + 45 t^4) \right\}$$

In ähnlicher Weise erhält man auch die Ableitungen von α nach σ :

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \sin \alpha t \quad (20)$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} = \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2 t^2) \quad (21)$$

$$\frac{d^3\alpha}{d\sigma^3} = -\sin^3 \alpha t (1 + 2 t^2) + \sin \alpha \cos^2 \alpha t (5 + 6 t^2) \quad (22)$$

$$\frac{d^4\alpha}{d\sigma^4} = -\sin^3 \alpha \cos \alpha (1 + 20 t^2 + 24 t^4) + \sin \alpha \cos^3 \alpha (5 + 28 t^2 + 24 t^4) \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^5\alpha}{d\sigma^5} &= \sin^5 \alpha t (1 + 20 t^2 + 24 t^4) - 2 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha t (29 + 140 t^2 + 120 t^4) \\ &\quad + \sin \alpha \cos^4 \alpha t (61 + 180 t^2 + 120 t^4) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^6\alpha}{d\sigma^6} &= \sin^5 \alpha \cos \alpha (1 + 182 t^2 + 840 t^4 + 720 t^6) \\ &\quad - \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha (58 + 1316 t^2 + 3600 t^4 + 2400 t^6) \\ &\quad + \sin \alpha \cos^5 \alpha (61 + 662 t^2 + 1320 t^4 + 720 t^6) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Nun können wir die Formeln (1), (2), (3) zusammensetzen; wir wollen dieses jedoch hier nur bis zur 4. Ordnung thun, wir setzen dabei:

$$\sigma \sin \alpha = v \quad \sigma \cos \alpha = u \quad \tan \varphi = t \quad (26)$$

Wenn wir zugleich überall die nötigen ϱ zusetzen, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \varphi' - \varphi &= u - \frac{1}{2\varrho} v^2 t \\ &\quad - \frac{1}{6\varrho^2} v^2 u (1 + 3 t^2) \\ &\quad + \frac{1}{24\varrho^3} v^4 t (1 + 3 t^2) - \frac{1}{6\varrho^3} v^2 u^2 t (2 + 3 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \cos \varphi &= v + \frac{1}{\varrho} v u t \\ &\quad - \frac{1}{3\varrho^2} v^3 t^2 + \frac{1}{3\varrho^2} v u^2 (1 + 3 t^2) \\ &\quad - \frac{1}{3\varrho^3} v^3 u t (1 + 3 t^2) + \frac{1}{3\varrho^3} v u^3 t (2 + 3 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= v t + \frac{1}{2\varrho} v u (1 + 2 t^2) \\ &\quad - \frac{1}{6\varrho^2} v^3 t (1 + 2 t^2) + \frac{1}{6\varrho^2} v u^2 t (5 + 6 t^2) \\ &\quad - \frac{1}{24\varrho^3} v^3 u (1 + 20 t^2 + 24 t^4) \\ &\quad + \frac{1}{24\varrho^3} v u^3 (5 + 28 t^2 + 24 t^4) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Hiebei sind die konstanten Coefficienten-Logarithmen:

$$\left. \begin{aligned} \log \frac{1}{\varrho} &= 4.685575, \log \frac{1}{2\varrho} = 4.384545, \log \frac{1}{3\varrho^2} = 8.89403, \log \frac{1}{6\varrho^2} = 8.59300 \\ \log \frac{1}{3\varrho^3} &= 3.579603, \log \frac{1}{6\varrho^3} = 3.278573, \log \frac{1}{24\varrho^3} = 2.676513 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Wir wollen hiernach unser kleines Normal-Beispiel berechnen, nämlich:
 Gegeben: $\varphi = 49^\circ 30' 0''$ $\alpha = 32^\circ 21' 1,291''$ $\sigma = 1^\circ 11' 19,4810''$
 $= 4279,4819''$

Für die von t abhängigen Coëfficienten kann man die Hilfstafel unseres Anhangs Seite [47]—[51] benützen, oder wenigstens zur Versicherung zuziehen.

In unserem Falle mit $\varphi = 49^\circ 30'$ hat man:

$$\begin{aligned} \log(1 + 2t^2) &= 0,573\,078 & \log(1 + 3t^2) &= 0,70865 & \log(5 + 6t^2) &= 1,12141 \\ \log(1 + 20t^2 + 24t^4) &= 1,86642 & \log(5 + 28t^2 + 24t^4) &= 1,94689 \end{aligned}$$

Im übrigen giebt die Ausrechnung nach den Formeln (27)–(29):

Breite	Länge	Azimut
$+ u = + 3615,2710''$	$+ v \sec \varphi = + 3525,9626''$	$v t = + 2681,1630''$
$- v^2 t \dots = - 14,8830$	$+ v u t \dots = + 72,3593$	$+ v u \dots = + 75,0907$
$- v^2 u \dots = - 0,3797$	$- v^3 \dots = - 0,1986$	$- v^3 \dots = - 0,2061$
$+ v^4 \dots = + 0,0008$	$+ v u^2 \dots = + 1,8460$	$+ v u^2 \dots = + 1,8155$
$- v^2 u^2 \dots = - 0,0093''$	$- v^3 u \dots = - 0,0152$	$- v^3 u \dots = - 0,0152$
$\varphi' - \varphi = + 3599,9998''$	$+ v u^3 \dots = + 0,0452$	$+ v u^3 \dots = + 0,0455$
$= 0^\circ 59' 59,9998''$	$\lambda = + 3599,9993''$	$\alpha' - \alpha = + 2757,8934''$
	$= + 0^\circ 59' 59,9993''$	$= + 45' 57,8934''$

Wir könnten nun weiter untersuchen, wie viel die Glieder 5. Ordnung in gewissen Fällen ausmachen; da wir aber hierüber bereits in anderer Weise in § 63. (22), (23), (26) S. 356 uns Klarheit verschafft haben, wollen wir die Glieder 5. Ordnung unserer neuen Formeln übergehen, dagegen noch für *einen* Fall die Glieder 6. Ordnung in Betracht nehmen, nämlich für die Azimut-Berechnung, bei welcher nach (3) und (25) das Glied 6. Ordnung folgendes ist:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_6 &= \frac{\sigma^6}{720 \varrho^5} \left\{ \sin^5 \alpha \cos \alpha (1 + 182t^2 + 840t^4 + 720t^6) \right. \\ &\quad \left. - \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha (58 + 1316t^2 + 3600t^4 + 2400t^6) \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos^5 \alpha (61 + 662t^2 + 1820t^4 + 720t^6) \right\} \end{aligned}$$

Um einen einfachen Fall zu haben, setzen wir die Breite $\varphi = 45^\circ$, also $t = \tan \varphi = 1$, und damit wird:

$$\Delta \alpha_6 = \frac{\sigma^6}{720 \varrho^5} \left\{ 1743 \sin^5 \alpha \cos \alpha - 7374 \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha + 2763 \sin \alpha \cos^5 \alpha \right\}$$

Durch einige Versuche findet man, dass diese Funktion zwischen 0° und 90° zwei Maxima, etwa bei $\alpha = 16^\circ$ und $\alpha = 77^\circ$, und ein Minimum bei $\alpha = 47^\circ$ hat; das absolute Maximum ist bei 16° , und giebt:

$$(\Delta \alpha_6)_{\max} = \frac{\sigma^6}{720 \varrho^5} 491$$

Setzt man $\sigma = 2^\circ = 7200''$, so erhält man:

$$(\Delta \alpha_6)_{\max} = 0,00025''$$

Dagegen für $\sigma = 3^\circ$ erhält man schon $0,0029''$ und für $\sigma = 4^\circ$ erhält man $0,0162''$.

Aus all diesem ziehen wir folgende Schlüsse:

Die Glieder 6. Ordnung werden bei Ausdehnung von mehreren Graden bereits merkbar, namentlich in höheren Breiten, wo die Glieder mit t^2 , t^4 , t^6 sehr rasch

wachsen. Da nun schon die Glieder 5. Ordnung ungemein beschwerlich sind, empfehlen sich sphärische Reihen-Entwicklungen höchstens bis zur 4. Ordnung einschliesslich, z. B. die Gauss'schen Mittelbreiten-Formeln (16)–(19) § 62. S. 350, welche äusserlich nur Glieder bis zur dritten Ordnung enthalten, aber wegen des MittelArguments noch um einen Grad genauer, d. h. auf Glieder 4. Ordnung einschliesslich genau sind.

Hat man Fälle mit Ausdehnung etwa über 2° , für welche nach S. 356 die Glieder 5. Ordnung bereits merkbar sind, so thut man besser, nach den geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie mit 8–10 stelligen Logarithmen zu rechnen, als die viel grössere Mühe der Glieder 5. oder gar 6. Ordnung aufzuwenden.

Von diesen Überlegungen werden wir auch später bei den sphäroidischen Berechnungen Gebrauch machen.

Kapitel VI.

Normalschnitte und geodätische Linie.

§ 65. Gegen-Normalschnitte.

Der wichtigste Schritt, den wir in unserer geodätischen Theorie vorwärts zu machen haben, besteht in der Erkenntnis, dass zwischen zwei Punkten des Sphäroids im allgemeinen *zwei* Normalschnitte bestehen.

Es seien in Fig. 1. *A* und *B* zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, unter verschiedenen Breiten, und es sei AK_a die Flächen-Normale im Punkte *A*, sowie BK_b die Flächen-Normale im Punkte *B*; hiebei bemerkt man zuerst, dass die Punkte, in welchen die Umdrehungsaxe von diesen Normalen getroffen wird, d. h. K_a und K_b , bei schiefem Schnitte *nicht* zusammenfallen.

Ebenso wie man im allgemeinen *zwei* Axen-Schnittpunkte K_a und K_b hat, bestehen auch *zwei* Normalschnitt-Ebenen, welche beide durch die Normalen der Punkte *A* und *B* gehen.

Dieses verhält sich genauer so:

Die Normalschnitt-Ebene im Punkte *A* ist diejenige Ebene, welche durch die Normale AK_a und durch den Punkt *B* geht; diese Ebene schneide die Ellipsoidfläche in einem Bogen AaB . Andererseits haben wir als Normalschnitt-Ebene im Punkte *B* diejenige Ebene, welche durch die Normale BK_b und durch den Punkt *A* geht und die Ellipsoidfläche in dem Bogen BbA schneidet.

Es giebt besondere Fälle, in welchen die beiden Normalschnitte zwischen zweien Punkten zusammenfallen:

Erstens. Für irgend zwei Punkte, die auf demselben Meridian liegen, ist dieser Meridian auch Normalschnitt in zweifachem Sinne. Hier ist auch der beson-

Fig. 1.

