



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

Kapitel. VI. Normalschnitte und geodätische Linie.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

wachsen. Da nun schon die Glieder 5. Ordnung ungemein beschwerlich sind, empfehlen sich sphärische Reihen-Entwicklungen höchstens bis zur 4. Ordnung einschliesslich, z. B. die Gauss'schen Mittelbreiten-Formeln (16)–(19) § 62. S. 350, welche äusserlich nur Glieder bis zur dritten Ordnung enthalten, aber wegen des Mittel-Arguments noch um einen Grad genauer, d. h. auf Glieder 4. Ordnung einschliesslich genau sind.

Hat man Fälle mit Ausdehnung etwa über 2° , für welche nach S. 356 die Glieder 5. Ordnung bereits merkbar sind, so thut man besser, nach den geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie mit 8–10 stelligen Logarithmen zu rechnen, als die viel grössere Mühe der Glieder 5. oder gar 6. Ordnung aufzuwenden.

Von diesen Überlegungen werden wir auch später bei den sphäroidischen Berechnungen Gebrauch machen.

Kapitel VI.

Normalschnitte und geodätische Linie.

§ 65. Gegen-Normalschnitte.

Der wichtigste Schritt, den wir in unserer geodätischen Theorie vorwärts zu machen haben, besteht in der Erkenntnis, dass zwischen zwei Punkten des Sphäroids im allgemeinen *zwei* Normalschnitte bestehen.

Es seien in Fig. 1. A und B zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, unter verschiedenen Breiten, und es sei AK_a die Flächen-Normale im Punkte A , sowie BK_b die Flächen-Normale im Punkte B ; hiebei bemerkt man zuerst, dass die Punkte, in welchen die Umdrehungsaxe von diesen Normalen getroffen wird, d. h. K_a und K_b , bei schiefem Schnitte *nicht* zusammenfallen.

Ebenso wie man im allgemeinen *zwei* Axen-Schnittpunkte K_a und K_b hat, bestehen auch *zwei* Normalschnitt-Ebenen, welche beide durch die Normalen der Punkte A und B geben.

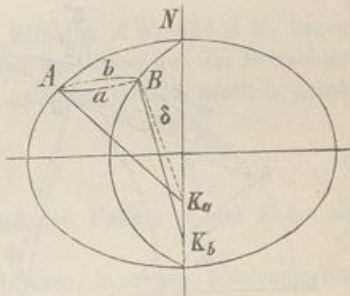
Dieses verhält sich genauer so:

Die Normalschnitt-Ebene im Punkte A ist diejenige Ebene, welche durch die Normale AK_a und durch den Punkt B geht; diese Ebene schneide die Ellipsoidfläche in einem Bogen AaB . Andererseits haben wir als Normalschnitt-Ebene im Punkte B diejenige Ebene, welche durch die Normale BK_b und durch den Punkt A geht und die Ellipsoidfläche in dem Bogen BbA schneidet.

Es giebt besondere Fälle, in welchen die beiden Normalschnitte zwischen zweien Punkten zusammenfallen:

Erstens. Für irgend zwei Punkte, die auf demselben Meridian liegen, ist dieser Meridian auch Normalschnitt in zweifachem Sinne. Hier ist auch der beson-

Fig. 1.



derer Fall inbegriffen, dass einer der beiden betrachteten Punkte in einem Pole der Erde liegt; wenn ein Pol der Erde als erster Punkt A gilt, und irgend ein anderer Erdpunkt als zweiter Punkt B , so ist der Meridian des Punktes B sowohl Normalschnitt von B nach A , als auch Normalschnitt von A nach B . Da jedoch die Erdpole nicht zugänglich sind, hat dieser Fall für uns keine praktische Bedeutung.

Zweitens. Wenn zwei Punkte unter gleichen Breiten φ liegen, so fallen auch die beiden Normalschnitt-Ebenen zusammen, weil dann die beiden Ax-Schnitte K_a und K_b der Normalen von A und von B nach Fig. 1, auf der Erdaxe identisch werden.

Wegen der Kleinheit der Abplattung unserer Erde ist das erkannte Auseinandergehen zweier Gegen-Normalschnitte für messbare Dreiecksseiten sehr gering, und wir haben bisher stillschweigend davon abgesehen, wenn wir die Erde als Kugel behandelten; aber zur Gewinnung eines richtigen Urteils hierüber ist es das erste Erfordernis, die Konvergenz der beiden Normalschnitte durch Rechnung zu bestimmen.

In Fig. 2. ist nochmals der eine von den beiden Schnitten gezeichnet, nämlich derjenige von A nach B , und es ist auch das Azimut α dieses Schnittes in A angedeutet, sowie der Centriwinkel $AK_aB = \sigma$, welcher dem linearen Bogen $AB = s$ entspricht und zwar in erster Näherung einfach als Kreisbogenrechnung:

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \quad (1)$$

wenn mit N_1 der Quer-Krümmungs-Halbmesser AK_a in dem Punkte A bezeichnet wird.

Die beiden Schnitte AB und BA sind in

Fig. 2.

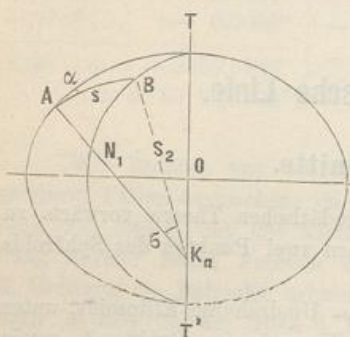


Fig. 3.

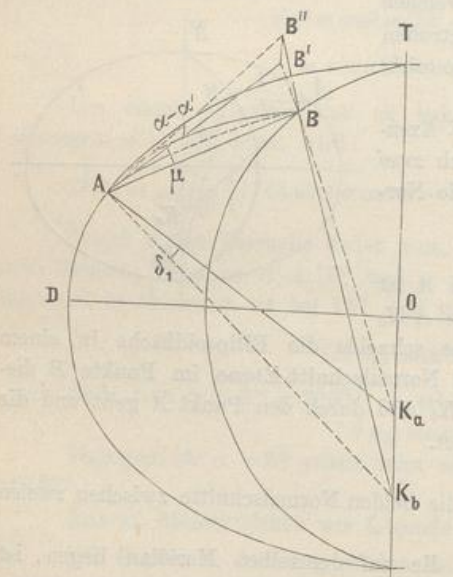


Fig. 4.

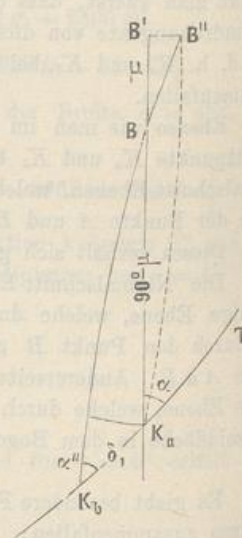


Fig. 3. nochmals gezeichnet mit zwei Tangenten AB' und AB'' , von welchen AB' zu dem Schnitte AB und AB'' zu dem Gegenschnitte BA gehört, so dass also $B'AB'' = \alpha - \alpha'$ die gesuchte Konvergenz vorstellt.

Zugleich bedeutet $B'AB = \mu$ den Winkel der Tangente AB' mit der Sehne AB , und wenn wir auf Fig. 2. und Gleichung (1) zurückblicken, erkennen wir leicht, dass in erster Näherung, (nämlich für AB als Kreisbogen um K als Mittelpunkt)

$$\mu = \frac{\sigma}{2} \text{ ist, also (nach Fig. 5.):} \quad \mu = \frac{\sigma}{2} = \frac{s}{2N_1} \quad (2)$$

Nun kommt die sphärische Fig. 4. in Betracht, welche dadurch entsteht, dass man um A als Mittelpunkt eine Kugelfläche mit beliebigem Halbmesser beschreibt, auf welcher jeder von A ausgehende Strahl sich als Punkt, und jede von A ausgehende Ebene sich als Grosskreisbogen zeigt.

Wir haben auch alle Punkte in Fig. 4. mit denselben Buchstaben bezeichnet, welche auf den entsprechenden Strahlen von Fig. 3. vorkommen, so dass also B in Fig. 4. dem Strahl AB von Fig. 3. K_a in Fig. 4. dem Strahle AK_a von Fig. 3. entspricht u. s. w.

Die Normalschnitt-Ebene ABK_a in Fig. 3. giebt den Bogen BK_a in Fig. 4. und die Meridian-Ebene ATK_aK_b von Fig. 3. giebt den Bogen TK_aK_b in Fig. 4., folglich ist der Winkel $BK_aT = \alpha$ das Azimut der Normalschnitt-Ebene ABK_a im Punkte A .

In Fig. 4. ist auch der Winkel $BK_bK_a = \alpha''$ eingeschrieben, welcher das Gegenazimut α' von Fig. 3. hinreichend darstellt, insofern α'' den Winkel zwischen der Gegenschnittebene BK_bA und der Meridianebene TAK_aK_b bedeutet, während allerdings α' von Fig. 3. sich streng genommen auf die etwas anders liegende Schnittebene BK_aA bezieht. Diesen kleinen Unterschied ausser Betracht lassend, setzen wir in gleicher Näherung wie in den Gleichungen (1) und (2):

$$\alpha' = \alpha'' \quad (3)$$

Der kleine Winkel δ , welcher zwischen den Strahlen AK_a und AK_b liegend, leicht aus Fig. 3. in Fig. 4. übertragen wird, ist eine uns schon aus der Betrachtung von § 54. über den verkürzten Breitenunterschied geläufige Grösse, nämlich gemäss (8) § 54. S. 303:

$$\delta_1 = \frac{\Delta\varphi}{V^2} \eta^2 \quad (4)$$

wobei $\Delta\varphi$ in unserem Falle der Breitenunterschied der Punkte A und B ist, und wie gewöhnlich $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ für die Mittelbreite φ .

Es ist auch leicht, $\Delta\varphi$ in σ und α auszudrücken, in erster Näherung nach dem Anblicke von Fig. 2. S. 303:

$$\frac{\Delta\varphi}{V^2} = \Delta\varphi' = \frac{s}{N} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$

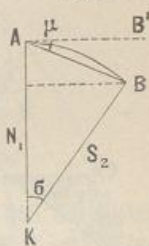
Also nach (4):

$$\delta_1 = \eta^2 \sigma \cos \alpha \quad (5)$$

Auf das sphärische Dreieck BK_aK_b von Fig. 4. werden wir eine Cotangenten-Gleichung von S. 164 anwenden:

$$\begin{aligned} \cotg (90^\circ - \mu) \sin \delta_1 &= \cos \delta_1 \cos (180^\circ - \alpha) + \sin (180^\circ - \alpha) \cotg \alpha'' \\ \tan \mu \sin \delta_1 &= -\cos \delta_1 \cos \alpha + \sin \alpha \cotg \alpha'' \end{aligned} \quad (6)$$

Fig. 5.



oder weil μ und δ_1 klein sind:

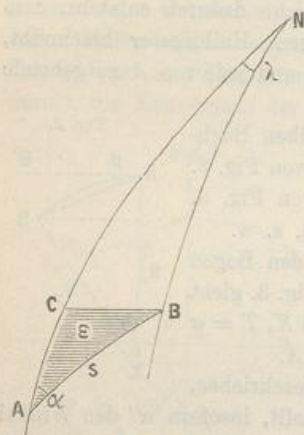
$$\mu \delta_1 = -\cos \alpha + \sin \alpha \cotg \alpha'' = -\frac{\cos \alpha \sin \alpha'' + \sin \alpha \cos \alpha''}{\sin \alpha''}$$

$$\mu \delta_1 \sin \alpha'' = \sin(\alpha - \alpha'') = \alpha - \alpha''$$

Zurückschauend nach (5), (4) und (3) hat man hieraus:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \quad (7)$$

Fig. 6.



Hier hat der zweite Faktor die geometrische Bedeutung, wie in Fig. 6. angedeutet ist, weshalb wir setzen:

$$\frac{\sigma^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \epsilon \quad (8)$$

Dieser Wert ϵ ist genähert der sphärische (oder sphäroidische) Excess eines Dreiecks ABC , welches bei C rechtwinklig ist, so dass BC nicht ein Parallel-Kreisbogen, sondern ein Bogen rechtwinklig zum Meridian ACN ist; doch kann in erster Näherung für die Fläche des Dreiecks ABC auch BC als Parallelbogen gelten.

Mit dieser Hilfs-Bezeichnung ϵ nach (8) lautet unsere Formel (7) kurz:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \epsilon \quad (9)$$

Dieselbe Formel (9), welche hier für $\alpha - \alpha'$ gefunden wurde, gilt in gleicher Näherung auch für die Azimut-Differenz in dem zweiten Punkte B ; also wenn dort die Azimute mit β bezeichnet werden, wird sein:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \eta^2 \epsilon \quad (10)$$

Nimmt man beispielshalber eine Entfernung $s = 100\,000^m$ unter dem Azimut $\alpha = 45^\circ$, zugleich unter der Breite $\varphi = 45^\circ$, so wird:

$$\epsilon = 12,7'' \quad \alpha - \alpha' = 0,043'' \quad (11)$$

Damit haben wir unseren Hauptzweck erreicht. Wir wissen nun, dass die Konvergenz der beiden Gegenschnitte sich in geringen Beträgen von wenigen Hundertel-Sekunden bewegt, so lange die Dreiecksseiten die Grenze von 100^m nicht überschreiten, und damit ist die früher ohne Kenntnis dieser Verhältnisse angenommene sphärische Triangulierung von § 40.—43., bei welcher die $\alpha - \alpha'$ einfach vernachlässigt werden, genügend gerechtfertigt.

Querabstand der beiden Schnittbögen.

Es wird noch zur Veranschaulichung dienen, den linearen Querabstand q zu bestimmen, welchen die beiden Normalschnitte auf der Erdoberfläche in der Mitte ihres Verlaufes zwischen sich lassen; und dazu brauchen wir zuerst den Winkel, den die beiden Schnittebenen unter sich bilden.

Dieser Schnittwinkel ν ist in Fig. 8. veranschaulicht. Denkt man sich in der Mitte der Sehne AB (Fig. 7.) eine Ebene KCD rechtwinklig gelegt, so wird diese ein nahezu gleichschenkliges kleines Dreieck ausschneiden (Fig. 8.), dessen beide

Schenkel p den Winkel ν zwischen sich fassen und den Querabstand q dem Winkel ν gegenüber haben. Die Schenkellänge p ist gleich der Pfeilhöhe eines Bogens s für den Halbmesser N , d. h. nach Fig. 7.:

$$p = \frac{s^2}{8N} \quad (12)$$

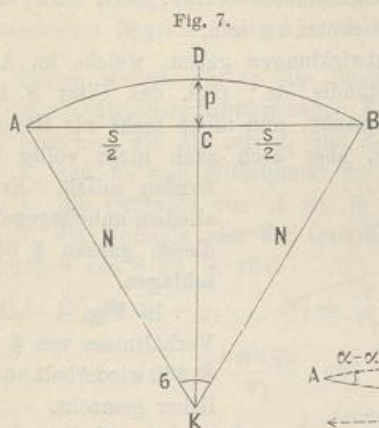


Fig. 8.



Fig. 9.



Was den Schnittwinkel ν betrifft, so ist dieser in Fig. 4. S. 362 der kleine Winkel bei B , unter dem sich die beiden Ebenen $B'BK_a$ und $B''BK_b$ schneiden (ν ist in Fig. 4. S. 362 nicht eingeschrieben, aber in Fig. 2. des folgenden § 67 S. 368). Man entnimmt also leicht genähert:

$$\sin \nu \text{ oder } \tan \nu = \frac{\delta_1 \sin \alpha'}{\sin (90^\circ - \mu)} = \frac{\delta_1 \sin \alpha}{\cos \frac{\sigma}{2}} \quad (13)$$

oder wegen (5) und (8) hinreichend genau:

$$\nu = \eta^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha = 2 \eta^2 \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (14)$$

Da nach Fig. 8. der kleine Querabstand $q = p \nu$ ist, hat man also aus (12) und (13):

$$q = \frac{s}{4} \eta^2 \epsilon \text{ bzw. } = \frac{s}{4} \eta^2 \frac{\epsilon}{\rho} \quad (15)$$

Die Ausrechnung mit denselben Annahmen wie bei (10) und (11); nämlich $\varphi = 45^\circ$ und $\alpha = 45^\circ$, $s = 100\,000^m$ giebt:

$$q = 0,005^m \quad (16)$$

Dieses Zahlenbeispiel entspricht ungefähr der Linie Hannover-Brocken. Wenn man also von Hannover nach dem Brocken eine Gerade feldmessengerisch einweisen und mit Backen und Fahnen abstecken würde, und wenn man dasselbe umgekehrt vom Brocken nach Hannover ausführte, so würden wegen der Abplattung der Erde die beiden abgesteckten Linien nicht zusammenfallen, sondern in der Mitte des Verlaufes (in der Gegend von Salzgitter) um 5 Millimeter aneinander vorbeigehen.

Dieses handgreifliche Beispiel zeigt am besten die Zulässigkeit geodätischer Vernachlässigung dieser Abweichung.

§ 66. Konvergenzwinkel in zweiter Näherung.

Obgleich die Bestimmung von $\alpha - \alpha'$ in erster Näherung $= \eta^2 \varepsilon$ im vorigen § 65. für alle praktischen Zwecke vollauf genügt und es auch gar nicht theoretisch ratsam ist, diese Sache alsbald weiter zu verfolgen, wollen wir doch die Näherung $\alpha' = \alpha''$, welche in (3) § 65. S. 365 angenommen wurde, noch näher untersuchen, um vor jedem theoretischen Einwand geschützt zu sein.

Wir wollen hier auch einige Entwicklungen geben, welche im Anschluss an Bohnenbergers Abhandlung „De computandis etc.“ (vgl. das Citat S. 274) in der vorigen 3. Auflage 1890, § 67.—68. gemacht, nun nicht mehr als Hauptbestandteil unseres Entwicklungsganges genommen, aber doch auch nicht völlig weggelassen

werden sollen. Es mag nach alledem anheimgegeben werden, diesen ganzen § 66. zu überschlagen.

In Fig. 1. haben wir die Verhältnisse von § 65. Fig. 3. S. 362 wiederholt und noch deutlicher gemacht.

A und B sind zwei Punkte des Umdrehungs-Ellipsoids, auf zwei Meridianen TA und TB , welche bei T den Längenunterschied λ zwischen sich fassen.

Die Breite von A sei φ_1 und die Breite von B sei φ_2 ; ferner sei AK_a die Normale von A und AK_b die Normale von B .

Die Breiten φ_1 und φ_2 kommen bei K_a und K_b zum Ausdruck, denn es ist:

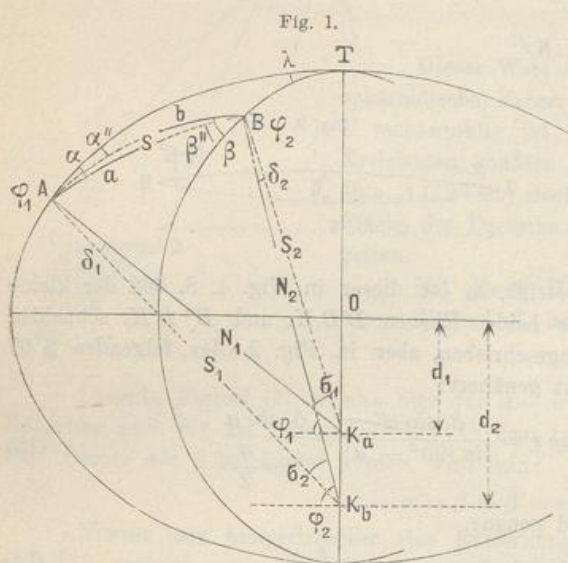
$$\text{Winkel } AK_aT = 90^\circ - \varphi_1 \text{ und } BK_bT = 90^\circ - \varphi_2 \quad (1)$$

Ein Theodolit, in A richtig aufgestellt, wird seine vertikale Axe nach AK_a gerichtet haben, und die Sicht nach B wird in AaB erfolgen unter dem Azimut α . Zieht man auch noch K_aB , so ist das nicht Normale in B , allein man hat nun doch ein Dreikant K_aABT mit der Spitze K_a , auf welches die sphärische Trigonometrie angewendet werden kann.

Während α und β zweifellos Azimute in dem bisherigen Sinne sind, d. h. Winkel zwischen Normalschnitten und einem Meridiane, und zwar sowohl für das Ellipsoid als auch für die beiden sphärischen Dreiecke, in welchen α und $180 - \beta$ vorkommen, ist dieses bei α' und β' nur noch der Fall für die sphärischen Hilfsdreiecke, aber nicht mehr für das Ellipsoid.

Z. B. der Winkel α'' kann als Azimut des Schnittes AbB in A bezeichnet werden, allein nur bei Annahme eines fingierten Erdmittelpunktes K_b , welcher gar nicht in der Normalen von A liegt.

In Bezug auf das Ellipsoid hat der ebene Schnitt $AbBK_b$ im Punkte A überhaupt kein Azimut in dem gewöhnlichen Sinne, und wenn man dem Bogen AbB



dennoch auch in A ein ellipsoidisches Azimut zuteilen will, so kann man nur die *Tangente* des Bogens AbB in A betrachten, indem man durch diese Tangente und die Normale AK_a eine Ebene legt, welche mit der Meridian-Ebene AT einen *anderen* Winkel α' bildet (der in Fig. 1. nicht angegeben ist).

Man kann schon jetzt überblicken, dass die beiden hier genannten Winkel α' und α'' nur sehr wenig von einander verschieden sind; zunächst kam es nur darauf an, die geometrischen Begriffe völlig klar zu legen.

Nach diesem wollen wir an die Bestimmung der beiden kleinen Winkel δ_1 und δ_2 und der excentrischen Entfernungen S_1 und S_2 gehen.

Hiezu brauchen wir die mit d_1 und d_2 in Fig. 1. eingeschriebenen Abstände der Schnitte K_a und K_b vom Mittelpunkt des Ellipsoids.

Wenn y_1 die Ordinate von A ist, in dem Sinne der früheren Fig. 1. § 31. S. 188, und N_1 die Normale oder der Quer-Krümmungs-Halbmesser AK_a , so ist mit den Bezeichnungen von § 32. S. 194:

$$d_1 = N_1 \sin \varphi_1 - y_1, \quad N_1 = \frac{c}{V_1}, \quad y = \frac{c(1-e^2) \sin \varphi_1}{V_1} \quad (2)$$

$$\text{also:} \quad d_1 = e^2 \frac{c \sin \varphi_1}{V_1} \quad \text{und} \quad d_2 = e^2 \frac{c \sin \varphi_2}{V_2} \quad (3)$$

$$\text{also:} \quad d_2 - d_1 = e^2 c \left(\frac{\sin \varphi_2}{V_2} - \frac{\sin \varphi_1}{V_1} \right) \quad (4)$$

Die schmalen Dreiecke $AK_a K_b$ und $BK_a K_b$ von Fig. 1. geben:

$$\tan \delta_1 = \frac{(d_2 - d_1) \cos \varphi_1}{N_1 + (d_2 - d_1) \sin \varphi_1} \quad \text{und} \quad \tan \delta_2 = \frac{(d_1 - d_2) \cos \varphi_2}{N_2 + (d_1 - d_2) \sin \varphi_2} \quad (5)$$

In gleicher Weise kann man auch die Entfernungen S_1 und S_2 nach Fig. 1. bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} S_1^2 &= N_1^2 + (d_2 - d_1)^2 + 2 N_1 (d_2 - d_1) \sin \varphi_1 \\ S_2^2 &= N_2^2 + (d_1 - d_2)^2 + 2 N_2 (d_1 - d_2) \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Man kann alle diese Formeln auch in Reihen entwickeln, wie in unserer 3. Auflage 1890, S. 349—351 geschehen ist.

Es ist aber darauf aufmerksam zu machen, dass die vorstehenden Formeln (2)—(6) streng gültig sind für beliebig weit entfernte Erdorte. Auch der Depressionswinkel μ kann nach Fig. 5. § 66. streng angegeben werden durch:

$$\tan(90^\circ - \mu) = \frac{S_2 \sin \sigma}{N_1 - S_2 \cos \sigma} \quad \text{oder} \quad \tan \mu \sin \sigma = \frac{N_1}{S_2} - \cos \sigma \quad (7)$$

Solche strenge Formeln könnten etwa in Frage kommen bei Mondbeobachtungen. Vgl. hiezu auch: „Über das Geoid, von J. Bischoff, München 1889“.

Wir haben hiezu ein Zahlen-Beispiel berechnet:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 49^\circ 30' & \varphi_2 &= 50^\circ 30' \\ \text{Mittel } \varphi &= 50^\circ 0' & \text{Differenz } \Delta \varphi &= 1^\circ = 3600' \end{aligned} \right\}$$

Damit wurde sowohl nach den geschlossenen Formeln als nach verschiedenen Reihen berechnet:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= 10,06 \, 958'' & \delta_2 &= 9,86 \, 285'' \\ \frac{S_1}{N_1} &= 1,000 \, 057 \, 1638 & \frac{S_2}{N_2} &= 0,999 \, 941 \, 9985 \\ \log \frac{S_1}{N_1} &= 0,000 \, 0248 \, 252 & \log \frac{S_2}{N_2} &= 9,999 \, 9748 \, 096 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die beiden sphärischen Dreiecke haben ergeben:

$K_a A B T$	$K_b A B T$	
$\varphi_1 = 49^\circ 30' 0''$, $\lambda = 1^\circ 0' 0''$	$\varphi_2 = 50^\circ 30' 0''$, $\lambda = 1^\circ 0' 0''$	(9)
$\varphi_2 - \delta_2 = 50^\circ 29' 50,13715''$	$\varphi_1 + \delta_1 = 49^\circ 30' 10,06958''$	
$\alpha = 32^\circ 25' 21,5294''$	$\alpha' = 32^\circ 25' 21,4739''$	
$\beta'' = 33^\circ 11' 19,3674''$	$\beta = 33^\circ 11' 19,4237''$	
$\sigma_1 = 1^\circ 11' 11,22445''$	$\sigma_2 = 1^\circ 11' 10,97855''$	

Hieraus ziehen wir auch die Differenzen:

$$\alpha - \alpha' = 0,0555'' \qquad \beta - \beta'' = 0,0563'' \qquad (10)$$

Der im vorigen § 65. mit α' bezeichnete Winkel ist hier gar nicht vorgekommen; um auch zu diesem zu gelangen, haben wir in nachstehender Fig. 2. im wesentlichen die Verhältnisse der früheren Fig. 4. § 65. S. 362 wiederholt.

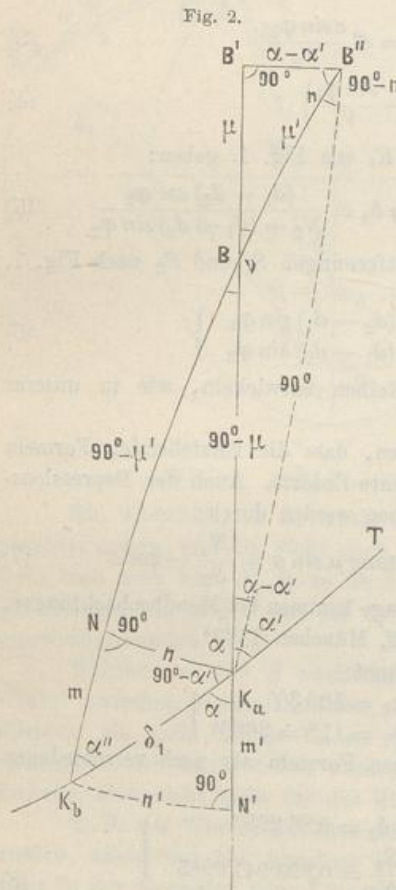
Das Azimut α' , welches der Gegen-Normalschnitt $B K_b A$ in A hat (vgl. Fig. 2. S. 362) ist als Winkel zweier Ebenen zunächst nicht vertreten, weil die Ebene $B K_b A$ in A nicht normal ist. Allerdings bildet diese Ebene $B K_b A$ mit der Meridian-Ebene von A einen gewissen Winkel α'' , welchen wir schon kennen gelernt haben, und von dem wir auch schon wissen, dass er nahezu gleich dem Azimute α' ist; und jenen Winkel α'' finden wir in Fig. 2. leicht wieder, nämlich bei K_b zwischen dem Meridianbogen $K_b K_a T$ und dem Gegen-Schnittbogen $K_b B$.

Das Gegen-Azimut α' selbst muss zunächst in Fig. 3. S. 362 dadurch konstruiert werden, dass man die Tangente $A B''$ an die Gegen-Schnittkurve $B A$ in A zieht; und wenn man gleichzeitig auch die Tangente $A B'$ an den Schnittbogen $A B$ in A zieht, so liegen diese beiden Tangenten in der Berührungs-Ebene des Punktes A , und fassen den kleinen Winkel $\alpha - \alpha'$ zwischen sich.

Auf diesem Wege ist die Differenz $\alpha - \alpha'$ auch leicht in unsere neue Fig. 2. hinüber zu tragen; man macht den Bogen $B B'$ entsprechend dem Depressions-Winkel μ der Sehne $A B$ gegen die Tangente $A B'$, dann $B' B''$ rechtwinklig zu $B B'$, worauf sich B'' als Schnitt der Horizontalen $B' B''$ mit der Schiefen $K_b B B''$ ergibt.

Indessen kann man nicht nur diese kleine Differenz $\alpha - \alpha'$, sondern auch das Azimut α' selbst in Fig. 2. auffinden, indem man den Bogen $B'' K_a$ zieht, welcher der Ebene $B'' A K_a$ entspricht, und mit dem Meridian $K_a T$ das fragliche Azimut α' macht.

Der in Fig. 2. gezogene Bogen $B'' K_a$ ist $= 90^\circ$, weil die Strahlen $A B''$



und $A K_a$ in Fig. 3. S. 362 als Tangente und als Normale des Ellipsoids auf einander rechtwinklig sind, und ebenso ist auch $B' K_a = 90^\circ$, also $B K_a = 90^\circ - \mu$.

Nun wollen wir noch den kurzen Bogen $K_a N$ rechtwinklig zu $B'' K_b$ ziehen, wodurch auch $B'' N = 90^\circ$ und folglich der Bogen $K_a N = n$, gleich dem Winkel n bei B'' wird.

Dieses n ist der Neigungs-Winkel der Normalen $A K_a$ gegen die Gegensechnitt-Ebene $B A K_b$, und eine entsprechende Neigung n' kann man $K_b N' = n'$ ebenfalls angeben, d. h. den Neigungs-Winkel n' , welchen die jenseitige Normale $B K_b$ mit der diesseitigen Normalschnitt-Ebene $A B K_a$ bildet.

Unsere Fig. 2. zeigt bei B den Winkel r , welchen die beiden Normalschnitt-Ebenen unter sich bilden, und endlich haben wir noch die kleine Seite $K_a K_b = \delta_1$ entsprechend dem kleinen Winkel $K_a A K_b = \delta_1$ in Fig. 1., den wir auch schon früher kennen gelernt haben.

Nachdem wir so alle Winkel, die uns hier interessieren, in den sphärischen Dreiecken von Fig. 2. dargestellt haben, können wir alle Beziehungen, welche zwischen diesen Winkeln bestehen, durch die sphärische Trigonometrie aus Fig. 2. ableiten.

Wir gehen zuerst darauf aus, die Differenz $\alpha - \alpha''$ zu bestimmen; hiezu giebt eine Cotangenten-Gleichung S. 164, auf das Dreieck $B K_a K_b$ angewendet, genau wieder wie in (6) § 65. S. 363:

$$\begin{aligned} \cotg (90^\circ - \mu) \sin \delta_1 &= \cos \delta_1 \cos (180^\circ - \alpha) + \sin (180^\circ - \alpha) \cotg \alpha'' \\ \tan \mu \sin \delta_1 &= -\cos \delta_1 \cos \alpha + \sin \alpha \cotg \alpha'' \\ \tan \mu \sin \delta_1 &= \left(2 \sin^2 \frac{\delta_1}{2} - 1 \right) \cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha''}{\sin \alpha''} \\ \tan \mu \sin \delta_1 - 2 \cos \alpha \sin^2 \frac{\delta_1}{2} &= \frac{\sin (\alpha - \alpha'')}{\sin \alpha''} \end{aligned} \quad (11)$$

Dadurch ist $\alpha - \alpha''$ bestimmt; und um auch die Differenz $\alpha'' - \alpha'$ zu finden, betrachten wir das kleine rechtwinklige Dreieck $K_a K_b N$, dessen sphärischer Excess gerade zu $\alpha'' - \alpha'$ ist, denn der Winkel dieses rechtwinkligen Dreiecks bei K_a ist $= 90^\circ - \alpha'$, weil $K_a B''$ rechtwinklig auf $K_a N$ steht; es ist also:

$$\alpha'' + (90^\circ - \alpha') = 90^\circ + (\alpha'' - \alpha') \quad (12)$$

Hiefür giebt die Hypotenusen-Formel S. 164:

$$\begin{aligned} \cotg \alpha' \cotg (90^\circ - \alpha') &= \cos \delta_1 \\ \cos \alpha'' \sin \alpha' &= \sin \alpha'' \cos \alpha' \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\delta_1}{2} \right) \\ \sin (\alpha'' - \alpha') &= 2 \sin^2 \frac{\delta_1}{2} \sin \alpha'' \cos \alpha' \end{aligned} \quad (13)$$

Nachdem durch (11) und (13) auch $\alpha - \alpha'$ bestimmt ist, erhält man aus dem oberen rechtwinkligen Dreieck $B B' B''$ in Fig. 2.:

$$\tan r = \frac{\tan (\alpha - \alpha')}{\sin \mu} \quad (14)$$

und

$$\tan n = \frac{\sin (\alpha - \alpha')}{\tan \mu} \quad (15)$$

oder aus dem Dreieck $B K_a N$:

$$\sin n = \sin r \cos \mu \quad (16)$$

Dadurch ist n zweifach bestimmt, wie überhaupt noch manche Kontrollgleichung aus Fig. 2. abgelesen werden kann (wozu noch μ' , m und m' eingeschrieben sind). Um n und n' auch unmittelbar in δ_1 auszudrücken, hat man aus den kleinen rechtwinkligen Dreiecken $K_a K_b N$ und $K_a K_b N$ in Fig. 3.:

$$\sin n = \sin \delta_1 \sin \alpha'' \quad \sin n' = \sin \delta_1 \sin \alpha \quad (17)$$

Um zur Entwicklung von $\alpha - \alpha'$ zu gelangen, haben wir zuerst aus (11):

$$\alpha - \alpha' = \left(\mu \delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha \quad (18)$$

Der von der Breiten-Verkürzung herrührende Winkel δ_1 muss aus der geschlossenen Formel (5) für δ_1 auf S. 367 entwickelt werden, was hier nicht näher im Einzelnen dargelegt wird; das Ergebnis ist:

$$\delta_1 = \eta^2 \Delta \varphi' \left(1 + \frac{\Delta \varphi'}{2} t \right)$$

Dabei ist gesetzt:

$$\frac{\Delta \varphi}{V^2} = \Delta \varphi' \quad , \quad \tan \varphi = t$$

Auch der Depressionswinkel μ wird nach (7) genauer gebraucht, was als Reihen-Entwicklung hier nicht nachgewiesen wird (3. Auflage 1890, S. 360—361). Das Schlussresultat ist:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{s}{2N} \sin \alpha_m \quad (19)$$

Dabei bezieht sich η^2 auf die Mittelbreite, wie auch α_m das Mittel-Azimut ist. Weiter wurde gefunden:

$$\alpha - \alpha' = \eta^2 \Delta \varphi' \frac{s}{2R} \sin \alpha_m \quad (20)$$

$$\alpha' - \alpha' = \eta^4 \Delta \varphi' \frac{s}{2N} \sin \alpha \cos^2 \alpha \quad (21)$$

Der Unterschied von $\alpha - \alpha'$ gegen $\alpha - \alpha''$ nach (20) und (19) besteht darin, dass bei (19) der Quer-Krümmungs-Halbmesser N im Nenner steht, dagegen bei (20) der Krümmungs-Halbmesser R in der Richtung des Bogens AB .

Diese Formeln sind genau auf Glieder von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ und $\eta^4 \sigma^2$ einschliesslich.

Die letzte Differenz $\alpha'' - \alpha'$ nach (21) hat den Faktor η^4 , ist also von nächster Ordnung im Vergleich zu $\alpha - \alpha'$ und $\alpha - \alpha''$.

Die Ausrechnung nach diesen Formeln hat für das Zahlenbeispiel (7)–(10) ergeben:

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = 0,0560'' \quad (22)$$

Um dieses mit $\alpha - \alpha'' = 0,0555''$ und mit $\beta - \beta'' = 0,0563$ nach (10) S. 368 zu vergleichen, sollte man noch die Reduktion $\alpha'' - \alpha'$ nach (21) anbringen, welche aber nur 0,0001'' bringt, und neben unserer weniger genauen trigonometrischen Rechnung zu vernachlässigen ist. Hiernach stimmt (22) genügend mit dem früheren (10) S. 368.

Ellipsenbogen der Normalschnitte.

In Fig. 3. ist nochmals der ebene Schnitt ABK_a von Fig. 1. dargestellt, und wir möchten noch die elliptische Bogenlänge $AB = s$ kennen lernen, ohne jedoch die Einzelheiten der Reihen-Entwicklung (von 3. Auflage 1890, S. 353—354) herzusetzen. Aus den Gleichungen (6) muss es möglich sein, zu entwickeln:

$$\frac{S_2}{N_1} = 1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha \quad (23)$$

Dadurch ist die Kurve AB (Fig. 3.) in Polar-Coordinationen bestimmt, und um s in σ auszudrücken, hat man nur die Bogenlänge s durch Integration zu finden. Hierzu giebt Fig. 3. die Differential-Gleichung:

$$ds^2 = (S_2 d\sigma)^2 + (dS_2)^2 \quad (24)$$

Hier ist S_2 als Funktion der Veränderlichen σ nach (24) einzuführen; N_1 ist konstant, und auch α und η^2 gelten hier als konstant. Man hat daher aus (23):

$$\frac{dS_2}{d\sigma} = -N_1 \eta^2 \cos^2 \alpha \sigma \quad , \quad (dS_2)^2 = \eta^4 \dots d\sigma^2 \quad (25)$$

Wenn wir Glieder mit η^4 vernachlässigen, können wir (24) kurz so schreiben:

$$ds = S_2 d\sigma = N_1 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} \sigma^2 \cos^2 \alpha\right) d\sigma$$

Die Integration mit den Grenzen $\sigma = 0$ und $\sigma = \sigma$ giebt:

$$s = N_1 \left(\sigma - \frac{\eta^2}{6} \sigma^3 \cos^2 \alpha\right)$$

oder auch:

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \sigma^2 \cos^2 \alpha\right) \quad (26)$$

Das Korrektionsglied beträgt $\frac{\eta^2}{6} \left(\frac{s}{N_1}\right)^3 \cos^2 \alpha \varphi''$ in Sekunden. Mit $\varphi = \alpha = 45^\circ$ und $s = 100\,000^m$ giebt dieses nur $0,0002''$ (man kann daher bei einzelnen Dreiecksseiten das zweite Glied von (26) vernachlässigen).

Nach dem Satz von der verkürzten Breitendifferenz (8) § 54. S. 303 kann man hier setzen $\sigma \cos \alpha = \frac{\Delta \varphi}{V^2} = \Delta \varphi'$, also wird (26):

$$\sigma = \frac{s}{N_1} \left(1 + \frac{\eta^2}{6} \Delta \varphi'^2\right) \quad \text{oder} \quad s = N_1 \sigma \left(1 - \frac{\eta^2}{6} \Delta \varphi'^2\right) \quad (27)$$

In dieser Form haben wir das Zahlen-Beispiel (7)–(9) S. 368 behandelt und berechnet:

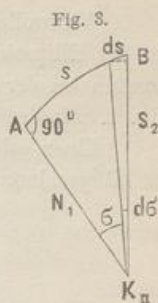
$$s = N_1 \sigma_1 (1 - \dots) = 132\,315,392^m - 0,019^m = 132\,315,373^m \quad (28)$$

$$s = N_2 \sigma_2 (1 - \dots) = 132\,315,394^m - 0,019^m = 132\,315,375^m \quad (29)$$

Das Korrektionsglied von (27) macht also hier nur etwa 2 Centimeter aus. Die beiden Werte s nach (28) und (29) sind innerhalb der Rechenschärfe als *gleich* zu betrachten, und wir werden später in § 71. auch finden, dass sie innerhalb der Rechenschärfe auch gleich lang sind, wie die geodätische Linie zwischen A und B .

§ 67. Einfluss verschiedener Höhen.

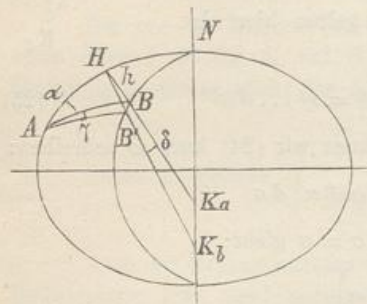
Im Bisherigen haben wir immer die Voraussetzung gemacht, dass die in Betracht kommenden Punkte A, B beide auf der Oberfläche des Umdrehungs-Ellipsoid liegen. Für Triangulierung, Azimutmessung u. dgl. zwischen zwei Punkten ist diese Annahme physisch nicht möglich, weil die Erde nicht durchsichtig ist. In Wirklichkeit befinden sich die Punkte auf Berghöhen, Türmen u. dgl., und es fragt sich, ob dadurch eine Änderung gegen die frühere Annahme stattfindet.



Wir wollen zunächst annehmen, der Standpunkt des Beobachters befinde sich auf der Ellipsoidfläche selbst, welche unseren Betrachtungen zu Grunde gelegt wird; dagegen sei der Zielpunkt in einer Höhe h über der Ellipsoidfläche befindlich, wie in Fig. 1. mit dem Standpunkt A und dem Zielpunkt H angedeutet ist.

Einen solchen Zielpunkt denken wir uns auf das Ellipsoid projiziert mittelst der Ellipsoidnormalen (wobei von einer Krümmung der Lotlinien abgesehen wird).

Fig. 1.



In Fig. 1. sei H ein hochgelegener Punkt und B' dessen Projektion, wobei HK_b die Normale von B ist. Wenn nun von einem entfernten Punkt A , der in der Ellipsoidfläche selbst liegt, mittelst des Theodolits nach B gemessen wird, so geschieht dieses in der Ebene AHB , welche in A normal ist, und der Theodolit projiziert den Punkt H nicht nach B' , sondern nach B .

Um den dadurch entstehenden Azimutalfehler $BA B' = \gamma$ zu bestimmen, brauchen wir wieder den kleinen Winkel $K_a H K_b = \delta$, nämlich nach (4) § 65, S. 363 in erster Näherung:

$$\delta = r^2 \frac{\Delta \varphi}{V^2} = r^2 \frac{s}{N} \cos \alpha$$

wobei s die lineare Entfernung AB und N der Quer-Krümmungs-Halbmesser ist. Damit hat man den Projektionsfehler BB' im Meridian:

$$BB' = h \delta = r^2 \frac{hs}{N} \cos \alpha$$

Der entsprechende Azimutfehler γ ist:

$$\gamma = \frac{BB' \sin \alpha}{s} = r^2 \frac{h}{N} \sin \alpha \cos \alpha$$

Mit φ und $\alpha = 45^\circ$ giebt dieses:

$$\gamma = 0,054'' \frac{h}{1000}$$

Also für $h = 1000^m$ giebt dieses bereits $0,054''$.

Wenn der Punkt A selbst nicht in der Ellipsoidfläche liegt, sondern darüber, so ändert das an der bisherigen Betrachtung nichts, weil A in seiner eigenen Normalen $K_a A$ gehoben ist, wobei die vertikale Theodolit-Axe von A mit der Normalen $A K_a$ zusammenfällt.

Wirkung der Refraktion. Infolge der Abplattung der Erde und der Niveauschichten der Atmosphäre findet eine Ablenkung eines Lichtstrahles durch Refraktion nicht bloss in vertikalem Sinne, sondern auch in horizontalem Sinne statt. Je zwei aufeinander folgende Elemente eines Lichtstrahls liegen in einer Ebene, welche die Lotlinie der Trennungsfläche zwischen zwei verschiedenen dichten und verschieden brechenden Schichten der Atmosphäre enthält. Da die Trennungsfläche zweier solcher Schichten rechtwinklig zur Lotrichtung sein muss, finden wir für den Lauf einer Lichtkurve durch die Atmosphäre ein ähnliches Gesetz wie für die geodätische Linie (vgl. Fig. 2. in § 68.), dass nämlich die Schmiegungs-Ebene der Lichtkurve überall Normalebene der lichtbrechenden Fläche sei oder die Lotlinie dieser Fläche enthalten muss.

Auf Grund dieses Gesetzes sind Untersuchungen über die azimutale Ablenkung des Lichtstrahles angestellt worden von Andrae, Sonderhof und Helmert (s. Helmert, höhere Geodäsie II. S. 565), in ähnlicher Weise, wie für den Lauf der geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid zwischen den beiden Normalschnitten. Da die Lichtkurve in ihrer Hauptkrümmung viel flacher ist als die geodätische Linie auf der Erde, so wird auch der Querabstand zwischen den Normalschnitten in demselben Verhältnisse kleiner, und ebenso auch die kleinen Winkel beider Lichtkurven kleiner als für die geodätische Linie auf der Erde. Das Krümmungsverhältnis zwischen der Lichtlinie und einer Erdlinie ist der sogenannte Refraktions-Coëfficient, im Mittel etwa $k = 0,13$, und hiernach verhält sich die azimutale Ablenkung des Lichtstrahls zu der entsprechenden geodätischen Reduktion wie $0,13$ zu 1 . Da nun diese geodätische Reduktion selbst sehr gering ist, so ist nach den citierten Untersuchungen von Andrae, Sonderhof und Helmert die Lichtablenkung zu vernachlässigen.

§ 68. Die geodätische Linie.

Nachdem wir in § 65. uns überzeugt haben, dass zwischen zwei Punkten A und B der ellipsoidischen Erdoberfläche im allgemeinen zwei verschiedene Normalschnitte bestehen, in welchen bei Theodolit-Beobachtungen von A nach B und von B nach A die Sicht-Linien sich befinden, können wir auch angeben, was für ein Linienzug erhalten wird, wenn man mehrere aufeinanderfolgende Punkte A, B, C (Fig. 1.) durch fortgesetztes Theodolit-Einweisen, wie eine Gerade in der Ebene, absteckt.

In Fig. 1. stehe in A ein Theodolit mit lotrechter Axe, mit welchem ein entfernter Punkt B angezielt oder eingewiesen wird, wobei die Sicht AaB stattfindet. Hierauf begiebt man sich mit dem Theodolit nach B , stellt denselben dort ebenfalls mit lotrechter Axe auf, zielt zurück nach A , was in der Sicht BbA geschieht, dreht dann um 180° und bekommt die neue Sicht BbC . Hierauf geht man nach C , nimmt wieder die Sicht rückwärts CcB , und um 180° gedreht vorwärts CcD , und so fort.

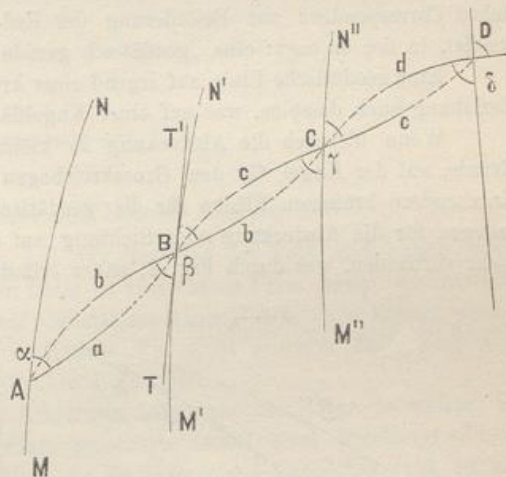
Die Theorie von § 65. hat uns gezeigt, dass bei diesem Verfahren allerdings im allgemeinen

zwei Verbindungslinien zwischen je zwei Punkten A und B , B und C , u. s. w. in Betracht kommen, nämlich AaB von A nach B und BbA von B nach A u. s. w., doch sind die Abweichungen zwischen a und b , c und d u. s. w. so klein, dass sie selbst bei Dreiecksseiten von 100 000 Meter auf unserer Erdoberfläche noch vernachlässigt werden können.

Wäre unsere Erde stärker abgeplattet, so würden auch diese Abweichungen stärker sein; und im Sinne der Theorie kommt es auf den Grössenbetrag der Abweichungen jetzt nicht an, sondern darauf, dass das mathematische Gesetz des Linienzuges A, B, C, D erkannt werde.

Jedenfalls werden bei der Krümmung, wie sie unser Erdellipsoid hat, die Abweichungen ab immer kleiner, wenn die Zielweiten AB, BC u. s. w. fortgesetzt

Fig. 1.



verkürzt werden. Die kleinen Azimutverschiebungen aAb u. s. w. wachsen nach (7) § 65. S. 364 nur mit dem Quadrate der Zielweiten; und lässt man die Zielweiten $AB, BC \dots$ selbst unendlich klein (im Sinne der Differential-Rechnung) werden, so werden die Schleifen $AaBb$ u. s. w. sich schliessen, und man bekommt statt des Schleifen-Zuges eine stetige Linie $ABCD$, welche *geodätische Linie* heisst, und im allgemeinen eine Kurve doppelter Krümmung ist.

Als Richtungswinkel, bezw. Azimute der geodätischen Linie, welche nach dem Zusammenfallen der Schleifen in Fig. 1. entsteht, sind die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu betrachten, oder genauer die Grenzwerte, gegen welche diese Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bei unbegrenzt abnehmenden Strecken AB, BC u. s. w. konvergieren.

Mit den Begriffen der Feld- und Landmessung in der Ebene kann man die geodätische Linie kurz so erklären:

Man macht auf der ellipsoidischen Erdoberfläche genau dasselbe, was der Landmesser thut, wenn er eine sehr lange Gerade AD in der Ebene stückweise absteckt, indem er seinen Theodolit zuerst in A , dann in B, C, D aufstellt, und jedesmal einen Brechungswinkel von 180° absetzt.

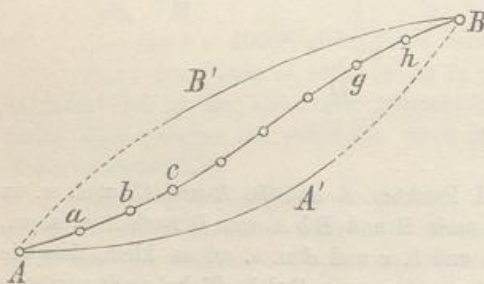
Oder: eine geodätische Linie ist in Bezug auf fortgesetztes Einweisen mit kurzen Zielweiten auf einer krummen Fläche dasselbe, was in der Ebene ein gerade gestrecktes Polygon mit lauter Brechungswinkeln von 180° ist.

Es ist deswegen eine vorzügliche Benennung, welche Soldner in der „monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ 1805 § 7. anwendet, in der er sagt: eine „geodätisch gerade Linie“.

Eine geodätische Linie auf irgend einer krummen Fläche ist in der angegebenen Beziehung auch dasselbe, was auf einer Kugelfläche ein grösster Kreisbogen ist.

Wenn hiernach die Absteckung in kleinen Teilstrecken in der Ebene für die Gerade, auf der Kugel für den Grosskreisbogen und auf dem Ellipsoid oder irgend einer andern krummen Fläche für die geodätische Linie, einander analog sind, so ist dagegen für die Absteckung oder Sichtung auf die Gesamtlänge diese Analogie nicht mehr vorhanden, was durch Fig. 2. näher erläutert werden soll.

Fig. 2.



In Fig. 2. sei eine geodätische Linie $Aabc \dots ghB$ durch schrittweises Abstecken mit den kleinen Zielweiten $Aa = ab = bc$ u. s. w. erhalten, wobei der Theodolit in a, b, c u. s. w. immer Brechungswinkel von 180° zeigt.

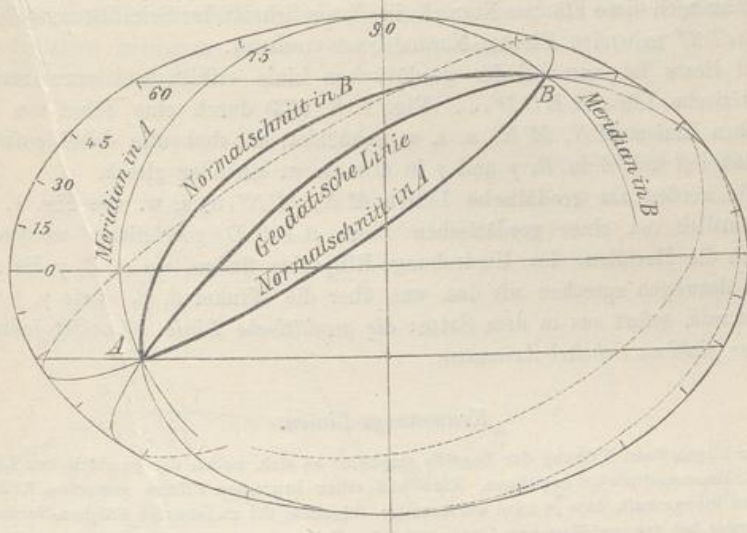
Stellt man aber nach Absteckung der Einzelpunkte den Theodolit wieder in A lotrecht auf, und zielt auf einmal nach dem Endpunkte B (sofern die Erdkrümmung dieses gestattet), so bekommt

man eine ganz andere Sichtlinie als vorher, nämlich nun $AA'B$ als vertikalen Schnitt von A nach B , und ebenso in B die Sicht $BB'A$ als vertikalen Schnitt von B nach A .

Um dieses noch deutlicher zu zeigen, haben wir in Fig. 3. die beiden Normalschnitte (Vertikalschnitte) zwischen zwei Punkten A und B , nebst der dazwischen verlaufenden geodätischen Linie auf einem Umdrehungs-Ellipsoid mit der Abplattung 1:3 dargestellt.

Diese Fig. 3. ist nach einem Modell gemacht, dessen grosse Halbaxe $a = 15^{\text{cm}}$ und dessen kleine Halbaxe $b = 10^{\text{cm}}$ ist. Es ist also die Abplattung $a = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{3}$, die Excentricität $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = 0,745$ und $e' = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}} = 1,118$. Die Normal-schnitte und die geodätische Linie sind nach mathematischen Gesetzen konstruiert.

Fig. 3.



Schmiegungs-Ebene und Scheitel-Azimute.

Wenn wir die im vorstehenden, aus den Begriffen des Feld- und Landmessens hergeleitete Erklärung der geodätischen Linie in abstraktere Form fassen, so brauchen wir den Begriff der *Schmiegungs-Ebene* (Osculations-Ebene), d. h. einer Ebene, welche durch zwei aufeinander folgende Elemente einer Kurve, in unserem Falle zwei aufeinander folgende Elemente der geodätischen Linie geht.

Nach unserer Feld-Absteckungs-Erklärung ist dieses die Ebene, in welcher in jedem Punkte der rückwärts und vorwärts gerichtete Strahl eines Brechungswinkels von 180° liegt, und da diese Ebene durch die Vertikalaxe des Theodolits geht, ist sie Normal-Ebene der krummen Fläche, auf welcher die geodätische Linie abgesteckt gedacht wird; und deswegen gilt der Satz:

Die Schmiegungs-Ebene der geodätischen Linie ist überall Normal-Ebene der krummen Fläche, auf welcher die geodätische Linie verläuft.

Wenn in irgend einem Punkte der geodätischen Linie, z. B. B Fig. 1. S. 373, irgend eine Flächen-Tangente TT' gezogen wird, so sind die beiden Scheitelwinkel $bBT = \beta$ und $T'Bb = \beta$, welche die geodätische Linie mit dieser Tangente bildet, einander gleich.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als ob das selbstverständlich und bei allen Kurven der Fall wäre; allerdings sind Scheitelwinkel zwischen zweien Geraden,

also auch zwischen zwei Kurven-Tangenten in einem Punkte einander gleich, und es wäre also im Punkte B für jede Kurve $\beta = \beta'$, wenn ABC Fig. 1. S. 373 als ein Element der Kurve gilt; wenn dagegen der Kurventeil ABC aus zwei oder mehr Elementen bestehend angenommen wird, oder mit anderen Worten, wenn man in dem Punkte B die Krümmung der Kurve ABC untersuchen will, dann sind die beiden mit β bezeichneten Winkel nur für den Fall gleich, dass die beiden in dem Punkte B zusammentreffenden Elemente der Kurve gemeinsam in einer Ebene liegen, welche auch die Flächen-Normale des Punktes B enthält, d. h. Schmiegungs-Ebene in B ist, so dass dann auch diese Flächen-Normale in B als Schnitt der Schmiegungs-Ebene und der durch TT' gehenden Flächen-Normalebene erscheint.

All dieses ist nun bei der geodätischen Linie erfüllt, und wenn man daher eine geodätische Linie $ABCD \dots$ (Fig. 1. S. 373) durch eine Schar von anderen geodätischen Linien $MN, M'N'$ u. s. w. schneidet, so sind alle dabei auftretenden Schnittwinkel β und β in B , γ und γ in C u. s. w. einander gleich.

Wir werden als geodätische Linien $MN, M'N'$ u. s. w. von Fig. 1. S. 373, welche sämtlich von einer geodätischen Linie $ABCD$ geschnitten werden, später namentlich die Meridiane des Umdrehungs-Ellipsoids finden, wo α, β, γ die Azimute sind, und deswegen sprechen wir das, was über die Winkel β, β , sowie γ, γ u. s. w. erkannt wurde, sofort aus in dem Satze: *die geodätische Linie schneidet jeden Meridian unter gleichen Scheitel-Azimuten.*

Krümmungs-Linien.

Zur allgemeinen Klärung der Begriffe empfiehlt es sich, neben der geodätischen Linie auch noch die Krümmungslinie zu erwähnen. Eine auf einer krummen Fläche gezogene Krümmungslinie hat die Eigenschaft, dass je zwei aufeinander folgende, ihr zugehörige Flächen-Normalen sich schneiden, was bei der geodätischen Linie nicht der Fall ist, wie z. B. aus den zwei Punkten K_a und K_b Fig. 1. § 65. S. 361 zu ersehen ist.

Eine Krümmungslinie folgt stets der grössten oder der kleinsten Krümmung, deren Richtungen nach dem Eulerschen Satze (§ 33. S. 199) zu einander rechtwinklig sind; und daher bilden die sämtlichen Krümmungslinien einer Fläche zwei Scharen von Kurven, die sich überall gegenseitig rechtwinklig schneiden.

Ein Flächenpunkt, in welchem die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser (und damit auch alle Normalschnitts-Krümmungs-Halbmesser) gleich sind, heisst „Nabelpunkt“ der Fläche. Z. B. sind die beiden Pole des Umdrehungs-Ellipsoids Nabelpunkte in diesem Sinne; die Meridiane sind Krümmungslinien der einen Schar, und die Parallelkreise sind Krümmungslinien der zweiten Schar. Das strahlenförmige Ausgehen der Meridiane als erster Schar vom Pol als Nabelpunkt ist jedoch nur besonderer Fall und findet z. B. bei den vier Nabelpunkten des dreiaxigen Ellipsoids nicht mehr statt.

Wenn eine Krümmungslinie zugleich geodätische Linie sein soll, so muss sie ganz in einer Ebene liegen, weil jede Flächen-Normale sowohl von den beiden benachbarten Flächen-Normalen geschnitten werden, als auch in der Ebene zweier benachbarten Kurven-Elemente liegen muss, was bloss bei einer ebenen Kurve möglich ist; dagegen umgekehrt eine Krümmungslinie, die in einer Ebene liegt, ist deswegen nicht notwendig geodätische Linie.

Auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (sowie auf jeder anderen Umdrehungsfläche) ist jeder Meridian geodätische Linie und Krümmungslinie; ein Parallelkreis ist Krümmungslinie aber nicht geodätische Linie.

§ 69. Differential-Gleichungen der geodätischen Linie.

Nachdem wir am Schluss des vorigen § 68. den Satz von den gleichen Scheitel-Azimuten der geodätischen Linie gefunden haben, können wir die Differential-Gleich-

Näherung, da der Winkel β bei P_1 mit unbegrenzt abnehmendem ds gegen 90° konvergiert:

$$\text{aus (1):} \quad ds \cos \alpha = M d\varphi \quad (3)$$

$$\text{aus (2):} \quad ds \sin \alpha = N \cos \varphi d\lambda = p d\lambda \quad (4)$$

Um auch für $d\alpha$ eine Differential-Formel zu erhalten, betrachten wir das langgestreckte schmale Dreieck $PP'S$, welches oben bei S den Winkel $d\alpha$ enthält; dasselbe giebt genau in derselben Weise, wie früher bei der Kugel in (3a) § 61. S. 348 gezeigt wurde, die Gleichung:

$$d\alpha = d\lambda \sin \varphi \quad (5)$$

Dabei ist aber zu beachten, dass dieses $d\alpha$ zunächst nur gilt für die Differenz:

$$Q P' P - P_1 P P' = d\alpha \quad (6)$$

allein wegen des Satzes von den gleichen Scheitel-Azimuthen der geodätischen Linie, den wir eingangs citiert haben, sind die *beiden* in Fig. 2. bei P' mit α' bezeichneten Azimute einander gleich, oder noch ausführlicher geschrieben:

$$T' P' P'' = Q P' P, \text{ also nach (6): } T' P' P'' - P_1 P P' = d\alpha \quad (7)$$

Nun haben wir in (3), (4) und (5) bereits die gesuchten Differential-Gleichungen der geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid, und überzeugen uns auch, dass dieselben ähnliche Form haben wie die früheren Gleichungen (1), (2), (3) S. 347, welche für den Grosskreisbogen auf der Kugel gelten.

Die Meridian-Konvergenz $d\alpha$ kann man auch dadurch darstellen, dass man in Fig. 2. eine Parallele $P'Q'$ zu P_1P zieht, dann wird der kleine Winkel $Q'P'Q = d\alpha$ derselbe Wert wie $d\alpha$ an der Spitze S von Fig. 1. Dieses führt auch auf eine neue Formel für $d\alpha$, denn es ist nach Fig. 2.:

$$d\alpha = \frac{Q'Q}{P'Q'} = \frac{Q'Q}{ds \cos \alpha} \quad (8)$$

Nun ist $Q'Q'$ das Differential von PQ oder von P_1P' , wofür wir diesmal den Parallelkreis-Halbmesser $N \cos \varphi = p$ einführen wollen, indem $PQ = p d\lambda$ ist. Damit wird:

$$Q'Q' = -d(p d\lambda) = -dp d\lambda \quad (9)$$

Wir haben dieses negativ genommen, weil der Parallelkreisbogen bei wachsender Breite ($d\varphi$ positiv) abnimmt. Wir haben also nun aus (8) und (9):

$$d\alpha = -\frac{dp d\lambda}{ds \cos \alpha}$$

Wenn man hiezu wieder (4) nimmt, und $d\lambda$ eliminiert, so hat man:

$$p \cos \alpha d\alpha = -dp \sin \alpha \quad (10)$$

Dieses ist das Differential von:

$$p \sin \alpha = k \text{ (konstant)} \quad (11)$$

und damit haben wir als erste Integration der Differential-Gleichungen der geodätischen Linie einen wichtigen Satz (11), welcher in Worten lautet:

Das Produkt aus dem Parallelkreis-Halbmesser p in den Sinus des Azimuths α ist für den ganzen Lauf der geodätischen Linie konstant.

Dieser Satz, welchem auf der Kugel der Sinussatz der sphärischen Trigonometrie entspricht, giebt sofort Aufschluss über den Gesamtverlauf einer geodätischen Linie auf dem Umdrehungs-Ellipsoid.

Die beiden Faktoren p und $\sin \alpha$, deren Produkt nach (11) konstant $= k$ bleiben muss, schwanken selbst zwischen leicht angebbaren Grenzen. Das Azimut α kann im allgemeinen nicht $=$ Null werden (was dem besonderen Fall des Meridians entspricht), sondern hat seinen kleinsten Wert dann, wenn p seinen grössten Wert hat, d. h. im Äquator, wo $p = a$ ist; also:

$$\sin \alpha_{\min} = \frac{k}{a} \quad (12)$$

Der grösste Wert von α , d. h. 90° , entspricht dem kleinsten Wert von p , d. h. mit $\sin \alpha = 1$ hat man:

$$p_{\min} = k \quad (13)$$

Die Konstante k der Formel (11) ist also der Halbmesser des nördlichsten oder südlichsten Parallelkreises, den die geodätische Linie erreichen kann; und dadurch ist auch eine gewisse äusserste geographische Breite bestimmt, über welche eine geodätische Linie nicht hinaus kommen kann.

In Fig. 3. § 69. S. 375 ist diese äusserste Breite $= 60^\circ$. Die geodätische Linie berührt abwechselnd den nördlichen und den südlichen äussersten Parallelkreis, und da sie im allgemeinen nicht in sich selbst zurückkehrt, umläuft sie zwischen den genannten äussersten Parallelen das Sphäroid in unendlich vielen spiralförmigen Windungen.

Übersicht der Haupt-Formeln.

Wir wollen unsere gefundenen Formeln, die zu weiterem gebraucht werden, nochmals zusammenstellen:

$$(3) \quad ds \cos \alpha = M d\varphi \quad (\varphi)$$

$$(4) \quad ds \sin \alpha = N \cos \varphi d\lambda \quad (\lambda)$$

$$(5) \text{ und } (4) \quad d\alpha = d\lambda \sin \varphi \quad \text{oder} \quad d\alpha = \frac{ds}{N} \sin \alpha \tan \varphi \quad (\alpha)$$

$$(11) \quad p \sin \alpha = k \quad (p = N \cos \varphi) \quad (\psi)$$

Dabei ist M der Meridian-Krümmung-Halbmesser, N der Quer-Krümmung-Halbmesser und p der Parallelkreis-Halbmesser für die Breite φ .

Die letzte der vorstehenden Gleichungen, welche wir mit (ψ) bezeichnet haben, weil sie später auf die „reduzierte Breite“ ψ angewendet wird, kann man auch unmittelbar aus Fig. 2. herleiten, indem man in erster Näherung setzt:

$$P_1 P' = ds \sin \alpha \quad \text{und} \quad PQ = ds \sin \alpha' \quad (14)$$

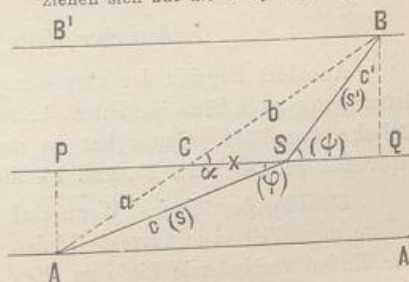
$$\text{also} \quad P_1 P' \sin \alpha' = PQ \sin \alpha, \text{ wobei } P_1 P' = p' d\lambda \text{ und } PQ = p d\lambda \quad (15)$$

$$\text{Daraus folgt} \quad p' \sin \alpha' = p \sin \alpha = \text{Konstant.} \quad (16)$$

§ 70. Die geodätische Linie als kürzeste Linie.

Im Anschluss an Fig. 1. nehmen wir zuerst folgende Aufgabe: Man habe ein Prisma mit den drei Kanten AA' , $B'B$, PQ , die wir (zur Vereinfachung der Anschauung) so gelegt denken, dass AA' und $B'B$ in einer horizontalen Ebene und PQ im Abstand h darüber sich befindet. Es soll auf der oberen Kante ein Punkt S so bestimmt werden, dass die Summe der schiefen Verbindungen $AS + SB = (s) + (s')$ nach zwei festen Punkten A und B möglichst klein werde.

Fig. 1.
Die eingeklammerten Masse (s) , (s') , (φ) , (ψ) beziehen sich auf die schiefen Ebenen.



Wenn die in Fig. 1. eingeschriebenen Masse a, b, c, c', x nebst dem Winkel α für die Grundriss-Ebene gelten, so hat man:

$$c^2 = a^2 + x^2 + 2ax \cos \alpha, \quad c'^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos \alpha \quad (1)$$

Wenn weiter (s) und (s') die *schiefen* Entfernungen AS und SB bedeuten, und h die Höhe von S über A und B , so ist:

$$(s)^2 = c^2 + h^2 \quad (s')^2 = c'^2 + h^2 \quad (2)$$

Nun soll $(s) + (s')$ ein Minimum werden, d. h.:

$$\sqrt{a^2 + x^2 + 2ax \cos \alpha} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx \cos \alpha} = \text{Minimum} \quad (3)$$

Wenn man dieses (3) nach der unabhängigen Veränderlichen x differenziert, so findet man:

$$\frac{x + a \cos \alpha}{(s)} + \frac{x - b \cos \alpha}{(s')} = 0 \quad (4)$$

Es ist aber nach Fig. 1. im Grundriss gemessen:

$$x + a \cos \alpha = PS, \quad b \cos \alpha - x = QS$$

Damit wird (4):

$$\frac{PS}{(s)} = \frac{QS}{(s')} \quad \text{oder} \quad \cos(\varphi) = \cos(\psi) \quad (5)$$

also: $(\varphi) = (\psi)$

Diese Gleichung (5) sagt: der kürzeste Weg auf zweien sich schneidenden Ebenen, über die Kante PQ hinweg, liegt so, dass auf der Scheitel-Kante PQ die beiden Winkel (φ) und (ψ) einander gleich sind.

Wenn wir diese einfache Betrachtung dazu anwenden, um die Differential-Eigenschaft der kürzesten Linie auf irgend einer krummen Fläche, insbesondere auf dem Umdrehungs-Ellipsoid, zu bestimmen, so können wir an Stelle der Kanten AA', BB' u. s. w. die aufeinander folgenden Meridiane treten lassen, und wir wissen nun, dass eine Kurve alle diese Meridiane auf kürzestem Wege überschreitet, wenn die dabei vorkommenden Scheitel-Azimute gleich sind, d. h. die kürzeste Linie hat, in Hinsicht auf die Azimute, dieselbe Eigenschaft wie die geodätische Linie, wie wir am Schluss von § 68. S. 376 gesehen haben.

Wir schliessen hieraus, dass die geodätische Linie und die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten identisch sind.

Dabei und bei allen ähnlichen Betrachtungen nehmen wir stillschweigend an, dass zwischen zwei Punkten nur *eine* geodätische Linie und nur *eine* kürzeste Linie bestehe, wir schliessen also Fälle, welche z. B. einem Centriwinkel über 180° auf der Kugel entsprechen, und ähnliche aus.

Geodätischer Kreis und geodätische Parallele.

Aus dem Begriffe der kürzesten Linie lassen sich durch einfache geometrische Betrachtung zwei Sätze herleiten, betreffend den „geodätischen“ Kreis und die „geodätische Parallele“. Gauss hat in der Abhandlung „Disquisitiones generales circa superficies curvas“, Art. 15. und 16. dieses so dargestellt:

Geodätischer Kreis. Wenn auf einer krummen Fläche von einem Anfangspunkte unendlich viele kürzeste Linien, alle von gleicher Länge ausgehen, so ist die ihre Enden verbindende Linie zu allen einzelnen normal.

Es seien in Fig. 2. AB und AB' zwei gleich lange kürzeste Linien, welche den unendlich kleinen Winkel bei A zwischen sich fassen; und wir wollen zunächst annehmen, die beiden Winkel bei B und B' seien *nicht* beide $= 90^\circ$, sondern weichen um eine endliche Grösse von 90° ab, so dass nach dem Gesetz der Stetigkeit der eine grösser, der andere kleiner als 90° wäre, z. B. $B = 90^\circ - \omega$. Dann nehmen wir auf der Linie BA einen Punkt C so an, dass $BC = BB' \operatorname{cosec} \omega$ wird; und insofern das unendlich kleine Dreieck $BB'C$ als eben angesehen werden kann, folgt hieraus $CB' = BC \cos \omega$ und ferner:

$$AC + CB' = AC + BC \cos \omega = AB - BC(1 - \cos \omega).$$

Es ist aber von vornherein angenommen, dass $AB = AB'$ sei, also:

$$AC + CB' = AB' - BC(1 - \cos \omega).$$

Hiernach würde man von A nach B' einen *kürzeren* Weg über C haben als unmittelbar AB' , was der Annahme, dass AB' selbst eine Kürzeste sei, widerspricht. Es kann also ω keine endliche Grösse sein, sondern die Winkel bei B und bei B' sind beide $= 90^\circ$.

Geodätische Parallele. Wenn auf einer krummen Fläche eine beliebige Linie gezogen wird, von deren einzelnen Punkten rechtwinklig zu der Linie und nach derselben Seite hin unendlich viele kürzeste Linien von gleicher Länge ausgehen, so schneidet die Kurve, welche die anderen Endpunkte derselben verbindet, sie alle rechtwinklig.

Man kann dieses ähnlich beweisen wie bei Fig. 2., indem man wieder einen kleinen Winkel ω einführt und zwei unendlich nahe benachbarte geodätische Linien wie zwei Gerade in der Ebene behandelt.

Dieser zweite Satz über die geodätische Parallele ist allgemeiner als der erste Satz vom geodätischen Kreis, welcher in dem zweiten Satze mit enthalten ist, wenn man nur als gegebene Linie einen unendlich kleinen um A beschriebenen Kreis annimmt.

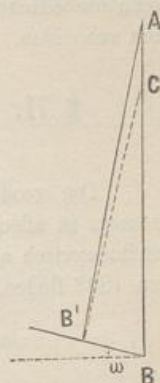
Ein naheliegendes Beispiel für geodätische Kreise und für Parallelen bietet das System der Meridiane und der Parallelkreise auf der Kugel oder auf dem Umdrehungs-Ellipsoid (und auf anderen Umdrehungs-Flächen). Die Parallelkreise sind geodätische Kreise in Bezug auf den Pol als Zentralpunkt der Meridiane und geodätische Parallelen in Bezug auf irgend einen Parallelkreis.

Ebenso wie diese Parallelkreise selbst *nicht* geodätische Linien sind, sind auch die geodätischen Kreise und geodätischen Parallelen im allgemeinen selbst nicht geodätische Linien.

Kürzeste Linie auf einer abwickelbaren Fläche.

Bei der geometrischen Betrachtung von Fig. 1. S. 379 sind die Kanten BB' und AA' selbst unwesentlich, es handelt sich nur um zwei Punkte A und B , welche über die dritte Kante PQ hinweg verbunden werden sollen. Durch A und B selbst können beliebige andere Gerade gehen. Man kann deswegen aus Fig. 1. auch schliessen, dass eine kürzeste Linie auf einer abwickelbaren Fläche nach Abwicklung in die Ebene eine Gerade sein muss (Gleichheit der Winkel (φ) und (ψ)). Die Kanten AA' , BB' und PQ , welche in unserer Fig. 1. parallel angenommen wurden, können auch auf

Fig. 2.

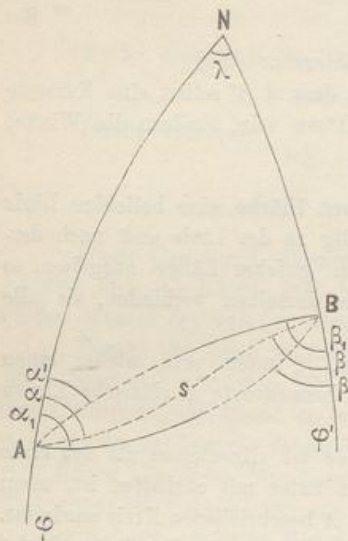


einer abwickelbaren Fläche parallel sein (Cylinder), im allgemeinen aber müssen, wenn die Fläche abwickelbar sein soll, je zwei aufeinander folgende solcher Geraden sich schneiden.

§ 71. Vergleichung der geodätischen Linie mit den Normal-Schnitten.

Die geodätische Linie erscheint auf kurze Erstreckung im Sinne des Feldmessens in allen ihren Teilen wie eine Gerade; würde man dieselbe in kurzen Strecken landmesserisch als polygonalen Zug aufnehmen, so würde man lauter Brechungswinkel von 180° finden, wie bei einer Geraden in der Ebene.

Fig. 1.



In Fig. 1. und Fig. 2. betrachten wir zwei Punkte A und B unter den Breiten φ und φ' mit dem Längenunterschied λ .

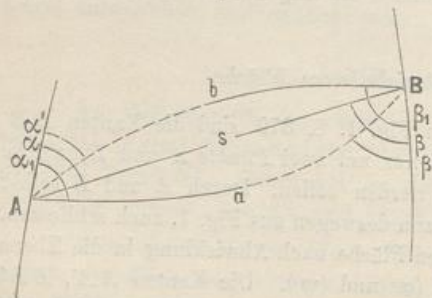
AaB ist der Normalschnitt von A nach B und BbA ist der Normalschnitt von B nach A , und dazwischen verläuft die geodätische Linie AsB , was im voraus gesagt sein soll.

Zur Veranschaulichung der Krümmungsverhältnisse denken wir uns in A einen Feldmesser mit einem richtig aufgestellten Theodolit als Beobachter, welcher die Azimute α' , α , α_1 der drei Kurven von dem als Gerade erscheinenden Meridian AN messen oder einstellen kann.

Der Normalschnitt AaB mit dem Azimut α_1 erscheint diesem in A mit einem Theodolit ausgerüsteten Feldmesser als eine Gerade, denn er hat die ganze Linie AaB beim Auf- und Niederkippen seines Fernrohrs in einer Sicht am Fadenkreuz, wie es das Wesen des Normalschnittes von A nach B verlangt.

Die geodätische Linie AsB mit dem Azimut α macht dem Feldmesser, der in A mit seinem Theodolit steht, in ihren ersten Teilen ebenfalls den Eindruck der Geraden, wie in Fig. 2. § 68. S. 374 angedeutet ist, dass streckenweise Aab , dann abc u. s. w. ohne Brechung erscheinen. Aber die Gegenseitlinie AbB mit dem

Fig. 1.



Azimute α' macht dem Feldmesser in A den Eindruck einer Kurve, denn nur von B aus erscheint AbB als Gerade ebenso wie umgekehrt AaB zwar in A als Gerade erscheint, aber in B als Kurve.

Wir wollen darauf ausgehen, den Krümmungshalbmesser R' zu bestimmen, unter welchem die Kurve BbA dem Beobachter in A erscheint, oder den Krümmungshalbmesser, unter welchem die Kurve AaB einem Feldmesser in B erscheint; beide werden nahezu gleich sein.

Dazu haben wir die weiteren Fig. 3. und 4. gezeichnet, von denen Fig. 4. ein Lageplan wie Fig. 2. und Fig. 3. der zugehörige Vertikalschnitt rechtwinklig zu Ab ist.

Wenn R der Krümmungshalbmesser des ebenen Gegen-Schnittes AbB in A ist, d. h. R in erster Näherung auch gleich dem Krümmungshalbmesser R nach dem Eulerschen Satze (1) § 32. S. 199, oder auch nur in erster Näherung gleich dem mittleren Erdkrümmungshalbmesser, was zunächst auch schon genügt, und wenn n der kleine Neigungswinkel der Schnittebene AbA gegen die Flächen-Normale AK_a im Punkte A ist, so wird die Kurve Ab in dem Horizont von A betrachtet (Fig. 4.) einen sehr viel grösseren Krümmungshalbmesser R' geben, welcher ist:

$$R' = \frac{R}{\sin n} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R'} = \frac{\sin n}{R} \quad (1)$$

Man nennt diese Beziehung in der analytischen Geometrie den „Satz von Meunier“; man kann ihn fast unmittelbar einsehen, wenn man nur bedenkt, dass die Ordinaten y der Kurve AC von Fig. 3. sich im Verhältnis $\sin n : 1$ verkürzt in Fig. 4. wieder finden, dass also auch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in der Nähe des Punktes A ebenso verkürzt werden und die Kurve Ab in Fig. 4. entsprechend flacher wird.

Innerhalb der nur einzuhaltenden ersten Näherung kann man (1) auch so schreiben:

$$\frac{1}{R'} = \frac{n}{R} \quad (2)$$

Wir müssen nun darauf ausgehen, die oben eingeführte Neigung n zwischen der Schnittebene AbB und der Flächennormalen AK_a zu bestimmen, und wir betrachten dazu die früheren Fig. 1. § 65. S. 361 und Fig. 1. § 66. S. 366.

Dort wird sich der fragliche Neigungswinkel n finden, und man wird auch

Fig. 3.

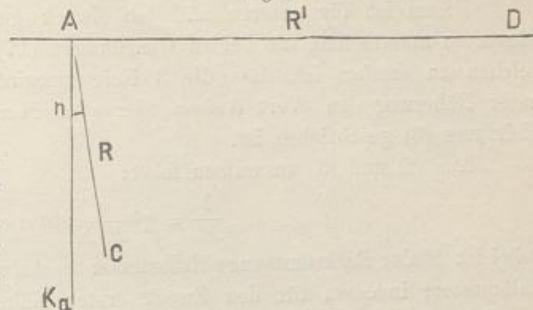
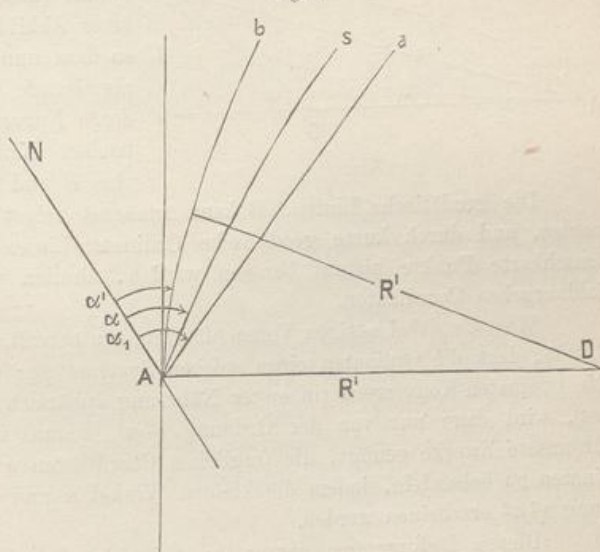


Fig. 4.



sehen, dass er in erster Näherung auch gleich dem Neigungswinkel v der beiden Schnittebenen ist, d. h. nach (14) § 65. S. 365 nehmen wir:

$$n = v = \eta^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \eta^2 \frac{s}{N} \sin \alpha \cos \alpha \quad (3)$$

Dieses ist für unseren nächsten Zweck genügend. Wollte man genauer verfahren, so müsste man die beiden Gleichungen (17) § 66. S. 370 zu Rate ziehen, aus welchen zu ersehen ist, dass die 3 Neigungswinkel n , n' und v alle zusammen in erster Näherung den Wert $\delta \sin \alpha$ oder $\eta^2 \sigma \sin \alpha \cos \alpha$ haben, wie in vorstehender Gleichung (3) geschrieben ist.

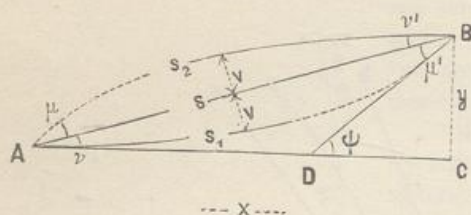
Aus (2) und (3) zusammen folgt:

$$\frac{1}{R'} = \eta^2 \frac{s}{R N} \sin \alpha \cos \alpha \quad (4)$$

Dabei ist R der Erdkrümmungs-Halbmesser im Azimut α und N der Querkrümmungs-Halbmesser; indessen für den Zweck erster Näherungsbestimmungen brauchen wir das nicht zu unterscheiden; wir wollen schlechthin $R = N = r$ gleich dem mittleren Erdkrümmungs-Halbmesser für eine Mittelbreite zwischen φ und φ' setzen, wie man es für Triangulierungen thut, also wird (4):

$$\frac{1}{R'} = \eta^2 \frac{s}{r^2} \sin \alpha \cos \alpha \quad (5)$$

Fig. 5.



Nun haben wir unsere 3 Linien nochmals dargestellt in Fig. 5. mit Annahme eines Koordinatensystems xy , das einer Abbildung in der Ebene entspricht, so dass nun die geodätische Linie AsB als Gerade erscheint, und die beiden anderen Kurven mit ihren relativen geodätischen Krümmungen sich als Kurven As_1B und Bs_2A darstellen.

Die geodätische Linie AB kann zunächst selbst als Abscissenaxe betrachtet werden, und durch kurze geodätische Ordinaten-Linien rechtwinklig hiezu, können benachbarte Punkte hierauf bezogen werden, ähnlich wie auf der Kugel bei den Soldnerschen Koordinaten.

Was die dabei nötigen Vernachlässigungen betrifft, so wissen wir von (15) § 65. S. 365, dass die Ordinaten eines solchen Systems nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^3$ sind. Die Ordinaten-Konvergenz (in erster Näherung sphärisch nach Fig. 3. S. 262 berechnet), wird dann nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^4$, woraus man weiter schliesst, dass es für unsere Zwecke genügt, die fraglichen Koordinaten wie *ebene* rechtwinklige Koordinaten zu behandeln, indem die kleinen Winkel μ und v u. s. w. nur von der Ordnung $\eta^2 \sigma^2$ erscheinen werden.

Diesen Bedingungen entsprechend ist das Koordinaten-System in Fig. 5. gezeichnet. AB ist das geradlinig erscheinende Abbild der geodätischen Linie AB ; jedoch als Abscissenaxe des Koordinaten-Systems wird nicht AB , sondern die Tangente AC des Normalschnittes von As_1B genommen, was mit gleicher Näherung zulässig ist.

Die Kurve As_1B denken wir uns dargestellt durch eine Gleichung $y = f(x)$, und die Reciproke des Krümmungs-Halbmessers R' dieser Kurve ist hinreichend ausgedrückt durch

$$\frac{1}{R'} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Da auch Abscisse x und Kurvenlänge $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ verwechselt werden dürfen, können wir mit Zuziehung von (5) auch schreiben:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = r^2 \frac{x}{r^2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{x}{q} \quad (6)$$

$$\text{wobei} \quad \frac{r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r^2} = \frac{1}{q} \quad (7)$$

Die Kurvengleichung (6) zweimal integriert giebt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2q} \quad (8)$$

$$y = \frac{x^3}{6q} \quad (9)$$

Integrations-Konstanten kommen nicht hinzu, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ werden soll.

Eine nicht zur Sache gehörige, aber den praktischen Landmesser rasch orientierende Zwischenbemerkung möchten wir nicht unterdrücken, nämlich dass die Kurve (9) nichts anderes ist, als die beim Eisenbahn-Kurven-Abstecken übliche cubische Parabel, welche als Übergangskurve zwischen Geraden und Kreisbögen dient.

Nun hat man nach dem Anblicke von Fig. 5.:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=s} = \frac{s^2}{2q} = \psi = \mu' + \nu \quad (10)$$

$$\text{und} \quad \left. y \right|_{x=s} = \frac{s^3}{6q} = \nu \quad (11)$$

Auch die Kurvenlänge $A s_1 B$, kurz $= s_1$ bezeichnet, lässt sich angeben, indem in Fig. 5. die Grenzabszisse $AC = c$ gesetzt wird,

$$s_1 = \int_0^c \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^c \left(1 + \frac{x^4}{8q^2}\right) dx$$

$$s_1 = c + \frac{c^5}{40q^2} \quad (12)$$

dazu die Länge der geodätischen Linie selbst:

$$s = \left. \sqrt{x^2 + y^2} \right|_{x=c} = \sqrt{c^2 + \frac{c^6}{36q^2}} = c \left(1 + \frac{c^4}{72q^2}\right)$$

$$s = c + \frac{c^5}{72q^2} \quad (13)$$

Die Differenz von (12) und (13) giebt, indem nun wieder $c = s$ gesetzt wird:

$$s_1 - s = \frac{s^5}{q^2} \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{72}\right) = \frac{s^5}{90q^2} \quad (14)$$

Damit ist alles gefunden, was in Fig. 5. sich auf die untere Kurve $A s_1 B$ bezieht; und um die entsprechende Untersuchung auch für die obere Kurve $A s_2 B$ zu führen, könnte man auch die Gleichung dieser Kurve aufsuchen nach den Bedingungen, dass die Kurve durch die beiden Punkte A und B gehen und in A denselben Krümmungs-Halbmesser R'_a haben soll, welcher die erste Kurve im Punkte B hat $= R'_b$, denn wir haben ja schon in (4) eingesehen, dass innerhalb der ersten Näherung $R'_a = R'_b$ ist. Dann ist aber auch die zweite Kurve s_2 überhaupt keine

andere, als die erste Kurve s_1 , nur liegt sie umgekehrt, und in Fig. 5. sind die Winkel $\mu = \mu'$ und $v = v'$.

Wir wollen auch noch den Querabstand v zwischen der geodätischen Linie und jeder ihrer Begleitkurven bestimmen (vgl. Fig. 5.). Dieser Querabstand ist nach (9):

$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{s^3}{6q} \right) - \frac{\left(\frac{s}{2} \right)^3}{6q} = \frac{s^3}{16q}$$

oder $2v = \frac{s^3}{8q}$ (15)

Nun ist in allen unseren Formeln noch die eine Konstante q nach (7) enthalten, welche wir aber nicht unmittelbar einsetzen wollen, denn es lässt sich besser alles in dem Excess s nach Fig. 6. § 65. S. 364 ausdrücken, nämlich:

$$\varepsilon = \frac{s^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2r^2}$$

also wegen (7):

$$\frac{1}{q} = 2\eta^2 \varepsilon$$

und damit geben die verschiedenen vorstehenden Formeln:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Winkel:} & \mu = \frac{2}{3} \eta^2 \varepsilon & r' = \frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon \\ & v = \frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon & \mu' = \frac{2}{3} \eta^2 \varepsilon \\ & \mu + v = \eta^2 \varepsilon & \mu' + v' = \eta^2 \varepsilon \end{array} \right\} \quad (16)$$

$$\text{Kurvenlängen} \quad s_1 - s = s_2 - s = \frac{2}{45} \eta^4 s \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^2 \quad (17)$$

$$\text{Querabweichung} \quad 2v = \frac{1}{4} \eta^2 s \frac{\varepsilon}{\rho} \quad (18)$$

Der letzte Ausdruck stimmt überein mit dem früheren (15) § 65. S. 365.

Zu einem ersten Zahlenbeispiele wollen wir nehmen $s = 100\,000^m$ und $\varphi = 45^\circ$, sowie $\alpha = 45^\circ$; damit wird $\log r = 6.8046$, $\eta^2 = 0.00336$, und damit zunächst $\varepsilon = 12.66''$

$$\begin{array}{ll} \mu = \mu' = 0.028'' & v = v' = 0.014'' \\ 2v = 0.005^m & s_1 - s = s_2 - s = 0.00000\,00002^m \end{array}$$

Der Wert $2v = 5^m$ stimmt mit dem früheren (16) § 65. S. 365. Ein zweites mehrfach von uns benütztes Beispiel mit der Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$, den beiden Endbreiten $49^\circ 30'$ und $50^\circ 30'$ und $\lambda = 1^\circ$ giebt: $s = 132\,315^m$ $\alpha = 32^\circ 48'$

$$\begin{array}{ll} \log r = 6.80489 & \log \eta^2 = 7.44345 \\ \mu = \mu' = 0.0373'' & v = v' = 0.0187'' \\ 2v = 0.009^m & s_1 - s = s_2 - s = 0.00000\,00004^m \end{array}$$

Diese Zahlenbeispiele zeigen, dass für die gewöhnlichen Dreiecksseiten bei dem heutigen Stande der Messkunde die kleinen Winkel μ und v vernachlässigt werden können. Die Differenz $s_1 - s$ wäre nicht einmal mikroskopisch messbar.

Höhere Glieder der vorstehenden Formeln.

Man kann die Entwicklungen, welche im vorstehenden immer nur die ersten Näherungen berücksichtigt haben, auch auf diesem Wege noch weiter treiben, wie in

unserer 3. Auflage 1890, § 75. gezeigt worden ist; es hat aber keinen praktischen Zweck, und ist deswegen im vorstehenden nicht mehr berücksichtigt. Nur eine Sache davon wollen wir wenigstens mit Worten behandeln.

In Fig. 6. ist der besondere Fall behandelt, dass die Punkte *A* und *B*, zwischen welchen die geodätische Linie und die beiden Normalschnitte gezogen sind, auf gleicher Breite liegen.

In diesem Falle fallen die beiden Normalschnitte (vertikale Schnitte) in einen zusammen, und die geodätische Linie kann daher nicht mehr zwischen den beiden liegen.

Dass die geodätische Linie nicht selbst mit diesen beiden ebenen Schnitten zusammenfallen kann, ist unmittelbar einzusehen, insofern die geodätische Linie in diesem Fall nicht selbst eine ebene Kurve sein kann.

Die geodätische Linie verläuft dann über dem vertikalen Schnitte, aber mit so kleinen Winkeln ζ , dass dieselben innerhalb der Näherungen unserer μ und ν von (16) gar nicht mehr zum Ausdruck kommen, die genauere Entwicklung giebt nämlich:

$$\zeta = \eta^2 \frac{s^3}{24 r^3} \tan \varphi = e'^2 \frac{s^3}{24 r^3} \sin \varphi \cos \varphi$$

Denkt man sich eine Dreiecksseite $s = 100\,000^m$ in der Breite $\varphi = 45^\circ$, so giebt dieses nur $\zeta = 0,0001''$.

§ 72. Bedeutung der geodätischen Linie für die praktischen Vermessungen.

Die geodätische Linie ist niemals Gegenstand der unmittelbaren Messung, sondern nur der Berechnung, und dadurch mittelbar ein Hilfsmittel für ausgedehnte geodätische Messungen.

Bei der Messung der einzelnen Dreiecke ist von geodätischen Linien nicht die Rede, denn die Sichten der Theodolit-Messung erfolgen zweifellos in vertikalen Schnitten, und nicht in geodätischen Linien; und auch die astronomischen Azimut-Messungen beziehen sich nicht auf die geodätische Linie, sondern ebenfalls auf vertikale Schnitte.

Man kann die gemessenen Azimute und die gemessenen Horizontal-Winkel von den vertikalen Schnitten auf die geodätischen Linien reduzieren, wie im vorigen § 71. gezeigt worden ist; die Reduktion beträgt sehr wenig, nämlich für 45° Breite und Azimut 45° bei einer Entfernung von $100\,000^m$ nur $0,04''$ im Azimut, so dass diese Reduktion meist vernachlässigt wird.

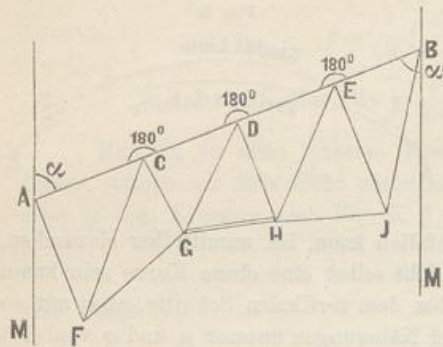
Sei es nun, dass man diese kleinen Reduktionen (nebst anderen, z. B. Höhenreduktion von § 67) vernachlässigt, oder sie in Rechnung bringt; jedenfalls kann man letzteres thun, und an Stelle eines in Normalschnitten gemessenen Dreiecks-Netzes kann man also nun ein Dreiecks-Netz setzen, dessen Seiten geodätische Linien sind, und dessen Winkel von den horizontalen Tangenten der geodätischen Linien in den Eckpunkten eingeschlossen werden.

Wie man ein solches sphäroidisches Dreiecks-Netz geodätischer Linien in theoretischer Strenge berechnen kann, werden wir erst in einem späteren Kapitel kennen lernen; in der Praxis genügt fast immer die sphärische Dreiecks-Berechnung.



Um nun weiter zu langen geodätischen Linien überzugehen, welche die Ausdehnung nicht bloss einzelner Dreiecks-Seiten, sondern ganzer Dreiecks-Ketten haben, wollen wir nach Fig. 1. die Annahme machen, eine Dreiecks-Kette zwischen den

Fig. 1.



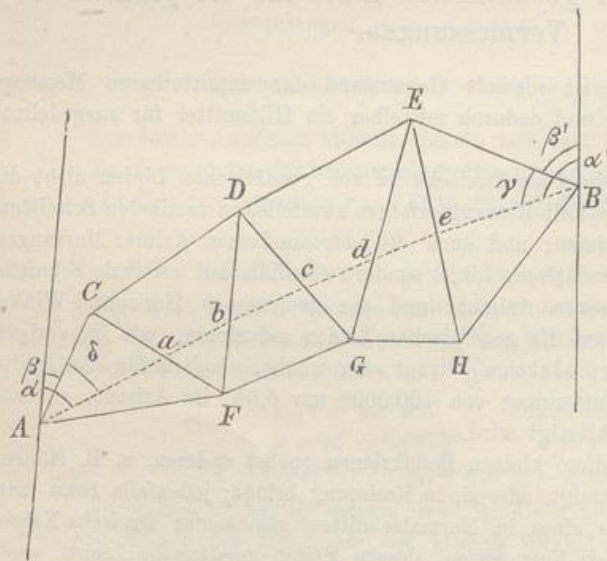
Punkten A und B enthalte einen Zug $ACDEB$, welcher in C , D und E bei der Messung zufällig lauter Winkel von 180° geliefert habe.

Dann kann die Linie $AC + CD + DE + EB = AB$, mit den Azimuten α und α' an ihren Endpunkten geradezu als eine lange geodätische Linie weiter behandelt werden, indem man in den einzelnen Strecken AC , CD u. s. w. die Azimut-Reduktionen zwischen der geodätischen Linie und den Normal-schnitten entweder vernachlässigt, oder in Rechnung gebracht denkt.

Ohne diese kleinen Reduktionen erscheinen die Strecken AC , CD , DE u. s. w. mit Brechungs-Winkeln von 180° , als Elemente der geodätischen Linie AD in dem differentialen Sinne der früheren Fig. 2. § 68. S. 374.

Die in Fig. 1. gemachte Annahme, dass bei der Triangulierung zwischen A und B in den Punkten C , D und E Brechungs-Winkel von 180° erhalten werden, kann als Vorbereitung des allgemeineren Falles von Fig. 2. dienen, wobei die ge-

Fig. 2.



dätische Linie zwischen A und B nicht mit Dreiecks-seiten selbst zusammenfällt, sondern verschiedene Dreiecks-Seiten in den Punkten $a b c d e$ schneidet, und am Anfang und am Ende gewisse Winkel δ und γ mit Dreiecks-Seiten bildet.

Sobald man einen dieser Winkel δ und γ wüsste, könnte man die ganze geodätische Linie $A a b c d e B$ sphärisch berechnen, indem man die einzelnen Strecken als Seiten sphärischer Dreiecke behandelte, z. B. Aa als Seite des Dreiecks ACa oder AFa , dann ab als Seite des Dreiecks aFb u. s. w.

Die Azimut-Übertragung in a , b u. s. w. müsste stets nach dem Gesetz der gleichen Scheitel-Winkel geschehen, also so, dass Winkel $AaC = \text{Winkel } baF$ u. s. w.

All dieses setzt, wie schon erwähnt, voraus, dass man den einen Winkel δ oder γ kenne, und da das in Wirklichkeit nicht genau der Fall ist, kann das ganze Verfahren nur mittelbar angewendet werden. Man rechnet nämlich die ganze Dreiecks-

Kette, mit Annahme eines mittleren Krümmungs-Halbmessers zuerst sphärisch durch, und dadurch sind auch die beiden Winkel δ und γ sphärisch bestimmt. Man kann zu ihrer Ausmittlung z. B. Soldnersche oder konforme Coordinaten oder sphärische geographische Coordinaten, oder irgend welche andere geschlossene oder entwickelte Formeln der sphärischen Trigonometrie anwenden; erste Näherungen der Winkel δ und γ werden sich jedenfalls finden lassen.

Mit einer solchen Näherung, z. B. für δ , beginnt man nun eine zweite schärfere Rechnung, formell auch sphärisch, aber so, dass in jedem der Dreiecke AaF , baF , u. s. w. ein besonderer, der mittleren geographischen Breite des Dreiecks entsprechender Krümmungs-Halbmesser angewendet wird. Wenn dann am Ende das letzte Dreieck EeB oder eHB nicht schliesst, d. h. wenn man den Endpunkt B verfehlt hat, so kann man aus der Querabweichung und der Gesamtlänge AB leicht eine Verbesserung berechnen, mit welcher die ganze Rechnung wiederholt und dann wohl zum Schluss gebracht werden kann.

Stimmt diese ganze Rechnung von A bis B in sich, sind also auch die Winkel δ und γ bekannt, so kann man auch die in A und B etwa gemessenen Azimute β und β' , welche sich als astronomische Messungen auf die Dreiecks-Seiten AC und BE beziehen, nun auf die Azimute α und α' der geodätischen Linie AB , bzw. BA reduzieren, denn es ist:

$$\alpha = \beta + \delta, \quad \alpha' = \beta' + \gamma \quad (1)$$

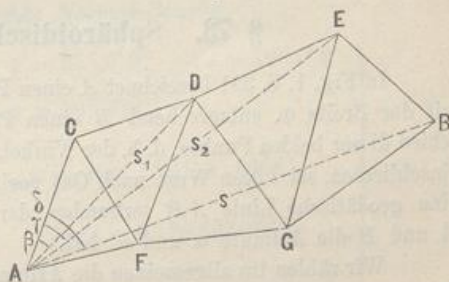
Sphärische Polar-Coordinaten.

Von den verschiedenen möglichen Formen der sphärischen Coordinaten, die wir erwähnt haben, wollen wir eine Form, nämlich sphärische Polar-Coordinaten noch besonders betrachten, weil diese Form bei Bessels „Gradmessung in Ostpreussen“ zur Anwendung kam und zu manchen Erörterungen Veranlassung gegeben hat.

Denken wir uns in Fig. 3., welche im wesentlichen dieselbe Bedeutung hat, wie Fig. 2., ausser AB auch noch die Linien AD und AE gezogen, so ist klar, dass man das Dreieck ACD berechnen kann aus den zwei Seiten AC , CD und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bei C . Damit hat man die Entfernung $AD = s_1$ und auch den Winkel β bei A , und alle Winkel bei D .

Man kann daher nun ein zweites langgestrecktes Dreieck ADE berechnen, welches die neue Entfernung $AE = s_2$, den kleinen Winkel $\gamma - \beta$ bei A und alle Winkel bei E liefert. Ein letztes langgestrecktes Dreieck endlich liefert die Entfernung $AB = s$, den kleinen Winkel $\delta - \gamma$ bei A , also auch δ selbst, und alle Winkel bei B . Hierbei kann man die einzelnen Dreiecke nicht bloss sphärisch, sondern auch sphäroidisch berechnen. Ein Zahlenbeispiel zu dem Besselschen Verfahren gab unsere 2. Auflage 1878, S. 340 bis 342, und verschiedene Citate hiezu gab 3. Auflage 1890, S. 385.

Fig. 3.



Sphäroidische Coordinaten.

Ein letztes, und wohl das beste Verfahren, lange geodätische Linien aus Dreiecksketten zu berechnen, können wir durch vorgreifendes Citieren der Theorien unserer nächsten Kapitel angeben: Man rechnet die geodätische Übertragung von Länge, Breite und Azimut schrittweise von Dreiecksseite zu Dreiecksseite durch die ganze Kette hindurch nach § 77. (oder auch nach § 74.) und dann kann man die ganze Linie vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt nach Kap. VII. berechnen.

Bei diesem Verfahren braucht man, ohne indirekt rechnen zu müssen, nicht *mehr* Voraussetzungen zu machen, in Bezug auf die Erddimensionen und auf die Breiten des Anfangspunktes und das Azimut der Anfangs-Richtung, als unbedingt nötig ist. Eine völlig voraussetzungslose Berechnung geodätischer Linien giebt es nicht.

Über die Bedeutung der geodätischen Linie für die praktische Geodäsie im allgemeinen lässt sich so viel sagen: Die Einführung der Theorie der geodätischen Linie in der Geodäsie ist keine Notwendigkeit, wie z. B. die Theorie der geradlinigen ebenen Dreiecke es für die ebene Triangulierung ist; man könnte die Aufgaben der höheren Geodäsie auch z. B. durch Sehnens-Dreiecke und polyedrisch-räumliche Punkt-Bestimmungen und in noch manch anderer Weise behandeln; allein die geodätische Linie hat sich bis jetzt als bestes Mittel bewährt, zwischen den unmittelbaren geodätischen und astronomischen Messungen einerseits und den Annahmen über die Erdoberfläche andererseits, die nötigen mathematischen Beziehungen herzustellen.

Kapitel VII.

Geodätische Coordinaten.

Vorbemerkung. Wir werden in diesem Kapitel im wesentlichen das mit der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid behandeln, was schon in Kapitel V. mit dem Normalschnitt auf der Kugel gemacht worden ist.

Der Übergang von der Kugel zum Ellipsoid von § 54. mit Hilfe des elliptischen Meridianbogens und des „verkürzten“ Breitenunterschiedes $\frac{\Delta \varphi}{\nu^2}$ war ein erster Notbehelf, welcher genügte, um die sphärischen Coordinaten-Formeln dem Ellipsoid anzupassen und in übertragener Form für erstes Verständnis unserer Landesvermessungen plausibel zu machen. Mit der Theorie der geodätischen Linie wird all das in neuer und heller Beleuchtung erscheinen.

§ 73. Sphäroidisches Polar-Dreieck.

In Fig. 1. S. 391 bezeichnet A einen Punkt des Umdrehungs-Ellipsoids (Sphäroids) mit der Breite φ , entsprechend B einen Punkt mit der Breite φ' ; der Längen-Unterschied dieser beiden Punkte, d. h. der Winkel, welchen ihre Meridian-Ebenen NA und NB einschliessen, sei l (von West nach Ost positiv gezählt). Die beiden Punkte sind durch eine geodätische Linie AB verbunden, deren lineare Grösse $= s$ sei und welche bei A und B die Azimute α und α' hat.

Wir zählen im allgemeinen die Azimute von Nord über Ost, wie α im Punkt A ; und das gleichfalls nordöstlich gezählte Azimut im Punkte B wäre also $= \alpha' \pm 180^\circ$, wenn α' der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel ist.