



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

Kapitel VII. Geodätische Koordinaten.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

*Sphäroidische Coordinaten.*

Ein letztes, und wohl das beste Verfahren, lange geodätische Linien aus Dreiecksketten zu berechnen, können wir durch vorgreifendes Citieren der Theorien unserer nächsten Kapitel angeben: Man rechnet die geodätische Übertragung von Länge, Breite und Azimut schrittweise von Dreiecksseite zu Dreiecksseite durch die ganze Kette hindurch nach § 77. (oder auch nach § 74.) und dann kann man die ganze Linie vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt nach Kap. VII. berechnen.

Bei diesem Verfahren braucht man, ohne indirekt rechnen zu müssen, nicht *mehr* Voraussetzungen zu machen, in Bezug auf die Erddimensionen und auf die Breiten des Anfangspunktes und das Azimut der Anfangs-Richtung, als unbedingt nötig ist. Eine völlig voraussetzungslose Berechnung geodätischer Linien giebt es nicht.

Über die Bedeutung der geodätischen Linie für die praktische Geodäsie im allgemeinen lässt sich so viel sagen: Die Einführung der Theorie der geodätischen Linie in der Geodäsie ist keine Notwendigkeit, wie z. B. die Theorie der geradlinigen ebenen Dreiecke es für die ebene Triangulierung ist; man könnte die Aufgaben der höheren Geodäsie auch z. B. durch Sehnens-Dreiecke und polyedrisch-räumliche Punkt-Bestimmungen und in noch manch anderer Weise behandeln; allein die geodätische Linie hat sich bis jetzt als bestes Mittel bewährt, zwischen den unmittelbaren geodätischen und astronomischen Messungen einerseits und den Annahmen über die Erdoberfläche andererseits, die nötigen mathematischen Beziehungen herzustellen.

## Kapitel VII.

## Geodätische Coordinaten.

*Vorbemerkung.* Wir werden in diesem Kapitel im wesentlichen das mit der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid behandeln, was schon in Kapitel V. mit dem Normalschnitt auf der Kugel gemacht worden ist.

Der Übergang von der Kugel zum Ellipsoid von § 54. mit Hilfe des elliptischen Meridianbogens und des „verkürzten“ Breitenunterschiedes  $\frac{\Delta \varphi}{\nu^2}$  war ein erster Notbehelf, welcher genügte, um die sphärischen Coordinaten-Formeln dem Ellipsoid anzupassen und in übertragener Form für erstes Verständnis unserer Landesvermessungen plausibel zu machen. Mit der Theorie der geodätischen Linie wird all das in neuer und heller Beleuchtung erscheinen.

## § 73. Sphäroidisches Polar-Dreieck.

In Fig. 1. S. 391 bezeichnet  $A$  einen Punkt des Umdrehungs-Ellipsoids (Sphäroids) mit der Breite  $\varphi$ , entsprechend  $B$  einen Punkt mit der Breite  $\varphi'$ ; der Längen-Unterschied dieser beiden Punkte, d. h. der Winkel, welchen ihre Meridian-Ebenen  $NA$  und  $NB$  einschliessen, sei  $l$  (von West nach Ost positiv gezählt). Die beiden Punkte sind durch eine geodätische Linie  $AB$  verbunden, deren lineare Grösse  $= s$  sei und welche bei  $A$  und  $B$  die Azimute  $\alpha$  und  $\alpha'$  hat.

Wir zählen im allgemeinen die Azimute von Nord über Ost, wie  $\alpha$  im Punkt  $A$ ; und das gleichfalls nordöstlich gezählte Azimut im Punkte  $B$  wäre also  $= \alpha' \pm 180^\circ$ , wenn  $\alpha'$  der in Fig. 1. eingeschriebene Winkel ist.



Indem man in solchen Fällen unterscheidet diesseitiger Punkt  $A$  und jenseitiger Punkt  $B$ , kann man auch festsetzen, dass im diesseitigen Punkt  $\alpha$  von Nord über Ost gezählt und im jenseitigen Punkt stets  $\pm 180^\circ$  zu dem Wert  $\alpha'$  zuzufügen ist, den die Formeln geben. (Mit anderen Worten: Wir wollen die Azimute nordöstlich zählen, aber das dabei für den jenseitigen Punkt nötige Zusetzen von  $\pm 180^\circ$  in den Formeln weglassen.)

Zwischen diesen 6 Grössen,  $\varphi, \varphi', l, s, \alpha, \alpha'$ , bestehen Beziehungen von ähnlicher Art wie für das *sphärische* Dreieck Fig. 1. § 60. S. 338, welche hauptsächlich in zwei Aufgabenformen sich ausdrücken, nämlich *erstens*: gegeben  $\varphi, \varphi'$  und  $l$ , gesucht  $s, \alpha$  und  $\alpha'$  oder *zweitens*: gegeben  $\varphi, s$  und  $\alpha$ ; gesucht  $\varphi', l$  und  $\alpha'$ .

Die Lösungen dieser beiden Aufgaben gehen mehrfach ineinander über.

Ehe wir an die verschiedenen Auflösungen der Aufgabe selbst gehen, schicken wir einige Beispiele hiefür voraus (ähnlich wie wir dieses auch für die sphärische Aufgabe S. 338 gethan haben). Dass diese Beispiele in sich richtig sind, können wir jetzt noch nicht beweisen; dieses wird sich aus der übereinstimmenden Berechnung nach den verschiedenen später zu entwickelnden Methoden ergeben.

Fig. 1.



#### I. Kleines sphäroidisches Normal-Beispiel.

$$\left. \begin{array}{ll} \varphi = 49^\circ 30' 0'' & \varphi' = 50^\circ 30' 0'' \quad l = 1^\circ 0' 0'' \\ \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' 0'' & \varphi' - \varphi = 1^\circ 0' 0'' \\ \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 48' 20,4580'' & \alpha' - \alpha = 0^\circ 45' 57,8942'' \\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58,9471'' & \log s = 5.121\,6103\,131 \\ \alpha' = 33^\circ 11' 19,4051'' & s = 132\,315,375'' \\ \alpha = 32^\circ 25' 21,5109'' & \end{array} \right\} \quad (1)$$

#### II. Grosses sphäroidisches Normal-Beispiel.

$$\left. \begin{array}{ll} \varphi = 45^\circ 0' 0'' & \varphi' = 55^\circ 0' 0'' \quad l = 10^\circ 0' 0'' \\ \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 50^\circ 0' 0'' & \varphi' - \varphi = 10^\circ 0' 0'' \\ \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 32^\circ 54' 11,4302'' & \alpha' - \alpha = 7^\circ 41' 51,9408'' \\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 3^\circ 50' 55,9704'' & \log s = 6.120\,6674\,805 \\ \alpha' = 36^\circ 45' 7,4006'' & s = 1\,320\,284,366'' \\ \alpha = 29^\circ 3' 15,4598'' & \end{array} \right\} \quad (2)$$



Ein Beispiel, das zwischen den beiden vorhergehenden liegt, ist von den Mecklenburgischen Geodäten als Kontroll-Diagonale über das ganze Land gerechnet worden. („Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 240–242). Dasselbe giebt mit den Bezeichnungen von Fig. 1. folgendes:

### III. Mecklenburgische Diagonale.

$$\left. \begin{array}{lll} \varphi = 53^\circ 0' & \varphi' = 54^\circ 30' & l = 3^\circ 30' \\ \frac{\varphi' + \varphi}{2} = 53^\circ 45' & \varphi' - \varphi = 1^\circ 30' & l = 12\,600'' \\ \frac{\alpha' + \alpha}{2} = 54^\circ 8' 20,77402'' & \alpha' - \alpha = 2^\circ 48' 23,18112'' & \\ \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 1^\circ 24' 41,59056'' & \log s = 5.454\,5946\,712 & \\ \alpha' = 55^\circ 33' 2,36458'' & s = 284\,835,8642^m & \\ \alpha = 52^\circ 43' 39,18346'' & & \end{array} \right\} \quad (3)$$

Ein kleines Beispiel, mit nicht runden Zahlen, nehmen wir aus Bohnenbergers Triangulierung von Württemberg:

### IV. $P = \text{Hornisgrinde.}$ $P' = \text{Tübingen.}$

$$\left. \begin{array}{ll} \varphi = 48^\circ 36' 21,8966'' & \varphi' = 48^\circ 31' 12,4000'' \\ l = 0^\circ 50' 55,5537'' = 3055,5537'' & \\ \alpha = 98^\circ 21' 29,9583'' & \alpha' = 98^\circ 59' 40,6800'' \\ \log s = 4.801\,8443\,0 & s = 63\,364,218^m \end{array} \right\} \quad (4)$$

Endlich nehmen wir noch ein grösseres Beispiel mit nicht runden Zahlen, welches auch schon anderwärts mehrfach benützt worden ist.

### V. $P = \text{Berlin.}$ $P' = \text{Königsberg.}$

$$\left. \begin{array}{ll} \varphi = 52^\circ 30' 16,7'' & \varphi' = 54^\circ 42' 50,6'' \\ l = 7^\circ 6' 0'' = 25\,560'' & \\ \alpha = 59^\circ 33' 0,6892'' & \alpha' = 65^\circ 16' 9,3650'' \\ \log s = 5.724\,2591\,353 & s = 529\,979,578^m \end{array} \right\} \quad (5)$$

## § 74. Reihen-Entwicklungen nach Potenzen von $s$ .

(Bezeichnungen nach Fig. 1. S. 391.)

Die drei Differential-Gleichungen, welche wir in § 69. S. 379 entwickelt haben, sind, wenn wir nun den Längenunterschied mit  $l$  bezeichnen, folgende:

$$ds \cos \alpha = M d\varphi \quad (1)$$

$$ds \sin \alpha = N \cos \varphi dl \quad (2)$$

$$d\alpha = dl \sin \varphi \quad (3)$$

Dabei ist  $M$  der Meridian-Krümmungs-Halbmesser und  $N$  der Quer-Krümmungs-Halbmesser für die Breite  $\varphi$ , d. h. wie immer nach § 32. S. 197:

$$M = \frac{c}{V^3}, \quad N = \frac{c}{V}, \quad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (4)$$



Wenn man diese Bezeichnung  $V$  einführt, und zugleich  $dl$  aus (3) mittelst (2) eliminiert, so erhält man aus (1), (2) und (3):

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{c} V^3 \cos \alpha \quad (5)$$

$$\frac{dl}{ds} = \frac{1}{c} V \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \quad (6)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{c} V \sin \alpha \tan \varphi \quad (7)$$

Hierauf kann man eine Entwicklung nach dem Maclaurinschen Satze gründen, ganz entsprechend der früheren sphärischen Entwicklung von § 65. Wir haben bis zur fünften Potenz:

$$\varphi' - \varphi = \left[ \frac{d\varphi}{ds} \right] s + \left[ \frac{d^2\varphi}{ds^2} \right] \frac{s^2}{2} + \left[ \frac{d^3\varphi}{ds^3} \right] \frac{s^3}{6} + \left[ \frac{d^4\varphi}{ds^4} \right] \frac{s^4}{24} + \left[ \frac{d^5\varphi}{ds^5} \right] \frac{s^5}{120} + \dots \quad (8)$$

$$l = \left[ \frac{dl}{ds} \right] s + \left[ \frac{d^2l}{ds^2} \right] \frac{s^2}{2} + \left[ \frac{d^3l}{ds^3} \right] \frac{s^3}{6} + \left[ \frac{d^4l}{ds^4} \right] \frac{s^4}{24} + \left[ \frac{d^5l}{ds^5} \right] \frac{s^5}{120} + \dots \quad (9)$$

$$\alpha' - \alpha = \left[ \frac{d\alpha}{ds} \right] s + \left[ \frac{d^2\alpha}{ds^2} \right] \frac{s^2}{2} + \left[ \frac{d^3\alpha}{ds^3} \right] \frac{s^3}{6} + \left[ \frac{d^4\alpha}{ds^4} \right] \frac{s^4}{24} + \left[ \frac{d^5\alpha}{ds^5} \right] \frac{s^5}{120} + \dots \quad (10)$$

Da wir bei den fortgesetzten Differentiierungen stets auch die Ableitung von  $V$  brauchen (vgl. hierzu auch das frühere § 34. S. 208), schicken wir diese voran:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad , \quad \frac{dV}{d\varphi} = - \frac{e'^2 \sin \varphi \cos \varphi}{V} \quad (11)$$

Zur Abkürzung werden wir immer schreiben:

$$e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2 \quad \text{und} \quad \tan \varphi = t \quad (12)$$

$$\text{und damit wird (11):} \quad V^2 = 1 + \eta^2 \quad \frac{dV}{d\varphi} = - \frac{\eta^2}{V} t \quad (13)$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = - \eta^2 \frac{V^2}{c} \cos \alpha t \quad (14)$$

Nun leiten wir (5) weiter ab:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^3}{c} \cos \alpha \quad , \quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{3V^2}{c} \frac{dV}{ds} \cos \alpha - \frac{V^3}{c} \sin \alpha \frac{d\alpha}{ds}$$

also wegen (14) und (7):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= -3\eta^2 \frac{V^4}{c^2} \cos^2 \alpha t - \frac{V^4}{c^2} \sin^2 \alpha t \\ \frac{d^2\varphi}{ds^2} &= -\frac{V^4}{c^2} (\sin^2 \alpha t + 3\cos^2 \alpha \eta^2 t) \end{aligned} \quad (15)$$

Wenn wir dieses weiter ableiten, so ist es nützlich, die Funktion  $\eta^2$ , welche nach (12) Funktion von  $\varphi$  ist, stets so zu behandeln (ebenso wie früher S. 208):

$$\frac{d\eta^2}{d\varphi} = -2\eta^2 t \quad \text{allgemeiner} \quad \frac{d\eta^n}{d\varphi} = -n\eta^n t \quad (16)$$

In dieser Weise leiten wir (15) nochmals ab (mit Beachtung, dass  $V^3 = V(1 + \eta^2)$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi}{ds^3} &= -\frac{4V^3}{c^2} \left( -\eta^2 \frac{V^2}{c} \cos \alpha t \right) \left\{ \sin^2 \alpha t + 3\cos^2 \alpha \eta^2 t \right\} \\ &\quad - \frac{V^4}{c^2} \left\{ 2\sin \alpha \cos \alpha \frac{V}{c} \sin \alpha t^2 + \sin^2 \alpha (1 + t^2) \frac{V}{c} \cos \alpha (1 + \eta^2) \right. \\ &\quad \left. - 6\cos \alpha \sin \alpha \frac{V}{c} \sin \alpha t \eta^2 t + 3\cos^2 \alpha (-2\eta^2 t^2 + \eta^2 (1 + t^2)) \frac{V}{c} \cos \alpha (1 + \eta^2) \right\} \end{aligned}$$



Wenn man dieses ordnet, so findet man:

$$\frac{d^3 \varphi}{ds^3} = -\frac{V^5 \cos \alpha}{c^3} \left\{ \sin^2 \alpha (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2) + \cos^2 \alpha (3\eta^2 - 3\eta^2 t^2 + 3\eta^4 - 15\eta^4 t^2) \right\} \quad (17)$$

In gleicher Weise werden auch die anderen Ableitungen behandelt, so dass wir bis zur dritten Ordnung einschliesslich erhalten:

$$\frac{d^2 l}{ds^2} = \frac{2V^2}{c^2 \cos \varphi} \sin \alpha \cos \alpha t \quad (18)$$

$$\frac{d^3 l}{ds^3} = \frac{2V^3}{c^3 \cos \varphi} \left\{ \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 3t^2 + \eta^2) - \sin^3 \alpha t^2 \right\} \quad (19)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} = \frac{V^2}{c^2} \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2t^2 + \eta^2) \quad (20)$$

$$\frac{d^3 \alpha}{ds^3} = \frac{V^3}{c^3} \left\{ \sin \alpha \cos^2 \alpha t (5 + 6t^2 + \eta^2 - 4\eta^4) - \sin^3 \alpha t (1 + 2t^2 + \eta^2) \right\} \quad (21)$$

Ehe wir weiter entwickeln, wollen wir abkürzende Bezeichnungen einführen, wobei wir uns zu merken haben, dass  $\frac{c}{V} = N$  der Quer-Krümmungs-Halbmesser für die Breite  $\varphi$  ist. Wir setzen dann:

$$\frac{\varrho}{N} s \sin \alpha = \frac{\varrho}{c} V s \sin \alpha = v \quad (22)$$

$$\frac{\varrho}{N} s \cos \alpha = \frac{\varrho}{c} V s \cos \alpha = u \quad (23)$$

Dabei ist  $s$  die geodätische Linie linear (in Metern) gemessen und nach S. 193:

$$\log \frac{\varrho}{c} = 8.508\,3274\,897 \quad , \quad \log \frac{c}{\varrho} = 1.491\,6725\,103 \quad (24)$$

#### Weitere Entwicklungen bis zur fünften Ordnung.

Ohne die Einzelheiten der Differentiierungen anzugeben, stellen wir im folgenden die weiteren Differential-Quotienten zusammen und zwar bis zur 4ten Ordnung mit allen Gliedern die überhaupt auftreten, bei der 5ten Ordnung nur noch mit den Gliedern ohne  $\eta^2$ , d. h. mit den sphärischen Gliedern. Um die Abkürzungen  $v$  und  $u$  nach (22) und (23) anwenden zu können, setzen wir links immer  $s$ ,  $s^2$ ,  $s^3$  u. s. w. als Faktor zu, und nehmen auch den konstanten Faktor  $V^2$  bei  $\varphi$ , und  $\cos \varphi$  bei  $l$  auf die linke Seite herüber.

$$\frac{d\varphi}{ds} \frac{s}{V^2} = +u$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} \frac{s^2}{V^2} = -v^2 t - u^2 (3\eta^2 t)$$

$$\frac{d^3 \varphi}{ds^3} \frac{s^3}{V^2} = -v^2 u (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2) - 3u^3 \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 - 5\eta^2 t^2)$$

$$\frac{d^4 \varphi}{ds^4} \frac{s^4}{V^2} = +v^4 t (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2) - 2v^2 u^2 t (4 + 6t^2 - 13\eta^2 - 9\eta^2 t^2 - 17\eta^4 + 45\eta^4 t^4) + u^4 t \eta^2 (12 + 69\eta^2 - 45\eta^2 t^2 + 57\eta^4 - 105\eta^4 t^2)$$

$$\frac{d^5 \varphi}{ds^5} \frac{s^5}{V^2} = +v^4 u (1 + 30t^2 + 45t^4) + 2v^2 u^3 (4 + 40t^2 + 30t^4)$$



$$\frac{dl}{ds} s \cos \varphi = + v$$

$$\frac{d^2 l}{ds^2} s^2 \cos \varphi = + 2 v u t$$

$$\frac{d^3 l}{ds^3} s^3 \cos \varphi = + 2 v u^2 (1 + 3 t^2 + \eta^2) - 2 v^3 t^2$$

$$\frac{d^4 l}{ds^4} s^4 \cos \varphi = 8 v u^3 t (2 + 3 t^2 + \eta^2 - \eta^4) - 8 v^3 u (1 + 3 t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^5 l}{ds^5} s^5 \cos \varphi = 8 v u^4 (2 + 15 t^2 + 15 t^4) - 8 v^3 u^2 (1 + 20 t^2 + 30 t^4) + 8 v^5 t^2 (1 + 3 t^2)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} s = v t$$

$$\frac{d^2 \alpha}{ds^2} s^2 = v u (1 + 2 t^2 + \eta^2)$$

$$\frac{d^3 \alpha}{ds^3} s^3 = v u^2 t (5 + 6 t^2 + \eta^2 - 4 \eta^4) - v^3 t (1 + 2 t^2 + \eta^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \alpha}{ds^4} s^4 = v u^3 (5 + 28 t^2 + 24 t^4 + 6 \eta^2 + 8 \eta^2 t^2 - 3 \eta^4 + 4 \eta^4 t^2 - 4 \eta^6 + 24 \eta^6 t^2) \\ - v^3 u (1 + 20 t^2 + 24 t^4 + 2 \eta^2 + 8 \eta^2 t^2 + \eta^4 + 12 \eta^4 t^2) \end{aligned}$$

$$\frac{d^5 \alpha}{ds^5} s^5 = v u^4 t (61 + 180 t^2 + 120 t^4) - v^3 u^2 t (58 + 280 t^2 + 240 t^4) + v^5 t (1 + 20 t^2 + 24 t^4)$$

Mehr als diese Glieder wird man fast nie brauchen. Übrigens haben wir in der vorigen 3. Auflage 1890 S. 392 die Glieder bis zur 5ten Ordnung mit allen Zusätzen  $\eta^2$  u. s. w. und dann noch 6te Ordnung wenigstens sphärisch, d. h. ohne  $\eta^2$  gegeben.

Zur Abkürzung kann man etwa bis zur 4ten Ordnung sphärisch gehen, und dann auch schon in dritter Ordnung nur noch  $\eta^2$  mitnehmen und alle  $\eta^4$  weglassen.

Damit bekommen wir folgende zur praktischen Anwendung zugerichtete Formeln, in welchen  $u$  und  $v$  die Bedeutungen von (22) und (23) haben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi' - \varphi}{V^2} = u & - \frac{1}{2\rho} v^2 t - \frac{3}{2\rho} u^2 \eta^2 t \\ & - \frac{v^2 u}{6\rho^2} (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) + \frac{u^3}{2\rho^2} \eta^2 (t^2 - 1 - \eta^2 + 5 \eta^2 t^2) \\ & + \frac{v^4}{24\rho^3} t (1 + 3 t^2) - \frac{v^2 u^2}{6\rho^3} t (2 + 3 t^2) \end{aligned} \right\} (25)$$

$$\left. \begin{aligned} l \cos \varphi = v & + \frac{1}{\rho} v u t \\ & - \frac{v^3}{3\rho^2} t^2 + \frac{v u^2}{3\rho^2} (1 + 3 t^2 + \eta^2) \\ & - \frac{v^3 u}{3\rho^3} t (1 + 3 t^2) + \frac{v u^3}{3\rho^3} t (2 + 3 t^2) \end{aligned} \right\} (26)$$



$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= v t + \frac{v u}{2 \rho} (1 + 2 t^2 + \eta^2) \\ &\quad - \frac{v^3}{6 \rho^2} t (1 + 2 t^2 + \eta^2) + \frac{v u^2}{6 \rho^2} t (5 + 6 t^2 + \eta^2) \\ &\quad - \frac{v^3 u}{24 \rho^3} (1 + 20 t^2 + 24 t^4) + \frac{v u^3}{24 \rho^3} (5 + 28 t^2 + 24 t^4) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Die hierbei nötigen konstanten Logarithmen sind:

$$\left. \begin{aligned} \log \frac{1}{\rho} &= 4.685\,5750 & , & \log \frac{1}{2\rho} = 4.384\,5449 & , & \log \frac{3}{2\rho} = 4.861\,6661 \\ \log \frac{1}{2\rho^2} &= 9.070\,120 & , & \log \frac{1}{3\rho^2} = 8.894\,028 & , & \log \frac{1}{6\rho^2} = 8.592\,998 \\ \log \frac{1}{3\rho^3} &= 3.579\,60 & , & \log \frac{1}{6\rho^3} = 3.278\,57 & , & \log \frac{1}{24\rho^3} = 2.676\,51 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Wenn man in (25), (26), (27) alle  $\eta^2$  weglässt, so bekommt man wieder die sphärischen Formeln (27)–(29) § 64. S. 359, wie es sein muss.

Mit diesen konstanten Coefficienten kann man auch unsere Hilfstafeln Seite [47]–[51] des Anhangs benützen.

Wir wollen unser kleines sphäroidisches Normal-Beispiel (1) § 73. S. 391 in dieser Weise berechnen:

Gegeben  $\varphi = 49^\circ 30' 0''$   $\alpha = 32^\circ 25' 21,5909''$   $\log s = 5,121\,6103,1$   
hiezv von Seite [21] des Anhangs  $\log [2] = 8.508\,9420,3$  und  $\log V^2 = 0.0012290,7$

Im übrigen giebt die Ausrechnung nach dem angegebenen Verfahren, in ähnlicher Weise wie bei dem sphärischen Beispiel § 64. S. 360:

$\log [2]$	8.508 9420.3	$\log [2]$	8.508 9420.3
" $s$	5.121 6103.1	" $s$	5.121 6103.1
" $\sin \alpha$	9.729 2947.4	" $\cos \alpha$	9.926 4021.9
$\log v$	3.359 8470.8	$\log u$	3.556 9545.3

Die weitere Ausrechnung hat folgendes gegeben:

Breite.		Länge.		Azimut.	
$+ V^2 u =$	$+ 3615,6269''$	$v =$	$+ 3526,1653''$	$vt =$	$+ 2681,3172''$
$- v^2 \dots$	$- 14,9269$	$+ vu \dots$	$+ 72,1660$	$+ vu \dots$	$+ 74,9467$
$- u^2 \eta^2 \dots$	$- 0,3146$	$- v^3 \dots$	$- 0,1986$	$- v^3 \dots$	$- 0,2063$
$- u^2 v \dots$	$- 0,3774$	$+ v u^2 \dots$	$+ 1,8371$	$+ v u^2 \dots$	$+ 1,8061$
$+ u^3 \eta^2 \dots$	$+ 0,0006$	$- v^3 u \dots$	$- 0,0152$	$- v^3 u \dots$	$- 0,0152$
$+ v^4 \dots$	$+ 0,0008$	$+ v u^3 \dots$	$+ 0,0452$	$+ v u^3 \dots$	$+ 0,0455$
$- v^2 u^2 \dots$	$- 0,0093$				
$\varphi' - \varphi =$	$3600,0001''$	$\lambda =$	$+ 3599,9998''$	$\alpha' - \alpha =$	$2757,8940''$
$= 1^\circ 0' 0,0001$		$= 0^\circ 59' 59,9998$		$= 45' 57,8940$	
soll $0,0000$		soll $60,0000$		soll $57,8942$	



*Meridianbogenlänge.*

Unsere Formeln enthalten auch den besonderen Fall der Meridianbogen-Rektifizierung, wenn das Azimut  $\alpha = \text{Null}$  wird. Setzen wir dann auch den zugehörigen Wert  $s = m$ , so werden wir aus (25) folgendes erhalten bis zur dritten Ordnung:

$$\frac{\varphi' - \varphi}{V^2} = \frac{m}{N} - \frac{3}{2} \eta^2 t \frac{m^2}{N^2} + \frac{m^3}{N^3} \frac{\eta^2}{2} (t^2 - 1 - \eta^2 + 5 \eta^2 t^2) \quad (29)$$

Dieses ist die Umkehrung der früheren Formel (37) in § 35. S. 218, wie sich deutlicher zeigt, wenn man jene Formel so schreibt:

$$\frac{m}{N} = \frac{\varphi' - \varphi}{V^2} + \left( \frac{\varphi' - \varphi}{V^2} \right)^2 \frac{3}{2} \eta^2 t - \left( \frac{\varphi' - \varphi}{V^2} \right)^3 \frac{\eta^2}{2} (t^2 - 1 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2) \quad (30)$$

Dass diese beiden Formeln (29) und (30) unter sich übereinstimmen, kann man leicht durch genäherte Auflösung nachweisen.

Die erste Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie (bis  $s^3$  einschliesslich) zur Übertragung von Breiten, Längen und Azimuten, ist gegeben von Legendre in den Memoiren der Pariser Akademie von 1806. Diese Legendreschen Formeln sind bei der badischen Landesvermessung benutzt worden. Helmert, höhere Geodäsie I. 1880, S. 296–300 giebt die Entwicklungen bis zur dritten Ordnung mit  $\epsilon^2$  und dann noch 4.–5. Ordnung sphärisch, mit Litteraturangaben S. 300. Um die in vorstehendem § 74. behandelten Reihenentwicklungen praktisch im Grossen anzuwenden, müsste man bequeme und genaue Coefficienten-Tabellen herstellen, wobei in den Reihen (25)–(27) die Coefficienten mit allen Gliedern  $\eta^2$  einzuführen wären.

Von der Vermessung des Staates New-York und von der Küsten- und Landesvermessung der Vereinigten Staaten wird ein solches Verfahren angegeben in einem Berichte in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1890, S. 177–179.

Bei der preussischen Landesaufnahme sind Formeln von ähnlichem Charakter im Gebrauche, die wir schon in § 39. S. 228 und § 59. S. 331 erwähnt haben, Schreiber, „Rechnungsvorschriften“ u. s. w.: Die zugehörigen Entwicklungen sind amtlich nicht veröffentlicht, aber in Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen I“, 1881, S. 113–121. Man kann diese Schreibersche Theorie kurz bezeichnen als eine sphäroidische Weiterführung der Gauss'schen sphärischen Behandlung des Polardreiecks nach Fig. 3. § 60. S. 343. Die praktische Anwendung der Schreiberschen Rechenvorschriften verlangt die Ausrechnung von 19 Gliedern ähnlicher Art wie die 19 Glieder der Formeln (25)–(27).

§ 75. Näherungs-Formeln bis  $s^3$ .

Wie die Ausrechnungen am Schlusse des vorigen § 74. S. 396 zeigen, kann man mit den Potenzreihen bis zur 4ten Ordnung bei Entfernungen bis zu rund  $100^{\text{km}}$  oder Breiten- und Längen-Differenzen bis zu  $1^\circ$  eine Genauigkeit bis zu etwa  $0,0001''$  erreichen.

Die Rechnung ist aber etwas umständlich, und würde nur etwa durch Beigabe ausführlicher Coefficienten-Tabellen die nötige Geschmeidigkeit erlangen, man hat in der Breite 7 Glieder und in Länge und Azimut je 6 Glieder.

Anders steht die Sache, wenn man nur Näherungswerte auf etwa  $0,1''$  genau berechnen will, welche nach dem später zu beschreibenden Verfahren von § 77. noch verbessert werden sollen. In diesem Falle rechnet man nur die Hauptglieder mit dem Coefficienten [2] streng, nebst  $V^2$  bei der Breite, im übrigen nimmt man nur noch die sphärischen Glieder (setzt also  $\eta^2 = 0$ ) und kann dann die Coefficienten-Tabelle unseres Anhangs Seite [47]–[51] benützen.

In diesem Sinne haben wir die Ausrechnung auf S. 398 gemacht, in den Hauptgliedern nur 6stellig, dann 5- und 4stellig. Die Genauigkeit geht auf  $0,01''$  und  $0,03''$  in Breite und Länge, und auf  $0,10''$  im Azimut, was alles als erste Näherung für späteren Gebrauch in § 77. vollauf genügend ist.



## Geographische Koordinaten.

Näherungs-Berechnung bis zur dritten Ordnung.

Gegeben  $\varphi = 49^\circ 30' 0,0''$   $\alpha = 32^\circ 25' 21,5''$   $\log s = 5.121\ 610$ 

Hilfstafel S. [21] giebt für $\varphi$ :	$\log [2]$	8.508 942	$\log [2]$	8.508 942
$\log V^2 = 0.001\ 229$	$\log \sin \alpha$	9.729 295	$\log \cos \alpha$	9.926 402
$\log \tan \varphi = \log t = 0.068\ 501$	$\log s$	5.121 610	$\log s$	5.121 610
$\log t^2 = 0.137\ 002$	$\log v$	3.359 847	$\log u$	3.556 954
$\log \cos \varphi = 9.812\ 544$	$\log v^2$	6.719 694	$\log u^2$	7.113 908
	$\log v^3$	0.079 541		

$$\varphi' - \varphi = V^2 u - \frac{V^2}{2 \rho} v^2 t - \frac{V^2}{6 \rho^2} v^2 u (1 + 3 t^2) - \frac{3 V^2}{2 \rho} u^2 e'^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$\log V^2$	0.001 229	$- V^2$	0.00123 <sub>n</sub>	$- V^2$	0.0012 <sub>n</sub>	$- V^2$	0.0012 <sub>n</sub>
$\log u$	3.556 954	$v^2$	6.71969	$v^2$	6.7197	$u^2$	7.1139
$V^2 u$	3.558 183	$t$	0.06850	$u$	3.5570	$3 e'^2 : 2 \rho$	2.6861
$+ 3615,63''$		$1 : 2 \rho$	4.38454	$1 + 3 t^2$	0.7088	$\sin \varphi$	9.8810
$= + 1^\circ 0' 15,63''$			1.17396 <sub>n</sub>	$1 : 6 \rho^2$	8.5930	$\cos \varphi$	9.8125
			$- 14,93''$		9.5797 <sub>n</sub>		9.4947 <sub>n</sub>
					$- 0,38''$		$- 0,31''$

$$l = \frac{v}{\cos \varphi} + \frac{v u t}{\rho \cos \varphi} - \frac{v^3 t^2}{3 \rho^2 \cos \varphi} + \frac{v u^2 (1 + 3 t^2)}{3 \rho^2 \cos \varphi}$$

$\log v$	3.359 847	$v \sec \varphi$	3.54730	$- v \sec \varphi$	3.5473 <sub>n</sub>	$v \sec \varphi$	3.5473
$\log \sec \varphi$	0.187 456	$u$	3.55695	$v^2$	6.7197	$u^2$	7.1139
$v \sec \varphi$	3.547 303	$t$	0.06850	$t^2$	0.1370	$1 + 3 t^2$	0.7088
$+ 3526,17''$		$1 : \rho$	4.68557	$1 : 3 \rho^2$	8.8940	$1 : 3 \rho^2$	8.8940
$= + 0^\circ 58' 46,17''$			1.85832 <sub>n</sub>		9.2980 <sub>n</sub>		0.2640
			$+ 72,16''$		$- 0,20''$		$+ 1,84''$

$$\alpha' - \alpha = v t + \frac{v u}{2 \rho} (1 + 2 t^2) - \frac{v^3 t}{6 \rho^2} (1 + 2 t^2) + \frac{v u^2 t}{6 \rho^2} (5 + 6 t^2)$$

$\log v$	3.359 847	$v$	3.35985	$- v t$	3.4283 <sub>n</sub>	$v t$	3.4283
$\log t$	0.068 501	$u$	3.55695	$v^2$	6.7197	$u^2$	7.1139
$v t$	3.428 348	$1 + 2 t^2$	0.57306	$1 + 2 t^2$	0.5731	$5 + 6 t^2$	1.1214
$+ 2681,32$		$1 : 2 \rho$	4.38454	$1 : 6 \rho^2$	8.5930	$1 : 6 \rho^2$	8.5930
$= + 44' 41,32''$			1.87440		9.3141 <sub>n</sub>		0.2566
			$+ 74,89''$		$- 0,21''$		$+ 1,81''$

## Zusammenfassung:

$\varphi = 49^\circ 30' 0,00'' - 14,93''$	$+ 0^\circ 58' 46,17'' - 0,20''$	$\alpha = 32^\circ 25' 21,50'' - 0,21''$
$+ 1^\circ 0' 15,63'' - 0,38''$	$+ 1^\circ 12,16''$	$+ 0^\circ 44' 41,32''$
$- 0,31''$	$+ 1,84''$	$+ 1^\circ 14,89''$
$+ 50^\circ 30' 15,63'' - 15,62''$	$+ 1^\circ 0' 0,17'' - 0,20''$	$+ 1,81''$
$\varphi' = 50^\circ 30' 0,01''$	$l = + 0^\circ 59' 59,97''$	$+ 33^\circ 11' 19,52'' - 0,21''$
soll $0,00''$	soll $60,00''$	$\alpha' = 33^\circ 11' 19,31''$
		soll $19,41''$



## § 76. Sphärische Mittelbreiten-Formeln.

Obgleich die sphärischen Mittelbreiten-Formeln nach Gauss schon in unserem früheren § 62. entwickelt sind, wollen wir doch, ehe auf die sphäroidischen Formeln dieser Art übergegangen wird, nochmals die Sache sphärisch betrachten.

Wenn wir also hier noch eine zweite Herleitung der sphärischen Mittelbreiten-Formeln vornehmen, so geschieht es nicht bloss in dem Sinne einer Versicherung der ersten Herleitung, sondern vielmehr zum Zweck der Vorbereitung entsprechender sphäroidischer Formeln, mit welchen wir uns im folgenden § 77. beschäftigen werden.

In Fig. 1. betrachten wir 3 Punkte mit den Breiten  $\varphi_1, \varphi, \varphi_2$ , wobei  $\varphi$  der Mittelwert ist, d. h.:

$$\varphi_2 - \varphi = \varphi - \varphi_1, \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \quad (1)$$

Da die Breiten-Unterschiede  $\varphi - \varphi_1$  und  $\varphi_2 - \varphi$  hiernach gleich sein sollen, so werden für einen Bogen, welcher die drei Parallelen zu den Breiten  $\varphi_1, \varphi, \varphi_2$  schneidet, die Abstände  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , deren Summe  $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma$  sei, nicht gleich, aber auch nicht sehr ungleich werden, und ähnlich verhält es sich mit den zugehörigen Längen-Unterschieden  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , deren Summe  $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$  sei.

Die Azimute, welche der Bogen in den Breiten  $\varphi_1, \varphi$  und  $\varphi_2$  hat, seien bezw.  $\alpha_1, \alpha_0$  und  $\alpha_2$ , und es werden dabei ähnliche Verhältnisse stattfinden, wie bei den Längen-Unterschieden, d. h. es werden  $\alpha_0 - \alpha_1$  und  $\alpha_2 - \alpha_0$  nicht sehr verschieden sein; das Mittel aus  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sei mit  $\alpha$  bezeichnet, d. h.:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha \quad (2)$$

Dieses Mittel wird nicht gleich  $\alpha_0$ , aber auch nicht sehr viel von  $\alpha_0$  verschieden sein.

Eine frühere Abkürzung sei hier wieder benützt, nämlich:

$$\tan \varphi = t \quad (3)$$

und nun wenden wir die Potenzreihe für den Breiten-Unterschied (27) § 64. S. 359 auf unsern Fall zweifach an, und erhalten:

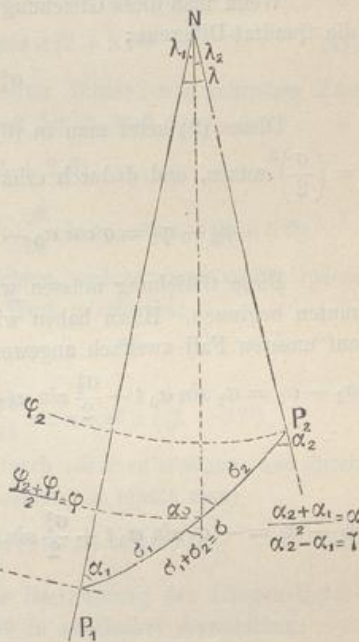
$$\varphi_2 - \varphi = \sigma_2 \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^3}{2} \sin^2 \alpha_0 t - \frac{\sigma_2^5}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2) \quad (4)$$

$$\varphi_1 - \varphi = -\sigma_1 \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_1^3}{2} \sin^2 \alpha_0 t + \frac{\sigma_1^5}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2) \quad (5)$$

Diese zwei Gleichungen geben subtrahiert:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\sigma_2 + \sigma_1) \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^3 - \sigma_1^3}{2} \sin^2 \alpha_0 t - \frac{\sigma_2^5 + \sigma_1^5}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2) \quad (6)$$

Fig. 1.





Ferner giebt wegen der Gleichheit der Breiten-Unterschiede nach (1) die Addition von (4) und (5):

$$0 = (\sigma_2 - \sigma_1) \cos \alpha_0 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{2} \sin^2 \alpha_0 t - \frac{\sigma_2^3 - \sigma_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2) \quad (7)$$

Dieses ist eine Gleichung zur Bestimmung der Differenz  $\sigma_2 - \sigma_1$ , und da man sofort sieht, dass diese Differenz von der Ordnung  $\sigma^2$  ist, kann man in (7) das letzte Glied weglassen, und im zweiten Gliede  $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$  setzen, so dass man damit aus (7) erhält:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{\sigma^2}{4} \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t \quad (8)$$

Wenn man diese Gleichung mit  $\sigma_2 + \sigma_1 = \sigma$  multipliziert, so erhält man auch die Quadrat-Differenz:

$$\sigma_2^2 - \sigma_1^2 = \frac{\sigma^3}{4} \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t \quad (9)$$

Dieses (9) setzt man in (6), zugleich darf man dort im letzten Gliede  $\sigma_2^3 = \sigma_1^3 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^3$  setzen, und dadurch erhält man:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha_0 - \frac{\sigma^3}{8} \frac{\sin^4 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 - \frac{\sigma^3}{24} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2) \quad (10)$$

Diese Gleichung müssen wir zunächst so stehen lassen und nun mit den Azimuten beginnen. Hierzu haben wir in (29) § 64. S. 359 die nötige Gleichung, welche auf unseren Fall zweifach angewendet giebt:

$$\alpha_2 - \alpha_0 = \sigma_2 \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma_2^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2) - \frac{\sigma_2^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma_2^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6 t^2) \quad (11)$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 = -\sigma_1 \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma_1^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2 t^2) - \frac{\sigma_1^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6 t^2) \quad (12)$$

Auch diese Gleichungen (11) und (12) werden subtrahiert und addiert; zuerst giebt die Subtraktion:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (\sigma_2 + \sigma_1) \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2) - \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma_2^3 + \sigma_1^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6 t^2) \quad (13)$$

Bei der Addition von (11) und (12) lassen wir die Differenzen dritter Ordnung  $\sigma_2^3 - \sigma_1^3$  ganz fort, da dieselben auf Glieder von der Ordnung  $\sigma^4$  führen würden; indem wir dann auch das Mittel-Azimut  $= \alpha$  setzen, wie in (2) angenommen wurde, erhalten wir aus (11) und (12) durch Addition:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \alpha_0 = \alpha - \alpha_0 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{4} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2)$$

und setzt man hier noch die Differenz  $\sigma_2 - \sigma_1$  nach (8) ein, so erhält man:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\sigma^2}{8} \frac{\sin^3 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \frac{\sigma^2}{8} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2) \quad (14)$$



Hieraus bilden wir zu verschiedenem Gebrauche:

$$\sin \alpha_0 = \sin \alpha - \frac{\sigma^2}{8} \sin^3 \alpha t^2 - \frac{\sigma^2}{8} \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 2 t^2) \quad (15)$$

$$\cos \alpha_0 = \cos \alpha + \frac{\sigma^2}{8} \frac{\sin^4 \alpha}{\cos \alpha} t^2 + \frac{\sigma^2}{8} \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + 2 t^2) \quad (16)$$

In diesen (15) und (16) ist in den Gliedern mit  $\sigma^2$  schlechthin  $\alpha$  statt des aus (14) sich ergebenden  $\alpha_0$  geschrieben, weil nach (14) sich  $\alpha$  und  $\alpha_0$  selbst nur um Glieder von der Ordnung  $\sigma^2$  unterscheiden.

Nun kehren wir wieder zu der Gleichung (10) zurück, setzen im ersten Gliede daselbst (16) ein, und erhalten, da die quadratischen Glieder sich heben:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha + \frac{\sigma^3}{24} \sin^2 \alpha \cos \alpha (2 + 3 t^2) \quad (17)$$

Auch die Gleichung (13) lässt sich nun weiter führen; wir schreiben diese Gleichung zunächst von neuem mit Zusammenziehung der  $\sigma_2$  und  $\sigma_1$ :

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2) \\ - \frac{\sigma^3}{24} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6 t^2)$$

Hier hat man zuerst  $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$  nach (9) einzusetzen, wodurch man erhält, indem man zugleich in den Gliedern mit  $\sigma^3$  statt  $\alpha_0$  den Wert  $\alpha$  schreibt:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha_0 t + \frac{\sigma^3}{8} \sin^3 \alpha t (1 + 2 t^2) \\ - \frac{\sigma^3}{24} \sin^3 \alpha t (1 + 2 t^2) + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha \cos^2 \alpha t (5 + 6 t^2)$$

Auch hat man noch im ersten Gliede  $\sin \alpha_0$  durch  $\sin \alpha$  zu ersetzen, was durch (15) geschieht; und wenn man zusammenfasst und ordnet, so erhält man:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha t + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha t (\sin^2 \alpha (2 + t^2) + 2 \cos^2 \alpha) \quad (18)$$

Nun bleibt als dritte Aufgabe nur noch die Bestimmung des Längen-Unterschiedes  $\lambda$ . Hierzu haben wir nach (28) § 64. S. 359 in zweifacher Anwendung:

$$\lambda_2 \cos \varphi = \sigma_2 \sin \alpha_0 + \sigma_2^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 t - \frac{\sigma_2^3}{3} \sin^3 \alpha_0 t^2 + \frac{\sigma_2^3}{3} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3 t^2) \\ - \lambda_1 \cos \varphi = -\sigma_1 \sin \alpha_0 + \sigma_1^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 t + \frac{\sigma_1^3}{3} \sin^3 \alpha_0 t^2 - \frac{\sigma_1^3}{3} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3 t^2)$$

Durch Subtraktion bekommt man, sofort die Glieder dritter Ordnung zusammennehmend, und in diesen Gliedern  $\alpha$  statt  $\alpha_0$  schreibend:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha_0 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \sin \alpha \cos \alpha t - \frac{\sigma^3}{12} \sin^3 \alpha t^2 + \frac{\sigma^3}{12} \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 3 t^2)$$

Wenn man wieder, wie in den beiden vorigen Fällen,  $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$  nach (9) und  $\sin \alpha_0$  nach (15) einsetzt, so erhält man:

$$\lambda \cos \varphi = \sigma \sin \alpha + \frac{\sigma^3}{24} \sin \alpha (\sin^2 \alpha t^2 - \cos^2 \alpha) \quad (19)$$

Die Differenz  $\lambda_2 - \lambda_1$  haben wir hiebei nicht gebraucht; der Gleichförmigkeit wegen wollen wir jedoch diese Differenz auch angeben, nämlich:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \sin \varphi = \frac{\sigma^2}{4} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} t + \frac{\sigma^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha t \quad (20)$$



Unsere gestellte Aufgabe ist in den Gleichungen (17), (18), (19) gelöst, die wir in etwas anderer Form nun zusammenstellen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma \cos \alpha \left( 1 + \frac{1}{24} (2 \sigma^2 \sin^2 \alpha + 3 \sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi) \right) \quad (21)$$

$$\lambda = \frac{\sigma \sin \alpha}{\cos \varphi} \left( 1 + \frac{1}{24} (\sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi - \sigma^2 \cos^2 \alpha) \right) \quad (22)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sigma \sin \alpha \tan \varphi \left( 1 + \frac{1}{24} (2 \sigma^2 + \sigma^2 \sin^2 \alpha \tan^2 \varphi) \right) \quad (23)$$

Hier kann man in den Korrekturen-Gliedern setzen:

$$\sigma \cos \alpha = \beta \quad \sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \quad \sigma \sin \alpha \tan \varphi = \gamma \quad (24)$$

wobei  $\beta$  ein Näherungs-Wert für  $\varphi_2 - \varphi_1$  und  $\gamma$  ein Näherungs-Wert für  $\alpha_2 - \alpha_1$  sein soll. Ausserdem bestehen die Näherungs-Gleichungen

$$\sigma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi, \quad \sigma^2 + \gamma^2 = \beta^2 + \lambda^2 \quad (25)$$

Wenn man dieses in (21) und (22) berücksichtigt und die Gleichungen umstellt, dann (22) und (23) dividiert, so erhält man:

$$\sigma \cos \alpha = (\varphi_2 - \varphi_1) \left( 1 - \frac{1}{24} (3 \lambda^2 - \lambda^2 \cos^2 \varphi) \right) \quad (26)$$

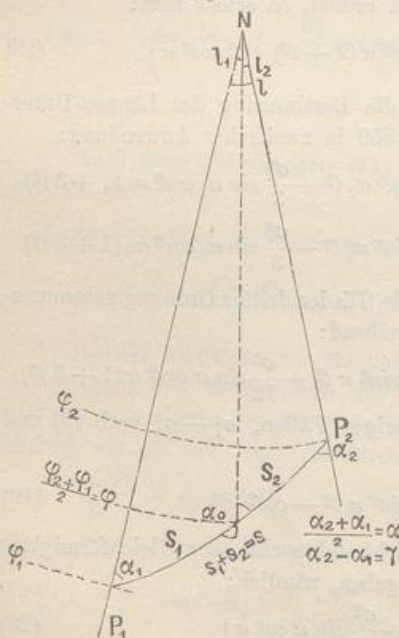
$$\sigma \sin \alpha = \lambda \cos \varphi \left( 1 - \frac{1}{24} (\lambda^2 \sin^2 \varphi - \beta^2) \right) \quad (27)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \lambda \sin \varphi \left( 1 + \frac{1}{24} (3 \beta^2 + 2 \lambda^2 \cos^2 \varphi) \right) \quad (28)$$

Dieses sind dieselben Gleichungen wie (17), (16), (18) § 62. S. 350; und es sind also jene Gleichungen hiemit zum zweitenmale hergeleitet.

## § 77. Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln.

Fig. 1.



Dasselbe, was wir im vorigen § 76. sphärisch gemacht haben, müssen wir nun auch sphäroidisch mit der geodätischen Linie thun.

Wir werden dabei eine Entwicklung bekommen, welche der sphärischen Entwicklung ganz entsprechend ist, welche sogar alle früheren Glieder von § 76. wieder enthält, aber noch weitere Glieder von der Ordnung  $r^2$  und  $r^4$  hinzubringen wird, und da wir in § 76. eine gute Vorbereitung haben, können wir uns mit der neuen Entwicklung kurz fassen.

Die Bezeichnungen nehmen wir wieder im wesentlichen wie in § 62., indem die nebenstehende Fig. 1. sich von der früheren Fig. 1. S. 349 nur dadurch unterscheidet, dass überall  $s$  statt  $\sigma$ , und bei den Längen  $l$  statt  $\lambda$  steht.

Unter  $s$  verstehen wir eine geodätische Linie, linear gemessen, und unter  $S$  die entsprechende Reduktion auf Centriwinkel durch Division mit dem Quer-Krümmungs-Halbmesser  $N$  d. h. wir wollen setzen:



$$\frac{s}{N} = S \quad \text{oder} \quad \frac{s}{N} \varrho = S \quad (1)$$

je nachdem in analytischem oder geometrischem Masse gerechnet wird. Wir wollen auch wieder als Abkürzung nehmen:

$$\frac{s \sin \alpha}{N} = S \sin \alpha = v \quad \text{und} \quad \frac{s \cos \alpha}{N} = S \cos \alpha = u \quad (1a)$$

Damit erhalten wir aus der Breiten-Formel (25) § 74. S. 395 als Anwendung auf den nördlichen Teil unserer Fig. 1. folgendes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi_2 - \varphi}{V^2} &= S_2 \cos \alpha_0 - \frac{S_2^3}{2} t (\sin^2 \alpha_0 + 3 \eta^2 \cos^2 \alpha_0) \\ &\quad - \frac{S_2^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) \\ &\quad - \frac{S_2^3}{6} \cos^3 \alpha_0 (3 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 - 15 \eta^4 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die entsprechende Formel für  $\varphi_1 - \varphi$  hat überall  $-S_1$  statt  $S_2$ , also:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{V^2} = -S_1 \cos \alpha_0 - \frac{S_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 \dots + \frac{S_1^3}{6} \cos^3 \alpha_0 \dots \quad (2a)$$

Diese beiden Gleichungen geben subtrahiert:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} &= (S_2 + S_1) \cos \alpha_0 - \frac{S_2^3 - S_1^3}{2} t (\sin^2 \alpha_0 + 3 \eta^2 \cos^2 \alpha_0) \\ &\quad - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2) \\ &\quad - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \cos^3 \alpha_0 (3 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 - 15 \eta^4 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ferner giebt die Addition von (3) und (3a):

$$0 = (S_2 - S_1) \cos \alpha_0 - \frac{S_2^3 + S_1^3}{2} t (\sin^2 \alpha_0 + 3 \eta^2 \cos^2 \alpha_0)$$

$$\text{also:} \quad S_2 - S_1 = \frac{S^2}{4} t \left( \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} + 3 \eta^2 \cos \alpha_0 \right) \quad (4)$$

Dieses (4) in (3) eingesetzt giebt nach Ordnung der Glieder:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = S \cos \alpha_0 - \frac{S^3}{24} \left( 3 \frac{\sin^4 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 3 t^2 + \eta^2 + 9 \eta^2 t^2) \right. \\ \left. + \cos^3 \alpha_0 (3 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 + 12 \eta^4 t^2) \right) \quad (5)$$

Ehe wir dieses weiter verfolgen, machen wir dieselbe Behandlung auch mit den Azimuten, d. h. nach (27) § 74. S. 396:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_0 &= S_2 \sin \alpha_0 t + \frac{S_2^3}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2 + \eta^2) \\ &\quad - \frac{S_2^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) + \frac{S_2^3}{6} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6 t^2 + \eta^2 - 4 \eta^4) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 = -S_1 \sin \alpha_0 t + \frac{S_1^3}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \dots - \frac{S_1^3}{6} \sin^3 \alpha_0 t \dots \quad (7)$$

Hievon brauchen wir zunächst nur die Addition, d. h.:

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \alpha_0 \quad \text{oder} \quad \alpha - \alpha_0 = \frac{S_2 - S_1}{2} \sin \alpha_0 t + \frac{S_2^3 + S_1^3}{4} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2 t^2 + \eta^2) \quad (8)$$



Die Differenz  $S_2 - S_1$  von (4) hier in (8) eingesetzt giebt:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{S^2}{8} \left( \frac{\sin^3 \alpha_0}{\cos \alpha_0} t^2 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2t^2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \right) \quad (9)$$

Damit werden die mehrfach gebrauchten  $S \sin \alpha_0$  und  $S \cos \alpha_0$ :

$$S \sin \alpha_0 = S \sin \alpha - \frac{S^3}{8} \left( \sin^3 \alpha t^2 + \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + 2t^2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \right) \quad (10)$$

$$S \cos \alpha_0 = S \cos \alpha + \frac{S^3}{8} \left( \frac{\sin^4 \alpha}{\cos \alpha} t^2 + \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + 2t^2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \right) \quad (11)$$

Wenn man dieses (11) in (5) einsetzt, wobei man in den Gliedern mit  $S^3$  schlechthin  $\alpha$  statt  $\alpha_0$  schreiben darf, so erhält man:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = S \cos \alpha \left\{ 1 + \frac{S^2}{24} \sin^2 \alpha (2 + 3t^2 + 2\eta^2) - \frac{S^2}{8} \cos^2 \alpha \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2) \right\} \quad (12)$$

Wir bilden nun auch die Subtraktion von (6) und (7):

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= (S_2 + S_1) \sin \alpha_0 t + \frac{S_2^2 - S_1^2}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 (1 + 2t^2 + \eta^2) \\ &\quad - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \left( \sin^3 \alpha_0 t (1 + 2t^2 + \eta^2) - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 t (5 + 6t^2 + \eta^2 - 4\eta^4) \right) \end{aligned}$$

Hier ist wieder  $S_2 - S_1$  nach (4) zu berücksichtigen; dieses giebt:

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= S \sin \alpha_0 t + \frac{S^3}{24} t \left( \sin^3 \alpha_0 (2 + 4t^2 + 2\eta^2) \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (5 + 6t^2 + 10\eta^2 + 18\eta^2 t^2 + 5\eta^4) \right) \end{aligned}$$

und wenn man endlich noch  $S \sin \alpha_0$  nach (10) einsetzt, wobei in den höheren Gliedern  $\alpha_0$  mit  $\alpha$  schlechthin verwechselt werden darf, so erhält man:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = S \sin \alpha t \left\{ 1 + \frac{S^2}{24} \sin^2 \alpha (2 + t^2 + 2\eta^2) + \frac{S^2}{24} \cos^2 \alpha (2 + 7\eta^2 + 9\eta^2 t^2 + 5\eta^4) \right\} \quad (13)$$

Es bleibt nun noch die Formel für  $l$  zu entwickeln, wozu wir in zweifacher Anwendung von (26) § 74. S. 395 haben:

$$+ l_2 \cos \varphi = S_2 \sin \alpha_0 + S_2^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 t - \frac{S_2^3}{3} \left( \sin^3 \alpha_0 t^2 - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3t^2 + \eta^2) \right) \quad (14)$$

$$- l_1 \cos \varphi = -S_1 \sin \alpha_0 + S_1^2 \dots + \frac{S_1^3}{3} \left( \dots \right) \quad (15)$$

Die Differenz hievon giebt (da  $l_2 + l_1 = l$ , und  $S_2 + S_1 = S$  ist):

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha_0 + (S_2^2 - S_1^2) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 t - \frac{S_2^3 + S_1^3}{3} \left( \sin^3 \alpha_0 t^2 - \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3t^2 + \eta^2) \right)$$

Hier ist wieder  $S_2 - S_1$  nach (4) und  $S \sin \alpha_0$  nach (10) zu berücksichtigen, wodurch man erhalten wird:

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha + \frac{S^3}{24} \sin \alpha \left\{ \sin^2 \alpha t^2 - \cos^2 \alpha (1 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2) \right\} \quad (16)$$

Wenn man von (14) und (15) auch die Summe bildet, so bekommt man eine Gleichung, welche jetzt nicht nötig ist, aber später noch nützlich sein wird, nämlich:

$$(l_2 - l_1) \cos \varphi = \frac{S^2 \sin^3 \alpha}{4 \cos \alpha} t + \frac{S^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha t (2 + 3\eta^2) \quad (17)$$



Die Gleichungen (12), (13) und (16) enthalten die Lösung der gestellten Aufgabe; man kann jedoch durch Division von (13) und (16) auch noch eine vierte Gleichung bilden:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left\{ 1 + \frac{S^2}{24} \left( \sin^2 \alpha (2 + 2 \eta^2) + \cos^2 \alpha (3 + 8 \eta^2 + 5 \eta^4) \right) \right\} \quad (18)$$

Dabei kann man auch in dem Gliede mit  $\sin^2 \alpha$  schreiben:

$$2 + 2 \eta^2 = 2 (1 + \eta^2) = 2 V^2 \quad (18a)$$

Die ersten Näherungen von (12) und (16) sind:

$$\frac{s}{N} \cos \alpha = S \cos \alpha = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{b}{V^2} \quad (19)$$

$$\frac{s}{N} \sin \alpha = S \sin \alpha = l \cos \varphi \quad (20)$$

Dabei soll  $b$  nur als Abkürzung für  $\varphi_2 - \varphi_1$  dienen.

Damit lassen sich die Formeln (12), (16) und (18) so schreiben:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{s \cos \alpha}{N} \left( 1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{24} (2 + 3 t^2 + 2 \eta^2) + \frac{b^2}{8 V^4} \eta^2 (t^2 - 1 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2) \right) \quad (21)$$

$$l \cos \varphi = \frac{s \sin \alpha}{N} \left( 1 + \frac{l^2 \sin^2 \varphi}{24} - \frac{b^2}{24 V^4} (1 + \eta^2) - 9 \eta^2 t^2 \right) \quad (22)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = l \sin \varphi \left( 1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{12} V^2 + \frac{b^2}{24 V^4} (3 + 8 \eta^2 + 5 \eta^4) \right) \quad (23)$$

Nun wollen wir die Coefficienten der gefundenen Formeln besonders bezeichnen und herausheben, und dabei auch die nötigen  $\varrho$  zusetzen. Zuerst nehmen wir für die Glieder erster Ordnung die schon zu anderen Zwecken mehrfach eingeführten Haupt-  
Coefficienten:

$$\frac{\varrho}{N} = [2] \quad , \quad \frac{\varrho}{M} \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho}{N} V^2 = [1] \quad (24)$$

Es ist also wegen der Bedeutung von  $S$  wie bei (22)–(24) § 74. S. 394:

$$v = S \sin \alpha = [2] s \sin \alpha \quad , \quad u = S \cos \alpha = [1] s \cos \alpha \quad (25)$$

Zugleich wollen wir noch folgende weitere Coefficienten festsetzen:

$$\left. \begin{aligned} [3] &= \frac{\mu}{24 \varrho^2} & [4] &= \frac{\mu}{24 \varrho^2} \frac{1 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2}{V^4} \\ [5] &= \frac{\mu}{24 \varrho^2} (2 + 3 t^2 + 2 \eta^2) & [6] &= \frac{\mu}{8 \varrho^2} \frac{\eta^2 t^2 - 1 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2}{V^4} \\ [7] &= \frac{\mu}{12 \varrho^2} V^2 & [8] &= \frac{\mu}{24 \varrho^2} \frac{3 + 8 \eta^2 + 5 \eta^4}{V^4} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Dabei bedeutet  $\mu$  den logarithmischen Modulus für Einheiten der 7ten Stelle  
 $\log \mu = 6.637\,7843$ , und wir können dazu auch gleich ausrechnen:

$$\log \frac{\mu}{8 \varrho^2} = 5.105\,8441 \quad , \quad \log \frac{\mu}{12 \varrho^2} = 4.929\,7528 \quad , \quad \log \frac{\mu}{24 \varrho^2} = 4.628\,7228 \quad (27)$$

Mit diesen Abkürzungen werden die Formeln (21)–(25) so dargestellt:

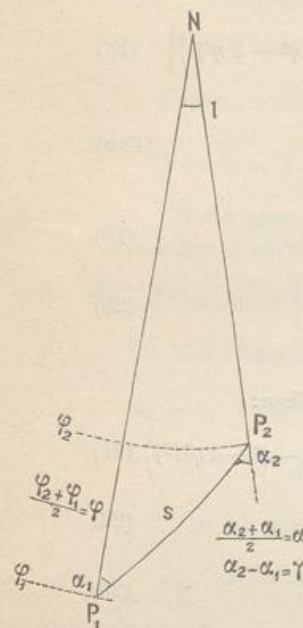
$$l = [2] \frac{s \sin \alpha}{\cos \varphi} \left( 1 + \frac{[3]}{\mu} l^2 \sin^2 \alpha - \frac{[4]}{\mu} b^2 \right) \quad (28)$$

Fortsetzung s. S. 408.



## Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln.

Fig. 2.



Gegeben  $\varphi_1 = 49^\circ 30'$   $\varphi_2 = 50^\circ 30'$   $l = 1^\circ 0'$   
 $\varphi = 50^\circ 0' 0''$   $b = 1^\circ = 3600''$   $l = 1^\circ = 3600''$

Gesucht sind  $s$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ .

Die Hilfstafeln des Anhangs geben mit  $\varphi = 50^\circ 0'$ :

Seite [32]:  $\log [1] = 8.510\ 1335.3$   $\log [2] = 8.508\ 9295.0$

Seite [54] giebt mit  $\varphi = 50^\circ 0'$ :

$\log [3] = 4.6287$   $\log [4] = 4.6119$   $\log [5] = 5.4257$   $\log [6] = 2.151$   
 $\log [7] = 4.9310$   $\log [8] = 5.1066$

## Gebrauchsformeln.

$$\log s \sin \alpha = \log \frac{l \cos \varphi}{[2]} - [3] l^2 \sin^2 \varphi + [4] b^2$$

$$\log s \cos \alpha = \log \frac{\Delta \varphi}{[1]} - [5] l^2 \cos^2 \varphi - [6] b^2$$

$$\log \Delta \alpha = \log l \sin \varphi + [7] l^2 \cos^2 \varphi + [8] b^2$$

Länge		Breite		Azimut	
$\log l$	3.556 3025.0	$\log b$	3.556 3025.0	$\log l$	3.556 3025.0
$\log \cos \varphi$	9.808 0675.0	$\log [1]$	8 510 1335.3	$\log \sin \varphi$	9.884 2539.7
$\log l \cos \varphi$	3.364 3700.0	$\log \frac{b}{[1]}$	5.046 1689.7	$\log l \sin \varphi$	3.440 5564.7
$\log [2]$	8.508 9295.0				
$\log \frac{l \cos \varphi}{[2]}$	4.855 4405.0				
$\log l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287	$\log b^2$	7.1126	$\log l^2 \sin^2 \varphi$	6.8811
$l^2 \sin^2 \varphi$	6.8811	$l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287	$l^2 \cos^2 \varphi$	6.7287
$- [3]$	4.6287 <sub>n</sub>	$- [5]$	5.4257 <sub>n</sub>	$+ [7]$	4.9310
	1.5098 <sub>n</sub>		2.1544 <sub>n</sub>		1.6597
	- 32.35		- 142.72		+ 45.68
	+ 53.02		0.18		+ 165.67
	+ 20.67		- 142.90		+ 211.35
	4.855 4405.0		5.046 1689.7		3.440 5564.7
$s \sin \alpha$	4.855 4425.7	$s \cos \alpha$	5.046 1546.8		3.440 5776.0
$s \cos \alpha$	5.046 1546.8				
$\tan \alpha$	9.809 2878.9	$s \sin \alpha$	4.855 4425.7	$s \cos \alpha$	5.046 1546.8
$\alpha = 32^\circ 48' 20.458''$		$\sin \alpha$	9.733 8322.5	$\cos \alpha$	9.924 5443.7
$\frac{\Delta \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58.947''$		$\log s$	5.121 6103.2	$\log s$	5.121 6103.1
$\alpha_2 = 33^\circ 11' 19.405''$					
$\alpha_1 = 32^\circ 25' 21.511''$		$s = 132\ 315.38''$			
				$\Delta \alpha = 2757.8942''$	
				$\Delta \alpha = 0^\circ 45' 57.8942''$	
				$\frac{\Delta \alpha}{2} = 0^\circ 22' 58.9471''$	



## Sphäroidische Mittelbreiten-Formeln

mit indirekter Auflösung.

Gegeben  $\log s = 5,121\ 6103\cdot1$      $\varphi_1 = 49^\circ 30' 0,0000''$      $\alpha_1 = 32^\circ 25' 21,511''$   
 Genähert  $l = 1^\circ 0' 0,1''$      $\varphi_2 = 50^\circ 30' 0,1''$      $\alpha_2 = 33^\circ 11' 19,5''$   
 $= 3600,1''$      $\varphi = 50^\circ 0' 0,05''$      $\alpha = 32^\circ 48' 20,5055''$

Mit  $\varphi = 50^\circ 0' 0,0''$  geben die Hilfstafeln des Anhangs

Seite [32]:  $\log [1] = 8,510\ 1335\cdot3$      $\log [2] = 8,508\ 9295\cdot0$

und die Hilfstafel Seite [54] giebt:

$$\log [3] = 4,6287 \quad \log [4] = 4,6119 \quad \log [5] = 5,4257 \quad \log [6] = 2,151 \quad \log [7] = 4,9310 \quad \log [8] = 5,1066$$

Gebrauchsformeln.

$$\log l = \log \left( \frac{[2] s \sin \alpha}{\cos \varphi} \right) + [3] l^2 \sin^2 \varphi - [4] b^2$$

$$\log \Delta \varphi = \log \left( [1] s \cos \alpha \right) + [5] l^2 \cos^2 \varphi + [6] b^2$$

$$\log \Delta \alpha = \log \left( [2] s \sin \alpha \tan \varphi \right) + [7] l^2 \cos^2 \varphi + [8] b^2 + [3] l^2 \sin^2 \varphi - [4] b^2$$

Länge	Breite	Azimuth
$\log s$ 5.121 6103·1	$\log s$ 5.121 6103·1	$\log s$ 5.121 6103·1
$\log [2]$ 8.508 9295·0	$\log [1]$ 8.510 1335·3	$\log [2]$ 8.508 9295·0
$\log \sin \alpha$ 9.733 8324·0	$\log \cos \alpha$ 9.924 5443·0	$\log \sin \alpha$ 9.733 8324·0
$[2] s \sin \alpha$ 3.364 3722·1	$[1] s \cos \alpha$ 3.556 2881·4	$\log \tan \varphi$ 0.076 1866·8
$\log \cos \varphi$ 9.808 0673·7	$= \log b$	$\log (\Delta \alpha)$ 3.440 5588·9
$\log (l)$ 3.556 3048·4		$= \log l \sin \varphi$
$\log ([2] s \sin \alpha)^2 = \log l^2 \cos^2 \varphi = 6.7287$	$\log b^2 = 7.1126$	$\log l^2 \sin^2 \varphi = 6.8811$
$l^2 \sin^2 \varphi$ 6.8811 $b^2$ 7.1126	$l^2 \cos^2 \varphi$ 6.7287 $b^2$ 7.1126	$l^2 \cos^2 \varphi$ 6.7287 $b^2$ 7.1126
$+ [3]$ 4.6287 $- [4]$ 4.6119 <sub>n</sub>	$+ [5]$ 5.4257 $+ [6]$ 2.151	$+ [7]$ 4.9310 $+ [8]$ 5.1066
1.5088    1.7245 <sub>n</sub>	2.1544    9.264	1.6597    2.2192
$+ 32\cdot35$ $- 53\cdot02$	$+ 142\cdot72$ $+ 0\cdot18$	$+ 45\cdot68$ $+ 165\cdot67$
$- 20\cdot67$	$+ 142\cdot90$	$+ 211\cdot35$ $- 20\cdot67$ } $+ 190\cdot68$
$\log (l)$ 3.556 3048·4	$\log (b)$ 3.556 2881·4	$\log (\Delta \alpha)$ 3.440 5588·9
$- 20\cdot7$	$+ 142\cdot9$	$+ 190\cdot7$
$\log l$ 3.556 3027·7	$\log \Delta \varphi$ 3.556 3024·3	$\log \Delta \alpha$ 3.440 5779·6
$l = 3600,0022''$	$\Delta \varphi = 3599,9994''$	$\Delta \alpha = 2757,896$
soll 0,0000	soll 0,0000	soll ,894



Fortsetzung von S. 405.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi = [1] s \cos \alpha \left( 1 + \frac{[5]}{\mu} l^2 \cos^2 \alpha + \frac{[6]}{\mu} b^2 \right) \quad (29)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 - \Delta \alpha = l \sin \varphi \left( 1 + \frac{[7]}{\mu} l^2 \cos^2 \alpha + \frac{[8]}{\mu} b^2 \right) \quad (30)$$

$$\text{und } \Delta \alpha = [2] s \sin \alpha \tan \varphi \left( 1 + \frac{[7]}{\mu} l^2 \cos^2 \alpha + \frac{[8]}{\mu} b^2 + \frac{[3]}{\mu} l^2 \sin^2 \alpha - \frac{[4]}{\mu} b^2 \right) \quad (31)$$

Dazu auch die Umkehrungen:

$$s \sin \alpha = \frac{l \cos \varphi}{[2]} \left( 1 - \frac{[3]}{\mu} l^2 \sin^2 \alpha + \frac{[4]}{\mu} b^2 \right) \quad (32)$$

$$s \cos \alpha = \frac{\Delta \varphi}{[1]} \left( 1 - \frac{[5]}{\mu} l^2 \cos^2 \alpha - \frac{[6]}{\mu} b^2 \right) \quad (33)$$

$$\Delta \alpha = l \sin \varphi \left( 1 + \frac{[7]}{\mu} l^2 \cos^2 \varphi + \frac{[8]}{\mu} b^2 \right) \quad (34)$$

Daraus folgen die logarithmischen Gebrauchsformeln, wie sie in dem Zahlenbeispiel auf S. 406 und 407 obenan gestellt sind.

#### Umkehrung der Mittelbreiten-Formeln.

Wenn  $\varphi_1$ ,  $\alpha_1$  und  $s$  gegeben und  $\varphi_2$ ,  $\alpha_2$  und  $l$  gesucht sind, so kann man die Mittelbreiten-Formeln nicht unmittelbar anwenden, wohl aber mittelbar durch Einführung von Näherungs-Werten, wie schon am Schlusse von § 62. S. 353 bei den sphärischen Mittelbreiten-Formeln mit Gauss' eigenen Worten angegeben ist. Was die nötigen Näherungswerte betrifft, so kann man die Längen und Breiten schon aus dem Netzbilde der Triangulierung entnehmen und damit auch die Meridian-Konvergenzen  $= \lambda \sin \varphi$  ebenso genau; wir wollen aber annehmen, man habe das ganze Netz vorläufig nach den Formeln dritter Ordnung von § 75. S. 398 durchgerechnet, was ungefähr von ähnlicher Bedeutung ist wie das vorläufige Durchrechnen einer Triangulierung für die Zwecke von Centrierungen, sphärischen Excessen u. dergl. Kurz, wir wollen annehmen, man habe Breiten, Längen und Azimute auf etwa 0,1'' genau und dann genügt eine oder höchstens zwei Durchrechnungen nach S. 407, um alles bis auf 0,0001'' zum Stimmen zu bringen.

Jedenfalls kann man alle Coefficienten-Logarithmen  $\log [1]$ ,  $\log [2]$  u. s. w. sofort mit der vorläufigen Mittelbreite  $\varphi$  hinreichend endgiltig genau aus den Hilfstafeln von S. [39]–[35] und S. [52]–[54] entnehmen und damit die Rechnung von S. 407 durchführen.

Die Schlusswerte kommen auf S. 407 noch mit Fehlern innerhalb 0,001'' in Breite und Azimut heraus, welche durch eine abermalige Durchrechnung vollends getilgt werden müssen.

Es könnte hiernach scheinen, dass das Verfahren umständlich und mühsam sei, das ist aber nicht der Fall, denn die Wiederholung erstreckt sich nur auf die drei Logarithmen  $\log \sin \alpha$ ,  $\log \cos \alpha$ ,  $\log \tan \varphi$ ; alles andere, namentlich die Korrekturen zweiter Ordnung bleiben stehen. Erst wenn Breite und Azimut stimmen, wird auch die Länge nachgeholt.

Das Beispiel S. 407 zeigt, dass man mit jeder Durchrechnung um etwa zwei Stellen weiter kommt, und dazu ist das Beispiel ein sehr grosses, mit  $\Delta \varphi$  und  $l = 1^\circ$  und  $s = 132^{\text{km}}$ ; in der Praxis sind die Seiten viel kürzer und dann geht die Näherungskonvergenz auch noch viel rascher.



Die Entwicklung sphäroidischer Mittelbreiten-Formeln und ihrer Umkehrung bildet den Inhalt der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ von Gauss, zweite Abhandlung, Göttingen 1846. Gauss hat hier den ungemein nützlichen Grundsatz des Mittel-Arguments bei Reihen-Entwicklungen auf Geodäsie mit schönstem Erfolge angewendet, und eine zweifach unabhängige Begründung gegeben, erstens durch die konforme Flächen-Abbildung und zweitens durch unmittelbare Reihen-Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie.

Die von Gauss beigegebene Coefficienten-Tabelle erstreckt sich aber nur von  $51^\circ$ – $54^\circ$  Breite. Eine Ausdehnung dieser Tabelle auf  $45^\circ$ – $55^\circ$  gaben wir in den früheren Auflagen dieses Buches, und eine Tafel der Gauss'schen Coefficienten-Logarithmen  $\log(1)$ ,  $\log(2)$  ...  $\log(6)$  in der ganzen Ausdehnung von  $\varphi = 34^\circ$  bis  $\varphi = 70^\circ$  wurde berechnet von Blek, und veröffentlicht in der russischen Übersetzung von Jordan, „Handbuch der Vermessungskunde“ S. 652–665 (vgl. das genauere Citat S. 229).

Was im vorstehenden § 77. gegeben ist, beruht auf dem Gauss'schen Gedanken, ist aber nach Entwicklung und Coefficienten-Darstellung in andere Form gebracht, weil es uns schien, dass die Gauss'sche Form der Korrektions-Glieder mit drei Elementen  $s$ ,  $\beta$  und  $\tau$  ( $\tau$  = Meridian-Konvergenz) ohne  $\lambda$ , in mancher Beziehung nicht günstig ist.

### § 78. Weitere Formeln für Soldnersche Coordinaten.

Die Formeln von § 55. zur Berechnung von  $\varphi$  und  $\lambda$  aus Soldnerschen  $x$  und  $y$  und umgekehrt gehen nur bis zur dritten Ordnung, und sind auch bezüglich der sphäroidischen Zusätze mit  $\eta^2$  u. s. w. unscharf; man bekommt genauere Formeln einfach dadurch, dass man in den Formeln (25)–(27) § 74. S. 395 das Ausgangs-Azimut  $\alpha = 90^\circ$  und die Entfernung  $s = y$  setzt, also

$$v = \frac{s \sin \alpha}{N} = \frac{y}{N} \quad \text{und} \quad u = \frac{s \cos \alpha}{N} = 0 \quad (1)$$

Die in § 74. mit  $\varphi$  bezeichnete Ausgangs-Breite nimmt dann die Bedeutung der Fusspunktsbreite an und soll daher ebenso wie in § 55. nun mit  $\varphi_1$  bezeichnet werden und die Breite des Punktes  $x$ ,  $y$ , welche in § 74. mit  $\varphi'$  bezeichnet war, sei nun  $\varphi$  (vgl. Fig. 1. S. 410) und mit alledem geben die Formeln (25)–(27) von § 74 mit Ergänzung bis  $s^5$  nun folgendes (ohne  $\varrho$ ):

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V^2} = -\frac{y^2 t}{2N^2} + \frac{y^4 t}{24N^4} (1 + 3t^2) \quad (2)$$

$$\lambda \cos \varphi_1 = \frac{y}{N} - \frac{y^3}{3N^3} t^2 + \frac{y^5 t^2}{15N^5} (1 + 3t^2) \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{y}{N} t - \frac{y^3 t}{6N^3} (1 + 2t^2 + \eta^2) + \frac{y^5 t}{120N^5} (1 + 20t^2 + 24t^4) \quad (4)$$

Dabei gehören  $V^2$  und  $N = c : V$  und  $t = \tan \varphi_1$  alle zur Fusspunktsbreite  $\varphi_1$  entsprechend Fig. 1. S. 410. Diese Formeln sind bis  $y^4$  nicht wesentlich anders als die früheren (7), (9), (11) § 55. S. 304. Bei  $\varphi$  ist noch ein Glied mit  $y^4$  hinzugekommen und bei  $\gamma$  noch ein kleiner Zusatz  $\eta^2$  und dann sind noch die Glieder 5ter Ordnung bei  $\lambda$  und  $\gamma$  dazu gekommen. Es sind also die früheren Formeln von § 55. mit ihrer elementaren sphäroidischen Herleitung von § 54. innerhalb ihres beabsichtigten Anwendungsbereiches genügend nachgewiesen.

In der „Bayerischen Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, 1873“, S. 542–546 sind solche weitgehende Formeln wegen der grossen Ordinaten in Bayern (vgl. S. 327) angewendet.

Nach diesem wollen wir noch in anderem Sinne eine Weiterentwicklung zu Soldner'schen Coordinaten geben, die wir schon früher in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894







Nun sind wir genügend vorbereitet, um die Formel (6) zu behandeln, und wir bemerken zuerst, dass das letzte Glied derselben, weil von 4. Ordnung, schlechthin mit  $N_0$  statt  $N_1$  und  $t_0$  statt  $t_1$  geschrieben werden kann, und der Anfang von (6) gestaltet sich so:

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_0^2} \frac{V_0^2}{V_1^2} = -\frac{y^2}{2 N_0^2} t_0 \frac{N_0^2 t_1}{N_1^2 t_0} + \frac{y^4}{24 N_0^4} t_0 (1 + 3 t_0^2)$$

Da aber  $N_0 = c:V_0$  und  $N_1 = c:V_1$  ist, hat man, mit Näherung im zweiten Gliede:

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_0^2} = -\frac{y^2}{2 N_0^2} t_0 \frac{V_1^4 t_1}{V_0^4 t_0} + \frac{y^4}{24 N_0^4} t_0 (1 + 3 t_0^2) \quad (12)$$

hier ist nach (11) und (9) hinreichend genau:

$$\begin{aligned} \frac{V_1^4 t_1}{V_0^2 t_0} &= \left(1 - 4 \delta \frac{\eta_0^2 t_0}{V_0^2} - \delta^2 \eta_0^2 \dots\right) \left(1 + \frac{\delta}{t_0} (1 + t_0^2) + \delta^2 (1 + t_0^2)\right) \\ &= 1 + \frac{\delta}{V_0^2 t_0} (1 + t_0^2 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^2 t_0^2) + \delta^2 (1 + t_0^2) \end{aligned}$$

und mit Einsetzung aus (5):

$$\frac{V_1^4 t_1}{V_0^4 t_0} = 1 + \frac{x}{N_0 t_0} (1 + t_0^2 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^2 t_0^2) + \frac{x^2}{N_0^2} (1 + t_0^2) \quad (13)$$

Dieses (13) in (12) gesetzt giebt:

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_0^2} = -\frac{y^2}{2 N_0^2} t_0 - \frac{y^2 x}{2 N_0^3} (1 + t_0^2 + \eta_0^2 - 3 \eta_0^2 t_0^2) - \frac{y^2 x^2}{2 N_0^4} t_0 (1 + t_0^2) + \frac{y^4}{24 N_0^4} t_0 (1 + 3 t_0^2) \quad (14)$$

Nun kann man aus (14) und (5) den gesuchten Breitenunterschied zusammensetzen, wobei wir aber zur Abkürzung nur noch  $N$  statt  $N_0$ ,  $t$  statt  $t_0$  u. s. w. schreiben wollen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi - \varphi_0}{V^2} &= \frac{x}{N} - \frac{y^2}{2 N^2} t - \frac{3 x^2}{2 N^2} \eta^2 t - \frac{y^2 x}{2 N^3} (1 + t^2 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \\ &\quad + \frac{x^3}{2 N^3} \eta^2 (t^2 - 1) - \frac{y^2 x^2}{2 N^4} t (1 + t^2) + \frac{y^4}{24 N^4} t (1 + 3 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

da  $V^2 = N:M$  und  $MN = r^2$  ist, kann man das auch so schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 &= \frac{x}{M} - \frac{y^2}{2 r^2} t - \frac{3 x^2}{2 r^2} \eta^2 t - \frac{y^2 x}{2 r^2 N} (1 + t^2 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \\ &\quad + \frac{x^3}{2 r^2 N} \eta^2 (t^2 - 1) - \frac{y^2 x^2}{2 N^2 r^2} t (1 + t^2) + \frac{y^4}{24 N^2 r^2} t (1 + 3 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Dieses ist die Schlussformel für  $\varphi - \varphi_0$ , für welche wir insofern eine Probe haben, als mit  $y = 0$  die frühere Formel (29) von § 74. S. 397 wieder erscheinen muss. Dieses ist hinreichend der Fall, wie man am besten in (14a) sieht, indem nur das Glied mit  $x^3 \eta^2 (t^2 - 1)$  von dem Gliede mit  $m^3 \eta^2$  in (29) § 74. S. 397 in höheren Gliedern mit  $\eta^2$  in der Klammer abweicht, was schon bei (5) S. 410 bemerkt wurde.

Auf ähnlichem Wege wie (15) erhalten wurde, haben wir nun auch (7) zu behandeln:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{y^3}{3 N_1^3 \cos \varphi_1} \frac{t_1^2}{t_0^2} \\ \lambda &= \frac{y}{N_0 \cos \varphi_0} \frac{V_1 \cos \varphi_0}{V_0 \cos \varphi_1} - \frac{y^3}{3 N_1^3 \cos \varphi_1} \frac{t_1^2}{t_0^2} \end{aligned} \quad (16)$$



Hierbei ist nach (10) und (11), indem man beide Reihen zusammen multipliziert, und wie bei (14a) und (15) nur noch  $t$  statt  $t_0$  u. s. w. schreibt:

$$\frac{V_1 \cos \varphi_0}{V_0 \cos \varphi_1} = 1 + \frac{\delta}{V^2} t + \frac{\delta^2}{2 V^4} (1 + 2 t^2 + \eta^2 + 3 \eta^2 t^2) + \frac{\delta^3}{6 V^6} t (5 + 6 t^2) \quad (17)$$

Das letzte Glied von (16) giebt bei der Reduktion auf  $\varphi_0$  zwei Glieder, nämlich wegen (9) und (10), mit Weglassung des unteren Zeigers  $_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{y^3 t_1^2}{3 N_1^3 \cos \varphi_1} &= \frac{y^3 t^2}{3 N^3 \cos \varphi} \left( 1 + \frac{2 \delta}{t} (1 + t^2) \right) (1 + \delta t) \\ &= \frac{y^3 t^2}{3 N^3 \cos \varphi} + \frac{y^3 t \delta}{3 N^3} (2 + 3 t^2) \end{aligned} \quad (18)$$

Nun muss man (17) und (18) in (16) einsetzen, und zugleich nach (5) berücksichtigen:

$$\frac{\delta}{V^2} = \frac{x}{N} - \frac{3}{2} \frac{x^3}{N^2} \eta^2 t, \quad \frac{\delta^2}{V^4} = \frac{x^2}{N^3} - \frac{3 x^3}{N^3} \eta^2 t \quad (19)$$

Thut man dieses alles, so wird man aus (16)–(19) erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{y}{N \cos \varphi} + \frac{y x t}{N^2 \cos \varphi} + \frac{y x^2}{2 N^3 \cos \varphi} (1 + 2 t^2 + \eta^2) \\ &\quad - \frac{y^3 t^2}{3 N^3 \cos \varphi} + \frac{y x^3 t}{6 N^4 \cos \varphi} (5 + 6 t^2) - \frac{y^3 x t}{3 N^4 \cos \varphi} (2 + 3 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Um auch noch die Meridian-Konvergenz nach (8) zu entwickeln, haben wir (6) zunächst mit Absonderung von  $t_0$  und  $N_0$ :

$$\gamma = \frac{y}{N_0} t_0 \frac{V_1 t_1}{V_0 t_0} - \frac{y^3}{6 N_1^3} t_1 (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) \quad (21)$$

Hier wollen wir nur bis zur dritten Ordnung gehen, weil die Meridian-Konvergenz nicht so scharf erforderlich ist wie die Breite und Länge; also nach (9) und (11) durch Ausmultiplizieren:

$$\frac{V_1 t_1}{V_0 t_0} = 1 + \frac{\delta}{V^2} t (1 + t^2 + \eta^2) + \frac{\delta^2}{V^4} (1 + t^2) \quad (22)$$

Hier ist wieder  $\delta$  nach (19) einzusetzen, wodurch man (21) und (22) bis zur dritten Ordnung genügend erhält (mit Weglassung der Zeiger  $_0$ ):

$$\gamma = \frac{y}{N} t + \frac{y x}{N^2} (1 + t^2 + \eta^2) + \frac{y x^2}{N^3} (1 + t^2) - \frac{y^3}{6 N^3} t (1 + 2 t^2) \quad (23)$$

Nun haben wir in (15), (20), (23) die Lösung unserer Aufgabe, nämlich  $\varphi - \varphi_0$ ,  $\lambda$  und  $\gamma$  als konvergierende Reihen nach Potenzen von  $x$  und  $y$  darzustellen. Es ist nur noch zu bemerken, dass in den Formeln (15), (20), (23) überall der für analytische Entwicklung weggelassene Faktor  $\varrho$  zur numerischen Anwendung zugesetzt werden muss, also z. B. in (23)  $\gamma = \frac{y}{N} \varrho t + \frac{y x}{N^2} \varrho (1 + t^2 + \eta^2)$  u. s. w.

Wir wollen nun unsere Formeln (15), (20), (23) anwenden auf den Fall des Koordinaten-Systems Celle, für welches wir haben:

$$\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709'' \quad , \quad \tan \varphi_0 = t$$



$$\left. \begin{array}{lll}
 \log \sin \varphi_0 = 9.900\,1963\cdot4 & \log \cos \varphi_0 = 9.783\,2021\cdot9 & \log t = 0.1169941\cdot5 \\
 \log V^2 = 0.001\,0739\cdot2 & \log \cos^2 \varphi_0 = 9.566\,4043\cdot8 & \log t^2 = 0.233\,9883\cdot0 \\
 \log M = 6.804\,4867\cdot7 & \log N = 6.805\,5606\cdot9 & \log r = 6.805\,0237\cdot3 \\
 \log \eta^2 = 7.393\,7231\cdot6 & \log \eta^2 t^2 = 7.627\,7114\cdot6 & \log r^2 = 13.610\,0474\cdot6 \\
 \eta^2 = 0.002\,4758\cdot43 & \eta^2 t^2 = 0.004\,2433\cdot41 & t^2 = 1.7139111588 \\
 \log \varrho = 5.314\,4251\cdot3 & \log \frac{\varrho}{M} = 8.509\,9383\cdot6 & \log \frac{\varrho}{N} = 8.508\,8644\cdot5 \\
 & = \log [1] & = \log [2]
 \end{array} \right\} (24)$$

Wenn man damit alle Coefficienten von [15], [20], [23] ausrechnet, überall das nötige  $\varrho$  zusetzt, welches in [1] und [2] enthalten ist, so erhält man:

$$\left. \begin{array}{l}
 \varphi - \varphi_0 = [8.509\,9383\cdot6]x - [1.520\,3418]y^2 - [9.391\,186]x^2 \\
 - [5.029\,738]xy + [1.845\,154]x^3 - [8.34389]x^2y^2 + [7.61833]y^4
 \end{array} \right\} (25)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \lambda = [8.725\,6622\cdot6]y + [2.037\,0957]yx + [5.459\,944]yx^2 \\
 - [4.871\,408]y^3 + [8.83204]yx^3 - [8.80266]y^3x
 \end{array} \right\} (26)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \gamma = [8.625\,8586\cdot0]y + [2.137\,2921]yx + [5.44\,8333]yx^2 \\
 - [4.882\,776]y^3
 \end{array} \right\} (27)$$

Die Formeln (15), (20), (23) müssen auch umgekehrt werden, d. h. es muss  $x$ ,  $y$  und  $\gamma$  auch als Funktion von  $\varphi$  und  $\lambda$  dargestellt werden.

Aus (19) § 55. S. 305 haben wir, da [2] =  $\varrho$ :  $N$  u. s. w. ist:

$$y = \lambda N_1 \cos \varphi_1 + \frac{\lambda^3}{3} N_1 \sin^2 \varphi_1 \cos \varphi_1 \quad (28)$$

Dieses in (6) eingesetzt liefert:

$$\frac{\varphi - \varphi_1}{V_1^2} = -\frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \frac{\lambda^4}{24} \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1 (1 - 5t^2) \quad (29)$$

Von (20) und (22) § 55. S. 305 haben wir:

$$y = \lambda N \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{6} N \sin^2 \varphi \cos \varphi \quad (30)$$

und

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (31)$$

Um auch (29) auf  $\varphi$  statt  $\varphi_1$  zu bringen, hat man in erster Näherung:

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\lambda^2}{2} V^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

und damit weiter aus (29):

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{V^2} = \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4}{24} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2) \quad (32)$$

Der Übergang von  $\varphi_1$  auf  $\varphi_0$  ist schon früher in (13) § 35. S. 218 gemacht, nämlich:

$$x = M(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{3}{2} \frac{M}{V^2} \eta^2 t (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + \frac{M}{2 V^4} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2) (\varphi_1 - \varphi_0)^3 \quad (33)$$

Dabei ist  $\varphi_1 - \varphi_0 = (\varphi - \varphi_0) - (\varphi - \varphi_1)$ . Das letzte Glied in (33) enthält auch alle Glieder mit  $\eta^2$ , welche bei der entsprechenden Formel (15) nicht mehr genommen sind.



Nun hat man nur noch  $\varphi$  durch  $\varphi_0$  zu ersetzen, d. h. indem  $\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi$  gesetzt wird, nach S. 166:

$$\sin \varphi = \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) = \sin \varphi_0 + \Delta\varphi \cos \varphi_0 - \frac{\Delta\varphi^2}{2} \sin \varphi_0$$

$$\cos \varphi = \cos \varphi_0 - \Delta\varphi \sin \varphi_0 - \frac{\Delta\varphi^2}{2} \cos \varphi_0$$

Wenn man dieses in (30)–(32) einsetzt und auch im übrigen den genügend angegebenen Gang einhält, so wird man finden:

$$\left. \begin{aligned} x &= M \Delta\varphi + \frac{1}{2} N \sin \varphi \cos \varphi \lambda^2 + \frac{3}{2} \frac{M \eta^2 t}{V^2} \Delta\varphi^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} M \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \lambda^2 \Delta\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2} M \frac{\eta^2}{V^4} (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \Delta\varphi^3 - N \sin \varphi \cos \varphi \lambda^2 \Delta\varphi^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2) \lambda^4 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} y &= N \cos \varphi \lambda - M \sin \varphi \lambda \Delta\varphi - \frac{M \cos \varphi}{2 V^2} (1 + \eta^2 + 3 \eta^2 t^2) \lambda \Delta\varphi^2 \\ &\quad - \frac{1}{6} N \sin^2 \varphi \cos \varphi \lambda^3 - \frac{1}{6} N \sin \varphi \cos^2 \varphi (2 - t^2) \lambda^3 \Delta\varphi \\ &\quad + \frac{1}{6} M \sin \varphi \lambda \Delta\varphi^3 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \lambda \frac{\Delta\varphi}{\varrho} \cos \varphi - \frac{\lambda \Delta\varphi^2}{2 \varrho^2} \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3 \varrho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (36)$$

Auch die Einsetzung der Konstanten von Celle nach (24) lässt sich ausführen und giebt:

$$\left. \begin{aligned} x &= [1.4900616 \cdot 4] \Delta\varphi + [5.5590789] \lambda^2 + [3.8613711] \Delta\varphi^2 \\ &\quad - [9.978721] \Delta\varphi \lambda^2 - [7.793405] \Delta\varphi^3 \\ &\quad - [5.23126] \Delta\varphi^2 \lambda^2 + [3.93411] \lambda^4 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} y &= [1.2743377 \cdot 4] \lambda - [6.0758328] \Delta\varphi \lambda - [0.3488631] \Delta\varphi^2 \lambda \\ &\quad - [9.667729] \lambda^3 \\ &\quad - [3.69281] \Delta\varphi \lambda^3 + [4.66883] \Delta\varphi^3 \lambda \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\gamma = [9.9001963 \cdot 4] \lambda + [4.468777] \lambda \Delta\varphi - [8.97032] \lambda \Delta\varphi^2 + [8.36063] \lambda^3 \quad (39)$$

Zwei Zahlenbeispiele und noch verschiedene weitere Einzelheiten hiezu sind in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 40–41 und S. 150–153 gegeben, wovon hier abgesehen wird.

Über die ganze Anordnung dieser Auflösungsform, welche schon etwa 1820 von Schleiermacher in Hessen angewendet wurde („Zeitschr. f. Verm.“ 1884, S. 421–434) ist im allgemeinen zu sagen, dass sie im Vergleich mit der Bohnenberger'schen Form von § 55. S. 308–309 kaum eine Rechenersparung bringt, und zur allgemeinen Anwendung noch Hilfstafeln für die Hauptglieder erster Ordnung und noch manches andere verlangen würde.

Trotzdem haben wir das Verfahren in unserem System Celle mit Vorliebe angewendet. Wir haben nach den Formeln (25)–(27) und (37)–(39) autographierte Schemata angelegt, in welchen alle konstanten Coefficienten mit vorgedruckt sind, so dass man nur noch eine Logarithmentafel braucht, um einen Fall auszurechnen; dazu hat man die durchschlagende Probe, dass Hin- und Her-Rechnung stimmen muss. So sind z. B. auch die meisten der in § 58. erwähnten Rechnungen dieser Art gemacht.



Gerade die Unabhängigkeit von allen tabellarischen und litterarischen Hilfsmitteln sichert dem Verfahren Beliebtheit in Fällen, wo man nicht viele Punkte auf einmal, aber immer wieder dann und wann den einen und anderen Fall, vorzunehmen hat.

Es ist auch noch ein Umstand zu erwähnen, betreffend die Nullpunktsbreiten  $\varphi_0$ , welche zur Zeit meist unrunde Zahlen sind, so dass man z. B. in Preussen die Coefficienten für alle 40 Systeme einzeln ausrechnen müsste, während für runde Zahlen  $\varphi_0 = 52^\circ 0'$ ,  $\varphi_0 = 52^\circ 30'$  u. s. w. die Sache besser würde.

#### Näherungsformeln für Coordinaten-Differenzen.

Wenn man auf beschränktem Gebiete nur zunächst von einem Punkte sowohl die rechtwinkligen Coordinaten  $x, y$ , als auch die geographischen Coordinaten  $\varphi, \lambda$  kennt, so kann man für benachbarte Punkte die Differenzen  $\Delta x, \Delta y$  einerseits und  $\Delta \varphi, \Delta \lambda$  andererseits durch Näherungsformeln aus einander ableiten.

Wir nehmen hierzu die Formeln (8<sup>r</sup>) und (10<sup>r</sup>) § 55. S. 305:

$$\varphi = \varphi_0 + [1]x - \frac{([2]y)^2}{2\rho} V^2 \tan \varphi \quad (a)$$

$$\lambda = \frac{[2]y}{\cos \varphi} + \frac{([2]y)^3}{6\rho^2 \cos^3 \varphi} \sin^2 \varphi \quad (b)$$

Diese Formeln hat man zu differentiiieren, man erhält also aus (a):

$$\Delta \varphi = [1] \Delta x - \frac{[2]^2}{\rho} y V^2 \tan \varphi \Delta y + \dots \quad (c)$$

In der zweiten Formel (b) können wir in erster Näherung das zweite Glied weglassen, und im ersten Gliede von (b) setzen wir

$$\varphi = \varphi_c + [1] \Delta x$$

d. h. wir zählen von einer konstanten Breite  $\varphi_c$ , welche einem Zentralpunkte entspricht.

$$\text{Damit wird } \cos \varphi = \cos \varphi_c - [1] \Delta x \sin \varphi_c = \cos \varphi_c \left( 1 - [1] \frac{\Delta x}{\rho} \tan \varphi_c \right)$$

also

$$\lambda = \frac{[2]y}{\cos \varphi_c} \left( 1 + \frac{[1] \Delta x}{\rho} \tan \varphi_c \right) \quad (d)$$

$$\Delta \lambda = \frac{[2]}{\cos \varphi_c} \Delta y - \frac{[2][1]y}{\rho \cos \varphi_c} \tan \varphi_c \Delta x + \dots$$

In (c) und (d) haben wir die gesuchten Beziehungen zwischen  $\Delta \varphi, \Delta \lambda$  einerseits und  $\Delta x, \Delta y$  andererseits. Diese Beziehungen sind nur roh genähert, indem schon die Glieder mit  $\Delta x^2$  und  $\Delta y^2$  weggelassen sind.

Zur praktischen Anwendung wird man die Konstanten  $[1], [2], y, \varphi_c$  (und  $\varphi_1 = \varphi_c$ ) einem Zentralpunkte entsprechend wählen, von welchem aus man nachher die  $\Delta \varphi, \Delta \lambda, \Delta x, \Delta y$  zu rechnen beabsichtigt.

Wir haben dieses Verfahren 1891 mehrfach angewendet, als viele Punkte der Stadt Hannover für die Landesaufnahme nach  $\varphi$  und  $\lambda$  zu berechnen waren, d. h. wir haben die Formeln (c) und (d) lediglich zu summarischer Kontrolle neben anderen strengeren Formeln benützt.

I. Aegidius als Zentralpunkt hat

$$\lambda = 27^\circ 24' 24,6290'' \quad \varphi_c = 52^\circ 22' 14,961''$$

$$y = -23271,81^m \quad x = -23308,40^m$$

$$\Delta \lambda = [8.723 \ 156] \Delta y - [6.39851] \Delta x, \quad \Delta \varphi = [6.1842] \Delta y + [8.509 \ 948] \Delta x$$



## II. Hochschule als Zentralpunkt.

$$\lambda = 27^\circ 23' 8,233''$$

$$\varphi_c = 52^\circ 23' 1,328''$$

$$y = -24709,77^m$$

$$x = -26868,28^m$$

$$\Delta\lambda = [8.723\,277] \Delta y - [6.42\,486] \Delta x, \quad \Delta\varphi = [6.2105] \Delta y + [8.509\,947] \Delta x$$

## III. Dreifaltigkeit als Zentralpunkt.

$$\lambda = 27^\circ 25' 15,744''$$

$$\varphi_c = 52^\circ 22' 59,973''$$

$$y = -22298,58^m$$

$$x = -26921,72^m$$

$$\Delta\lambda = [8.723\,273] \Delta y - [6.380\,76] \Delta x, \quad \Delta\varphi = [6.1659] \Delta y + [8.509\,947] \Delta x$$

Nehmen wir z. B. Welfenkaserne mit  $y = -23180,99^m$  und  $x = -26485,30^m$  und rechnen nach II und nach III, so finden wir

$$\text{II von Hochschule aus: } \lambda = 27^\circ 24' 28,971'' \quad \varphi = 52^\circ 23' 13,970''$$

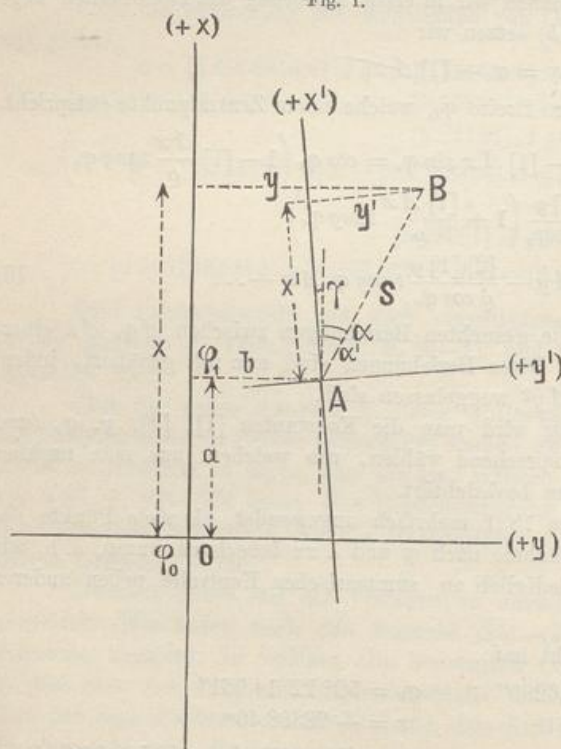
$$\text{III von Dreifaltigkeit aus: } 27^\circ 24' 28,981'' \quad 52^\circ 23' 13,965''$$

Jedenfalls genügt das Verfahren, wenn man rasch einen Punkt von Hannover nur etwa auf 0,1'' für Topographie, Vergleichung mit astronomischer Bestimmung u. s. w. haben will, was manchmal vorkommt.

## § 79. Koordinaten-Umformung.

An den Grenzen zweier Koordinaten-Gebiete wird es oft vorkommen, dass man die Koordinaten des einen Systems in die des anderen Systems umzurechnen wünscht.

Fig. 1.



Ohne irgend welche neue Formeln zu entwickeln, kann man Koordinaten verschiedener rechtwinkliger Systeme auf dem Ellipsoid dadurch in einander umformen, dass man den Umweg über geographische Koordinaten (geographische Breiten und Längen) nimmt.

Es sei z. B. in nebenstehender Fig. 1. der Ursprung  $O$  eines rechtwinkligen Systemes mit  $+x$  nach Norden,  $+y$  nach Osten und ein Punkt  $A$  habe in diesem System die Koordinaten  $a$  und  $b$ . Dieser Punkt  $A$  wird zum Ursprunge eines Systemes gemacht, dessen  $+x'$ -Axe im Meridian von  $A$  nach Norden liegt und die Meridian-Konvergenz  $\gamma$  in  $A$  gegen den ersten Ursprung  $O$  bildet. Irgend ein anderer Punkt  $B$  habe im ersten System die Koordinaten  $x, y$  und im zweiten System die Koordinaten  $x', y'$ .



Denkt man sich das Ganze auf dem Ellipsoid liegend, so kann man bei gegebener Breite  $\varphi_0$  des Ursprungs  $O$  auch die Breiten- und Längenunterschiede der Punkte  $A$  und  $B$ , und die Meridian-Konvergenzen berechnen, nach den Formeln von § 55. oder § 78.

Wir wollen beispielshalber setzen (Zahlenbeispiel „Zeitschr. f. Verm.“ 1891, S. 164):

$$\text{Punkt } O, \varphi_0 = 48^\circ 0' 0'' \quad (1)$$

$$, B, y = -100\,000^m, x = -100\,000^m \quad (2)$$

$$, A, b = -200\,000^m, a = -200\,000^m \quad (3)$$

Indem diese Koordinaten alle negativ sind, haben wir  $A$  und  $B$  beide südwestlich vom Ursprung  $O$  zu denken.

Wir rechnen nach der Tafel S. [55]:

	Punkt B	Punkt A
$\varphi = 48^\circ 0'$	$B = 5\,317\,885,233^m$	$B = 5\,317\,885,233^m$
	$x = -100\,000$	$a = -200\,000$
	5 217 885,233	5 117 885,233
durch Interpolation $\varphi_1 = 47^\circ 6' 1,6896''$		$\varphi_1 = 46^\circ 12' 2,8698''$

Dieses sind die Fusspunktsbreiten, zu welchen aus S. [31], [30] und S. [19] entnommen wird:

$$\begin{array}{l|l} \log [2] = 8.509\,0025\,3 & \log [2] = 8.509\,0253\,3 \\ \log V^2 = 0.001\,3501 & \log V^2 = 0.001\,3957 \end{array}$$

Die weitere Rechnung geht nach § 55. S. 309, was allerdings für die grossen Werte  $a$  und  $b = 200\,000^m$  kaum ausreicht, doch im wesentlichen noch genügt. Es fand sich

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = -1^\circ 19' 2,378'' \\ \varphi = 47^\circ 5' 34,414'' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda_0 = -2^\circ 35' 26,337'' \\ \varphi_0 = 46^\circ 10' 17,124'' \\ \gamma = -1^\circ 52' 10,36'' \end{array} \quad (4)$$

Nun wird  $A$  als neuer Koordinaten-Nullpunkt genommen, weshalb die zugehörigen  $\varphi$  und  $\lambda$  im vorstehenden mit  $\varphi_0$  und  $\lambda_0$  bezeichnet sind, dieselben geben auch die Differenzen

$$\begin{array}{l|l} \lambda - \lambda_0 = +1^\circ 16' 23,959'' & \varphi - \varphi_0 = +0^\circ 55' 17,290'' \\ \Delta \lambda = +4583,959'' & \Delta \varphi = +3317,290'' \end{array} \quad (5)$$

Nun kann man umgekehrt aus  $\Delta \lambda$  und  $\Delta \varphi$  nach (5) die rechtwinkligen Koordinaten von  $B$  in Bezug auf  $A$  berechnen (nach dem Schema von § 55. S. 309) nämlich:

$$\text{Punkt } B \quad y' = +96659,79^m, \quad x' = +103\,209,21^m \quad (6)$$

Damit ist die erste Berechnungsart erledigt; wir haben keine anderen Formeln und Entwicklungen anzuwenden gehabt, als die zu vielen anderen Zwecken ohnehin nötigen Beziehungen zwischen rechtwinkligen und geographischen Koordinaten.

Indessen gestattet unsere Aufgabe auch noch eine zweite einfachere Behandlung, zu der wir nun übergehen:

Wenn die Koordinatensysteme als eben betrachtet werden, so hat man bekanntlich die Umwandlungsformeln:

$$y' = (y - b) \cos \gamma + (x - a) \sin \gamma \quad (7)$$

$$x' = (x - a) \cos \gamma - (y - b) \sin \gamma \quad (8)$$

und entsprechende Formeln sind nun noch mit Gliedern von der Ordnung  $1:r^2$  zu bilden.



Die Soldner'schen Formeln von § 46. (14)–(16) S. 261 lassen sich in zweifacher Weise auf unseren Fall anwenden, nämlich nach der Fig. 1. S. 416.

System  $O$ :

$$y - b = s \sin \alpha - \frac{(x - a)^2 b}{2 r^2} - \frac{(x - a)^2 (y - b)}{6 r^2} \quad (9)$$

$$x - a = s \cos \alpha + \frac{(x - a) y^2}{2 r^2} - \frac{(x - a) (y - b)^2}{6 r^2} \quad (10)$$

Im System  $A$ :

$$y' = s \sin \alpha' - \frac{x'^2 y'}{6 r^2} \quad (11)$$

$$x' = s \cos \alpha' + \frac{x' y'^2}{3 r^2} \quad (12)$$

Dabei ist  $\alpha' = \alpha + \gamma$ , also:

$$\sin \alpha' = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \quad (13)$$

$$\cos \alpha' = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \quad (14)$$

Damit kann man  $\sin \alpha'$  und  $\cos \alpha'$  eliminieren, und Verbindungen zwischen (9) und (11) sowie zwischen (10) und (12) herstellen.

$$y' = s \sin \alpha \cos \gamma + s \cos \alpha \sin \gamma - \frac{x'^2 y'}{6 r^2}$$

Dann wegen (8) und (9):

$$y' = \left( (y - b) + \frac{(x - a)^2 b}{2 r^2} + \frac{(x - a)^2 (y - b)}{6 r^2} \right) \cos \gamma + \left( (x - a) - \frac{x - a}{2 r^2} y^2 + \frac{x - a}{6 r^2} (y - b)^2 \right) \sin \gamma - \frac{x'^2 y'}{6 r^2}$$

Wenn man dabei bedenkt, dass  $\gamma$  nach (11) oder (12) § 55. S. 304 selbst von der Ordnung  $\frac{1}{r}$  ist und dass man daher in den höheren Gliedern  $\sin \gamma = 0$  und  $\cos \gamma = 1$  setzen darf, so wird man finden:

$$y' = (y - b) \cos \gamma + (x - a) \sin \gamma + \frac{(x - a)^2 b}{2 r^2} + \frac{(x - a)^2 (y - b)}{6 r^2} - \frac{x'^2 y'}{6 r^2}$$

Im letzten Gliede ist es aber genügend,  $x' = x - a$  und  $y' = y - b$  zu setzen, so dass nur übrig bleibt:

$$y' = (y - b) \cos \gamma + (x - a) \sin \gamma + \frac{(x - a)^2 b}{2 r^2} \quad (15)$$

und auf ganz ähnlichem Wege findet man auch:

$$x' = (x - a) \cos \gamma - (y - b) \sin \gamma + \frac{(x - a) b (b - 2 y)}{2 r^2} \quad (16)$$

Diese Endformeln unterscheiden sich von den im Eingang für ebene Koordinaten angegebenen Formeln (7) und (8) nur durch einfache Zusatzglieder von der Ordnung  $\frac{1}{r^2}$ .

Um diese Formeln (15) und (16) auf das Zahlenbeispiel (1) (2) (3) anzuwenden, muss man zuerst die Meridiankonvergenz  $\gamma$  nach (4) benützen, d. h., wenn die übrige zu (4) gehörige Rechnung nicht gemacht wird, hat man  $\gamma$  für sich nach S. 309 zu bestimmen:

$$\gamma = -1^\circ 52' 10,36'' \quad (17)$$

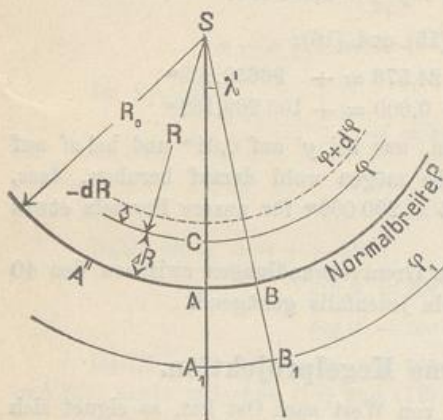






Denn es ist für die Normalbreite  $P$  der Parallelkreis-Halbmesser in Fig. 1.  $DA = r \cos P$ , also  $AB = r \cos P \lambda$ , folglich  $\lambda' = AB : R_0$ , was mit  $R_0 = r \cotg P$  aus (1) sofort zu der Gleichung (2) führt. Damit können wir alle Meridiane als

Fig. 2.



gerade Radialstrahlen von  $S$  aus in Fig. 2. abbilden, aber wir haben erst einen Parallelkreis, nämlich denjenigen für die Normalbreite  $P$ . Die anderen Parallelkreise sollen auch als Kreise um den Mittelpunkt  $S$  dargestellt werden, z. B. soll in Fig. 2. der Kreis vom Halbmesser  $SC = R$  der Breite  $\varphi$  entsprechen, und man könnte als einfachstes Gesetz hierfür annehmen,  $AC = r(\varphi - P)$  zu machen, so dass auch alle Meridianbögen in Fig. 2 in richtiger Grösse dargestellt würden.

Es giebt das in der That eine Kegelprojektion, aber nicht eine konforme, welche ein anderes Gesetz der Meridianbogenabbildung verlangt. Dazu betrachten

wir in Fig. 3 und Fig. 4. die Differentialfiguren für ein unendlich kleines geographisches Trapez und dessen Abbildung.

Wenn das Trapez auf der Kugel zwischen den Breiten  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$ , sowie zwischen zwei Meridianen mit dem Längenunterschied  $d\lambda$  liegt, so hat es den Meridianbogen  $r d\varphi$  und den Parallelbogen  $r \cos \varphi d\lambda$ ; und das Abbild in Fig. 4. hat entsprechend  $-dR$  und  $R d\lambda'$  und zwar  $-dR$ , weil das Wachsen von  $R$  dem Wachsen am  $\varphi$  entgegengesetzt ist.

Fig. 3.

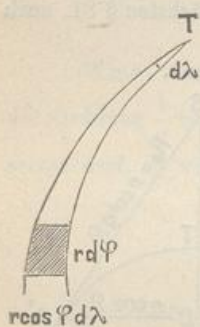


Fig. 4.



Nun sollen die beiden unendlich kleinen Trapeze Fig. 3. im Urbild und Fig. 4. im Abbilde einander ähnlich sein, also, wenn zugleich das Vergrößerungsverhältnis mit  $m$  bezeichnet wird, hat man:

$$m = -\frac{dR}{r d\varphi} = \frac{R d\lambda'}{r \cos \varphi d\lambda}$$

oder weil  $\lambda' = \lambda \sin P$  noch (2) ist, giebt dieses:

$$m = -\frac{dR}{r d\varphi} = \frac{R \sin P}{r \cos \varphi} \quad (3)$$

$$-\frac{dR}{R} = \sin P \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

Dieses ist die Differentialgleichung für das Gesetz der Änderung von  $R$ , deren Integration alsbald giebt:

$$-\log R = \sin P \log \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \dots \quad (4)$$

Um die Integrations-Konstante zu bestimmen, setzen wir fest, dass für die Normalbreite  $P$  der Kegelstrahl die Länge  $-R_0$  annehmen soll, d. h.

$$-\log R_0 = \sin P \log \tan \left( 45^\circ + \frac{P}{2} \right) + \dots \quad (5)$$



Aus (4) und (5) zusammen hat man:

$$\log R - \log R_0 = \sin P \left\{ \log \tan \left( 45^\circ + \frac{P}{2} \right) - \log \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right\}$$

oder in Quotientenform:

$$\log \frac{R}{R_0} = \sin P \log \frac{\tan \left( 45^\circ + \frac{P}{2} \right)}{\tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \quad (6)$$

Man kann dieses auch noch auf eine andere Form bringen, denn es ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} 1 - \cos x &= 2 \sin^2 \frac{x}{2} & \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} &= \tan^2 \frac{x}{2} \\ 1 + \cos x &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} \end{aligned}$$

und mit  $x = 90^\circ + P$  oder mit  $x = 90^\circ + \varphi$  giebt dieses:

$$\tan^2 \left( 45^\circ + \frac{P}{2} \right) = \frac{1 + \sin P}{1 - \sin P} \quad \text{und} \quad \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

also wird (6):

$$\log \frac{R}{R_0} = \frac{\sin P}{2} \log \frac{(1 + \sin P)(1 - \sin \varphi)}{(1 - \sin P)(1 + \sin \varphi)} \quad (7)$$

oder wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht:

$$\frac{R}{R_0} = \left( \frac{1 + \sin P}{1 - \sin P} \cdot \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right)^{\frac{\sin P}{2}} \quad (8)$$

Nach diesen Formeln (6), (7) oder (8) kann man zu jedem Werte  $\varphi$  das zugehörige  $R$  berechnen, nachdem  $R_0$  schon aus (1) erhalten worden ist. Auch das dazu gehörende Vergrößerungsverhältnis  $m$  kann aus (3) berechnet werden und damit schiene alles erledigt, aber die Rechnung nach diesen geschlossenen Formeln ist mühsam und ungenau, wenn sie nicht mit 10stelligen Logarithmen geführt wird. Es kommt weniger auf  $R$  selbst an, als auf die Differenz  $R_0 - R$ , und diese werden wir besser erlangen durch eine Reihen-Entwicklung, zu welcher wir nun übergehen.

Nach dem Maclaurinschen Satze wird jedenfalls folgende Form bestehen:

$$R = R_0 + \frac{dR}{d\varphi} \Delta\varphi + \frac{d^2R}{d\varphi^2} \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \frac{d^3R}{d\varphi^3} \frac{\Delta\varphi^3}{6} + \frac{d^4R}{d\varphi^4} \frac{\Delta\varphi^4}{24} \quad (9)$$

Wir wollen aber nicht geradezu die Funktion  $R$  von (8) differenzieren, sondern das Konstante absondern und deswegen setzen:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{F}{F_0} \quad (10)$$

Oder wegen (8) sollen die  $F$  und  $F_0$  folgende Bedeutungen haben:

$$F = \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right)^{\frac{1}{2} \sin P} \quad \text{und} \quad F_0 = \left( \frac{1 - \sin P}{1 + \sin P} \right)^{\frac{1}{2} \sin P} \quad (11)$$

Nun giebt (10) durch Ableitung:

$$\frac{1}{R_0} \frac{dR}{d\varphi} = \frac{1}{F_0} \frac{dF}{d\varphi} \quad (12)$$

und damit kann man die Maclaurinsche Reihe (9) auch so schreiben:

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{F_0} \frac{dF}{d\varphi} \Delta\varphi + \frac{1}{F_0} \frac{d^2F}{d\varphi^2} \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \frac{1}{F_0} \frac{d^3F}{d\varphi^3} \frac{\Delta\varphi^3}{6} + \frac{1}{F_0} \frac{d^4F}{d\varphi^4} \frac{\Delta\varphi^4}{24} \quad (13)$$



Nun müssen wir die 4 ersten Ableitungen der Funktion  $F$  von (11) bilden und beginnen:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\varphi} &= \frac{\sin P}{2} \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right)^{\frac{\sin P}{2} - 1} \left\{ \frac{-\cos \varphi (1 + \sin \varphi) - (1 - \sin \varphi) \cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} \right\} \\ &= \frac{\sin P}{2} \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right)^{\frac{\sin P}{2} - 1} \left\{ \frac{-2 \cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} \right\} \\ &= -\sin P \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right)^{\frac{\sin P}{2}} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \frac{\cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2}\end{aligned}$$

Also mit Wiedereinsetzung von  $F$  selbst nach (11):

$$\frac{dF}{d\varphi} = -\sin P F \frac{\cos \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{-\sin P F}{\cos \varphi} \quad (14)$$

Diese auf etwas umständlichem Wege erlangte erste Ableitung, die sich so kurz darstellt, kann man auch unmittelbar aus (10) und (12) und (4) entnehmen, was insofern natürlich ist, als in (14) nichts anderes als die Rückwärts-Differentiierung der vorhergegangenen Integration ist.

Die Weiter-Differentiierung von (14) giebt:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 F}{d\varphi^2} &= -\frac{\sin P}{\cos^2 \varphi} \left( \frac{dF}{d\varphi} \cos \varphi + F \sin \varphi \right) \\ \frac{d^2 F}{d\varphi^2} &= +\sin P F \frac{\sin P - \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \quad (15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3 F}{d\varphi^3} &= \sin P \left\{ -\frac{F \sin P \sin P - \sin \varphi}{\cos \varphi \cos^2 \varphi} + F \frac{-\cos^3 \varphi + (\sin P - \sin \varphi) 2 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^4 \varphi} \right\} \\ \frac{d^3 F}{d\varphi^3} &= F \sin P \left\{ \frac{\sin P - \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} - (2 \sin \varphi - \sin P) - \frac{1}{\cos \varphi} \right\} \quad (16)\end{aligned}$$

Nochmals abgeleitet:

$$\begin{aligned}\frac{d^4 F}{d\varphi^4} &= \frac{-F \sin^2 P}{\cos \varphi} \left\{ \frac{\sin P - \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} (2 \sin \varphi - \sin P) - \frac{1}{\cos \varphi} \right\} \\ &\quad + F \sin P \left\{ + \left( \frac{3 \sin P \sin \varphi}{\cos^4 \varphi} - \frac{\cos^4 \varphi + 3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\cos^6 \varphi} \right) (2 \sin \varphi - \sin P) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin P - \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} 2 \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right\} \quad (17)\end{aligned}$$

Dieses könnte man noch weiter ordnen, da wir aber hier abbrechen, ist es nicht nötig; wir müssen nämlich nun nach dem Maclaurinschen Schema (13) diejenigen besonderen Werte unserer vier Ableitungen bestimmen, welche gelten für  $\Delta \varphi = 0$ , oder was dasselbe ist  $\varphi = P$ . Beginnen wir mit (14) und (15), so haben wir alsbald:

$$\left[ \frac{dF}{d\varphi} \right] = -F_0 \tan P \quad \text{und} \quad \left[ \frac{d^2 F}{d\varphi^2} \right] = 0 \quad (18)$$

Auch (16) und (17) reduzieren sich sehr mit  $\varphi = P$ , sie geben:

$$\left[ \frac{d^3 F}{d\varphi^3} \right] = -F_0 \tan P \quad \text{und} \quad \left[ \frac{d^4 F}{d\varphi^4} \right] = -F_0 \tan^2 P \quad (19)$$

Setzt man alles dieses in das Maclaurinsche Schema (13) ein, so erhält man:

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \Delta \varphi \tan P - \frac{\Delta \varphi^3}{6} \tan P - \frac{\Delta \varphi^4}{24} \tan^2 P \quad (20)$$



Wir wollen zur Abkürzung setzen:

$$\tan P = t \quad \text{und} \quad R_0 - R = \Delta R \quad (21)$$

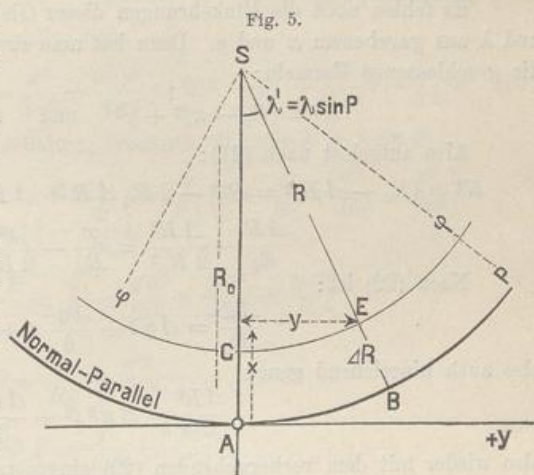
Damit wird die vorhergehende Reihe (20):

$$\Delta R = R_0 \Delta \varphi t + R_0 \frac{\Delta \varphi^3}{6} t + R_0 \frac{\Delta \varphi^4}{24} t^2 \quad (22)$$

Rechtwinklige Coordinaten  $x, y$ .

Der Mittelmeridian  $AS$  unserer Abbildung wird als  $x$ -Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems genommen, mit einer  $y$ -Axe, welche in  $A$  den Normalparallelkreis  $AB$  berührt, wie in Fig. 5. gezeichnet ist.

Wenn nun irgend ein Punkt  $E$  die Länge  $\lambda$  gegen den Mittelmeridian und die Breite  $\varphi$  hat, so kennt man auch die Meridian-Konvergenz  $ASE = \lambda' = \lambda \sin P$  u. die meridionale Strecke  $BE = \Delta R$  nach Gleichung (22), folglich hat man nach Fig. 5:



$$x = R_0 - R \cos \lambda' \quad \text{und} \quad y = R \sin \lambda' \quad (23)$$

Man könnte nach diesen Formeln unmittelbar rechnen; besser aber sind Reihen-Entwicklungen, welche sich sehr leicht geben:

$$\frac{x}{R_0} = 1 - \frac{R}{R_0} \cos \lambda' = 1 - \frac{R}{R_0} \left( 1 - \frac{\lambda'^2 \sin^2 P}{2} + \frac{\lambda'^4 \sin^4 P}{24} \right)$$

und wenn man  $\frac{R}{R_0}$  aus (20) einsetzt, so bekommt man:

$$\frac{x}{R_0} = 1 - \left( 1 - \Delta \varphi t - \frac{\Delta \varphi^3}{6} t - \frac{\Delta \varphi^4}{24} t^2 \right) \left( 1 - \frac{\lambda'^2 \sin^2 P}{2} + \frac{\lambda'^4 \sin^4 P}{24} \right)$$

Die Multiplizierung mit Vernachlässigung der Glieder über der 4ten Ordnung giebt:

$$\frac{x}{R_0} = \Delta \varphi t + \frac{\lambda'^2 \sin^2 P}{2} - \frac{\Delta \varphi \lambda'^2 \sin^2 P}{2} t + \frac{\Delta \varphi^3}{6} t - \frac{\lambda'^4 \sin^4 P}{24} + \frac{\Delta \varphi^4}{24} t^2 \quad (24)$$

aber nach (1) ist  $R_0 t = R_0 \tan P = r$ , also:

$$\frac{x}{r} = \Delta \varphi + \frac{\lambda'^2}{2} \sin P \cos P - \frac{\Delta \varphi \lambda'^2 \sin^2 P}{2} + \frac{\Delta \varphi^3}{6} - \frac{\lambda'^4 \sin^3 P \cos P}{24} + \frac{\Delta \varphi^4 t}{24} \quad (25)$$

In gleicher Weise bekommt man auch die Reihe für  $y$ , denn es ist zunächst:

$$\sin \lambda' = \sin (\lambda \sin P) = \lambda \sin P - \frac{\lambda^3 \sin^3 P}{6}$$

und nach (20):

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \Delta \varphi t - \frac{\Delta \varphi^3}{6} t - \frac{\Delta \varphi^4}{24} t^2$$



also nach (23):

$$\begin{aligned}\frac{y}{R} &= \left( \lambda \sin P - \frac{\lambda^3 \sin^3 P}{6} \right) \left( 1 - \Delta \varphi t - \frac{\Delta \varphi^3}{6} t - \frac{\Delta \varphi^4}{24} t^2 \right) \\ \frac{y}{R} &= \lambda \sin P - \Delta \varphi \lambda \sin P t - \frac{\lambda^3}{6} \sin^3 P + \frac{\Delta \varphi \lambda^3 \sin^3 P t}{6} - \frac{\Delta \varphi^3 \lambda \sin P t}{6} \\ \frac{y}{r} &= \lambda \cos P - \Delta \varphi \lambda \sin P - \frac{\lambda^3}{6} \sin^2 P \cos P + \frac{\Delta \varphi \lambda^3 \sin^3 P}{6} - \frac{\Delta \varphi^3 \lambda \sin P}{6}\end{aligned}\quad (26)$$

Es fehlen noch die Umkehrungen dieser Gleichungen zur Bestimmung von  $\Delta \varphi$  und  $\lambda$  aus gegebenem  $x$  und  $y$ . Dazu hat man zunächst nach dem Anblick von Fig. 5. die geschlossenen Formeln:

$$R^2 = (R_0 - x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \tan \chi' = \frac{y}{R_0 - x} \quad (27)$$

Also aufgelöst nach (21):

$$\begin{aligned}R^2 &= (R_0 - \Delta R)^2 = R_0^2 - 2 R_0 \Delta R + \Delta R^2 = R_0^2 - 2 R_0 x + x^2 + y^2 \\ \frac{\Delta R}{R_0} - \frac{\Delta R^2}{2 R_0^2} &= \frac{x}{R_0} - \frac{x^2}{2 R_0^2} - \frac{y^2}{2 R_0^2}\end{aligned}\quad (28)$$

Nach (22) ist:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \Delta \varphi t + \frac{\Delta \varphi^3}{6} t + \frac{\Delta \varphi^4}{24} t^2 \quad (29)$$

also auch hinreichend genau

$$\frac{\Delta R^2}{R_0^2} = \Delta \varphi^2 t^2 + \frac{\Delta \varphi^4}{3} t^2 \quad (30)$$

also wieder mit dem vorhergehenden (29) eingesetzt in (28):

$$\Delta \varphi t - \frac{\Delta \varphi^2 t^2}{2} + \frac{\Delta \varphi^3}{6} t - \frac{\Delta \varphi^4}{8} t^2 = \frac{x}{R_0} - \frac{x^2}{2 R_0^2} - \frac{y^2}{2 R_0^2} \quad (31)$$

Diese Gleichung soll durch allmähliche Näherung nach  $\Delta \varphi$  aufgelöst werden. Jedenfalls ist in erster Näherung:

$$\Delta \varphi t = \frac{x}{R_0} + x^2 \dots \quad \text{also} \quad \Delta \varphi^2 t^2 = \frac{x^2}{R_0^2} + x^3 \dots$$

$$\Delta \varphi t - \frac{x^2}{2 R_0^2} + \dots = \frac{x}{R_0} - \frac{x^2}{2 R_0^2} - \frac{y^2}{2 R_0^2} + \dots$$

$$\text{Zweite Näherung} \quad \Delta \varphi t = \frac{x}{R_0} - \frac{y^2}{2 R_0^2} + \dots$$

$$\Delta \varphi^2 t^2 = \frac{x^2}{R_0^2} - \frac{x y^2}{R_0^3}, \quad \Delta \varphi^3 t^3 = \frac{x^3}{R_0^3}$$

Also von neuem bis zur dritten Ordnung:

$$\Delta \varphi t - \frac{x^2}{2 R_0^2} + \frac{x y^2}{2 R_0^3} + \frac{x^3}{6 R_0^3 t^2} = \frac{x}{R_0} - \frac{x^2}{2 R_0^2} - \frac{y^2}{2 R_0^2}$$

$$\Delta \varphi t = \frac{x}{R_0} - \frac{y^2}{2 R_0^2} - \frac{x y^2}{2 R_0^3} - \frac{x^3}{6 R_0^3 t^2}$$

Damit bis zur 4 ten Ordnung:

$$\Delta \varphi^2 t^2 = \frac{x^2}{R_0^2} - \frac{x y^2}{R_0^3} - \frac{x^2 y^2}{R_0^4} - \frac{x^4}{3 R_0^4 t^2} + \frac{y^4}{4 R_0^4}$$

$$\Delta \varphi^3 t^3 = \frac{x^3}{R_0^3} - \frac{3 x^2 y^2}{2 R_0^4} \quad \text{und} \quad \Delta \varphi^4 t^4 + \frac{x^4}{R_0^4}$$



Alles dieses in (31) eingesetzt giebt die Schlussgleichung:

$$\Delta \varphi t = \frac{x^2}{2 R_0^2} + \frac{x y^2}{2 R_0^3} + \frac{x^2 y^2}{2 R_0^4} + \frac{x^4}{6 R_0^4 t^2} - \frac{y^4}{8 R_0^4} + \frac{x^3}{6 R_0^3 t^2} - \frac{x^2 y^2}{4 R_0^4 t^2} - \frac{x^4}{8 R_0^4 t^2} \\ = \frac{x}{R_0} - \frac{x^2}{2 R_0^2} - \frac{y^2}{2 R_0^2}$$

Diese Schlussgleichung kann man geradezu nach  $\Delta \varphi t$  auflösen, nämlich:

$$\Delta \varphi t = \frac{x}{R_0} - \frac{y^2}{2 R_0^2} - \frac{x y^2}{2 R_0^3} - \frac{x^3}{6 R_0^3 t^2} - \frac{x^2 y^2}{4 R_0^4 t^2} (2 t^2 - 1) - \frac{x^4}{24 R_0^4 t^2} + \frac{y^4}{8 R_0^4} \quad (32)$$

und weil  $R_0 t = r$  ist, giebt dieses schliesslich:

$$\Delta \varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2 r^2} t - \frac{x y^2}{2 r^3} t^2 - \frac{x^3}{6 r^3} - \frac{x^2 y^2}{4 r^4} t (2 t^2 - 1) - \frac{x^4}{24 r^4} t + \frac{y^4}{8 r^4} t^3 \quad (33)$$

Um vollends  $\lambda$  nach (27) zu erhalten, brauchen wir mit  $\lambda' = \lambda \sin P$ :

$$\tan(\lambda \sin P) = \frac{y}{R_0 - x} = \frac{y}{R_0 \left(1 - \frac{x}{R_0}\right)} = \frac{y}{R_0} \left(1 + \frac{x}{R_0} + \frac{x^2}{R_0^2} + \frac{x^3}{R_0^3}\right)$$

$$\lambda \sin P + \frac{\lambda^3 \sin^3 P}{3} = \frac{y}{R_0} + \frac{y x}{R_0^2} + \frac{y x^2}{R_0^3} + \frac{y x^3}{R_0^4}$$

Erste Näherung:

$$\lambda \sin P = \frac{y}{R_0} + \frac{y x}{R_0^2} + \dots$$

$$\lambda^3 \sin^3 P = \frac{y^3}{R_0^3} + \frac{3 y^3 x}{R_0^4}$$

$$\lambda \sin P + \frac{1}{3} \left( \frac{y^3}{R_0^3} + \frac{3 y^3 x}{R_0^4} \right) = \frac{y}{R_0} + \frac{y x}{R_0^2} + \frac{y x^2}{R_0^3} + \frac{y x^3}{R_0^4}$$

$$\lambda \sin P = \frac{y}{R_0} + \frac{y x}{R_0^2} + \frac{y x^2}{R_0^3} - \frac{y^3}{3 R_0^3} - \frac{y^3 x}{R_0^4} + \frac{y x^3}{R_0^4} \quad (34)$$

oder weil  $R_0 t = R_0 \tan P = r$  ist, giebt dieses:

$$\lambda \cos P = \frac{y}{r} + \frac{y x}{r^2} t + \frac{y x^2}{r^3} t^2 - \frac{y^3}{3 r^3} t^2 - \frac{y^3 x}{r^4} t^3 + \frac{y x^3}{r^4} t^3 \quad (35)$$

Damit ist alles für die Coordinaten nötige vorhanden; es fehlt nur noch die Reihe für  $m$ , dessen geschlossener Ausdruck nach (3) ist, mit  $R_0 = r \cotg P$ :

$$m = \frac{R \sin P}{r \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad = \frac{R \cos P}{R_0 \cos \varphi} \quad (36)$$

hiezuhat man nach (20):

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \Delta \varphi t - \frac{\Delta \varphi^3}{6} t \quad (37)$$

und weil  $\varphi = P + \Delta \varphi$  ist, hat man nach § 28. S. 167:

$$\cos \varphi = \cos P \left( 1 - \Delta \varphi t - \frac{\Delta \varphi^2}{2} + \frac{\Delta \varphi^3}{6} t \right)$$

Die Umkehrung giebt, wie ebenfalls schon auf S. 167 angegeben:

$$\frac{\cos P}{\cos \varphi} = 1 + \left( \Delta \varphi t + \frac{\Delta \varphi^2}{2} - \frac{\Delta \varphi^3}{6} t \right) + \left( \Delta \varphi t + \frac{\Delta \varphi^2}{2} \right)^2 + \left( \Delta \varphi t \right)^3 \\ \frac{\cos P}{\cos \varphi} = 1 + \Delta \varphi t + \frac{\Delta \varphi^2}{2} (1 + 2 t^2) + \frac{\Delta \varphi^3}{6} t (5 + 6 t^2) \quad (38)$$



Die beiden Reihen (37) und (38) zusammen multipliziert geben:

$$m = 1 + \frac{\Delta \varphi^2}{2} + \frac{\Delta \varphi^3 t}{6} \quad (39)$$

Um dieses  $m$  auch als Funktion der Coordinaten  $x$  und  $y$  darzustellen, hat man aus (33):

$$\Delta \varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2r^2} t$$

$$\Delta \varphi^2 = \frac{x^2}{r^2} - \frac{xy^2}{r^2} t \quad \Delta \varphi^3 = \frac{x^3}{r^3}$$

Diese  $\Delta \varphi^2$  und  $\Delta \varphi^3$  in (39) eingesetzt geben:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^2} t + \frac{x^3}{6r^3} t \quad (40)$$

$$\text{oder } \frac{1}{m} = 1 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{xy^2}{2r^2} t - \frac{x^3}{6r^3} t \quad (41)$$

Für das praktische Rechnen wird man auch  $\log m$  nehmen, was innerhalb dieser Grössenordnung sehr einfach ist, nämlich nach (40) und (41):

$$\log m = \frac{\mu x^2}{2r^2} - \frac{\mu xy^2}{2r^2} t + \frac{\mu x^3}{6r^3} t \quad (42)$$

$$\text{oder } \log \frac{1}{m} = -\frac{\mu x^2}{2r^2} + \frac{\mu xy^2}{2r^2} t - \frac{\mu x^3}{6r^3} t \quad (43)$$

In erster Näherung, d. h. mit Beschränkung auf  $\frac{1}{r^2}$  also Weglassung von  $\frac{1}{r^3}$  sind diese Formeln (40)–(43) entsprechend den früheren (10) § 50. S. 281, wenn man  $x$  und  $y$  vertauscht, was auch ganz natürlich ist.

Obgleich für die meisten Zwecke diese Formeln (40)–(43) ausreichen, wollen wir doch auch noch die 4te Ordnung dazu entwickeln, wozu man nach (20) hat:

$$\frac{R}{R_0} = 1 - \Delta \varphi t - \frac{\Delta \varphi^3}{6} t - \frac{\Delta \varphi^4}{24} t^2 \quad (44)$$

und weil  $\varphi = P + \Delta \varphi$ , hat man nach § 28. S. 167:

$$\cos \varphi = \cos P \left( 1 - \Delta \varphi t - \frac{\Delta \varphi^2}{2} + \frac{\Delta \varphi^3}{6} t + \frac{\Delta \varphi^4}{24} \right)$$

Die Umkehrung giebt:

$$\frac{\cos P}{\cos \varphi} = 1 + \left( \Delta \varphi t + \frac{\Delta \varphi^2}{2} - \frac{\Delta \varphi^3}{6} t - \frac{\Delta \varphi^4}{24} \right) + \left( \Delta \varphi t + \frac{\Delta \varphi^2}{2} - \frac{\Delta \varphi^3}{6} t \right)^2 + \left( \Delta \varphi t + \frac{\Delta \varphi^2}{2} \right)^3 + \left( \Delta \varphi t \right)^4$$

Die Ausrechnung hievon, welche auch schon auf S. 167 angegeben wurde, ist bis zur 4ten Ordnung:

$$\frac{\cos P}{\cos \varphi} = 1 + \Delta \varphi t + \frac{\Delta \varphi^2}{2} (1 + 2t^2) + \frac{\Delta \varphi^3}{6} t (5 + 6t^2) + \frac{\Delta \varphi^4}{24} (5 + 28t^2 + 24t^4) \quad (45)$$

Man hat die beiden Reihen (44) und (45) zu multiplizieren, um zu der Reihe für  $m$  zu gelangen, die Ausführung giebt:

$$m = 1 + \frac{\Delta \varphi^2}{2} + \frac{\Delta \varphi^3 t}{6} + \frac{\Delta \varphi^4}{24} (5 + 3t^2) \quad (46)$$



Um  $m$  auch als Funktion von  $x$  und  $y$  darzustellen hat man aus (33):

$$\begin{aligned}\Delta \varphi &= \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2r^2}t - \frac{xy^2}{2r^3}t^2 - \frac{x^3}{6r^3} \\ \Delta \varphi^2 &= \frac{x^2}{r^2} - \frac{xy^2}{r^2}t - \frac{x^2y^2}{r^4}t^2 - \frac{x^4}{3r^4} + \frac{y^4}{4r^4}t^2 \\ \Delta \varphi^3 &= \frac{x^3}{r^3} - \frac{3x^2y^2}{2r^4}t \quad \text{und} \quad \Delta \varphi^4 = \frac{x^4}{r^4}\end{aligned}$$

Dieses in (46) eingesetzt giebt:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \frac{x^3}{6r^3}t - \frac{3x^2y^2}{4r^4}t^2 + \frac{x^4}{24r^4}(1 + 3t^2) + \frac{y^4}{8r^4}t^2 \quad (47)$$

Die Umkehrung davon giebt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} &= 1 - \left( \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \dots \right) + \left( \frac{x^2}{2r^2} - \dots \right)^2 \\ \frac{1}{m} &= 1 - \frac{x^2}{2r^2} + \frac{xy^2}{2r^3}t - \frac{x^3}{6r^3}t + \frac{3x^2y^2}{4r^4}t^2 + \frac{x^4}{24r^4}(5 - 3t^2) - \frac{y^4}{8r^4}t^2 \quad (48)\end{aligned}$$

Für das praktische Rechnen wird man auch  $\log m$  nehmen:

$$l m = l \left( 1 + \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \dots \right) = \frac{x^2}{2r^2} - \frac{xy^2}{2r^3}t + \dots - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2r^2} - \dots \right)^2 \quad (49)$$

$$\log m = \frac{\mu x^2}{2r^2} - \frac{\mu xy^2}{2r^3}t + \frac{\mu x^3}{6r^3}t - \frac{3\mu x^2y^2}{4r^4}t^2 + \frac{\mu}{24r^4}(-2 + 3t^2) + \frac{\mu y^4}{8r^4}t^2 \quad (50)$$

Die hier auftretenden Glieder 4ter Ordnung werden wir später dazu benutzen können, um sie auch den *sphäroidischen* Formeln, die wir an sich nur bis zur dritten Ordnung entwickeln werden, anzuhängen.

Die vorstehenden Formeln sind auch mit den bis zur 4ten Ordnung geführten sphärischen Formeln übereinstimmend, welche wir in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 129–141 entwickelt haben, wobei aber zu beachten ist, dass dort die Coordinaten nach Mecklenburger Art mit  $+x$  nach Süden und  $+y$  nach Westen gezählt sind („Zeitschr.“ 1896, S. 130), während wir hier, wie sonst üblich,  $+x$  nach Norden und  $+y$  nach Osten zählen, so dass z. B. unsere obenstehende Formel (47) für  $m$  übergeht in (52) S. 138 „Zeitschr.“ 1896, wenn man in  $x$  und in  $y$  die Vorzeichen ändert, so dass im ganzen nur die ungeraden Potenzen  $xy^2$  und  $x^3$  umschlagen, aber  $x^2$ ,  $x^2y^2$ ,  $x^4$  und  $y^4$  im Zeichen bleiben.

## • § 81. Konforme Kegelprojektion des Ellipsoids.

### *Mecklenburgische Coordinaten.*

Die Übertragung der sphärischen Betrachtungen des vorigen § 80. auf das Ellipsoid ist, soweit die Grundformeln in Betracht kommen, nicht schwierig. Wenn  $N$  der Quer-Krümmungs-Halbmesser für die Normalbreite  $P$  ist, so wird nach Fig. 1. S. 428 die Kegelstrahlänge:

$$R_0 = N \cotg P \quad (1)$$

Die Meridian-Konvergenz-Formel bleibt dieselbe wie früher, nämlich:

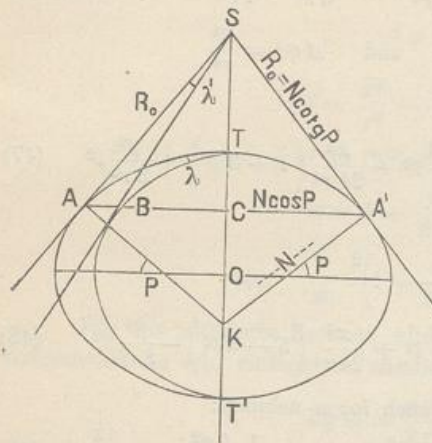
$$\lambda' = \lambda \sin P \quad (2)$$



Auch die Ähnlichkeitsbedingung hat im wesentlichen die frühere Form, nämlich nach Fig. 2. und Fig. 3. S. 429:

$$m = -\frac{dR}{M d\varphi} = \frac{R d\lambda}{N \cos \varphi d\lambda}$$

Fig. 1.



Es ist nur statt des früheren Kugel-Halbmessers  $r$  nun  $M$  für den Meridian und  $N$  für den Querbogen genommen. Auch die Einsetzung von (2) gestaltet sich wie früher und giebt:

$$m = -\frac{dR}{M d\varphi} = \frac{R \sin P}{N \cos \varphi} \quad (3)$$

$$-\frac{dR}{R} = \sin P \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}$$

Für  $\frac{M}{N}$  wollen wir nach (25) § 32.

S. 197 setzen:

$$\frac{M}{N} = \frac{1-e^2}{W^2} = \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi}$$

Also nach der vorhergehenden Gleichung:

$$-\frac{dR}{R} = \sin P \frac{(1-e^2) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} \quad (4)$$

Die Integration wird auf dem Wege der Teilbrüche gemacht, indem man zuerst so zerlegt:

$$\frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{1}{2} \frac{e^2 \cos \varphi}{1+e \sin \varphi} - \frac{1}{2} \frac{e^2 \cos \varphi}{1-e \sin \varphi}$$

Folglich wird das Integral von (4):

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-e^2) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} &= l \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{1}{2} e l (1+e \sin \varphi) + \frac{1}{2} e l (1-e \sin \varphi) \\ &= l \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{2} e l \frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \end{aligned}$$

Die linke Seite von (4) giebt integriert  $-lR$ , und indem man auf beiden Seiten von den natürlichen Logarithmen  $l$  zu den gewöhnlichen Logarithmen  $\log$  übergeht, hat man nun also als Integration von (4):

$$-\log R = \sin P \left\{ \log \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \log \frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right\} + \dots$$

Zur Bestimmung der Integrations-Konstanten setzen wir fest, dass  $R_0$  und  $P$  zusammengehörige Normalwerte sein sollen, also:

$$-\log R_0 = \sin P \left\{ \log \tan \left( 45^\circ + \frac{P}{2} \right) + \frac{e}{2} \log \frac{1-e \sin P}{1+e \sin P} \right\} + \dots$$

also durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen:

$$\log \frac{R}{R_0} = \sin P \log \frac{\tan \left( 45^\circ + \frac{P}{2} \right)}{\tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} + \frac{e}{2} \sin P \log \frac{1-e \sin P}{1+e \sin P} \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \quad (5)$$



Auch den geschlossenen Ausdruck für  $m$  hat man aus (3):

$$m = \frac{R \sin P}{N \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad m = \frac{R \cos P}{R_0 \cos \varphi} \quad (6)$$

Nun muss man alle die Reihenentwicklungen, welche wir im vorigen § 80. sphärisch gemacht haben, auch mit diesen sphäroidischen Formeln durchführen, doch kann das hier nicht ausführlich geschehen. Wir verweisen hiefür auf das Werk „Grossherzoglich Mecklenburgische Landes-Vermessung“ V. Teil: Die konforme Kegelprojektion u. s. w. von Jordan, Mauck, Vogeler, Schwerin 1895 (vgl. § 59. S. 335).

Wir wollen die wichtigsten Formeln von dort ausziehen, aber mit einigen Änderungen:

Erstens hat Mecklenburg die Koordinatenzählung  $+x$  nach Süden,  $+y$  nach Westen, auch  $\lambda$  nach Westen positiv, während wir hier nach Fig. 5. § 80. S. 423 wie gewöhnlich  $+x$  nach Norden,  $+y$  nach Osten und auch  $\lambda$  nach Osten positiv zählen werden. Auch die geographische Breitenzählung, welche mecklenburgisch mit  $P - \varphi = p$  nach Süden geht, nehmen wir nun  $\varphi - P = \Delta \varphi$  nach Norden.

Zweitens ist in den Mecklenburgischen Formeln meist der Kegelstrahl  $R_0$  als Konstante genommen, während wir nun, wegen der späteren Vergleichung mit anderen Formeln, den Quer-Krümmungs-Halbmesser  $N$  der Normalbreite als Hauptkonstante nehmen wollen, so dass wir haben:  $R_0 = N \cotg P$ , also  $R_0 \tan P = N$  oder abgekürzt geschrieben:  $R_0 t = N$ .

Wir werden auch nicht alle sphäroidischen Glieder höherer Ordnung  $\eta^4$  u. s. w. aus den Mecklenburgischen Formeln hier mitnehmen. Die Citate Meckl. S. . . beziehen sich auf die Seitenzahlen des im vorstehenden citierten Mecklenburgischen Werkes.

I. Breitenunterschied  $\Delta \varphi$  und Längenunterschied  $\lambda$  als Funktion der Koordinaten  $x$  und  $y$ , Meckl. S. 23 und 22:

$$\frac{\Delta \varphi}{V^2} = \frac{x}{N} - \frac{3x^2}{2N^2} \eta^2 t - \frac{y^2}{2N^2} t - \frac{xy^2 t^2}{2N^3} (1 - 3\eta^2) - \frac{x^3}{6N^3} (1 + 4\eta^2 - 3\eta^2 t^2) - \frac{x^2 y^2 t}{4N^4} (-1 + 2t^2) - \frac{x^4 t}{24N^4} + \frac{y^4 t^3}{8N^4} \quad (7)$$

$$\lambda \cos P = \frac{y}{N} + \frac{yx t}{N^2} + \frac{y x^2 t^2}{N^3} - \frac{y^3 t^2}{3N^3} + \frac{y x^3 t^3}{N^4} - \frac{y^3 x t^3}{N^4} \quad (8)$$

II. Coordinaten  $x$  und  $y$  als Funktion von  $\Delta \varphi$  und  $\lambda$ , Meckl. S. 19:

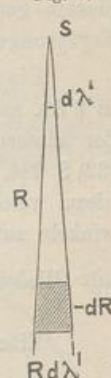
$$\frac{x}{N} = \frac{\Delta \varphi}{V^2} + \frac{3 \Delta \varphi^2}{2 V^4} \eta^2 t + \frac{\lambda^2}{2} \sin P \cos P - \frac{\Delta \varphi \lambda^2}{2 V^2} \sin^2 P + \frac{\Delta \varphi^3}{6 V^6} (1 + 4\eta^2 - 3\eta^2 t^2) + \frac{\Delta \varphi^4 t}{24 V^8} - \frac{\lambda^4}{24} \sin^3 P \cos P \quad (9)$$

$$\frac{y}{N} = \lambda \cos P - \frac{\lambda \Delta \varphi}{V^2} \sin P - \frac{3 \lambda \Delta \varphi^2}{2 V^4} \cos P t^2 \eta^2 - \frac{\lambda^3}{6} \sin^2 P \cos P - \frac{\lambda \Delta \varphi^3 \sin P}{6 V^6} (1 + 4\eta^2 - 3\eta^2 t^2) + \frac{\lambda^3 \Delta \varphi}{6 V^2} \sin^3 P \quad (10)$$

Fig. 2.



Fig. 3.





In allen diesen Formeln ist gesetzt  $t = \tan P$ ,  $V^2 = 1 + c'^2 \cos^2 P$ ,  $N = c:V$ . Die sphärischen Bestandteile dieser Gleichungen müssen übereinstimmen mit (33), (35), (25), (26) des vorigen § 80.

Ausser dem im vorstehenden citierten amtlichen Mecklenburgischen Werke (dessen genauer Titel schon auf S. 336 angegeben ist) haben wir auch noch einige Ergänzungen zu berichten.

Die Reduktionen für Entfernungen und Richtungswinkel, welche wir hier weder in § 80. noch in § 81. entwickelt haben, sind in *erster* Näherung dieselben wie bei der konformen, meridionalen Projektion in § 50. Gleichungen (12) S. 282 und (31), (32) S. 284, jedoch mit Vertauschung der Bezeichnungen  $x$  und  $y$ . Die nächsten Glieder hiezu, welche zur praktischen Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen bei den Richtungswinkeln auf 0,01'' ausreichen, sind in dem Mecklenburgischen Werke § 10. angegeben; mit Gliedern von der Ordnung  $\frac{x^2 \Delta y}{r^3}$ ,  $\frac{y^2 \Delta y}{r^3}$  und  $\frac{y x \Delta x}{r^3}$ .

Eine Ergänzung mit den Gliedern auch noch  $\frac{\Delta y^3}{r^3}$  und  $\frac{\Delta y^2 \Delta x}{r^3}$ , welche äusserstfalls noch 0,01'' erreichen, haben wir in „Zeitschr.“ 1895, S. 421—424 gegeben, und endlich, um jedem theoretischen Einwand zu begegnen, haben wir noch in „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 129—143 die ganze Entwicklung sphärisch, mit allen Gliedern 4ter Ordnung, d. h.  $\frac{1}{r^4}$  auch noch dazu gemacht.

Hiernach haben die Mecklenburgischen Geodäten eine Kontroll-Diagonale von 285<sup>km</sup> Länge über ihr Land gerechnet („Zeitschr. für Verm.“ 1896, S. 240—248) mit 1° 30' Breitenunterschied und 3° 30' Längenunterschied, d. h. die Diagonale, welche wir auch schon unter den sphäroidischen Normalbeispielen in § 73. S. 392 angegeben haben. Diese Diagonale wurde zweifach berechnet, erstens als geodätische Linie mit reduzierten Breiten nach unseren neuen Formeln, welche in dem späteren Kapitel VIII. zu behandeln sein werden, und zweitens als Projektions-Gerade in der konformen Kegelprojektion, mit sphäroidischen Reduktionen. Folgendes ist die Vergleichung (nach „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 241, 242, 244, 248):

aus geographischen Coordinaten		aus rechtwinkligen Coordinaten	
$\varphi_1 = 53^\circ 0'$	$\lambda = 3^\circ 30'$	$y_1 = + 67129,7368^m$	$x_1 = + 82986,8632^m$
$\varphi_2 = 54^\circ 30'$		$y_2 = - 161\,922,5986^m$	$x_2 = - 86318,9409^m$
(Bezeichnungen nach Fig. 1. § 76. S. 399)		(+ $y$ nach Westen, + $x$ nach Süden)	
$S = 284\,835,8642^m$		$S = 284\,835,8648^m$	+ 0,0006''
$\log S = 5.4545\,946.712$		$\log S = 5.4545\,946.721$	+ 0.009
$\text{Azimut } \alpha_1 = 52^\circ 43' 39,1835''$		$\text{Azimut } \alpha_1 = 52^\circ 43' 39,1858''$	+ 0,0023''
„ $\alpha_2 = 55^\circ 33' 2,3646''$		„ $\alpha_2 = 55^\circ 33' 2,3612''$	- 0,0034''

Die übrigbleibenden Fehler sind so weit ausser aller praktischen Schädlichkeit, dass damit die Mecklenburgische konforme Projektion nicht nur für die praktischen Vermessungszwecke, sondern für alle aus irgend welchen Gründen an sie zu stellenden Forderungen genügend nachgewiesen ist.

In rein praktischer Beziehung als Grundlage für topographische und Katastermessungen ist die Mecklenburgische Triangulierung mit ihrer konformen Projektion die beste von allen deutschen Landesvermessungen. Aus Veranlassung einer Gegen-



bemerkung hat Kammeringenieur Vogeler in Schwerin die Überlegenheit der Mecklenburgischen Projektion über andere deutsche, namentlich die sogen. Soldnersche Projektion in überzeugender und anschaulichster Weise dargelegt in „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 257–263.

## §. 82. Queraxige sphärische Koordinaten.

In Fig. 1. ist die kugelförmige Erde in solcher Projektion dargestellt, dass der Äquator als Kreis  $EDFD'$  erscheint, in dessen Mittelpunkt der Nordpol  $P$  projiziert ist. In einem Punkte  $O$  ist rechtwinklig zum Meridian  $PO$  ein Grosskreisbogen  $EOF$  gelegt, auf welchem eine Länge  $OB = y$  abgemessen ist zur Bestimmung eines Punktes  $B$ , welcher mit  $BA = x$  rechtwinklig zu  $OB$  festgelegt wird. Es ist also im Sinne gewöhnlicher sphärischer Koordinaten  $y$  die Abscisse und  $x$  die Ordinate des Punktes  $A$ , wobei es aber gleichgültig ist, wenn wir statt dessen nun  $y$  Ordinate und  $x$  Abscisse nennen,

Der Bogen  $BA$  wird verlängert einen Punkt  $C$  treffen, welcher Pol des Bogens  $EOF$  genannt wird, und es werden alle Bögen  $x$ , welche rechtwinklig auf der Axe  $EOF$  stehen, sich in diesem Punkte  $C$  schneiden.

Wenn die Ursprungsbreite in  $O$  den Wert  $\varphi_0$  hat, so ist auch der Bogen  $CP = \varphi_0$ , und um die geographischen Koordinaten von  $A$  zu erhalten, müssen wir noch  $PA$  ziehen, welches mit dem Bogen  $PA = 90^\circ - \varphi$  und dem Winkel  $OPA = \lambda$  die geographische Breite  $\varphi$  und die geographische Länge  $\lambda$  von  $A$  bestimmt.

Zieht man dazu noch den Bogen  $CA$  in Betracht, so hat man  $CA = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}$  und bei  $A$  den Winkel  $PAC = \gamma$  als Meridian-Konvergenz, sowie bei  $C$  den Winkel  $PCA = \frac{y}{r}$ .

Nun bietet das sphärische Dreieck  $CPA$  alles was zur Lösung unserer Aufgabe nötig ist, nämlich Bestimmung von  $\varphi, \lambda, \gamma$ , aus gegebenen  $\varphi_0, y, x$  und umgekehrt.

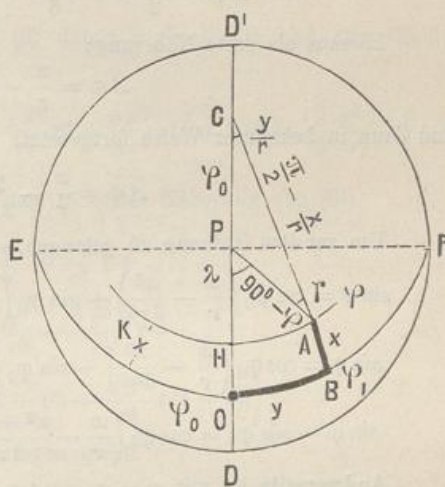
Um zuerst  $\varphi$  zu bestimmen, haben wir die Cosinus-Gleichung:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \varphi) &= \cos \varphi_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}\right) + \sin \varphi_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r}\right) \cos \frac{y}{r} \\ \sin \varphi &= \cos \varphi_0 \sin \frac{x}{r} + \sin \varphi_0 \cos \frac{x}{r} \cos \frac{y}{r} \end{aligned} \quad (1)$$

Zunächst nur bis zur dritten Ordnung entwickelt giebt dieses:

$$\sin \varphi = \cos \varphi_0 \left( \frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3} \right) + \sin \varphi_0 \left( 1 - \frac{x^2}{2r^2} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{2r^2} \right)$$

Fig. 1.





$$\sin \varphi = \cos \varphi_0 \left( \frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3} \right) + \sin \varphi_0 \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2r^2} \right)$$

$$\sin \varphi - \sin \varphi_0 = \frac{x}{r} \cos \varphi_0 - \frac{x^2 + y^2}{2r^2} \sin \varphi_0 - \frac{x^3}{6r^3} \cos \varphi_0$$

Andererseits wird gesetzt  $\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi$   
 also nach S. 166, Taylorsche Reihe: (2)

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 + \Delta \varphi \cos \varphi_0 - \frac{\Delta \varphi^2}{2} \sin \varphi_0 - \frac{\Delta \varphi^3}{6} \cos \varphi_0.$$

Die beiden letzten Gleichungen zusammen geben mit  $\tan \varphi_0 = t$

$$\Delta \varphi - \frac{\Delta \varphi^2}{2} t - \frac{\Delta \varphi^3}{6} = \frac{x}{r} - \frac{x^2 + y^2}{2r^2} t - \frac{x^3}{6r^3}$$

Hieraus als erste Näherung:

$$\Delta \varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2r^2} t + \dots$$

und dann in bekannter Weise fortgesetzt:

$$\Delta \varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2r^2} t - \frac{x y^2}{2r^3} t^2 \quad (3)$$

Um zur 4ten Ordnung zu gelangen, entwickeln wir aus (1) weiter:

$$\sin \varphi = \cos \varphi_0 \left( \frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3} \right) + \sin \varphi_0 \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2r^2} + \frac{x^4}{24r^4} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{2r^2} + \frac{y^4}{24r^4} \right)$$

$$\sin \varphi = \cos \varphi_0 \left( \frac{x}{r} - \frac{x^3}{6r^3} \right) + \sin \varphi_0 \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2r^2} + \frac{x^4 + 6x^2 y^2 + y^4}{24r^4} \right)$$

$$\sin \varphi - \sin \varphi_0 = \cos \varphi_0 \left( \frac{x}{r} - \frac{x^2 + y^2}{2r^2} t - \frac{x^3}{6r^3} + \frac{x^4 + 6x^2 y^2 + y^4}{24r^4} t \right)$$

Andererseits ist mit  $\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi$  nach S. 166:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 + \Delta \varphi \cos \varphi_0 - \frac{\Delta \varphi^2}{2} \sin \varphi_0 - \frac{\Delta \varphi^3}{6} \cos \varphi_0 + \frac{\Delta \varphi^4}{24} \sin \varphi_0$$

Dieses mit dem Vorhergehenden verglichen giebt:

$$\Delta \varphi - \frac{\Delta \varphi^2}{2} t - \frac{\Delta \varphi^3}{6} + \frac{\Delta \varphi^4}{24} t = \frac{x}{r} - \frac{x^2 + y^2}{2r^2} t - \frac{x^3}{6r^3} + \frac{x^4 + 6x^2 y^2 + y^4}{24r^4} t \quad (4)$$

Da wir die Näherung bis zur dritten Ordnung in (3) bereits haben, so kann man daraus entwickeln:

$$\Delta \varphi^2 = \frac{x^2}{r^2} - \frac{x y^2}{r^3} t - \frac{x^2 y^2}{r^4} t^2 + \frac{y^4}{4r^4} t^2$$

$$\Delta \varphi^3 = \frac{x^3}{r^3} - \frac{3x^2 y^2}{2r^4} t, \quad \Delta \varphi^4 = \frac{r^4}{r^4}$$

Wenn man diese Ausdrücke in (4) einsetzt und ordnet, so bekommt man:

$$\Delta \varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2r^2} t - \frac{x y^2}{2r^3} t^2 - \frac{x^2 y^2}{2r^4} t^3 + \frac{y^4}{24r^4} t (1 + 3t^2) \quad (5)$$

Damit haben wir  $\Delta \varphi$ , und um zu  $\lambda$  zu gelangen, schreiben wir eine Contangentengleichung an in Bezug auf das Dreieck  $CPA$ , nämlich:

$$\cot g \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{r} \right) \sin \varphi_0 = \cos \varphi_0 \cos \frac{x}{r} + \sin \frac{y}{r} \cot g (180^\circ - \lambda)$$



$$\begin{aligned} \tan \frac{x}{r} \sin \varphi_0 &= \cos \varphi_0 \cos \frac{y}{r} - \sin \frac{y}{r} \cot \lambda \\ \tan \lambda &= \sin \frac{y}{r} \sec \varphi_0 \frac{1}{\cos \frac{y}{r} - \tan \frac{x}{r} \tan \varphi_0} \end{aligned} \quad (6)$$

Der Nenner entwickelt giebt:

$$\cos \frac{y}{r} - \tan \frac{x}{r} t = 1 - \frac{y^2}{2r^2} - \left( \frac{x}{r} + \frac{x^3}{3r^3} \right) t = 1 - \frac{x}{r} t - \frac{y^2}{2r^2} - \frac{x^3}{3r^3} t$$

davon die Reciproke entwickelt, wird:

$$1 + \left( \frac{x}{r} t + \frac{y^2}{2r^2} + \frac{x^3}{3r^3} t \right) + \left( \frac{x^2}{r^2} t^2 + \frac{x y^2}{r^3} t \right) + \frac{x^3}{r^3} t^3 \quad (7)$$

Wenn man  $\sin \frac{y}{r} = \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3}$  von (6) damit multipliziert und alle Glieder ordnet, so erhält man:

$$\tan \lambda = \sec \varphi_0 \left\{ \frac{y}{r} + \frac{y x}{r^2} t + \frac{y^3}{3r^3} + \frac{y x^2}{r^3} t^2 + \frac{y x^3}{3r^4} t (1 + 3t^2) + \frac{5}{6} \frac{y^3 x}{r^4} t \right\} \quad (8)$$

Da  $\lambda = \tan \lambda - \frac{(\tan \lambda)^3}{3}$ , braucht man in erster Näherung von (8):

$$\tan \lambda = \sec \varphi_0 \left( \frac{y}{r} + \frac{y x}{r^2} t + \dots \right)$$

$$\text{also } (\tan \lambda)^3 = \sec^3 \varphi_0 \left( \frac{y^3}{r^3} + \frac{3 y^3 x}{r^4} t + \dots \right)$$

$$\frac{(\tan \lambda)^3}{3} = \sec \varphi_0 \left( \frac{y^3}{3r^3} (1 + t^2) + \frac{x y^3}{r^4} t (1 + t^2) \right)$$

Dieses vom Vorhergehenden (8) abgezogen giebt:

$$\lambda = \sec \varphi_0 \left\{ \frac{y}{r} + \frac{y x}{r^2} t - \frac{y^3}{3r^3} t^2 + \frac{y x^2}{r^3} t^2 + \frac{y x^3}{3r^4} t (1 + 3t^2) - \frac{y^3 x t}{6r^4} (1 + 6t^2) \right\} \quad (9)$$

Um umgekehrt  $x$  und  $y$  als Funktion von  $\Delta \varphi$  und  $\lambda$  darzustellen, kann man verschiedene Wege einschlagen; aus Fig. 1. S. 431 hat man:

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{r} \right) + \cos \varphi_0 \cos (90^\circ - \varphi) + \sin \varphi_0 \sin (90^\circ - \varphi) \cos (180^\circ - \lambda)$$

$$\sin \frac{x}{r} = \cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda$$

$$\sin \frac{x}{r} = \cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \left( 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{24} \right)$$

$$\sin \frac{x}{r} = \sin (\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 \cos \varphi \left( \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24} \right)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi$$

$$\cos \varphi = \cos \varphi_0 - \Delta \varphi \sin \varphi_0 - \frac{\Delta \varphi^2}{2} \cos \varphi_0$$

$$\sin \varphi_0 \cos \varphi = \cos^2 \varphi_0 \left( t - \Delta \varphi t^2 - \frac{\Delta \varphi^2}{2} t \right)$$

$$\sin \frac{x}{r} = \sin \Delta \varphi + \cos^2 \varphi_0 t \left( 1 - \Delta \varphi t - \frac{\Delta \varphi^2}{2} \right) \left( \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24} \right)$$



$$\sin \frac{x}{r} = \sin \Delta \varphi + \cos^2 \varphi_0 t \left( \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24} - \Delta \varphi t \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\Delta \varphi^2 \lambda^2}{4} \right)$$

erste Näherung  $\sin \frac{x}{r} = \Delta \varphi + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t$

$$\frac{1}{6} \left( \sin \frac{x}{r} \right)^3 = \frac{\Delta \varphi^3}{6} + \frac{3}{12} \Delta \varphi^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 t$$

Da  $\frac{x}{r} = \sin \frac{x}{r} + \frac{1}{6} \left( \sin \frac{x}{r} \right)^3$  und  $\sin \Delta \varphi = \Delta \varphi - \frac{\Delta \varphi^3}{6}$ , so wird aus dem Vorstehenden, da die Glieder mit  $\Delta \varphi^3$  und  $\Delta \varphi^2 \lambda^2$  fortfallen:

$$\frac{x}{r} = \Delta \varphi + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi_0 t}{2} - \Delta \varphi \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t^2 - \frac{\lambda^4}{24} \cos^2 \varphi_0 t \quad (10)$$

Um  $\frac{y}{r}$  zu erhalten, nehmen wir von Fig. 1.:

$$\begin{aligned} \tan \varphi \sin \varphi_0 &= -\cos \varphi_0 \cos \lambda + \sin \lambda \cotg \frac{y}{r} \\ \tan \frac{y}{r} &= \frac{\sin \lambda}{\cos \varphi_0 (\tan \varphi \tan \varphi_0 + \cos \lambda)} \end{aligned} \quad (11)$$

$\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi$ ,  $\tan \varphi_0 = t$  giebt nach S. 167:

$$\tan \varphi = \tan \varphi_0 + \Delta \varphi (1 + t^2) + \Delta \varphi^2 t (1 + t^2) + \frac{\Delta \varphi^3}{3} (1 + 4t^2 + 3t^4)$$

$$\tan \varphi \tan \varphi_0 = t^2 + \Delta \varphi t (1 + t^2) + \Delta \varphi^2 t^2 (1 + t^2) + \frac{\Delta \varphi^3}{3} t (1 + 4t^2 + 3t^4)$$

und da  $\cos \lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \dots$  hat man den Nenner von (11):

$$1 + t^2 + \Delta \varphi t (1 + t^2) + \Delta \varphi^2 t^2 (1 + t^2) + \frac{\Delta \varphi^3}{3} t (1 + 4t^2 + 3t^4) - \frac{\lambda^2}{2}$$

und da  $1 + t^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi_0}$ , wird nun (11):

$$\tan \frac{y}{r} = \sin \lambda \cos \varphi_0 \frac{1}{1 + \Delta \varphi t + \Delta \varphi^2 t^2 + \frac{\Delta \varphi^3}{3} \cos^2 \varphi_0 t (1 + 4t^2 + 3t^4) - \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0}$$

Die Reciproke des Nenners entwickelt

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \text{ giebt:}$$

$$\tan \frac{y}{r} = \sin \lambda \cos \varphi_0 \left\{ 1 - \Delta \varphi t + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 - \frac{\Delta \varphi^3}{3} t - \Delta \varphi \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 t \right\}$$

$$\sin \lambda = \lambda - \frac{\lambda^3}{6} \text{ bringt:}$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{y}{r} &= \lambda \cos \varphi_0 \left\{ 1 - \Delta \varphi t + \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi_0 (2 - t^2) - \frac{\Delta \varphi^3}{3} t \right. \\ &\quad \left. + \Delta \varphi \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi_0 t (-5 + 6t^2) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Dann der Übergang von  $\tan \frac{y}{r}$  auf  $\frac{y}{r}$  bringt noch:

$$\tan \frac{y}{r} = \lambda \cos \varphi_0 - \Delta \varphi \lambda \cos \varphi_0 t$$



$$\frac{1}{3} \left( \tan \frac{y}{r} \right)^3 = \frac{\lambda^3 \cos^3 \varphi_0}{3} - \Delta \varphi \lambda^3 \cos^3 \varphi_0 t.$$

Diese beiden Glieder oben bei (12) abgezogen geben:

$$\frac{y}{r} = \lambda \cos \varphi_0 \left\{ 1 - \Delta \varphi t - \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi_0 t^2 - \frac{\Delta \varphi^3}{3} t + \Delta \varphi \frac{\lambda^2}{6} t \right\} \quad (13)$$

So haben wir nun in (5), (9), (10), (13) alle Formeln zur Bestimmung von  $\Delta \varphi$  und  $\lambda$  aus  $x$ ,  $y$  und umgekehrt.

Diese vier Reihen sind unmittelbar aus geschlossenen Formeln der sphärischen Trigonometrie abgeleitet, und zur Probe kann man sie auch noch gegenseitig verbinden.

In diesem Sinne wollen wir die Gleichung (9) umkehren, d. h. nach  $\frac{y}{r}$  auflösen. Man findet durch Reciprok-Entwicklung aus (9):

$$\frac{y}{r} = \lambda \cos \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{x}{r} t + \frac{y^2}{3 r^2} t^2 - \frac{x^3}{3 r^3} t + \frac{x y^2}{6 r^3} t (1 + 2 t^2) \right\}$$

Hier ist nach (10) und (13):

$$-\frac{x}{r} t = -\Delta \varphi t - \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t^2 + \Delta \varphi \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t^3$$

$$\frac{y}{r} = \lambda \cos \varphi_0 - \Delta \varphi \lambda \cos \varphi_0 t$$

$$\frac{y^2}{3 r^2} = \frac{\lambda^2}{3} \cos^2 \varphi_0 - \frac{2}{3} \Delta \varphi \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 t$$

$$\frac{x^3}{3 r^3} = \frac{\Delta \varphi^3}{3}, \quad \frac{x y^2}{6 r^3} = \frac{\Delta \varphi}{6} y^2 \cos^2 \varphi_0$$

Dieses alles oben eingesetzt wird geben:

$$\frac{y}{r} = \lambda \cos \varphi_0 \left\{ 1 - \Delta \varphi t - \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi_0 t^2 - \frac{\Delta \varphi^3}{3} t + \Delta \varphi \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi_0 t (1 + t^2) \right\} \quad (14)$$

Wegen  $\cos^2 \varphi_0 (1 + t^2) = 1$ , ist dieses (14) mit (13) identisch.

Wir wollen auch noch die zwei Gleichungen (5) und (9) zusammennehmen, um eine Auflösung nach  $\frac{x}{r}$  daraus abzuleiten. Jedenfalls geben dieselben in erster Näherung:

$$\frac{x}{r} = \Delta \varphi \quad \text{und} \quad \frac{y}{r} = \lambda \cos \varphi_0$$

$$\frac{x y}{r^2} = \Delta \varphi \lambda \cos \varphi_0 \quad \frac{y^2}{r^2} = \lambda^2 \cos^2 \varphi_0$$

also aus (5):

$$\frac{x}{r} = \Delta \varphi + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t \quad \frac{y}{r} = \lambda \cos \varphi_0 - \Delta \varphi \lambda \cos \varphi_0 t$$

$$\frac{x y^2}{r^3} = \Delta \varphi \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 \quad \frac{y^2}{r^2} = \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 - 2 \Delta \varphi \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 t$$

Damit aus (9) bis zur dritten Ordnung:

$$\frac{x}{r} = \Delta \varphi + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t - \frac{\Delta \varphi}{2} \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 t^2$$

Um zur 4ten Ordnung zu gelangen, braucht man aus (14) genauer als vorher:

$$\frac{y^2}{r^2} = \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 - 2 \Delta \varphi \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 t - \frac{\lambda^4}{3} \cos^4 \varphi_0 t^2 + \Delta \varphi^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 t^2$$



$$\text{und } \frac{x y^2}{r^3} = \Delta q \lambda^2 \cos^2 \varphi - 2 \Delta q^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 t + \frac{\lambda^4}{2} \cos^4 \varphi_0 t$$

die letzten Glieder in (5) sind genügend:

$$\frac{x^2 y^2}{r^4} = \Delta q^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi_0 \quad \frac{y^4}{r^4} = \lambda^4 \cos^4 \varphi_0$$

Wenn man mit alle diesem die Gleichung (5) nach  $\frac{x}{r}$  auflöst, so findet man, dass die drei Glieder mit  $\Delta q^2 \lambda^2$  sich aufheben und dass im übrigen die frühere Gleichung (10) wieder herauskommt.

Dadurch sind die vier Gleichungen (5), (9), (10), (13) auch unter sich nochmals versichert.

Es fehlt noch die Meridian-Konvergenz, welche auf verschiedenen Wegen erhalten werden kann.

Das Dreieck  $C A P$  Fig. 1. S. 431 giebt:

$$\cotg \varphi_0 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{r} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{r} \right) \cos \frac{y}{r} + \sin \frac{y}{r} \cotg \gamma$$

$$\cotg \varphi_0 \cos \frac{x}{r} = \sin \frac{x}{r} \cos \frac{y}{r} + \sin \frac{y}{r} \cotg \gamma$$

$$\text{tang } \gamma = \sin \frac{y}{r} t \frac{1}{\cos \frac{x}{r} - \left( \sin \frac{x}{r} \cos \frac{y}{r} \right) t}$$

$$\text{tang } \gamma = \sin \frac{y}{r} t \frac{1}{1 - \frac{x^2}{r^2} - \left( \frac{x}{r} - \frac{x^3}{6 r^3} \right) \left( 1 - \frac{y^2}{2 r^2} \right) t}$$

$$\text{tang } \gamma = \frac{\left( \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6 r^3} \right) t}{1 - \frac{x}{r} t - \frac{x^2}{2 r^2} + \frac{x^3}{6 r^3} t + \frac{x y^2}{2 r^3} t + \frac{x^4}{24 r^4}}$$

$$\text{tang } \gamma = \left( \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6 r^3} \right) t \left\{ 1 + \frac{x}{r} t + \frac{x^2}{2 r^2} (1 + 2 t^2) - \frac{x y^2}{2 r^3} t + \frac{x^3 t}{6 r^3} (5 + 6 t^2) \right\}$$

$$\text{tang } \gamma = \frac{y}{r} t \left\{ 1 + \frac{x}{r} t - \frac{y^2}{6 r^2} + \frac{x^2}{2 r^2} (1 + 2 t^2) - \frac{2 x y^2}{3 r^3} t + \frac{x^3 t}{6 r^3} (5 + 6 t^2) \right\}$$

Durch den Übergang von  $\text{tang } \gamma$  auf  $\gamma$  hat man:

$$\gamma = \frac{y}{r} t + \frac{x y}{r^2} t^2, \quad \gamma^3 = \frac{y^3}{r^3} t^3 + \frac{3 y^3 x}{r^4} t^4$$

$$-\frac{\gamma^3}{3} = \frac{y}{r} t \left\{ -\frac{y^2}{3 r^2} t^2 - \frac{x y^2}{r^3} t^3 \right\}$$

$$\gamma = \frac{y}{r} t \left\{ 1 + \frac{x}{r} t - \frac{y^2}{6 r^2} (1 + 2 t^2) + \frac{x^2}{2 r^2} (1 + 2 t^2) - \frac{x y^2}{3 r^3} t (2 + 3 t^2) + \frac{x^3 t}{6 r^3} (5 + 6 t^2) \right\} \quad (15)$$

Um auch  $\gamma$  in  $\varphi$  und  $\lambda$  auszudrücken, nehmen wir aus Fig. 1. S. 431 die sphärisch-trigonometrische Gleichung:

$$\cotg \varphi_0 \cos \varphi = \sin \varphi \cos \lambda + \sin \lambda \cotg \gamma$$



oder

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{\sin \lambda \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{\sin \lambda \sin \varphi_0}{\cos (\varphi - \varphi_0) - \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi \sin \varphi_0}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi, \quad \sin \varphi = \sin \varphi_0 + \Delta \varphi \cos \varphi_0$$

$$\sin \varphi \sin \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0 + \Delta \varphi \sin \varphi_0 \cos \varphi_0$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{\sin \lambda \sin \varphi_0}{1 - \frac{\Delta \varphi^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi_0 - \Delta \varphi \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t}$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \sin \lambda \sin \varphi_0 \left(1 + \frac{\Delta \varphi^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi_0 + \Delta \varphi \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t\right)$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \lambda \sin \varphi_0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{6} + \frac{\Delta \varphi^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi_0 + \Delta \varphi \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t\right)$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \lambda \sin \varphi_0 \left(1 + \frac{\Delta \varphi^2}{2} + \frac{\lambda^2}{6} (3 \sin^2 \varphi_0 - 1) + \Delta \varphi \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t\right)$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi_0 + \dots$$

$$\gamma^3 = \lambda^3 \sin^3 \varphi_0 + \dots$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi_0 \left(1 + \frac{\Delta \varphi^2}{2} - \frac{\lambda^2}{6} \cos^2 \varphi_0 + \Delta \varphi \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t\right) \quad (16)$$

Zur Probe kann man auch noch die Formeln (15) und (16) gegenseitig in einander umwandeln. Wir wollen zu diesem Zwecke (15) und (16) nochmals aufgelöst schreiben:

$$\gamma = \frac{y}{r} t + \frac{xy}{r^2} t^2 - \frac{y^3}{6r^3} t(1+2t^2) + \frac{x^2 y}{2r^3} t(1+2t^2) - \frac{xy^3}{3r^4} t^2(2+3t^2) + \frac{x^3 y t}{6r^4} (5+6t^2) \quad (17)$$

$$\gamma = \lambda \sin \varphi_0 + \frac{\Delta \varphi^2}{2} \lambda \sin \varphi_0 - \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 + \Delta \varphi \frac{\lambda^3}{2} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 t \quad (18)$$

Um (18) in (17) umzuwandeln, hat man nach (9):

$$\lambda \sin \varphi_0 = \frac{y}{r} t + \frac{xy}{r^2} t^2 - \frac{y^3}{3r^3} t^3 + \frac{x^2 y}{r^3} t^3 + \frac{x^3 y}{3r^4} t^2(1+3t^2) - \frac{xy^3}{6r^4} t^2(1+6t^2)$$

ferner von (5):

$$\Delta \varphi = \frac{x}{r} - \frac{y^2}{2r^2} t + \dots \quad \Delta \varphi^2 = \frac{x^2}{r^2} - \frac{xy^2}{r^3} t$$

$$\Delta \varphi^2 \lambda \sin \varphi_0 = \frac{x^2 y}{r^3} t - \frac{xy^3}{r^4} t^2 + \frac{x^3 y}{r^4} t^2$$

$$\lambda^3 \sin^3 \varphi_0 = \frac{y^3}{r^3} t^3 + \frac{3xy^3}{r^4} t^4 \quad \text{und} \quad \frac{y^3}{6} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 = \frac{y^3}{6r^3} t + \frac{xy^3 t^2}{2r^4}$$

$$\frac{\Delta \varphi \lambda^3}{2} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 t = \frac{xy^3}{2r^4} t^2$$

Wenn man alles dieses in (18) einsetzt, so wird man nach kurzem Zusammenfassen (17) erhalten.



In derselben Weise kann man auch (17) in (18) überführen, indem man zuerst  $\frac{y}{r} t = \lambda \sin \varphi_0 (1 - \dots)$  aus (13) nimmt, ferner entwickelt:

$$\frac{xy}{r^2} t = \Delta \varphi \lambda \sin \varphi_0 - \Delta \varphi^2 \lambda \sin \varphi_0 t + \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 t - \frac{7}{6} \Delta \varphi \lambda^2 \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 t^2$$

$$\frac{y^3}{r^3} = \lambda^3 \cos^3 \varphi_0 - 3 \Delta \varphi \lambda^3 \cos^3 \varphi_0 t \text{ u. s. w.}$$

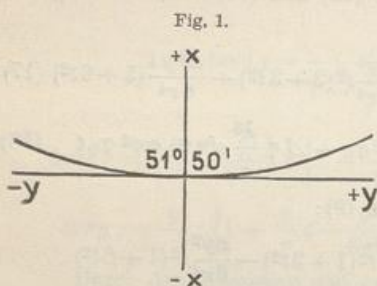
Alles dieses in (17) eingesetzt und geordnet, wobei das Glied mit  $\Delta \varphi^3 \lambda \sin \varphi_0 t$  verschwindet, wird den Übergang auf (18) richtig geben, so dass nun die Formeln (17) und (18) bzw. die beiden (15) und (16) für  $\gamma$  in allen Beziehungen kontrolliert sind.

Unmittelbare Anwendungen werden diese sphärischen Formeln nicht geben, ebensowenig als z. B. bei den Soldnerschen Coordinaten die sphärischen Reihen von § 53. zur unmittelbaren Anwendung brauchbar waren. Die entsprechenden Formeln für das Ellipsoid werden wir im folgendem § 83. neu und selbständig entwickeln, aber nur bis zur dritten Ordnung, weil die Glieder 4ter Ordnung, welche wir hier nur sphärisch entwickelt haben, auch den sphäroidischen Gliedern 3ter Ordnung noch angehängt werden können.

### § 83. Queraxige sphäroidische Coordinaten.

#### Dessauer Coordinaten.

Die Lage des Coordinaten-Systems haben wir wie auch im vorigen § 82 so angenommen, wie in Fig. 1. angedeutet ist, dass nämlich  $+x$  nach Norden,  $+y$  nach Osten geht. Die Hauptaxe oder eigentliche Axe ist die  $y$ -Axe, welche den mittleren Parallelkreis berührt, dessen Breite in der nachfolgenden Anwendung mit  $\varphi_0 = 51^\circ 50'$  angenommen werden wird.



Wir gehen aus von den Formeln (25), (26) (27) § 74. S. 395, welche gelten für den Übergang von einem Punkte in der Breite  $\varphi$ , Länge Null, mit der geodätischen Linie  $s$ , die unter dem Azimut  $\alpha$  ausgeht zu einem Punkte mit der Breite  $\varphi'$ , Länge  $\lambda$  und Endazimut  $\alpha'$ , also Meridian-Konvergenz  $\alpha' - \alpha$ .

Jene Formeln haben wir zweifach anzuwenden, erstens auf den Übergang von  $O$  nach  $B$  und zweitens von  $B$  nach  $A$  in Fig. 1. § 82 S. 431.

Der erste Übergang von  $\varphi_0$  nach  $\varphi$ , mit  $s = x$ ,  $\alpha = 90^\circ$  giebt mit  $u = 0$ ,  $v = \frac{y}{N_0}$ ,  $t = t_0$  bis zur 3ten Ordnung:

$$\begin{cases} \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{V_0^2} = -\frac{y}{2 N_0^2} t_0 & (1) \end{cases}$$

$$\text{I } \begin{cases} \lambda_1 \cos \varphi_0 = \frac{y}{N_0} - \frac{y^3}{3 N_0^3} t_0^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 = \frac{y}{N_0} t_0 - \frac{y^3}{6 N_0^3} t_0 (1 + 2 t_0^2 + \eta_0^2) & (3) \end{cases}$$



Die zweite Anwendung geht vom Punkte  $\varphi_1, \lambda_1, \gamma_1$  mit  $\alpha = \gamma$ , und  $s = x$  nach dem Punkte  $\varphi, \lambda_2$  gegen  $(\varphi_1, \lambda_2)$  und  $\gamma - \gamma_1$  als Meridian-Konvergenz. Dieses giebt aus (25), (26), (27) S. 395 bis zur dritten Ordnung einschliesslich:

$$\text{II} \begin{cases} \frac{\varphi - \varphi_1}{V_1^2} = \frac{x}{N_1} \left( 1 - \frac{y^2}{2 N_0^2} t_0^2 \right) - \frac{3 x^2}{2 N_1^2} \eta_1^2 t_1 - \frac{x^3}{2 N_1^3} \eta_1^2 (1 - t_1^2 + \eta_1^2 - 5 \eta_1^2 t_1^2) & (4) \\ \lambda_2 \cos \varphi_1 = \frac{x}{N_1} \frac{y}{N_0} t_0 + \frac{x^2}{N_1^2} \frac{y}{N_0} t_0 t_1 & (5) \\ \gamma - \gamma_1 = \frac{x}{N_1} \frac{y}{N_0} t_0 t_1 + \frac{x}{2 N_1^2} \frac{y}{N_0} t_0 (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) & (6) \end{cases}$$

Ehe wir diese beiden Gruppen von Gleichungen addieren, müssen wir die  $N_1$  auf  $N_0$ ,  $t_1$  auf  $t_0$  u. s. w. reduzieren, auch wollen wir überall die  $N$  durch  $V$  ausdrücken, denn es ist allgemein  $N = c:V$ .

Dazu hat man nach § 34. S. 208, Gleichung (1):

$$\frac{N_0}{N_1} = \frac{V_1}{V_0} = 1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{V^2} \eta^2 t$$

also wegen (1):

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_0} &= 1 + \frac{y^2}{2 N_0^2} \eta_0^2 t_0^2 = 1 + \frac{y^2 V_0^2}{2 c^2} \eta_0^2 t_0^2 \\ \frac{V_1^2}{N_1} &= \frac{V_1^3}{c} = \frac{V_0^3}{c} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{y^2 V_0^2}{c^2} \eta_0^2 t_0^2 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Zur Reduktion von  $\cos \varphi_1$  auf  $\cos \varphi_0$  und  $\tan \varphi_1$  auf  $\tan \varphi_0$  hat man wegen (1):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) = \varphi_0 - \frac{y^2}{2 c^2} t_0 \\ \cos \varphi_1 &= \cos \varphi_0 + \frac{y^2}{2 c^2} t_0 \sin \varphi_0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tan \varphi_1 = \tan \varphi_0 - \frac{y^2}{2 c^2} t_0 (1 + t_0^2)$$

$$\text{d. h.} \quad t_1 = t_0 - \frac{y^2}{2 c^2} t_0 (1 + t_0^2) \quad (8a)$$

Damit giebt die Gruppe II mit Beschränkung überall auf 3te Ordnung, wobei in den höheren Gliedern schlechthin  $t$  statt  $t_0$  u. s. w. geschrieben wird:

$$\text{IIa} \begin{cases} \varphi - \varphi_1 = \frac{x}{c} V_0^3 \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{y^2}{c^2} V^2 \eta^2 t^2 \right) \left( 1 - \frac{y^2}{2 c^2} V^2 t^2 \right) \\ \quad - \frac{3}{2} \frac{x^2}{c^2} V^4 \eta^2 t - \frac{x^3}{2 c^3} V^5 \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 - 5 \eta^2 t^2) \end{cases} \quad (9)$$

$$\lambda_2 \left( \cos \varphi_0 + \frac{y^2}{2 c^2} \dots \right) = \frac{x y}{c^2} V^2 t + \frac{x^2 y}{c^3} V^3 t^2 \quad (10)$$

$$\gamma - \gamma_1 = \frac{x y}{c^2} V^2 t^2 + \frac{x^2 y}{2 c^3} V^3 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) \quad (11)$$

Wenn man dieses IIa mit dem ursprünglichen I zusammennimmt, auch überall (7) berücksichtigt, so erhält man, indem in den höheren Gliedern nur noch  $t$  statt  $t_0$  u. s. w. geschrieben wird:



$$\left. \begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \frac{x}{c} V_0^3 - \frac{y^2}{2c^2} V^4 t - \frac{3x^2}{2c^2} V^4 \eta^2 t \\ &\quad - \frac{x^3}{2c^3} V^5 \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 - 5\eta^2 t^2) - \frac{xy^2}{2c^3} V^5 t^2 (1 - 3\eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\text{III} \quad \lambda \cos \varphi_0 = \frac{y}{c} V_0 + \frac{xy}{c^2} V^2 t + \frac{x^2 y}{c^3} V^3 t^2 - \frac{y^3}{3c^3} V^3 t^2 \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{y}{c} V_0 t_0 + \frac{xy}{c^2} V^2 t^2 + \frac{x^2 y}{2c^3} V^3 t (1 + 2t^2 + \eta^2) \\ &\quad - \frac{y^3}{6c^3} V^3 t (1 + 2t^2 + \eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Diese Gleichungen entsprechen den früheren sphärischen Gleichungen (5), (9) (15) im vorigen § 82. S. 432, 433, 436, bis zur dritten Ordnung.

Es handelt sich nun darum, die Gleichungen (12) und (13) nach  $x$  und  $y$  aufzulösen, was durch fortgesetzte Näherung geschehen muss. Dabei wollen wir uns zur Bequemlichkeit erlauben, statt  $V_0$  und  $t_0$  u. s. w. kurz  $V$  und  $t$  u. s. w. zu schreiben; während also in (12)–(14), wenigstens in den ersten Gliedern, noch  $V_0$  sowie  $t_0$  und  $\cos \varphi_0$  geschrieben war, können wir jetzt, da keine Verwechslung mehr zu befürchten ist, auch in den Gliedern erster Ordnung die Vereinfachung  $V$  und  $t$  annehmen; wir dürfen aber zum Schlusse nicht vergessen, dass alles dieses sich auf den Ausgangspunkt  $\varphi_0$  der Breiten beziehen muss.

Gehen wir nach dieser Zwischenbemerkung über zu der indirekten Auflösung der Gleichungen (12) und (13), so haben wir jedenfalls in erster Näherung:

$$\frac{x}{c} = \frac{\varphi - \varphi_0}{V^3} = \frac{\Delta \varphi}{V^3} \quad \text{und} \quad \frac{y}{c} = \frac{\lambda \cos \varphi}{V} \quad (15)$$

$$\frac{x^2}{c^2} = \frac{\Delta \varphi^2}{V^6} \quad \frac{y^2}{c^2} = \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{V^2} \quad \frac{xy}{c^2} = \frac{\Delta \varphi \lambda \cos \varphi}{V^4}$$

Diese Näherungen in (12) und (13) eingesetzt geben bis zur 2ten Ordnung:

$$\frac{x}{c} = \frac{\Delta \varphi}{V^3} + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{2V} t + \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi^2}{V^5} \eta^2 t \quad (16)$$

$$\text{und} \quad \frac{y}{c} = \frac{\lambda \cos \varphi}{V} - \frac{\Delta \varphi \lambda \cos \varphi}{V^3} t \quad (17)$$

Nun nochmals, bis zur 3ten Ordnung aus (16) und (17):

$$\frac{x^2}{c^2} = \frac{\Delta \varphi^2}{V^6} + \frac{\Delta \varphi \lambda^2 \cos^2 \varphi}{V^4} t + 3 \frac{\Delta \varphi^3}{V^8} \eta^2 t \quad (18)$$

$$\frac{y^2}{c^2} = \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{V^2} - \frac{2 \Delta \varphi \lambda^2 \cos^2 \varphi}{V^4} t \quad (19)$$

$$\frac{xy}{c^2} = \frac{\Delta \varphi \lambda \cos \varphi}{V^4} + \frac{\lambda^3}{2V^2} \cos^3 \varphi t - \frac{\Delta \varphi^2 \lambda \cos \varphi}{2V^6} t (2 - 3\eta^2) \quad (20)$$

Setzt man diese drei Ausdrücke in (12) und (13) ein, und nimmt man dabei für die Glieder 3ter Ordnung kurz die Näherungen (15), so bekommt man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{c} &= \frac{\Delta \varphi}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2V} \cos^2 \varphi t - \frac{\Delta \varphi \lambda^2}{2V^3} \cos^2 \varphi t^2 + \frac{3}{2} \frac{\Delta \varphi^2}{V^5} \eta^2 t \\ &\quad - \frac{\Delta \varphi^3}{2V^7} \eta^2 (-1 + t^2 - \eta^2 - 4\eta^2 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$



$$\frac{y}{c} = \frac{\lambda \cos q}{V} - \frac{\Delta q \lambda \cos q t}{V^3} - \frac{\lambda^3}{6 V} \cos^3 q t^2 - \frac{3}{2} \frac{\Delta q^2 \lambda}{V^5} \cos q t^2 \eta^2 \quad (22)$$

Endlich kann man auch noch die Meridian-Konvergenz in (14) durch (16)–(22) als Funktion von  $q$  und  $\lambda$  darstellen:

$$\gamma = \lambda \sin q - \frac{\lambda^3 V^2}{6} \sin q \cos^2 q + \frac{\Delta q^2 \lambda \sin q}{2 V^2} \quad (23)$$

Zur Probe kann man auch wieder dieses (23) mit Hilfe von (12) und (13) in (14) zurückverwandeln, was stimmen wird.

Nun haben wir in (12)–(14) und in (21)–(23) alle nötigen Formeln bis zur 3ten Ordnung.

Dazu wollen wir auch noch die rein sphärisch entwickelten Glieder 4ter Ordnung zusetzen, welche im vorigen § 82. unter den Nummern (5), (9), (15) und (10), (13), (16) enthalten sind. Wenn wir ausserdem auch überall die nötigen  $\rho$  zusetzen, so bekommen wir folgende sechs Gleichungen, wobei nochmals zu beachten ist, dass wir zur Bequemlichkeit nur  $V$  und  $t$  statt der früheren  $V_0$  und  $t_0$  schreiben und dass  $q - q_0 = \Delta q$  gesetzt ist:

$$\Delta q = \frac{x}{c} V^3 \rho - \frac{y^2}{2 c^2} V^4 t \rho - \frac{3 x^2}{2 c^2} V^4 \eta^2 t \rho + \frac{x^3}{2 c^3} V^5 \eta^2 (-1 + t^2 - \eta^2 + 5 \eta^2 t^2) \rho \left\{ \begin{array}{l} (24) \\ - \frac{x y^2}{2 c^3} V^5 t^2 (1 - 3 \eta^2) \rho - \frac{x^2 y^2}{2 c^4} t^3 \rho + \frac{y^4}{24 c^4} t (1 + 3 t^2) \rho \end{array} \right.$$

$$\lambda \cos q = \frac{y}{c} V \rho + \frac{x y}{c^2} V^2 t \rho + \frac{x^2 y}{c^3} V^3 t^2 \rho - \frac{y^3}{3 c^3} V^3 t^2 \rho + \frac{x^3 y}{3 c^4} t (1 + 3 t^2) \rho \left\{ \begin{array}{l} (25) \\ - \frac{x y^3}{6 c^4} t (1 + 6 t^2) \rho \end{array} \right.$$

$$\gamma = \frac{y}{c} V t \rho + \frac{x y}{c^2} V^2 t^2 \rho + \frac{x^2 y}{2 c^3} V^3 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) \rho - \frac{y^3}{6 c^3} V^3 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) \rho \left\{ \begin{array}{l} (26) \\ - \frac{x y^3}{3 c^4} t^2 (2 + 3 t^2) \rho + \frac{x^3 y}{6 c^4} t^2 (5 + 6 t^2) \rho \end{array} \right.$$

$$x = \frac{\Delta q}{\rho} \frac{c}{V^3} + \frac{\lambda^2}{2 \rho^2} \frac{c}{V} \cos^2 q t - \frac{\Delta q \lambda^2}{2 \rho^3} \frac{c}{V^3} \sin^2 q + \frac{3}{2} \frac{\Delta q^2}{\rho^2} \frac{c}{V^5} \eta^2 t \left\{ \begin{array}{l} (27) \\ - \frac{\Delta q^3}{2 \rho^3} \frac{c}{V^7} \eta^2 (-1 + t^2 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2) - \frac{\lambda^4 c}{24 \rho^4} \cos^2 q t \end{array} \right.$$

$$y = \frac{\lambda \cos q}{\rho} \frac{c}{V} - \frac{\Delta q \lambda \cos q}{\rho^2} \frac{c}{V^3} t - \frac{\lambda^3}{6 \rho^3} \frac{c}{V} \cos^3 q t^2 - \frac{3}{2} \frac{\Delta q^2 \lambda}{\rho^3} \frac{c}{V^5} \cos q t^2 \eta^2 \left\{ \begin{array}{l} (28) \\ - \frac{\Delta q^3 \lambda c \sin q}{3 \rho^4} + \frac{\Delta q \lambda^3 c \sin q}{6 \rho^4} \end{array} \right.$$

$$\gamma = \lambda \sin q - \frac{\lambda^3 V^2}{6 \rho^2} \sin q \cos^2 q + \frac{\Delta q^2 \lambda \sin q}{2 \rho^2 V^2} + \frac{\Delta q \lambda^3}{2 \rho^3} \sin^2 \cos q \quad (29)$$

Man kann die Coefficienten dieser Formeln teilweise auch in mehr anschaulicher Form schreiben, denn es ist

$$\frac{V^3}{c} = \frac{1}{M} \quad \frac{V}{c} = \frac{1}{N} \quad \frac{V^4}{c^2} = \frac{1}{r^2}$$



wobei  $M$  und  $N$  die Haupt-Krümmungs-Halbmesser und  $r$  der mittlere Krümmungs-Halbmesser sind.

Bei den Gliedern 4ter Ordnung, welche nur sphärisch entwickelt sind, haben wir schlechthin  $c$  als Halbmesser gesetzt; wir haben diese Glieder auch noch besonders sphäroidisch entwickelt und gefunden für  $q - q_0$ :

$$-\frac{x^2 y^2}{2 c^4} V^6 t^3 (1 + \eta^2 \dots) + \frac{y^4 V^6 t}{24 c^4} (1 + 3 t^2 + \eta^2 \dots)$$

Man könnte also wohl den Faktor  $V^6$  in den zwei letzten Gliedern von (24) zusetzen, aber da die vernachlässigten Glieder mit  $\eta^2 \dots$  das alles nochmals ändern können, indem  $V^2 = 1 + \eta^2$  ist, haben wir kurzer Hand  $c^4$  in allen Gliedern 4ter Ordnung stehen gelassen, obgleich  $N^4$  oder  $r^4$  statt  $c^4$  sich vielleicht mehr empfehlen würde. Es kommt uns bei jenen Gliedern 4ter Ordnung nur auf die wenigen ersten Stellen an.

Zur Anwendung dieser Formeln auf die Dessauer Normalbreite  $51^\circ 50'$  hat man folgende Konstanten:

$\log \cos q = 9.790\,9541\cdot080$	$\log \sin q = 9.895\,5421\cdot736$
$\log \cos^2 q = 9.581\,9082\cdot160$	$\log \sin^2 q = 9.791\,0843\cdot472$
$\log e'^2 = 7.827\,3187\cdot833$	
$\log \eta^2 = \log e'^2 \cos^2 q = 7.409\,2269\cdot993$	$\eta^2 = 0.002\,5658\cdot248$
$\log \eta^2 t^2 = \log e'^2 \sin^2 q = 7.618\,4031\cdot305$	$\eta^2 t^2 = 0.004\,1533\cdot940$
$V^2 = 1 + \eta^2 = 1.002\,565824805$	
$\log \eta^4 = 4.818\,4540$	$\eta^4 = 0.00000\,65835$
$\log \eta^4 t^2 = 5.027\,6301$	$\eta^4 t^2 = 0.00001\,06569$
$\log V^2 = 0.001\,1128\cdot964$	$\log V = 0.000\,5564\cdot482$
$\log V^4 = 0.002\,2257\cdot928$	$\log V^3 = 0.001\,6693\cdot446$
$\log V^5 = 0.002\,7322\cdot4$	$\log V^7 = 0.003\,8591\cdot4$
$\text{tang } q = t, \log t = 0.104\,5880\cdot656$	
$\log t^2 = 0.209\,1761\cdot312$	$t^2 = 1.618\,7363\cdot954$
$\log \varrho = 5.314\,4251\cdot332$	$\log \frac{1}{\varrho} = 4.685\,5748\cdot668$
$\log c = 6.806\,0976\cdot435$	$\log c^2 = 3.612\,1952\cdot870$
$\log c^3 = 0.418\,2929\cdot3$	$\log c^4 = 7.224\,3905\cdot7$

Wenn man diese Konstanten in die vorhergehenden Formeln einführt, so erhält man:

für congruente Coordinaten  $x, y$

$$\Delta q = [8.509\,9968\cdot343] x - [1.508\,0137\cdot1] y^2 - [9.394\,3620] x^2 + [1.811\,208] x^3 - [4.803\,7047] x y^2 - [8.10277] x^2 y^2 + [7.58202] y^4 \quad (24a)$$

$$\lambda = [8.717\,9298\cdot299] y + [2.016\,9767] x y + [5.316\,0226] x^2 y - [4.838\,9023] y^3 + [8.69416] x^3 y - [8.65540] x y^3 \quad (25a)$$

$$\gamma = [8.613\,4720\cdot035] y + [1.912\,5188\cdot8] x y + [5.328\,6062] x^2 y - [4.851\,4850] y^3 - 8.6582] x y^3 + [8.688\,74] x^3 y \quad (26a)$$

$$x = [1.490\,0031\cdot657] \Delta q + [5.562\,1572\cdot1] \lambda^2 - [0.351\,2073] \Delta q \lambda^2 + [3.864\,3715] \Delta q^2 - [7.744\,955] \Delta q^3 - [3.854\,68] \lambda^4 \quad (27a)$$

$$y = [1.282\,0701\cdot701] \lambda - [6.071\,1200\cdot1] \Delta q \lambda - [9.666\,1530] \lambda^3 - [8.445\,4885] \Delta q^2 \lambda - [4.96682] \Delta q^3 \lambda + [4.66579] \Delta q \lambda^3 \quad (28a)$$

$$\gamma = [9.895\,5421\cdot736] \lambda - [8.071\,5618] \lambda^3 + [8.964\,5490] \Delta q^2 \lambda + [3.33773] \Delta q \lambda^3 \quad (29a)$$



Zu einer ersten Anwendung dieser Formeln wollen wir in runden Zahlen nehmen:

$$x = 50\,000^m \quad y = 50\,000^m \quad (30)$$

Daraus erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= 1609,761\,561'' = 26' 49,761\,561'' \\ \lambda &= 2637,728\,348'' = 43' 57,728\,348'' \\ \gamma &= 2073,867\,723'' = 34' 33,867\,723'' \end{aligned} \right\} (31)$$

und die Rückverwandlung:

$$\left. \begin{aligned} x &= 50000,00015^m \\ y &= 50000,00063^m \\ \gamma &= 2073,867\,640'' = 34' 33,867\,640'' \end{aligned} \right\} (32)$$

Die Proben stimmen in  $x$  auf  $0,15^{mm}$ , in  $y$  auf  $0,63^{mm}$  und in  $\gamma$  auf  $0,000083''$  also überall befriedigend.

Einzelheiten hiezu sind in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 88–89 angegeben, wobei aber zu bemerken ist, dass die Coefficienten zu  $x^3$  und zu  $\Delta\varphi^3$  dort ein wenig anders, d. h. etwas weniger genau in Bezug auf die Glieder  $\eta^2$  angegeben waren.

#### Übergang zu konformen Coordinaten $x, y$ .

In den bisherigen Formeln ist angenommen, die Coordinaten  $x, y$  seien natürliche, unverzerrte (kongruente), wie in dem Beispiele (30); wir wollen nun aber annehmen, das Coordinatensystem sei ein konformes, entsprechend dem früheren § 50, wobei aber nun die  $x$  die Rolle der früheren  $y$  übernehmen. Dann geht jedes  $x$  über in  $x + \frac{x^3}{6r^2}$  während die  $y$  ungeändert bleiben, oder wir wollen nun, indem wir die konformen  $x$  mit  $X$  bezeichnen, setzen:

$$x = X - \frac{X^3}{6r^2} = X - \frac{X^3}{6c^2} V^4 \quad (33)$$

$$\text{wobei für die Breite } 51^\circ 50' \log \frac{1}{6r^2} = 5,611\,879 \text{ und } \log \frac{\mu}{6r^2} = 2,249\,664$$

wobei übrigens in den Gliedern 4ter Ordnung, wie schon früher,  $c$  und  $r$  nicht mehr unterschieden zu werden brauchen.

Betrachten wir zuerst die Gleichung (24) für  $\Delta\varphi$ , so sieht man, dass die Einführung von (30) nur auf das erste Glied einwirkt, indem es giebt:

$$\frac{x}{c} V^3 = \frac{V^3}{c} \left( X - \frac{X^3}{6c^2} V^4 \right) = \frac{V^3}{c} - \frac{V^5}{6c^3} (1 + \eta^2) X^3 \quad (34)$$

Hiezu kommt das Glied in (24), welches  $x^3$  selbst enthält und nun auch mit  $X^3$  geschrieben werden kann, nämlich:

$$-\frac{X^3}{6c^3} V^5 (-3\eta^2 t^2 + 3\eta^2 + 3\eta^4 - 15\eta^4 t^2)$$

Dieses mit dem letzten Gliede von (31) zusammengekommen giebt:

$$-\frac{X^3}{6c^3} V^5 (1 + 4\eta^2 - 3\eta^2 t^2 + 3\eta^4 - 15\eta^4 t^2)$$

In dieser Form werden wir dieses Glied in der nachfolgenden Gleichung (36) wiederfinden. In (25) bringt das zweite Glied eine Änderung zusammen mit dem ohnehin vorhandenen Gliede  $x^3 y$ , wo wir aber, weil es nur 4te Ordnung ist, die  $V^2$  weglassen, also:



$$\begin{aligned}\lambda \cos \varphi &= \frac{y}{c} V + \frac{y V^2 t}{c^2} \left( X - \frac{X^3}{6 c^2} \right) \dots + \frac{X^3 y t}{3 c^4} (1 + 3 t^2) + \dots \\ &= \frac{y}{c} V^3 + \frac{y X}{c^2} V^2 t + \frac{y X^3 t}{6 c^4} (-1 + 2 + 6 t^2) = \dots \frac{y X^3 t}{6 c^4} (1 + 6 t^2)\end{aligned}$$

Dieses Glied wird sich in der nachfolgenden Gleichung (37) finden.

Ähnlich wird auch  $\gamma$  behandelt, was wir nicht näher auseinandersetzen wollen.

In der Umkehrungsformel (27) für  $x$  erhält man beim Übergang auf konforme Coordinaten (ohne  $\varrho$ ):

$$X - \frac{X^3}{6 c^2} V^4 = \frac{\Delta \varphi}{V^3} + \frac{\lambda^2 c}{2 V} \cos^2 \varphi t + \dots$$

also wenn man das Glied mit  $X^3$  auf die rechte Seite bringt, wird:

$$\begin{aligned}X &= \left( \frac{\Delta \varphi}{V^3} c + \frac{\lambda^2 c}{2 V} (\cos^2 \varphi t) \right)^3 \frac{V^4}{6 c^2} + \dots - \frac{\Delta \varphi^3 c}{2 V^7} \eta^2 (-1 + t^2 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2) \\ &= \left( \frac{\Delta \varphi^3}{V^9} c^3 + \frac{3 \Delta \varphi^2 \lambda^2 c^3 \cos^2 \varphi t}{2 V^7} \right) \frac{V^4}{6 c^2} + \dots \\ &= \frac{\Delta \varphi^3 V^2}{V^7} \frac{c}{6} + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda^2}{4 V^3} c \cos^2 \varphi t + \dots + \frac{\Delta \varphi^2 c}{2 V^7} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2)\end{aligned}$$

Das erste und das dritte Glied lassen sich zusammennehmen (mit  $V^2 = 1 + \eta^2$ ) und dadurch wird:

$$X = \frac{\Delta \varphi^3 c}{6 V^7} (1 + 4 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 + 12 \eta^4 t^2) + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda^2}{4 V^3} c \cos^2 \varphi t + \dots$$

Das sind nur die Glieder, welche sich in (27) ändern; im Ganzen hat man dann die Gleichung, wie sie in nachstehender Zusammenstellung bei (39) sich findet. Die Formeln für  $\lambda$  und  $\gamma$  sind dieselben geblieben wie früher (28) und (29). Hiernach hat man folgende Gebrauchsformeln für konforme  $X$ ,  $y$ :

$$\Delta \varphi = \frac{X}{c} V^3 \varrho - \frac{y^2}{2 c^2} V^4 t \varrho - \frac{3 X^2}{2 c^2} V^4 \eta^2 t \varrho - \frac{X^3}{6 c^3} V^5 (1 + 4 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 - 15 \eta^4 t^2) \varrho - \frac{X y^2}{2 c^3} V^5 t^2 (1 - 3 \eta^2) \varrho - \frac{X^2 y^2}{2 c^4} t^3 \varrho + \frac{y^4}{24 c^4} t (1 + 3 t^2) \varrho \quad (36)$$

$$\lambda \cos \varphi = \frac{y}{c} V \varrho + \frac{X y}{c^2} V^2 t \varrho + \frac{X^2 y}{c^3} V^3 t^2 \varrho - \frac{y^3}{3 c^3} V^3 t^2 \varrho + \frac{X^3}{6 c^4} y t (1 + 6 t^2) \varrho - \frac{X y^3}{6 c^4} t (1 + 6 t^2) \varrho \quad (37)$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{y}{c} V t \varrho + \frac{X y}{c^2} V^2 t \varrho + \frac{X^2 y}{2 c^3} V^3 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) \varrho \\ &\quad - \frac{y^3}{6 c^3} V^3 t (1 + 2 t^2 + \eta^2) \varrho - \frac{X y^3}{3 c^4} t^2 (2 + 3 t^2) \varrho \\ &\quad + \frac{X^3 y}{3 c^4} t^2 (2 + 3 t^2) \varrho\end{aligned} \quad (38)$$

Für die Umkehrung der Aufgabe hat man:

$$\begin{aligned}X &= \frac{\Delta \varphi}{\varrho} \frac{c}{V^3} + \frac{\lambda^2 c}{2 \varrho^2} \frac{c}{V} \cos^2 \varphi t - \frac{\Delta \varphi \lambda^2 c}{2 \varrho^3} \frac{c}{V^3} \sin^2 \varphi + \frac{3 \Delta \varphi^2 c}{2 \varrho^2} \frac{c}{V^5} \eta^2 t \\ &\quad + \frac{\Delta \varphi^3 c}{6 \varrho^3} \frac{c}{V^7} (1 + 4 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 + 12 \eta^4 t^2) + \frac{\Delta \varphi^2 \lambda^2}{4 \varrho^4} c \cos^2 \varphi t - \frac{\lambda^4 c}{24 \varrho^4} \cos^2 \varphi t\end{aligned} \quad (39)$$

Die früheren (28) und (29) bleiben auch bei konformen Coordinaten gültig und sind hier einzufügen.



Mit ausgerechneten Coëfficienten-Logarithmen bekommt man folgende Formeln:

für konforme Coordinaten  $X, y$

$$\Delta q = [8.509\ 9968\ 343] X - [1.508\ 0137\ 1] y^2 - [9.394\ 3620] x^2 \\ - [4.119\ 7471] X^3 - [4.803\ 7047] Xy^2 - [8.10\ 277] X^2 y^2 + [7.58\ 202] y^4 \quad \left. \vphantom{\Delta q} \right\} (36a)$$

$$\lambda = [8.717\ 9298\ 299] y + [2.016\ 9767] Xy + [5.316\ 0226] X^2 y \\ - [4.838\ 9023] y^3 + [8.65\ 540] Y^3 y - [8.65\ 540] X y^3 \quad \left. \vphantom{\lambda} \right\} (37a)$$

$$\gamma = [8.613\ 4720\ 035] y + [1.912\ 5188\ 8] X y + [5.328\ 6062] X^2 y \\ - [4.851\ 4850] y^3 - [8.6582] X y^3 + [8.6582] X^3 y \quad \left. \vphantom{\gamma} \right\} (38a)$$

$$X = [1.490\ 0031\ 657] \Delta q + [5.562\ 1572\ 1] \lambda^2 - [0.351\ 2073] q \Delta \lambda^2 \\ + [3.864\ 3715] \Delta q^2 + [0.079\ 8989] \Delta q^3 + [4.63\ 283] \Delta q^2 \lambda^2 - [3.85\ 468] \lambda^4 \quad \left. \vphantom{X} \right\} (39a)$$

Die früheren (28) und (29) gelten auch hier wieder.

Wenn man hiernach das grosse Beispiel (30) rechnen will, so muss man zuerst  $x = 50\ 000^m$  umwandeln in:

$$X = x + \frac{x^3}{6 r^2} = 50\ 000,51143^m, y \text{ bleibt} = 50000^m \quad (40)$$

und damit erhält man aus (36), (37), (38):

$$\Delta q = 1609,761\ 560'' = 0^\circ 26' 49,761\ 560'' \\ \lambda = 2637,728\ 353 = 43' 57,728\ 353'' \\ \gamma = 2073,867\ 605 = 34' 33,867\ 723'' \quad \left. \vphantom{\Delta q} \right\} (41)$$

und die Rückverwandlung nach 39 giebt:

$$X = 50\ 000,51161^m \quad (42)$$

Dieses stimmt auf  $0,18^m$  mit dem Ausgangswert in (40),  $y$  und  $\gamma$  bleiben hier dieselben wie bei (32).

Fig. 2.

Um auch eine Anwendung mit rechtwinkligen Coordinaten zu haben, stellen wir zuerst mit Fig. 2. die Formeln auf, welche aus § 50. dadurch hervorgehen, dass man  $x$  und  $y$  vertauscht, wie in Fig. 2. angedeutet ist.

Indem wir im übrigen mit  $t$  und  $T$  die Richtungswinkel wie früher bezeichnen, haben wir nach Fig. 2.:

$$\tan t_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad s = \frac{y_2 - y_1}{\sin t_1} = \frac{x - x_2}{\cos t_1}$$

$$\tan t_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad s = \frac{y_1 - y_2}{\sin t_2} = \frac{x_1 - x_2}{\cos t_2}$$

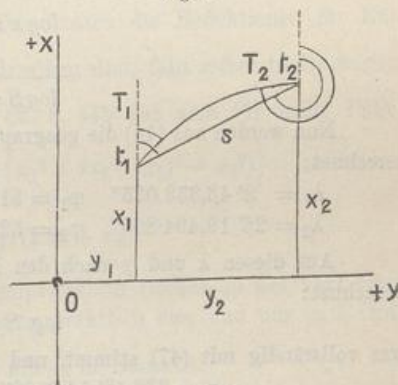
$$t_2 = t_1 \pm 180^\circ \quad s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Dieses gilt wie immer in der Ebene.

Zum Übergang auf das Ellipsoid (bzw. genähert Kugel) hat man:

$$t_1 - T_1 = (y_2 - y_1) \frac{2 x_1 + x_2}{3} \frac{\varrho}{2 r^2} \\ t_2 - T_2 = (y_1 - y_2) \frac{2 x_2 + x_1}{3} \frac{\varrho}{2 r^2} \quad \left. \vphantom{t_1 - T_1} \right\} (43)$$

$$\log S = \log s - \frac{\mu}{12 r^2} (x_1^2 + 4 x_0^2 + x_2^2), \text{ wobei } \frac{x_1 + x_2}{2} = x_0$$





Der mittlere Krümmungs-Halbmesser  $r$  hängt von der geographischen Breite ab. Wir nehmen an, wie schon bei (33) S. 443:

$$q_0 = 51^\circ 50' \text{ womit } \log r = 6.804\,9847$$

$$\log \frac{\rho}{2r^2} = 1.403426 \quad \log \frac{\mu}{12r^2} = 4.948\,634$$

für 7.  $\log$  Dezimale ... 1.948 634

Die Koordinaten zweier Punkte sind:

		konform
$P_1$	$y_1 = + 10\,000^m$	$X_1 = + 10\,000^m$
$P_2$	$y_2 = + 30\,000^m$	$X_2 = + 40\,000^m$
$y_2 - y_1 = + 20\,000^m$		$X_2 - X_1 = + 30\,000^m$

(44)

Man kann auch die zu den konformen  $X$  gehörigen kongruenten  $x$  berechnen, nämlich wie schon bei (31) angegeben:

$$x = X \left( 1 - \frac{X^2}{6r^2} \right) = X - \frac{X^3}{6r^2} \quad \left( \log \frac{1}{6r^2} = 5.611\,879 \right)$$

$X_1 = 10000,000^m$	$X_2 = 40000,000^m$	konform
- 0,004	- 0,262	
$x_1 = 9999,996^m$	$x_2 = 39999,738^m$	kongruent.

(45)

Nach den Formeln (43) wurde berechnet:

$t_1 = 33^\circ 41' 24,2431''$	$t_2 = 213^\circ 41' 24,2431''$
- 1,0127	+ 1,5190
$T_1 = 33^\circ 41' 23,2304''$	$T_2 = 213^\circ 41' 25,7621''$

(46)

$$\log s = 4.5569\,716\cdot 8$$

$$- 37\cdot 3$$

$$\log S = 4.5569\,679\cdot 5 \quad (47)$$

Nun werden aus (44) die geographischen Koordinaten nach den Formeln (36)–(38) berechnet:

$\lambda_1 = 8^\circ 43,353\,035''$	$q_1 = 51^\circ 55' 23,265\,935$	$\gamma_1 = 6^\circ 51,469\,147''$	} (48)
$\lambda_2 = 26^\circ 19,494\,863''$	$q_2 = 52^\circ 11' 31,394\,840$	$\gamma_2 = 20^\circ 41,844\,72''$	

Aus diesen  $\lambda$  und  $q$  nach den Mittelbreiten-Formeln des früheren § 77. wurde berechnet:

$$\log S = 4.556\,9679\cdot 5 \quad (49)$$

was vollständig mit (47) stimmt, und ferner die Azimute:

$$\alpha_1 = 33^\circ 48' 14,6988'' \quad \alpha_2 = 214^\circ 2' 7,6060'' \quad (50)$$

das giebt die Probe:

von (46)	$T_1 = 33^\circ 41' 23,2304''$	$T_2 = 213^\circ 41' 25,7621''$
von (48)	$\gamma_1 = 6^\circ 51,4691''$	$\gamma_2 = 20^\circ 41,8447''$
	$T_1 + \gamma_1 = 33^\circ 48' 14,6995''$	$T_2 + \gamma_2 = 214^\circ 2' 7,6068''$
soll (50)	$\alpha_1 = 33^\circ 48' 14,6988''$	$\alpha_2 = 214^\circ 2' 7,6060''$
Abweichungen	0,0007''	0,0008''

Diese kleinen Abweichungen sind bei Azimuten und Richtungswinkeln gleichgiltig. Das Zahlenbeispiel stimmt also in sich selbst vollständig, der angewendeten Rechenschärfe entsprechend.



Indessen müssen wir zu den konformen Coordinaten, welche von Gleichung (33) an eingeführt wurden, doch noch eine reservierende Bemerkung machen:

Während die ganze Entwicklung bis dorthin (33) in sich konsequent auf Potenzreihenentwicklungen beruhend ist, wobei auch klar ist, welche Glieder mit  $r^2$  mitgenommen und welche vernachlässigt sind, ist das von (33) an nicht mehr ebenso der Fall. Für die Ausdehnung mit  $X = 50000^m$  und  $y = 50000^m$  ist die Brauchbarkeit auch der konformen Formeln innerhalb  $1^{mm}$  gezeigt worden; ob aber beim Übergang zur Konformität die Glieder 3ter Ordnung nicht auch Änderungen in den Zusätzen  $r^2 \dots$  erfahren, das wäre durch eine schärfere Entwicklung, etwa ähnlich wie in §§ 86.—88., noch zu behandeln.

### § 84. Allgemeines über queraxige Coordinaten.

In den vorstehenden §§ 82. und 83. haben wir queraxige Coordinaten kennen gelernt, bei welchen in einem angenommenen Ursprungspunkt ein Quernormalbogen von West nach Ost (in der Richtung des sogenannten ersten Vertikals) gelegt, als Hauptaxe angenommen wird.

Indessen in weiterem Sinne können wir auch die aus der konformen Kegelprojektion hergeleiteten rechtwinkligen Coordinaten queraxig nennen, weil dort ein Parallelkreisbogen zunächst gewissermassen als Hauptaxe dient, dem dann im Ursprungspunkt eine Queraxe, in der Ebene berührend, angelegt wird.

Wir wollen diese beiden Arten von queraxigen Coordinaten zuerst unter sich vergleichen und dann auch noch ohne Vergleichung mit den meridionalaxigen Systemen im allgemeinen behandeln.

Dass bei den beiden Arten queraxiger Coordinaten die Reduktionen für Entfernung und für Richtungen bis auf Glieder  $\frac{1}{r^2}$  dieselben sind, fällt sofort in die Augen, denn bei der Coordinatenzählung von Fig. 1. § 83. S. 445 hat man für beide Fälle:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2r^2} \quad \frac{s}{S} = 1 + \frac{1}{12r^2} (x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2)$$

$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{6r^2} (y_2 - y_1) (2x_1 + x_2)$$

In der Mecklenburgischen konformen Kegelprojektion reichen in der That diese Glieder schon in II.—III. Triangulierungs-Ordnung praktisch aus, und nur in I. Ordnung kommen noch weitere Glieder 3ter Potenz mit  $\frac{1}{r^3}$  in Betracht.

Um auch die Coordinaten-Formeln zu vergleichen, brauchen wir nur die Formeln von §§ 80.—81. einerseits und §§ 82.—83. andererseits zusammenzustellen; indessen wollen wir dabei alle sphäroidischen Bestandteile  $r^2 \dots$  u. s. w. ausser Betracht lassen, also nur die sphärischen Glieder vergleichen.

Die Normalbreite ist hiebei natürlich als *gleich* anzunehmen, wir wollen aber die Zeichen  $P$  und  $\varphi$ , welche für die Normalbreiten benützt wurden, auch weiter schreiben, um sofort hieran die Formeln zu erkennen; es soll also die Mecklenburgische Normalbreite für konforme Kegelprojektion mit  $P$  bezeichnet werden und die zugehörigen rechtwinkligen Coordinaten mit  $x_1 y_1$ , dann die Normalbreite für queraxige konforme Coordinaten (Dessau) mit  $\varphi$ , und die Coordinaten mit  $x_2 y_2$ .



Da wir nur die sphärischen Glieder zur Vergleichung ziehen, können wir für die konforme Kegelprojektion den § 80. benutzen, dagegen die queraxigen Koordinaten sind in § 82. sphärisch nur kongruent, müssen daher als konform aus § 83. Gleichung (36), (37), (39), (28) ausgezogen werden durch Weglassung aller sphäroidischen Elemente  $\eta^2$  u. s. w.

Auf diesem Wege sind folgende Vergleichen erhalten worden:

$$\begin{aligned} \S 80. (25) \frac{x_1}{r} &= \Delta q + \frac{\lambda^2}{2} \sin P \cos P - \Delta q \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 P + \frac{\Delta q^3}{6} - \frac{\lambda^4}{24} \sin^3 P \cos P + \frac{\Delta q^4}{24} \tan P \\ \S 83. (39) \frac{x_2}{r} &= \Delta q + \frac{\lambda^2}{2} \sin q \cos q - \Delta q \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 q + \frac{\Delta q^3}{6} - \frac{\lambda^4}{24} \sin q \cos q + \frac{\Delta q^2 \lambda^2}{4} \sin q \cos q \\ \frac{x_2 - x_1}{r} &= -\frac{\lambda^4}{24} \sin q \cos^3 q - \frac{\Delta q^4}{24} \tan q + \frac{\Delta q^2 \lambda^2}{4} \sin q \cos q \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \S 80. (26) \frac{y_1}{r} &= \lambda \cos P - \lambda \Delta q \sin P - \frac{\lambda^3}{6} \sin^2 P \cos P + \frac{\Delta q \lambda^3 \sin^3 P}{6} - \frac{\Delta q^3 \lambda \sin P}{6} \\ \S 83. (28) \frac{y_2}{r} &= \lambda \cos q - \lambda \Delta q \sin q - \frac{\lambda^3}{6} \sin^2 q \cos q + \frac{\Delta q \lambda^3 \sin q}{6} - \frac{\Delta q^3 \lambda \sin q}{3} \\ \frac{y_2 - y_1}{r} &= +\frac{\Delta q \lambda^3}{6} \sin q \cos^2 q - \frac{\Delta q^3 \lambda}{6} \sin q \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \S 80. (33) \Delta q &= \frac{x_1}{r} - \frac{y_1^2 t}{2r^2} - \frac{x_1 y_1^2 t^2}{2r^3} - \frac{x_1^3}{6r^3} - \frac{x_1^2 y_1^2 t}{4r^4} (2t^2 - 1) + \frac{y_1^4 t^3}{8r^4} - \frac{x_1^4 t}{24r^4} \\ \S 83. (36) \Delta q &= \frac{x_2}{r} - \frac{y_2^2 t}{2r^2} - \frac{x_2 y_2^2 t^2}{2r^3} - \frac{x_2^3}{6r^3} - \frac{x_2^2 y_2^2 t}{2r^4} t^3 + \frac{y_2^4 t}{24r^4} (1 + 3t^2) \\ 0 &= \frac{x_2 - x_1}{r} - \frac{x_2^2 y_2^2}{4r^4} t + \frac{x_4 t}{24r^4} + \frac{y_4 t}{24r^4} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \S 80. (35) \lambda \cos P &= \frac{y_1}{r} + \frac{y_1 x_1}{r^2} t + \frac{y_1 x_1^2}{r^3} t^2 - \frac{y_1^3 t^2}{3r^3} - \frac{y_1^3 x_1}{r^4} t^3 + \frac{y_1 x_1^3}{r^4} t^3 \\ \S 83. (37) \lambda \cos q &= \frac{y_2}{r} + \frac{y_2 x_2}{r^2} t + \frac{y_2 x_2^2}{r^3} t^2 - \frac{y_2^3 t^2}{3r^3} - \frac{y_2^3 x_2}{6r^4} t (1 + 6t^2) + \frac{y_2 x_2^3}{6r^4} t (1 + 6t^2) \\ 0 &= \frac{y_2 - y_1}{r} - \frac{y^3 x}{6r^4} t + \frac{y x^3}{6r^4} t \end{aligned} \quad (4)$$

Die hier auftretenden Differenzen kontrollieren sich gegenseitig, d. h. es ist (1) = (3) und (2) = (4), wenn man in den höheren Gliedern nimmt  $\frac{x}{r} = \Delta q$  und  $\frac{y}{r} = \lambda \cos q$ , wobei auch  $x_1$  von  $x_2$  und  $y_1$  von  $y_2$  nicht mehr zu unterscheiden sind.

Diese Differenzenproben sind erwünscht als durchgreifende Kontrollen aller sphärischen Entwicklungen für  $x, y, \Delta q, \lambda$  in §§ 80.—83.

Betrachten wir diese Differenzen näher, so sagen dieselben aus, dass die konforme Kegelprojektion und die queraxige konforme Projektion so nahe verwandt sind, dass sie sich nur um Glieder 4ter Ordnung in  $x$  und  $y$  unterscheiden.

Bei der Meridian-Konvergenz, welche zwischen (1) § 80. S. 419 und (29) § 83 S. 441 zu vergleichen ist, beträgt der Unterschied dritte Ordnung, welche aber in dieser Beziehung mit der 4ten Ordnung in  $x$  und  $y$  gleichartig zu achten ist. Da die Glieder 4ter Ordnung in den Koordinatenrechnungen sehr wenig ausmachen, kann man für kleinere Ausdehnung die Kegelprojektion und die queraxige Projektion fast als identisch betrachten.



Vergleichen wir weiter und setzen etwa den Fall, man wolle für ein Land von ausgesprochen west-östlicher Ausdehnung, wie z. B. Sachsen oder die Schweiz, ein west-östlich angepasstes System anlegen, so empfiehlt sich das konforme Kegelsystem durch die scharfe Definition seines Prinzips, das in geschlossener Form angebar und bis zu allen nötigen Ordnungen bereits entwickelt vorliegt (Mecklenburg). Als kleiner Nachteil ist nur die algebraische Form der Richtungsreduktionen zu betrachten, welche für Triangulierung I. Ordnung mit  $\frac{1}{r^2}$  nicht ausreicht, sondern noch  $\frac{1}{r^3}$  und nach Umständen sogar noch einzelne  $\frac{1}{r^4}$  verlangen kann; doch ist schon von der Triangulierung II. Ordnung an die Richtungsreduktion mit  $\frac{1}{r^2}$  genügend.

Solche Glieder mit  $\frac{1}{r^3}$  treten bei der eigentlich queraxigen Projektion (§ 82.—83.) nicht auf, und das queraxige System ist insofern im Vorteil; aber andererseits müssen wir hiezu bemerken, dass eine vollendete Entwicklung der Formeln für rein queraxiges System in unseren vorstehenden §§ 82.—83. noch nicht vorliegt. Jene §§ 82.—83. sind bei mässiger Ausdehnung, wie sie in § 83. vorausgesetzt wurde, jedenfalls ausreichend, aber im Falle der Ausdehnung auf ein erheblich grösseres Land wäre diese Theorie noch weiter auszubilden, wie auch schon am Schlusse von § 83. bemerkt wurde.

Alles bisherige bezog sich auf die Vergleichung der beiden Arten queraxiger Coordinaten unter sich; wir wollen auch noch das nötigste zur Vergleichung queraxiger Coordinaten mit den üblichen meridional-axigen Coordinaten beifügen (aus einem Vortrag über deutsche Coordinaten-Systeme, „Zeitschr. f. Verm.“ 1895, S. 342).

Alle süddeutschen und auch die 40 preussischen Systeme haben als Hauptaxe je den Meridian eines Punktes, und man hat sich daran gewöhnt, das als zu einem ordentlichen Coordinaten-System gehörig anzusehen, allein der Meridian ist dabei nicht wesentlich. Bayern, Württemberg, Baden haben ihre Haupterstreckung von Süden nach Norden, und da war es natürlich, die Hauptaxe in den Meridian zu legen, zumal der Meridian eine jedem Laien geläufige geodätische Linie ist. Wenn aber ein Land wesentlich west-östlich erstreckt ist, wie z. B. Sachsen, Mecklenburg, Anhalt, so liegt kein Grund mehr vor, die Hauptaxe in den Meridian zu legen, im Gegenteil, ohne Rechnung kann jeder einsehen, dass dann eine *Queraxe* von West nach Ost eine Menge Verzerrungen ersparen muss.

Diesen naheliegenden Gedanken hatte ich gelegentlich früher („Zeitschr. f. Verm.“ 1876, S. 266) ausgesprochen, und 1894 wurde daraus Veranlassung gegeben zu einer amtlichen Behandlung der Sache (vgl. Queraxige rechtwinklige konforme Coordinaten, „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 65—74 mit Mittelbreite  $\varphi_0 = 51^\circ 50'$  S. 72).

In Hinsicht auf die rechtwinkligen Coordinaten selbst ändert sich dabei gar nichts, als dass die Bedeutung der  $x$  und  $y$  vertauscht wird, und auch die Beziehungen zwischen rechtwinkligen und geographischen Coordinaten werden den früheren ganz entsprechend, d. h. sie werden nicht schwieriger als für die Meridianaxe. Der Unterschied liegt eben nur in der Anpassung der Hauptaxe an die Haupterstreckung des Landes. Der Meridian an sich hat allerdings den Vorzug, dass er als Axe beliebig lang sein kann, also z. B. vom Äquator bis zum Pol als Axe eines Systems dienen könnte; allein wenn es sich auch in der Richtung der Hauptaxe selbst nur um mässige



Erstreckung handelt, z. B. um wenige hundert Kilometer, dann tritt dieser Vorzug fast ganz zurück, und dann hat die Queraxe auch für die mathematische Formelentwicklung dieselbe Berechtigung wie der Meridian.

Wie wichtig aber die Anpassung der Axe an die Landesform ist, mag an dem Beispiel von Mecklenburg gezeigt werden. Dieses Land hat von Süd nach Nord nur etwa  $\frac{2}{3}$  der Ausdehnung, welche von West nach Ost stattfindet, und durch die konforme Kegelprojektion, welche im wesentlichen queraxig ist, ist daher die Maximalverzerrung nur  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$  oder kaum die Hälfte von der Verzerrung, welche eine Meridianaxe bringen müsste.

Auch der kleine Staat Anhalt hat wesentlich west-östliche Erstreckung, nämlich rund 110<sup>km</sup> von West nach Ost und nur 55<sup>km</sup> von Süd nach Nord. Mit einer Queraxe unter 51° 50' Breite sind die grössten Abscissen nach Norden rund 30<sup>km</sup>, also nach der Tabelle (8) § 49. S. 276 ist die grösste Linearverzerrung nur 0,011<sup>m</sup> auf 1000<sup>m</sup>, während bei Wahl der Magdeburger Meridianaxe die grössten Ordinaten nach Osten 66<sup>km</sup> würden mit Linearverzerrung (nach S. 276) an rund 0,05<sup>m</sup> auf 1<sup>km</sup>, d. h. 5mal so gross als im ersten Falle, und in den Winkelverzerrungen stellt sich die Sache noch viel ungünstiger für die Magdeburger Axe.

Als Anhang zu § 84. nehmen wir noch eine kurze Betrachtung über

#### *Schiefaxige Coordinaten.*

In theoretischer Beziehung könnte man noch weiter gehen und z. B. einem Lande, dessen Haupterstreckung von Südwest nach Nordost ginge, eine Hauptaxe im Azimut 45° anlegen u. s. w. Allein solche Abnormitäten sind höchstens für rein kartographische Zwecke versucht worden; für praktisch geodätische Zwecke dürfen wir die zwei Hauptrichtungen nicht verlassen, weil sonst die Beziehungen zu den von der Drehung der Erde vorgeschriebenen geographischen Coordinaten zu verwickelt würden.

Dagegen sind schiefaxige Coordinaten in anderem Sinne schon mehrfach eingeführt worden. Z. B. die in den Preussischen Rheinlanden früher angelegten Coordinaten-Systeme in grösserer Zahl, welche wir schon in § 59. S. 332 (unten im Kleingedruckten) erwähnt haben, sind als schiefaxige zu betrachten, indem die „Parallele zum Meridian von Köln“ als Abscissenaxe angenommen wurde.

Auch die bayrischen „Lokalsysteme“, über welche wir ebenfalls schon in § 59. S. 327 berichtet haben, sind ähnlich schiefaxig, denn es hat jedes solche System in dem Lokalnulpunkt eine  $x$ -Axe, welche um die Meridian-Konvergenz verdreht ist gegen den Meridian des Lokalnulpunktes. Als Vorteil davon wird angegeben, dass bei den Coordinaten-Transformationen dadurch einige Rechenglieder erspart werden — das mag sein, aber schiefaxige Coordinaten bringen in Bezug auf die niemals abzuschaffenden geographischen Coordinaten so viel Unzuträglichkeiten mit sich, dass dagegen jene kleinen Vorteile zurücktreten.

Vgl. Transformation rechtwinklig-sphärischer Coordinaten auf neue Normalpunkte, von Dr. J. H. Franke in München, Astr. Nachr. 126. Band, Dezember 1890, S. 355, Systeme II, und Bauernfeind, „Zeitschr. f. Verm.“ 1891, S. 161—165.

Eine neuere Mitteilung von Franke über diese Lokalsysteme giebt „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 327—332.

Die bayrischen Reduktionsformeln für die Lokalsysteme gehen aus unseren Formeln von § 79. (15) und (16) S. 418 einfach dadurch hervor, dass man  $\gamma = \text{Null}$  setzt.



### § 85. Rechtwinklige konforme sphärische Coordinaten mit Gliedern bis zur 4<sup>ten</sup> Ordnung $\frac{1}{r^4}$ .

Indem wir darauf ausgehen, die Gauss'schen konformen rechtwinkligen Coordinaten mit Meridiananschluss auf dem Ellipsoide zu entwickeln, wollen wir an die ersten sphärischen Näherungen von § 50. nochmals anschliessen, und zunächst noch auf der Kugel bleibend, in dem Sinne der früheren Entwicklungen von § 50. die sphärischen Reihen bis  $\frac{1}{r^4}$  weiterführen.

Dazu muss vor allem das Projektionsgesetz selbst schärfer ausgedrückt werden als in § 50. geschehen ist. Wir müssen auf die durch Integration erhaltene strenge Gleichung (7) § 50. S. 280 zurückgreifen, nämlich:

$$\frac{y}{r} = l \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{y}{2r} \right)$$

oder für dekadische Logarithmen, mit  $\mu = 0,43429 \dots$ :

$$y = \frac{r}{\mu} \log \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{y}{2r} \right) \quad (1)$$

Das Vergrößerungsverhältnis ist nach (5) § 50. S. 280 zunächst streng:

$$m = \frac{dy}{d\eta} = \sec \frac{\eta}{r} \quad (2)$$

Die Funktion (1) kann in einer Reihe entwickelt werden, indem man zunächst rein goniometrisch umwandelt:

$$\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2r} \right) = \frac{1 + \operatorname{tang} \frac{\eta}{2r}}{1 - \operatorname{tang} \frac{\eta}{2r}} = \frac{1+t}{1-t} \quad (3)$$

Die logarithmische Reihe von § 28. S. 169 darauf angewendet giebt:

$$\log(1+t) = \mu \left( t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \dots \right)$$

$$\log(1-t) = \mu \left( -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} - \dots \right)$$

$$\log \frac{1+t}{1-t} = 2\mu \left( t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \dots \right)$$

Die Tangentenreihe § 28. S. 172 giebt:

$$t = \operatorname{tang} \frac{\eta}{2r} = \frac{\eta}{2r} + \frac{\eta^3}{24r^3} + \frac{\eta^5}{240r^5}$$

$$t^3 = \frac{\eta^3}{8r^3} + \frac{\eta^5}{32r^5}$$

$$t^5 = \frac{\eta^5}{32r^5}$$

$$t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{\eta}{2r} + \frac{\eta^3}{12r^3} + \frac{\eta^5}{48r^5}$$

$$\log \frac{1+t}{1-t} = \mu \left( \frac{\eta}{r} + \frac{\eta^3}{6r^3} + \frac{\eta^5}{24r^5} + \dots \right)$$



also nach (1) und (3):

$$y = \eta + \frac{\eta^3}{6r^3} + \frac{\eta^5}{24r^5} + \dots \quad (4)$$

Diese Gleichung muss rückwärts nach  $\eta$  aufgelöst werden, was durch schrittweise geführte Näherung geschieht:

$$\begin{aligned} \eta &= y - \frac{y^3}{6r^3} + \dots & \eta^3 &= y^3 - \frac{3y^5}{6r^5} \\ \eta &= y - \frac{1}{6} \left( \frac{y^3}{r^3} - \frac{3y^5}{6r^5} \right) - \frac{y^5}{24r^5} \\ \eta &= y - \frac{y^3}{6r^3} + \frac{y^5}{24r^5} \end{aligned} \quad (5)$$

Auch das Vergrößerungsverhältnis  $m$  kann man nach (2) bis auf  $\frac{1}{r^4}$  entwickeln:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\eta}{r} &= 1 - \frac{\eta^2}{2r^2} + \frac{\eta^4}{24r^4} \\ \sec \frac{\eta}{r} &= 1 + \left( \frac{\eta^2}{2r^2} - \frac{\eta^4}{24r^4} \right) + \frac{\eta^2}{4r^4} = 1 + \frac{\eta^2}{2r^2} + \frac{5\eta^4}{24r^4} \end{aligned} \quad (6)$$

Dieses stimmt mit der in § 28. S. 172 als bekannt citierten Secans-Reihe.

Man hat also  $m = 1 + \frac{\eta^2}{2r^2} + \frac{5\eta^4}{24r^4}$   
oder mit Einführung von (5):

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{2r^2} \left( y - \frac{y^3}{6r^3} \right)^2 + \frac{5y^4}{24r^4} \\ m &= 1 + \frac{y^2}{2r^2} + \frac{y^4}{24r^4} \end{aligned} \quad (7)$$

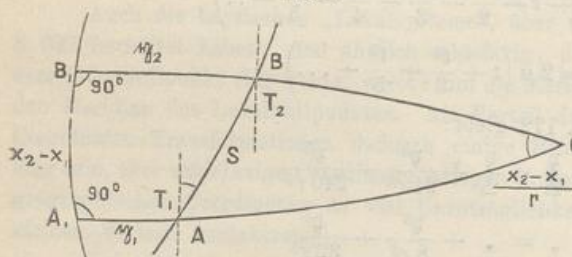
Dazu auch die Umkehrung:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2r^2} + \frac{5y^4}{24r^4} \quad (8)$$

und in logarithmischer Form:

$$\log m = \frac{\mu}{2A^2} y^2 - \frac{\mu}{12A^4} y^4$$

Fig. 1.



Das nächste ist die schärfere Berechnung der Ordinaten-Konvergenz, wozu dieselbe Betrachtung wie früher bei den Soldner'schen Coordinaten § 46. dient; und um nicht dieselbe Sache zweimal machen zu müssen, wollen wir die frühere Gleichung in unsere neuen Bezeichnungen umsetzen, entsprechend Fig. 1., indem wir  $\eta_1$  und  $\eta_2$  statt  $y$  und  $y'$  dann  $x_2 - x_1$  statt  $x' - x$  und endlich  $T_1 - T_2$  statt  $\alpha - \alpha'$  schreiben, dadurch geht (7) § 46. S. 260 in diese Form über:

$$\tan \frac{T_1 - T_2}{2} = \frac{\sin \frac{\eta_2 + \eta_1}{2r}}{\cos \frac{\eta_2 - \eta_1}{2r}} \tan \frac{x_2 - x_1}{2r}$$



Hiernach kann man die Differenz der sphärischen Richtungswinkel  $T_1$  und  $T_2$  scharf berechnen, beliebig weit in Reihen entwickeln, u. s. w.; indessen brauchen wir hievon zunächst nur das Differential:

$$\operatorname{tang} \frac{dT}{2} = \frac{\sin \frac{\eta}{r}}{\cos \frac{\eta}{2r}} \operatorname{tang} \frac{dx}{2r}$$

oder hinreichend genau:

$$\frac{dT}{2} = \sin \frac{\eta}{r} \frac{dx}{2r} \quad (9)$$

hier ist zunächst

$$\sin \frac{\eta}{r} = \frac{\eta}{r} - \frac{\eta^3}{6r^3}$$

also wegen (5):

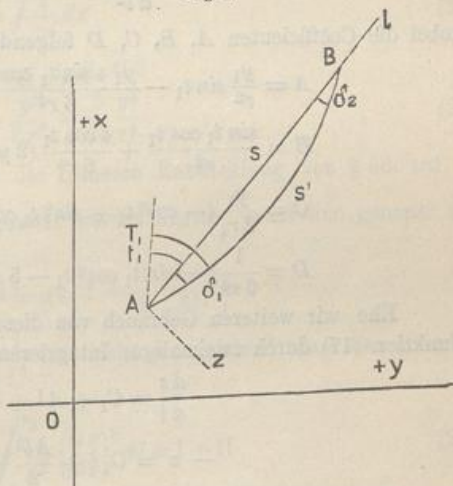
$$\sin \frac{\eta}{r} = \left( \frac{y}{r} - \frac{y^3}{6r^3} \right) - \frac{y^3}{6r^3} = \frac{y}{r} - \frac{y^3}{3r^3}$$

folglich nach (9):

$$dT = \left( \frac{y}{r} - \frac{y^3}{3r^3} \right) \frac{dx}{r} = \frac{1}{r^2} \left( y dx - \frac{y^3}{3r^2} dx \right) \quad (10)$$

Nun hat man wieder  $dT$  als das Krümmungs-Differential der Kurve  $AB$  zu betrachten, ähnlich wie in der früheren Fig. 6. § 50. S. 283, welche nun in Fig. 2. wiederkehrt, mit der Zeichenänderung, dass die schiefen Koordinaten, welche in Fig. 6. S. 283 mit  $\xi$  und  $\eta$  bezeichnet waren, nun durch  $l$  und  $z$  ausgedrückt sind.

Fig. 2.



Der Grund dieser Zeichenänderung war der, dass eine Kollision des früheren  $\eta$  und  $\eta^2$  mit unserem sonstigen  $\eta^2 = e^{1/2} \cos^2 \varphi$  vermieden werden sollte.

In demselben Sinne wie früher bei (23) S. 283 haben wir also für unseren neuen Fall aus (8):

$$-\frac{d^2 z}{dl^2} = \frac{dT}{dl} = \frac{1}{r^2} \left( y \frac{dx}{dl} - \frac{y^3}{3r} \frac{dx}{dl} \right) \quad (11)$$

Diese Gleichung ist auch hier noch immer genau genug, denn es sollte zwar statt  $dl$  gesetzt werden

$\sqrt{dl^2 + dz^2}$ , aber es ist nach (35) S. 285  $d\eta$ , oder nun  $dz$  selbst schon von der Ordnung  $\frac{1}{r^2}$ , also  $dz^2$  schon von der Ordnung  $\frac{1}{r^4}$ , was mit dem ohnehin schon in (11) vorhandenen

Faktor  $\frac{1}{r^2}$  bereits  $\frac{1}{r^6}$  geben würde.

Um (11) weiter auszuführen, müssen wir  $x$  und  $y$  in  $l$  ausdrücken, was nach dem Anblick von Fig. 2. durch folgende Koordinaten-Transformation geschieht:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + l \cos t_1 - z \sin t_1 \\ y &= y_1 + l \sin t_1 + z \cos t_1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$



Die  $z$  sind aber selbst Funktionen von  $l$ , nämlich nach (35) § 50. S. 285 mit  $\eta = z$  und  $\xi = l$ :

$$z = \frac{l s \cos t_1}{6 r^2} (2 y_1 + y_2) - \frac{l^2}{2 r^2} y_1 \cos t_1 - \frac{l^3}{6 r^2} \sin t_1 \cos t_1$$

Dieses in (12) eingesetzt giebt:

$$x = x_1 + l \cos t_1 - \frac{l s \cos t_1 \sin t_1}{6 r^2} (2 y_1 + y_2) + \frac{l^2}{2 r^2} y_1 \sin t_1 \cos t_1 + \frac{l^3}{6 r^2} \sin^2 t_1 \cos t_1 \quad (13)$$

$$y = y_1 + l \sin t_1 + \frac{l s \cos^2 t_1}{6 r^2} (2 y_1 + y_2) - \frac{l^2}{2 r^2} y_1 \cos^2 t_1 - \frac{l^3}{6 r^2} \sin t_1 \cos^2 t_1 \quad (14)$$

$$\frac{dx}{dl} = \cos t_1 - \frac{s \cos t_1 \sin t_1}{6 r^2} (2 y_1 + y_2) + \frac{l}{r^2} y_1 \sin t_1 \cos t_1 + \frac{l^2}{2 r^2} \sin^2 t_1 \cos t_1 \quad (15)$$

Damit kann man den ersten Teil von (11) bilden, nämlich  $y \frac{dx}{dl}$  und zum zweiten Teile von (11) braucht man noch von (12):

$$\left. \begin{aligned} y^3 &= y_1^3 + 3 y_1^2 l \sin t_1 + 3 y_1 l^2 \sin^2 t_1 + l^3 \sin^3 t_1 + \dots \\ \text{dazu} \quad \frac{dx}{dl} &= \cos t_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wenn man die beiden Faktoren (14), (15) und die von (16) ausmultipliziert und die beiden Produkte nach der Vorschrift der Gleichung (11) vereinigt, so wird man, nach Potenzen von  $l$  ordnend, einen Ausdruck von folgender Form erhalten:

$$-\frac{d^2 z}{dl^2} = A + B l + C l^2 + D l^3 \quad (17)$$

wobei die Coefficienten  $A, B, C, D$  folgende Bedeutungen haben:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{y_1}{r^2} \sin t_1 - \frac{y_1 s \sin t_1 \cos t_1}{6 r^4} (2 y_1 + y_2) - \frac{y_1^3}{3 r^4} \cos t_1 \\ B &= \frac{\sin t_1 \cos t_1}{r^2} + \frac{s \cos t_1}{6 r^4} (2 y_1 + y_2) (\cos^2 t_1 - \sin^2 t_1) \\ C &= \frac{y_1}{2 r^4} (-\cos^3 t_1 + \sin^2 t_1 \cos t_1) \\ D &= \frac{1}{6 r^4} (-\sin t_1 \cos^3 t_1 - 5 \sin^3 t_1 \cos t_1) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ehe wir weiteren Gebrauch von diesen Coefficienten machen, werden wir die Funktion (17) durch zweimaliges Integrieren weiter behandeln:

$$-\frac{dz}{dl} = C_1 + A l + \frac{B l^2}{2} + \frac{C l^3}{3} + \frac{D l^4}{4} \quad (19)$$

$$-z = C_1 l + \frac{A l^2}{2} + \frac{B l^3}{6} + \frac{C l^4}{12} + \frac{D l^5}{20} \quad (20)$$

Dabei ist  $C_1$  die erste Integrations-Konstante, und die zweite Integrations-Konstante ist gleich Null, weil  $l = 0$  auch  $z = 0$  geben muss. Zur Bestimmung der Konstanten

$C_1$  dient die Festsetzung, dass  $l = 0$  geben muss  $\frac{dz}{dl} = +\delta_1$  und  $l = s$  giebt  $\frac{dz}{dl} = -\delta_2$  und weiter weiss man, dass  $l = s$  auch  $z = 0$  geben muss, also:

$$\begin{aligned} -\delta_1 &= C_1 \\ +\delta_2 &= C_1 + A s + \frac{B s^2}{2} + \frac{C s^3}{3} + \frac{D s^4}{4} \\ 0 &= C_1 + \frac{A s}{2} + \frac{B s^2}{6} + \frac{C s^3}{12} + \frac{D s^4}{20} \end{aligned}$$



hieraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{6} + \frac{Cs^3}{12} + \frac{Ds^4}{20} \\ \delta_2 &= \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{3} + \frac{Cs^3}{4} + \frac{Ds^4}{5} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Hier sind die Coefficienten  $A, B, C, D$  von (18) einzusetzen, was nur noch eine algebraische Zusammensetzung der gleichartigen Teile verlangt und nach dem Ordnen, wenn zugleich  $= s \sin t_1 = y_2 - y_1$  und  $r \cos t_1 = x_2 - x_1$  gesetzt wird, geben wird:

$$\delta_1 = \frac{(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2)}{6r^2} + \frac{(x_2 - x_1)^3}{360r^4} (8y_1 + 7y_2) - \frac{(x_2 - x_1)}{360r^4} (8y_1^3 + 21y_1^2y_2 + 24y_1y_2^2 + 7y_2^3) \quad (22)$$

und  $\delta_2$  entsprechend mit vertauschten 1 und 2:

$$\delta_2 = \frac{(x_1 - x_2)(y_1 + 2y_2)}{6r^2} + \frac{(x_1 - x_2)^3}{360r^4} (7y_1 + 8y_2) - \frac{(x_1 - x_2)}{360r^4} (8y_2^3 + 21y_2^2y_1 + 24y_2y_1^2 + 7y_1^3) \quad (22a)$$

#### Integration für die Länge $S$ des sphärischen Bogens.

Wir haben drei verschiedene Längen zu unterscheiden: die Bogenlänge  $S$  auf der Kugel, die Gerade  $s$  = Gerade  $AB$  der Abbildung und die Kurvenlänge  $s'$  = Kurve  $AB$  der Abbildung (vgl. Fig. 2. S. 453).

In differentialem Sinne besteht die Gleichung:

$$m = \frac{ds'}{dS} \quad \text{oder} \quad dS = \frac{1}{m} ds'$$

$$\text{also auch} \quad S = \int \frac{1}{m} ds' \quad (23)$$

Dabei ist nach früherer Entwicklung (8) S. 452:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2r^2} + \frac{5y^4}{24r^4} \quad (24)$$

Das Differential  $ds'$ , welches bei der früheren Entwicklung von § 50. auf  $\frac{1}{r^2}$  einschliesslich genau schlechthin  $= dl$  gesetzt werden durfte, muss nun genauer angegeben werden:

$$ds' = \sqrt{dl^2 + dz^2} = dl \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dl} \right)^2 \right)$$

Da  $\frac{dz}{dl}$  schon  $= \frac{1}{r^2} \dots$  also  $\left( \frac{dz}{dl} \right)^2 = \frac{1}{r^4}$  ist, sieht man alsbald, dass das Integral (23) in zwei Teile zerfällt:

$$S = \int_0^s \frac{1}{m} dl + \int_0^s \frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dl} \right)^2 dl = I + II \quad (25)$$

Bleiben wir zunächst bei dem ersten Integral stehen, so müssen wir die Reihe (24) in eine Reihe mit steigenden Potenzen von  $l$  umformen.

Man hat dazu von (14) die Reihe für  $y$ , welche quadriert giebt:

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= y_1^2 + l \left( 2y_1 \sin t_1 + \frac{y_1 s \cos^2 t_1}{3r^2} (2y_1 + y_2) \right) \\ &+ l^2 \left( \sin^2 t_1 - \frac{\cos^2 t_1}{3r^2} (5y_1^2 - y_1 y_2 - y_2^2) \right) \\ &- l^3 \frac{4}{3} \frac{y_1}{r^2} \sin t_1 \cos^2 t_1 - l^4 \frac{1}{r^3} \sin^2 t_1 \cos^2 t_1 + \frac{1}{r^4} \dots \end{aligned} \right\} \quad (26)$$



und weiter:

$$y^4 = y_1^4 + l^4 y_1^3 \sin t_1 + l^2 6 y_1^2 \sin^2 t_1 + l^3 4 y_1 \sin^3 t_1 + l^4 \sin^4 t_1 \quad (27)$$

Wenn man damit den Ausdruck (24) zusammensetzt und nach Potenzen von  $ordnet$ , soll entstehen:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2r^2} + \frac{5}{24} \frac{y^4}{r^4} = \alpha + \beta l + \gamma l^2 + \delta l^3 + \epsilon l^4$$

also der erste Integralteil von (25):

$$I = \alpha s + \frac{\beta s^2}{2} + \gamma \frac{s^3}{3} + \delta \frac{s^4}{4} + \epsilon \frac{s^5}{5}$$

Hiezu muss man die Teile aus (26) und (27) zusammensuchen, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{I}{s} = & 1 - \frac{y_1^2}{2r^2} - \frac{y_1 s \sin t_1}{2r^2} - \frac{s^2 \sin^2 t_1}{6r^2} \\ & + \frac{1}{12r^4} \left( -y_1 \cos^2 t_1 (2y_1 + y_2) + 5y_1^3 s \sin t_1 \right) \\ & + \frac{1}{18r^4} s^2 \cos^2 t_1 \left( 5y_1^2 - y_1 y_2 - y_2^2 \right) + \frac{5}{12r^4} y_1^2 s^2 \sin^2 t_1 \\ & + \frac{1}{6r^4} y_1 s^3 \sin t \cos^2 t_1 + \frac{5}{24} y_1 s^3 \sin^3 t_1 \\ & + \frac{1}{30r^4} s^3 \sin^2 t_1 \cos t_1 + \frac{1}{24r^4} s^4 \sin^4 t_1 \end{aligned}$$

Wenn man hier überall  $s \sin t_1 = y_2 - y_1$  und  $s \cos t_1 = x_2 - x_1$  setzt und die gleichartigen Teile zusammensucht, so findet man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{I}{s} = & 1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6r^2} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{360r^4} (8y_1^2 + 14y_1 y_2 + 8y_2^2) \\ & + \frac{1}{24r^4} (y_1^4 + y_1^3 y_2 + y_1^2 y_2^2 + y_1 y_2^3 + y_2^4) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Um auch den zweiten Teil des Integrals (25) zu bestimmen, müssen wir auf (35) S. 285 zurückgreifen und entnehmen (mit  $\eta = z$  und  $\xi = l$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dl} &= \frac{s \cos t_1}{6r^2} (2y_1 + y_2) - \frac{l}{r^2} y_1 \cos t_1 - \frac{l^2}{2r^2} \sin t_1 \cos t_1 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dl} \right)^2 &= \frac{\cos^2 t_1}{72r^4} \left\{ s^2 (2y_1 + y_2)^2 - l 12 s y_1 (2y_1 + y_2) + l^2 36 y_1^2 - l^2 6 s \sin t_1 (2y_1 + y_2) \right. \\ &\quad \left. + l^3 36 y_1 \sin t_1 + l^4 9 \sin^2 t_1 \right\} \end{aligned}$$

Dieses integriert giebt mit  $s \sin t_1 = y_2 - y_1$ :

$$\frac{II}{s} = \frac{s^2 \cos^2 t_1}{72r^4} \left\{ (2y_1 + y_2)^2 - 6y_1 (2y_1 + y_2) + 12y_1^2 - 2(y_2 - y_1)(2y_1 + y_2) + 9y_1(y_2 - y_1) \right. \\ \left. + \frac{9}{5} (y_2 - y_1)^2 \right\}$$

All' dieses zusammengezogen vereinfacht sich sehr, und giebt schliesslich:

$$\frac{II}{s} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{360r^4} \left\{ 4y_1^2 + 7y_1 y_2 + 4y_2^2 \right\} \quad (29)$$

Wenn man die Teile I und II von (28) und (29) zusammennimmt, so hat man nach (25):



$$\frac{S}{s} = \frac{I}{s} + \frac{II}{s} = 1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 r^2} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{360 r^4} (4 y_1^2 + 7 y_1 y_2 + 4 y_2^2) + \frac{1}{24 r^4} (y_1^4 + y_1^3 y_2 + y_1^2 y_2^2 + y_1 y_2^3 + y_2^4) \quad (30)$$

Wenn man die Mittelordinate  $y_0$  einführt nach der Gleichung

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y_0^2 = \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (y_1^2 + 2 y_1 y_2 + y_2^2)$$

$$y_0^4 = \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} (y_1^4 + 4 y_1^3 y_2 + 6 y_1^2 y_2^2 + 4 y_1 y_2^3 + y_2^4)$$

und wenn man auch entsprechende Werte von  $\frac{1}{m}$  einführt, nämlich nach (8):

$$\frac{1}{m_1} = 1 - \frac{y_1^2}{2 r^2} + \frac{5 y_1^4}{24 r^4} \quad \frac{1}{m_2} = 1 - \frac{y_2^2}{2 r^2} + \frac{5 y_2^4}{24 r^4}$$

$$\frac{1}{m_0} = 1 - \frac{y_0^2}{2 r^2} + \frac{5 y_0^4}{24 r^4}$$

so kann man das vorstehende (30) auch auf diese Form bringen:

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{m} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{(x_2 - x_1)^2}{360 r^4} (4 y_1^2 + 7 y_1 y_2 + 4 y_2^2) - \frac{5 (x_2 - x_1)^4}{2880 r^4} \quad (31)$$

Das Ergebnis aller vorstehenden Entwicklungen und Betrachtungen ist enthalten in den zwei Gleichungen (22) und (22a) für die Richtungs-Reduktionen und in der Schlussgleichung (31) für die Entfernungs-Reduktion. Wenn man die Glieder mit  $\frac{1}{r^4}$  weglässt, gehen die Formeln wieder zurück in die früheren Formeln (31), (32) und (13) in § 50. S. 284 und S. 282.

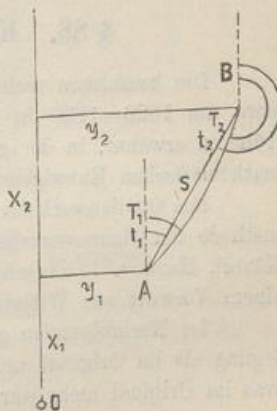
*Einführung von Näherungen für verhältnismässig kleine  $x_2 - x_1$  und  $y_2 - y_1$ .*

Wenn in einem sehr ausgedehnten System die Dreiecksseiten verhältnismässig klein sind gegen die Ordinaten selbst, so kann man die Glieder 4ter Ordnung, d. h. die Glieder mit  $\frac{1}{r^4}$  unterscheiden in solche, bei welchen die Potenzen von  $y$  selbst oder nur Potenzen von  $x_2 - x_1$  und  $y_2 - y_1$  überwiegen, und man kann letztere Glieder gegen erstere vernachlässigen.

Wir wollen dieses näher verfolgen im Anschluss an eine Abhandlung von Oberstlieutenant von Schmidt, Chef der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, in „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 399—400, und indem wir die dort teilweise abweichenden Bezeichnungen in die unsrigen (Fig. 3) umsetzen, haben wir dort (7) 1894 S. 339 und (8) S. 340:

$$\log s - \log S = \frac{\mu}{8 A^2} (y_1 + y_2)^2 - \frac{\mu}{24 A^2} (y_2 - y_1)^2 - \frac{\mu}{192 A^4} (y_1 + y_2)^4 \quad (32)$$

Fig. 3.





$$T_1 - t_1 = \frac{\varrho}{4A^2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - \frac{\varrho}{12A^2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) - \frac{\varrho}{48A^4}(y_1 + y_2)^3(x_2 - x_1) \quad (33)$$

Es ist nicht schwer, diese Formeln als Vereinfachungen unserer Formeln (30) und (22) nachzuweisen. Nehmen wir zuerst (30) mit Vernachlässigung des Gliedes  $\frac{(x_2 - x_1)^2}{r^4} \dots$  und mit Einführung des Mittelwertes  $\frac{y_1 + y_2}{2}$  im letzten Gliede von (30), so haben wir von dort:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6r^2} + \frac{1}{24r^4} 5 \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^4$$

Nach der logarithmischen Reihe S. 169:

$$l\left(\frac{S}{s}\right) = -\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6r^2} + \frac{1}{384r^4}(y_1 + y_2)^4 - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{6r^2} \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 \right)^2$$

$$lS - ls = -\frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6r^2} - \frac{1}{192r^4}(y_1 + y_2)^4 \quad (34)$$

Das letzte Glied hier stimmt mit dem letzten Gliede von (32), und da auch die zwei ersten Glieder von (32) sich mit dem ersten Gliede von (34) als algebraisch identisch erweisen und der logarithmische Modul  $l\mu$  in den Zeichen  $\log s$  und  $ls$  u. s. w. begründet ist, haben wir nun die Formel (32) als Vereinfachung von (30) nachgewiesen.

Noch kürzer ist einzusehen, wie (33) aus (22) hervorgeht, indem das Glied  $\frac{(x_2 - x_1)^3}{360r^4} \dots$  in (22) vernachlässigt wird und im letzten Gliede von (22) die Klammer  $= 60 \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^3$  gesetzt wird. Auch dass die zwei ersten Glieder von (33) mit dem einen ersten Gliede von (22) identisch sind, wurde schon in §. 50. S. 284—285 oben bemerkt.

Die konstanten Coefficienten-Logarithmen der Landesaufnahme-Formeln (32) und (33) sind schon zum Teile auf S. 285 unten angegeben. Die noch dazu gehörigen Coefficienten 4ter Ordnung sind:

$$\log \frac{\mu}{192A^4} = 7.134\,373 \quad \log \frac{\varrho}{48A^4} = 6.431\,074$$

Eine praktische Anwendung der Formel (33) haben wir schon früher in Band I. 4. Aufl. 1895, S. 418—419 gegeben, bei dem Schlesisch-Posen'schen Netze, mit  $y =$  rund 350 000<sup>m</sup>; das Glied 4ter Ordnung in (33) brachte dort noch 0,0197''.

## § 86. Konforme Gauss'sche Coordinaten.

Die konformen rechtwinkligen Coordinaten mit Meridiananschluss, welche Gauss etwa um 1820—1830 in Hannover eingeführt hat, haben wir schon mehrfach im früheren erwähnt, in der geschichtlichen Übersicht von § 59. S. 328—329 und in der mathematischen Entwicklung erster Näherung von § 50.

Das Quellenwerk für diese klassischen Coordinaten ist: „Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung von *Oscar Schreiber*, Hauptmann im Königl. Hannov. 1. Jägerbataillon, Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung 1866“ mit einem Vorwort von Wittstein.

Im Nachfolgenden geben wir eine Bearbeitung dieser Schrift, in breiterer Darlegung als im Original und mit möglichst geometrischer Auseinandersetzung dessen, was im Original mehr nur analytisch vorgetragen wird.



Allerdings die Grundgleichung der konformen Abbildung auf Grund der Funktionen komplexer Veränderlicher, nämlich die nachfolgende Gleichung (6),  $x + iy = f(q + i\lambda)$ , müssen wir hier als bekannt voraussetzen.

Die Gauss'schen Originalschriften über die Theorie der konformen Abbildung sind:

Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird, von C. F. Gauss. Als Beantwortung der von der Königl. Societät der Wissenschaften in Kopenhagen für 1822 gestellten Preisaufgabe, veröffentlicht in Schumachers astronomischen Abhandlungen, Heft 3, Altona 1825.

Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von Carl Friedrich Gauss, erste Abhandlung, der Königl. Societät überreicht 1843, Art. 23.

Den Hauptinhalt dieser Theorien haben wir schon früher in unserem II. Bande, 2. Auflage, 1878, S. 377—379 abgedruckt u. kommentiert, weshalb es hier genügen mag, hierauf zurückzuverweisen, oder auf irgend ein mathematisches Werk über Funktionen komplexer Veränderlicher Bezug zu nehmen, zur Begründung der nachfolgenden Gleichung (6), der einzigen, die wir aus jenen allgemeinen Theorien brauchen.

Hier ist auch nochmals das Hannoversche Coordinatenverzeichnis mit Einleitung von Wittstein zu erwähnen, dessen genauer Titel schon in § 59, S. 329 (im Kleingedruckten) angegeben wurde.

Überall im Folgenden haben wir unsere gewöhnlichen Bezeichnungen  $V^2$ ,  $\eta^2$  u. s. w. angewendet, nach deren Umsetzung unsere Schlussformeln mit den Formeln von Schreiber und Wittstein übereinstimmen.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir über zur mathematischen Behandlung der Sache, indem wir in Fig. 1. ein Stück des Erd-Ellipsoids und in Fig. 2. dessen ebene konforme Abbildung betrachten.

Fig. 1.  
Ellipsoid.

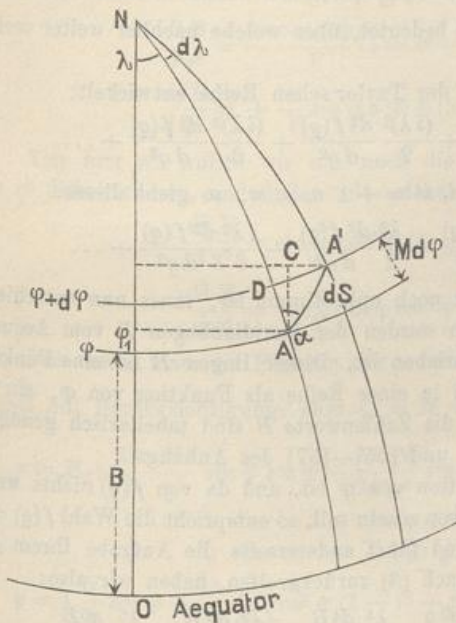
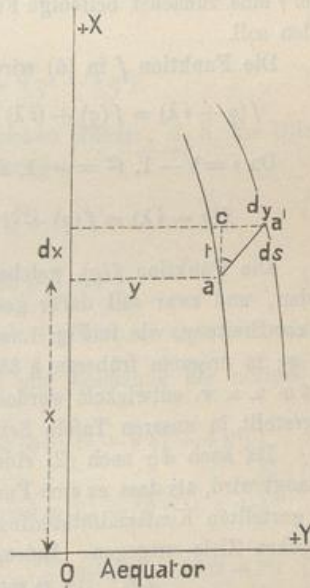


Fig. 2.  
Ebene.



Auf dem Ellipsoid Fig. 1. werden zwei Punkte  $A$  und  $A'$  betrachtet mit den Breiten  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  und mit den Längen  $\lambda$  und  $\lambda + d\lambda$ ; dann hat man ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck  $AD A'$ , in welchem ist:

$$AD = M d\varphi, \quad DA' = N \cos \varphi d\lambda$$



also 
$$A A' = dS = \sqrt{(M d\varphi)^2 + (N \cos \varphi d\lambda)^2} \quad (1)$$

Dabei sind  $M$  und  $N$  wie gewöhnlich die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser, und indem wir auch wie sonst  $N:M = V^2$  setzen und weiter zur Abkürzung einführen:

$$\frac{d\varphi}{\cos \varphi} \frac{M}{N} = \frac{d\varphi}{V^2 \cos \varphi} = d\varphi \quad (2)$$

erhalten wir (1) in dieser neuen Form:

$$dS = N \cos \varphi \sqrt{d\varphi^2 + d\lambda^2} \quad (3)$$

Ausser dem Dreieck  $AD A'$  besteht auf dem Ellipsoid noch ein zweites ebenfalls rechtwinkliges Dreieck  $ACA'$ , welches zur Bildung rechtwinkliger Koordinaten konform abgebildet wird in der Ebene Fig. 2. durch das Dreieck  $aca'$  mit der Hypotenuse  $ds$ ; es ist also in der Ebene:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt das Vergrößerungsverhältnis:

$$m = \frac{ds}{dS} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{d\varphi^2 + d\lambda^2} N \cos \varphi} \quad (5)$$

Nun kommt die allgemeine Theorie der konformen Abbildung in Betracht, welche wir bereits in der Einleitung dieses Paragraphen erwähnt haben.

Diese allgemeine Theorie sagt aus, dass die in (5) behandelte Abbildung dann konform ist, wenn  $x + iy$  eine Funktion von  $q + i\lambda$  oder von  $q - i\lambda$  ist, d. h. es muss sein:

$$(x + iy) = f(q + i\lambda) \quad (6)$$

wobei  $f$  eine zunächst beliebige Funktion bedeutet, über welche nachher weiter verfügt werden soll.

Die Funktion  $f$  in (6) wird nach der Taylor'schen Reihe entwickelt:

$$f(q + i\lambda) = f(q) + (i\lambda) \frac{df(q)}{dq} + \frac{(i\lambda)^2}{2} \frac{d^2 f(q)}{dq^2} + \frac{(i\lambda)^3}{6} \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \dots$$

Da  $i = \sqrt{-1}$ ,  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = +1$  u. s. w., so giebt dieses:

$$f(q + i\lambda) = f(q) + (i\lambda) \frac{df(q)}{dq} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2 f(q)}{dq^2} - \frac{i\lambda^3}{6} \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \dots$$

Die Funktion  $f(q)$ , welche bisher noch unbestimmt ist, muss nun entschieden werden, und zwar soll dafür genommen werden der Meridianbogen  $B$  vom Aequator bis zur Breite  $\varphi$ , wie in Fig. 1. eingeschrieben ist. Dieser Bogen  $B$  ist eine Funktion von  $\varphi$ ; in unserem früheren § 35. ist  $B$  in einer Reihe als Funktion von  $\varphi$ ,  $\sin 2\varphi$ ,  $\sin 4\varphi$  u. s. w. entwickelt worden, und die Zahlenwerte  $B$  sind tabellarisch genügend dargestellt in unseren Tafeln Seite [38] und [55]—[57] des Anhangs.

Da auch  $d\varphi$  nach (2) eine Funktion von  $\varphi$  ist, und da von  $f(q)$  nichts weiter verlangt wird, als dass es eine Funktion von  $q$  sein soll, so entspricht die Wahl  $f(q) = B$  der gestellten Konformitätsbedingung und führt andererseits die Aufgabe ihrem geodätischen Ziele entgegen. Indem wir nach (6) zurückgreifen, haben wir also:

$$x + iy = B + i\lambda \frac{dB}{dq} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2 B}{dq^2} - i \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3 B}{dq^3} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4 B}{dq^4} + \frac{i\lambda^5}{120} \frac{d^5 B}{dq^5} - \frac{\lambda^6}{720} \frac{d^6 B}{dq^6} + \dots$$

Die Vergleichung der reellen und der imaginären Teile giebt:

$$x = B - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2 B}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4 B}{dq^4} - \frac{\lambda^6}{720} \frac{d^6 B}{dq^6} + \dots \quad (7)$$



$$y = +\lambda \frac{dB}{dq} - \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3 B}{dq^3} + \frac{\lambda^5}{120} \frac{d^5 B}{dq^5} + \dots \quad (8)$$

Die Form dieser zwei Reihen ist sofort einleuchtend, weil der als  $x$ -Axe genommene Meridian eine Symmetralaxe ist. Der Wert  $x - B$  kann als Potenzreihe nur die geraden Potenzen  $\lambda^2, \lambda^4, \dots$  enthalten, und es muss mit  $\lambda = 0, x - B = 0$ , d. h.  $x = B$  werden. Ebenso zweifellos muss mit  $\lambda = 0$  auch  $y = 0$  werden, und da  $y$  mit  $\lambda$  gleiches Zeichen haben, im übrigen für  $\pm \lambda$  absolut genommen gleich bleiben muss, kann die Reihe (8) nur die ungeraden Potenzen  $\lambda, \lambda^3, \dots$  enthalten.

Die Ableitungen von  $B$  nach  $q$  müssen ausgeführt werden, wozu man hat:

$$dB = M dq = \frac{c}{V^3} dq \quad \text{und} \quad \frac{dq}{d\varphi} = \frac{1}{V^2 \cos \varphi} \quad (9)$$

$$\text{also} \quad \frac{dB}{dq} = \frac{c}{V} \cos \varphi \quad (10)$$

$$\frac{d^2 B}{dq dq} = -\frac{c}{V^2} \frac{dV}{dq} \cos \varphi - \frac{c}{V} \sin \varphi$$

Schon früher gebraucht (§. 34. S. 208) ist  $\frac{dV}{dq} = -\frac{\eta^2}{V} t$ , also

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B}{dq dq} &= \frac{c}{V^3} \left( \eta^2 \sin \varphi - V^2 \sin \varphi \right) = \frac{c}{V^3} \sin \varphi \left( \eta^2 - (1 + \eta^2) \right) \\ \frac{d^2 B}{dq^2} &= -\frac{c}{V^3} \sin \varphi \frac{dq}{dq} = -\frac{c \sin \varphi \cos \varphi}{V} \end{aligned} \quad (11)$$

Wenn man in diesen Formeln weiter differenziert, so bekommt man:

$$\frac{d^3 B}{dq^3} = -\frac{c \cos^3 \varphi}{V} (1 - t^2 + \eta^2) \quad (12)$$

$$\frac{d^4 B}{dq^4} = +\frac{c}{V} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \quad (13)$$

Von hier ab wollen wir nur noch die sphärischen Glieder, d. h. die Glieder ohne  $\eta^2$  differenzieren, und finden mit solcher Abkürzung:

$$\frac{d^5 B}{dq^5} = +\frac{c}{V} \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4) \quad (14)$$

$$\frac{d^6 B}{dq^6} = -\frac{c}{V} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58t^2 + 4t^4) \quad (15)$$

Nun kann man die Formeln für  $x$  und  $y$  nach (7) und (8) zusammensetzen, zugleich mit Berücksichtigung, dass  $\frac{c}{V} = N$  ist und mit Zusetzung der nötigen  $\varrho$ :

$$x = B + \frac{\lambda^2}{2} \frac{N}{\varrho^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4}{24} \frac{N}{\varrho^4} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \frac{\lambda^6}{720} \frac{N}{\varrho^6} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58t^2 + 4t^4) \quad (16)$$

$$y = \lambda \frac{N}{\varrho} \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} \frac{N}{\varrho^3} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^5}{120} \frac{N}{\varrho^5} \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4) \quad (17)$$

Dieses sind die Formeln von Schreiber (6) S. 10, abgesehen von den Gliedern mit  $\eta^2$  u. s. w. in den Gliedern 5ter und 6ter Ordnung, und innerhalb der 4ten Ordnung haben wir damit die Formeln von Wittstein, S. X. oben.

In erster Näherung stimmen diese Formeln (16) und (17) auch mit unseren früheren (11) und (12) § 58. S. 323.



In den Formeln (16) und (17) sind  $\varphi$  und  $\lambda$  die gegebenen geographischen Koordinaten eines Punktes, und zwar  $\lambda$  nach Osten positiv gezählt von irgend einem Meridian, der als  $x$ -Axe eines rechtwinkligen konformen Koordinatensystems angenommen ist.  $B$  bedeutet den Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite  $\varphi$ ,  $x$  und  $y$  sind die gesuchten ebenen konformen Koordinaten, und zwar  $x$  gezählt wie  $B$  vom Äquator der Erde,  $y$  rechtwinklig zu  $x$ , nach Osten positiv wie  $\lambda$  (vgl. Fig. 1. und 2. S. 459).

Da  $B$  und  $x$  auf diese Weise sehr grosse Zahlen werden, kann man sie beliebig abkürzen oder von irgend einem Nullpunkt in dem Vermessungsbereich selbst zählen. Doch spielt das in der Theorie keine Rolle, weil immer nur die Differenz  $x - B$  in den Formeln auftritt, und deswegen rechnen wir am einfachsten in den Formeln mit  $B$  selbst.

*Umkehrung der Formeln (16) und (17).*

Man kann die Formeln für  $x$  und  $y$  geradezu umkehren, was wir nun ausführen wollen, aber nur bis zu Gliedern von der 4ten Ordnung einschliesslich, d. h. also zunächst aus (16) und (17):

$$x - B = \frac{\lambda^2}{2} N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4}{24} N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \quad (18)$$

$$y = \lambda N \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \lambda^2) \quad (19)$$

Zuerst wird (19) umgekehrt mit erster Näherung  $\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi}$ , welche ins zweite Glied gesetzt giebt:

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi} - \frac{y^3}{6 N^3 \cos^3 \varphi} (1 - t^2 + \eta^2) \quad (20)$$

Daraus bildet man auch die zweite Ordnung:

$$\lambda^2 = \frac{y^2}{N^2 \cos^2 \varphi} - \frac{y^4}{3 N^4 \cos^4 \varphi} (1 - t^2 + \eta^2)$$

und dieses in (18) eingesetzt giebt:

$$x - B = \frac{y^2 t}{2 N} + \frac{y^4 t}{24 N^3} (1 + 3 t^2 + 5 \eta^2 + 4 \eta^4) \quad (21)$$

Nach diesem soll der Meridianbogen  $x - B$  in der zugehörigen Breitendifferenz  $\varphi_1 - \varphi$  ausgedrückt werden, was nach dem früheren § 35. Gleichung (37), S. 218 mit  $\varphi_1$  als Ausgangsbreite sich so giebt:

$$B - x = M_1 (\varphi - \varphi_1) + \frac{3}{2} \frac{M_1}{V_1^2} \eta_1^2 t_1 (\varphi - \varphi_1)^2$$

$$\text{oder} \quad x - B = M_1 (\varphi_1 - \varphi) - \frac{3}{2} \frac{M_1}{V_1^2} \eta_1^2 t_1 (\varphi_1 - \varphi)^2 \quad (22)$$

Dabei gehören  $M_1, \eta_1^2 t_1$ , alle zu der Fusspunktsbreite  $\varphi_1$ , während in (18)–(21) alles sich auf die Breite  $\varphi$  des Punktes selbst bezog. Aus (21) und (22) bekommt man als erste Näherung für die Breitendifferenz  $\varphi_1 - \varphi$ :

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{y^2}{2 M_1 N} t \quad , \quad \varphi = \varphi_1 - \frac{y^2 t}{2 M_1 N} \quad (23)$$

$$\text{Hieraus} \quad \tan \varphi = \tan \varphi_1 - \frac{y^2 t}{2 M_1 N} (1 + t_1^2)$$



Für den weiteren Gebrauch in den höheren Gliedern braucht aber  $t^1$  und  $t$ , sowie  $N_1$  und  $N$  nicht mehr unterschieden zu werden, also:

$$t = t_1 - \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1} (1 + t_1^2) = t_1 - \frac{y^2 t_1}{2 N_1^2} (1 + \eta_1^2) (1 + t_1^2)$$

Dabei ist berücksichtigt, dass allgemein  $N: M = V^2 = 1 + \eta^2$  ist, also:

$$t = t_1 - \frac{y^2 t_1}{2 N_1^2} (1 + t_1^2 + \eta_1^2 + \eta_1^2 t_1^2) \quad (23a)$$

Dieses in (21) eingesetzt giebt:

$$x - B = \frac{y^2 t_1}{2 N} + \frac{y^4 t_1}{24 N_1^3} (-5 - 3 t^2 - \eta^2 - 6 \eta^2 t^2 + 4 \eta^4) \quad (24)$$

Weiter muss im ersten Gliede  $N$  durch  $N_1$  ersetzt werden, was nach früherem § 34. S. 208, unten Gleichung (1), geschieht. Wir wollen dabei auch bemerken, dass in den höheren Gliedern  $\varphi$  und  $\varphi_1$  u. s. w. nicht mehr unterschieden wird. Damit ist nach der citierten Gleichung unten auf S. 208 mit Rücksicht auf (23):

$$\frac{N_1}{N} = 1 + \frac{(\varphi_1 - \varphi)}{V^2} \eta^2 t = 1 + \frac{y^2 \eta^2 t^2}{2 M N V^2} = 1 + \frac{y^2 \eta^2 t^2}{2 N^2} \quad (25)$$

Dieses mit (24) giebt:

$$x - B = \frac{y^2 t_1}{2 N_1} + \frac{y^4 t_1}{24 N_1^3} (-5 - 3 t^2 - \eta^2 + 4 \eta^4) \quad (26)$$

Nun sind die Ausdrücke in (22) und (26) einander gleich, was vollends die Auflösung nach  $\varphi_1 - \varphi$  giebt:

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1} - \frac{y^4 t_1}{24 M_1 N_1^3} (5 + 3 t^2 + \eta^2 - 9 \eta^2 t^2 - 4 \eta^4) \quad (27)$$

Damit ist die erste Formel (18) vollständig umgekehrt, und um auch vollends (19), d. h. die vorläufig schon hergerichtete (20) zu erledigen, brauchen wir von (23) mit  $N: M = V^2 = 1 + \eta^2$  die Entwicklung:

$$\cos \varphi = \cos \varphi_1 + \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1} \sin \varphi_1 = \cos \varphi_1 + \frac{y^2 t_1}{2 N_1^2} (1 + \eta^2) \sin \varphi_1$$

Dazu nach (25):

$$\frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{N_1 \cos \varphi_1} \left( 1 + \frac{y^2 \eta^2 t^2}{2 N^2} - \frac{y^2 t^2}{2 N^2} (1 + \eta^2) \right)$$

$$\frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{N_1 \cos \varphi_1} \left( 1 - \frac{y^2 t^2}{2 N^2} \right)$$

Dieses in (20) eingesetzt giebt alsbald:

$$\lambda = \frac{y}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{y^3}{6 N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 t^2 + \eta^2) \quad (28)$$

Nun haben wir in (27) und (28) die gewünschten Formeln zur Bestimmung von  $\varphi$  und  $\lambda$  und indem wir auch die nötigen  $\varrho$  zusetzen, stellen wir zusammen als Gebrauchsformeln:

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{y^2 t_1}{2 M_1 N_1} \varrho + \frac{y^4 t_1 \varrho}{24 M_1 N_1^3} (5 + 3 t_1^2 + \eta_1^2 - 9 \eta_1^2 t_1^2 - 4 \eta_1^4) \quad (29)$$

$$\lambda = \frac{y \varrho}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{y^3 \varrho}{6 N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2 t_1^2 + \eta_1^2) \quad (30)$$

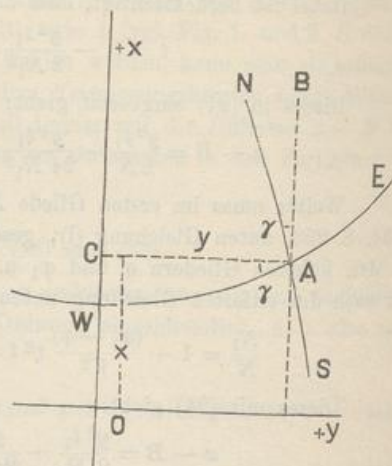
Diese Formeln entsprechen den Formeln von Schreiber (11) S. 25 und Wittstein S. X. unten. Diese Formeln stimmen auch in erster Näherung mit unseren früheren (8) und (9) § 58. S. 323.



## Meridian-Konvergenz.

Wenn in Fig 3.  $NAS$  das konforme Bild eines Meridians, und  $WAE$  das konforme Bild eines Parallelkreises ist, wobei sich diese beiden Linien in einem Punkte  $A$  schneiden, durch welchen wir auch die Parallelen  $AB$  und  $AC$  mit den Koordinatenachsen ziehen, so entsteht ein kleiner Winkel  $\gamma$ , welchen hier Gauss „Meridian-Konvergenz“ nennt (vgl. hiezu den Schluss dieses §, S. 465).

Fig. 3.



Wenn wir die Gleichung des Parallelkreis-Bildes  $WAE$  als Funktion zwischen den ebenen rechtwinkligen Koordinaten  $x$  und  $y$  aufstellen können, so brauchen wir nur noch  $\frac{dx}{dy}$  zu bilden, um  $\tan \gamma$  zu haben.

Um in diesem Sinne die Gleichung des Parallelkreises zu bilden, brauchen wir nur  $\varphi$  konstant zu denken, und  $\lambda$  allein veränderlich, d. h. wir leiten die Gleichungen (18) und (19) partiell nach  $\lambda$  ab, und erhalten damit:

$$\frac{dx}{d\lambda} = \lambda N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \quad (31)$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = N \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \quad (32)$$

Die Division von (31) und (32) giebt:

$$\frac{dx}{dy} = \left\{ \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi \cos^2 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) \right\} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \right\}^{-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi \cos^2 \varphi (2 + 2 t^2 + 6 \eta^2 + 4 \eta^4) = \tan \gamma$$

Nun ist nach der *arc tang*-Reihe § 28. S. 172:

$$\gamma = \tan \gamma - \frac{\tan^3 \gamma}{3}, \quad \text{wobei} \quad \frac{\tan^3 \gamma}{3} = \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi t^2$$

also mit dem vorhergehenden

$$\gamma = \frac{dx}{dy} - \frac{\lambda^3}{6} 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi (2 t^2)$$

und alles zusammengekommen:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3 \eta^2 + 2 \eta^4) \quad (33)$$

Diese Gleichung ist anzuwenden, wenn ein Punkt durch  $\varphi$  und  $\lambda$  gegeben ist; wenn aber  $x$  und  $y$  als gegeben vorliegen, dann empfiehlt es sich, erstens  $\lambda$  in  $y$  auszudrücken und zweitens auch alles, was von  $\varphi$  abhängt, auf  $\varphi_1$ , d. h. auf die Fusspunktsbreite zu reduzieren.

Für das erste haben wir von (20):

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi} - \frac{y^3}{6 N^3 \cos \varphi} (1 - t^2 + \eta^2)$$



Dieses in (33) eingesetzt giebt:

$$\gamma = \frac{y}{N} t + \frac{y^3 t}{6 N^3} (1 + t^2 + 5 \eta^2 + 4 \eta^4)$$

Weiter haben wir für  $t$  und  $N$  bereits die Gleichungen (23a) und (25), welche zusammen geben:

$$\frac{t}{N} = \frac{t_1}{N_1} \left( 1 - \frac{y^2}{2 N_1^2} (1 + t_1^2 + \eta_1^2 + \eta_1^2 t_1^2) \right) \left( 1 + \frac{y^2}{2 N_1^2} \eta_1^2 t_1^2 \right)$$

Dieses mit dem vorhergehenden vereinigt giebt endlich:

$$\gamma = \frac{y}{N_1} t_1 - \frac{y^3}{3 N_1^3} t_1 (1 + t_1^2 - \eta_1^2 - 2 \eta_1^4) \quad (34)$$

Die Zeichen  $N_1$  und  $t_1$  deuten an, dass diese Werte, z. B.  $t_1 = \tan \varphi_1$ , als Funktion der Fusspunktsbreite  $\varphi_1$  zu nehmen sind, welche der vom Äquator an rektifizierten Meridianbogenlänge  $x$  entspricht. Auch in den höheren Gliedern der Formel (34) haben wir durchaus  $t_1 \eta_1^2$  u. s. w. in diesem Sinne geschrieben, obgleich in der vorhergehenden Entwicklung die Unterscheidung von  $\varphi$  und  $\varphi_1$  in den höheren Gliedern nicht eingehalten wurde, weil sie in der ohnehin zugelassenen Vernachlässigung der nächstfolgenden  $y^5$  u. s. w. keine Konsequenz mehr hat.

Die Gleichung (34) stimmt innerhalb ihrer Ordnung mit Schreiber, Formel c S. 31, und vollständig mit der Formel c von Wittstein, S. XI, welche auch nur bis zu  $y^3$  einschliesslich geht.

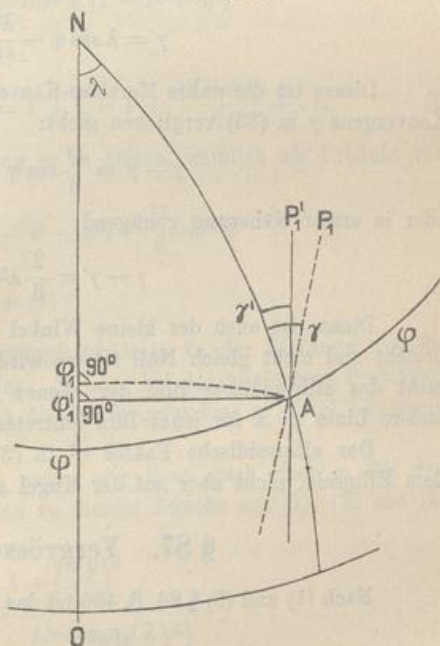
#### Wahre Meridian-Konvergenz.

Die Meridian-Konvergenz  $\gamma$ , wie sie im Anschluss an Fig. 3. S. 464 definiert wurde, ist von der besonderen Natur der vorliegenden Abbildungsart abhängig und entspricht nicht genau der Definition Meridian-Konvergenz  $\alpha' - \alpha$  von Fig. 3. in § 60. S. 345, wie auch schon auf S. 346 bemerkt wurde.

Um auch die Meridian-Konvergenz in dem früheren Sinne  $\alpha' - \alpha$  Fig. 3. S. 345 zu bestimmen, betrachten wir in Fig. 4. einen Punkt  $A$  mit der Breite  $\varphi$  und der Länge  $\lambda$  gegen den Anfangsmeridian  $NO$ , auf welchem in der Breite  $\varphi_1$  eine geodätische Linie  $\varphi_1 A$  rechtwinklig nach  $A$  abgeht, so dass man sagen kann, auf dem Ellipsoide sei von  $O$  bis  $\varphi_1$  die Abscisse und von  $\varphi_1$  bis  $A$  die Ordinate des Punktes  $A$ , und zwar Abscisse und Ordinate beide als geodätische Linien verstanden.

Ausser dem Punkte  $\varphi_1$  nehmen wir noch auf dem Meridian  $ON$  einen Punkt  $\varphi_1$ , von welchem ebenfalls rechtwinklig eine Linie nach  $A$  abgeht (in Fig. 4. punktiert gezeichnet); diese zweite Linie  $\varphi_1 A$  ist aber *nicht* eine geodätische Linie, sondern eine sehr flach gekrümmte andere Linie, von welcher sich nachher ergeben wird, dass sie das Ellipsoid-Bild zu der geraden Ordinaten-Linie  $y$  des konformen Koordinatensystems ist.

Fig. 4.  
Ellipsoid.





Wenn in  $A$  die zwei Tangentialrichtungen  $AP_1'$  und  $AP_1$  rechtwinklig auf  $A\varphi_1'$  und auf  $A\varphi_1$  gezogen werden, so ist  $NA P_1' = \gamma'$  die Meridian-Konvergenz zwischen  $\varphi_1'$  und  $A$  in dem gewöhnlichen Sinne von  $\alpha' = \alpha$  in Fig. 3. S. 345.

Um diese wahre Meridian-Konvergenz  $\gamma'$  zu bestimmen, nehmen wir von den Reihenentwicklungen des früheren § 74. Gleichung (27) S. 396 bis zur dritten Ordnung mit  $u = 0$  und  $v = \frac{y}{N_1}$  und  $t = \tan \varphi_1'$  für die Ausgangsbreite  $\varphi_1'$ :

$$\alpha' - \alpha = \gamma' = \frac{y}{N_1} \tan \varphi_1' - \frac{y^3}{6 N_1^3} \tan \varphi_1' (1 + 2 \tan^2 \varphi_1' + \eta_1^2) \quad (35)$$

Hiezu von (26) S. 395 mit denselben Substitutionen:

$$\lambda \cos \varphi_1' = \frac{y}{N_1} - \frac{y^3}{3 N_1^3} \tan^2 \varphi_1' \quad (36)$$

Also durch Division von (35) und (36):

$$\begin{aligned} \gamma' &= \lambda \sin \varphi_1' \left( 1 - \frac{y^2}{6 N_1^2} (1 + \eta^2) \right) \\ \gamma' &= \lambda \sin \varphi_1' - \frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi_1' \cos^2 \varphi_1' (1 + \eta^2) \end{aligned} \quad (37)$$

Zur Reduktion von der Fusspunktbreite  $\varphi_1'$  auf die Punktbreite  $\varphi$  können wir als hinreichend die frühere Formel (17) § 55. S. 305 nehmen:

$$\varphi_1' = \varphi + \frac{V^2 \lambda^2}{2} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\text{also} \quad \sin \varphi_1' = \sin \varphi + \frac{V^2 \lambda^2}{2} \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

Dieses wird mit (37) verbunden, wobei  $1 + \eta^2 V^2$  zu beachten ist, also:

$$\gamma' = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3 V^2}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (38)$$

Dieses ist die wahre Meridian-Konvergenz, welche mit der Gauss'schen Meridian-Konvergenz  $\gamma$  in (33) verglichen giebt:

$$\gamma - \gamma' = \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (2 \eta^2 + 2 \eta^4)$$

oder in erster Näherung genügend:

$$\gamma - \gamma' = \frac{2}{3} \lambda^3 \eta^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (39)$$

Dieses ist auch der kleine Winkel  $P_1' A P_1$  in Fig. 4., und da dieser Winkel besteht und nicht gleich Null ist, so wird erkannt, dass die geodätische Linie  $\varphi_1' A$  nicht das ellipsoidische Bild der ebenen Ordinate  $y$  sein kann, sondern dass eine andere Linie  $\varphi_1 A$  für jenes Bild eintreten muss.

Der ellipsoidische Faktor  $\eta^2$  in (37) zeigt, dass die Differenz  $\gamma - \gamma'$  nur auf dem Ellipsoid, nicht aber auf der Kugel existiert.

## § 87. Vergrößerungsverhältnis.

Nach (1) und (5) § 86. S. 460 ist das Vergrößerungsverhältnis  $m$  bestimmt durch:

$$m^2 = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(M d\varphi)^2 + (N \varphi \cos d\lambda)^2}$$



$$m^2 = \frac{d y^2}{d \lambda^2} \frac{1 + \left(\frac{d x}{d y}\right)^2}{N^2 \cos^2 \varphi \left(1 + \left(\frac{M d \varphi}{N \cos \varphi d \lambda}\right)^2\right)} \quad (1)$$

Nach Fig. 1. und 2. § 86. S. 459 hat man in den rechtwinkligen Dreiecken:

$$\frac{d x}{d y} = \cotg t \quad \text{und} \quad \frac{M d \varphi}{N \cos \varphi d \lambda} = \cotg \alpha$$

Wo  $t$  der Richtungswinkel im ebenen System und  $\alpha$  das Azimut auf dem Ellipsoid ist, damit wird (1):

$$m^2 = \frac{d y^2}{d \lambda^2} \frac{1 + \cotg^2 t}{N^2 \cos^2 \varphi (1 + \cotg^2 \alpha)}$$

$$m = \frac{d y}{d \lambda} \frac{1}{N \cos \varphi} \frac{\sin \alpha}{\sin t} \quad (2)$$

Wir betrachten nun besonders den Fall, dass  $\alpha = 90^\circ$  werde, d. h. dass der Ellipsoidbogen  $d S$  auf einem Parallelkreis liege, was zur Folge hat, dass  $\varphi$  konstant ist und ferner, dass  $t = 90^\circ - \gamma$  wird, wenn  $\gamma$  die Meridian-Konvergenz ist, welche in Fig. 3. S. 464 konform abgebildet wird. Damit erhält man aus (2):

$$m = \frac{d y}{d \lambda} \frac{\sec \gamma}{N \cos \varphi} \quad (3)$$

Hiezu hat man aus (32) § 86. S. 464:

$$\frac{d y}{d \lambda} = N \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2)$$

$$\text{also} \quad \frac{d y}{d \lambda} \frac{1}{N \cos \varphi} = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \quad (4)$$

Ferner hat man aus (33) § 86. S. 464:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \lambda^3 \dots \quad \sec \gamma = 1 + \frac{\gamma^2}{2} = 1 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \varphi}{2} + \dots \quad (5)$$

Dieses genügt, um in erster Näherung  $m$  zu bilden, nämlich als Produkt von (4) und (5):

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi$$

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) \quad (6)$$

Das ist zunächst nur das Vergrößerungsverhältnis in der Richtung des Parallelkreises, also rechtwinklig zum Meridian; da aber bei der konformen Projektion  $m$  nach allen Seiten gleich ist, können wir das in (6) gefundene  $m$  sofort allgemein gelten lassen.

Um übrigens eine Probe zu haben, wollen wir doch auch noch  $m$  für den Meridian bestimmen, und schreiben zu diesem Zwecke aus (1), (4) und (5) § 86. S. 460:

$$m^2 = \frac{d x^2}{d \varphi^2} \frac{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2}{M^2 \left(1 + \left(\frac{N \cos \varphi d \lambda}{M d \varphi}\right)^2\right)}$$



Gehen wir auf den Meridian über, so wird hier nach Fig. 3. § 86. S. 464

$$\frac{dy}{dx} = -\tan \gamma \quad \text{und ferner} \quad d\lambda = 0,$$

$$\text{also} \quad m = \left( \frac{dx}{d\varphi} \right) \frac{\sec \varphi}{M}$$

Um  $\left( \frac{dx}{d\varphi} \right)$  zu bilden, hat man von (18) § 86. S. 462:

$$x = B + \frac{\lambda^2}{2} N \sin \varphi \cos \varphi + \lambda^4 \dots$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = M + \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{dN}{d\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + N \cos^2 \varphi - N \sin^2 \varphi \right)$$

Dabei ist nach § 34. Gleichung (e) S. 208:

$$N = \frac{c}{V}, \quad \frac{dN}{d\varphi} = \frac{c}{V^3} \eta^2 t$$

$$\begin{aligned} \text{also} \quad \frac{dx}{d\varphi} &= M + \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{c}{V^3} \eta^2 \sin^2 \varphi + \frac{c}{V} \cos^2 \varphi - \frac{c}{V} \sin^2 \varphi \right) \\ &= M + \frac{c}{V^3} \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2), \quad \text{dabei ist } M = \frac{c}{V^3}, \text{ also:} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} \frac{1}{M} = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2)$$

Das ist dasselbe wie bei (4), also muss auch die Weiterrechnung für  $m$  in der Meridianrichtung denselben Wert geben wie früher bei (4)–(6) in der Parallelkreisrichtung. Es ist also die Formel (6) allgemein gültig, in der Meridianrichtung, rechtwinklig dazu, und in allen Richtungen.

Um die Formel für  $m$ , welche in (6) nur bis  $\lambda^2$  geht, auch noch bis  $\lambda^4$  zu entwickeln, müssen wir auf (17) § 86. S. 461 zurückgehen und von dort entnehmen:

$$\frac{dy}{d\lambda} \frac{1}{N \cos \varphi} = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^4}{24} \cos^4 \varphi (5 - 18 t^2 + t^4) \quad (7)$$

und von (33) § 86. S. 464:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3 \eta^2 + 2 \eta^4)$$

$$\sec \gamma = 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{5}{24} \gamma^4 = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi + \frac{\lambda^4}{24} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (8 + 5 t^2) \quad (8)$$

Wenn man diese (8) und (7) nach Anleitung von (3) multipliziert, so erhält man:

$$m = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) + \frac{\lambda^4}{24} \cos^4 \varphi (5 - 4 t^2) \quad (9)$$

Das ist die Weiterentwicklung von (6) bis auf  $\lambda^4$  einschliesslich, aber mit Weglassung aller Glieder  $\eta^2$  u. s. w. in den Coefficienten von  $\lambda^4$ . Innerhalb dieser Vernachlässigung stimmt unsere Formel (9) auch mit der entsprechenden Gleichung von Schreiber S. 36. (wie immer nach goniometrischer Umformung).

Es ist auch leicht, innerhalb der angenommenen Genauigkeit die Formel (9) auf  $y$  zu reduzieren, denn es ist nach (20) § 86. S. 462:

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi} - \frac{y^3}{6 N^3 \cos \varphi} (1 - t^2 + \dots)$$

$$\lambda^2 = \frac{y^2}{N^2 \cos^2 \varphi} - \frac{y^4}{3 N^4 \cos^2 \varphi} (1 - t^2 + \dots)$$



Damit wird (9):

$$m = 1 + \frac{y^2}{2N^2}(1 + r^2) + \frac{y^4}{24N^4}(1 + r^2 \dots)$$

Es ist aber  $N = \frac{c}{V}$  und  $r = \frac{c}{V^2}$  also  $\frac{1}{N^2} = \frac{V^2}{r^2} = \frac{1 + r^2}{r^2}$ ,

$$\text{also } m = 1 + \frac{y^2}{2r^2} + \frac{y^4}{24r^4} \quad (10)$$

Der Nenner  $r^4$  im zweiten Gliede gilt nur näherungsweise, doch kann man ihn wohl annehmen, da wir ja ohnehin alle  $1 + r^2 \dots$  im zweiten Gliede vernachlässigt haben. Darum ist auch inbegriffen, dass bei dem Übergang von  $\lambda$  auf  $y$  in  $N$  nicht mehr unterschieden wurde, ob es zu  $\varphi$  oder zu  $\varphi_1$  gehören soll, d. h. es ist die Reduktion (25) § 86. S. 463 nicht mehr angebracht worden; und innerhalb der ersten Näherung haben wir nun in (10) wieder dieselbe Formel wie früher in der sphärischen Entwicklung von § 50. Gleichung (10) S. 281.

#### Entfernungs-Reduktion.

Wenn die wahre Länge einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid =  $S$  und deren ebenes Abbild =  $s$  ist und  $m$  das Vergrößerungsverhältnis in differentialem Sinne, so ist:

$$S = \int \frac{1}{m} ds \quad (11)$$

und hiezu ist der Wert von  $m$  aus der Formel (10) einzusetzen; wir wollen aber dabei das Glied mit  $r^4$  nicht mitnehmen, weil eine hierauf sich erstreckende Integration schon früher in § 85. gemacht worden ist. Es wird also zunächst nur genommen:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2r^2} \quad (12)$$

und insoweit könnte es scheinen, als ob die einfache Entwicklung von § 50. wieder ihre Stelle fände, allein jene Entwicklung war nur sphärisch mit konstantem  $r$ , während wir nun den mittleren Krümmungs-Halbmesser  $r$  nach den Ellipsoidgesetzen veränderlich annehmen müssen.

Es kommt dabei wieder die Änderung von  $V$  in Frage, nämlich nach (25) § 86. S. 463:

$$\frac{N_1}{N} = \frac{V}{V_1} = 1 - \frac{(\varphi - \varphi_1)}{V^2} \eta^2 t \quad \text{oder} \quad \frac{V^4}{V_1^4} = 1 - \frac{4(\varphi - \varphi_1)}{V^2} \eta^2 t$$

und da  $\frac{1}{r^2} = \frac{V^4}{c^2}$ , hat man auch:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} \left( 1 - \frac{4(\varphi - \varphi_1)}{V^2} \eta^2 t \right)$$

Es ist aber in erster Näherung:

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{x - x_1}{M}$$

also, ebenfalls in erster Näherung:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} \left( 1 - \frac{4(x - x_1)}{r} \eta^2 t \right) \quad (13)$$



Dabei ist im zweiten Glied einfach  $V^2 M = N = r$  gesetzt, wofür auch  $r_1$  geschrieben werden kann.

Aus (12) und (13) hat man also:

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{y^2}{2r_1^2} \left( 1 - \frac{4(x-x_1)}{r} \eta^2 t \right) \quad (14)$$

Dieses  $m$  gehöre zu einem Punkte mit den Coordinaten  $x, y$ , an irgend welcher Stelle des Bogens  $ACB$  von Fig. 2. § 85. S. 453, welcher als Abbild einer geodätischen Linie  $S$  auftritt. Wenn man nur bis zur 3ten Ordnung einschliesslich rechnet, so kann man sowohl die Gerade  $AB$  als auch den Bogen  $A'B$  als Abbildlänge  $s$  der geodätischen Linie  $S$  annehmen, denn die Unterscheidung zwischen Bogen  $ACB$  und Sehne  $AB$  kam erst bei der 4ten Ordnung in Betracht, wie wir in § 85. bei (23) S. 455 gesehen haben.

Die Kurve  $AB$  in Fig. 2. § 85. S. 455 sei bestimmt durch eine Gleichung zwischen  $l$  und  $z$ , indem ein schiefes Coordinatensystem gelegt wird mit  $AB$  als Axe der  $l$  und einer Axe der  $z$ , welche gegen  $AB$  um  $+90^\circ$  gedreht ist. Indessen brauchen wir innerhalb der angegebenen 3ten Ordnung die  $z$  selbst gar nicht zu berücksichtigen, es genügt zunächst zu setzen (als Abkürzung von (12) § 85. S. 453):

$$x = x_1 + l \cos t_1 \quad y = y_1 + l \sin t_1 \quad (15)$$

also wird (14):

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{(y_1 + l \sin t_1)^2}{2r_1^2} \left( 1 - \frac{4l \cos t_1}{r} \eta^2 t \right) \quad (16)$$

Es ist zu bemerken, dass das letzte  $t$  hier wie immer die Bedeutung  $t = \tan \varphi$  hat, während  $t_1$  der Richtungswinkel von  $AB$  im System  $xy$  ist.

Die Gleichung (16) wird nach Potenzen von  $l$  geordnet, und soll dabei geben:

$$\frac{1}{m} = \alpha + \beta l + \gamma l^2 + \delta l^3 \quad (17)$$

Dann haben die Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  folgende Bedeutungen:

$$\alpha = 1 - \frac{y_1^2}{2r_1^2} \quad (18)$$

$$\beta = -\frac{y_1 \sin t_1}{r_1^2} + \frac{2y_1^2 \cos t_1}{r^3} \eta^2 t \quad (19)$$

$$\gamma = -\frac{\sin^2 t_1}{2r_1^2} + \frac{4y_1 \sin t_1 \cos t_1}{r^3} \eta^2 t \quad (20)$$

$$\delta = +\frac{2 \sin^2 t_1 \cos t_1}{r^3} \eta^2 t \quad (21)$$

Wenn man die Funktion (17) entsprechend (11) integriert und zwar zwischen den Grenzen  $l=0$  und  $l=s$ , so bekommt man:

$$\frac{S}{s} = \alpha + \frac{\beta s}{2} + \gamma \frac{s^2}{3} + \delta \frac{s^3}{4} \quad (22)$$

Andererseits führen wir drei Werte von  $\frac{1}{m}$  ein, für den Anfang, für die Mitte und für den Endpunkt der Linie  $AB$ , nämlich:

$$l=0 \text{ soll geben } \frac{1}{m_1} = \alpha$$

$$l=\frac{s}{2} \text{ " " } \frac{1}{m_0} = \alpha + \frac{\beta s}{2} + \gamma \frac{s^2}{4} + \delta \frac{s^3}{8}$$

$$l=s \text{ " " } \frac{1}{m_2} = \alpha + \beta s + \gamma s^2 + \delta s^3$$



Dieses mit (22) verglichen wird geben:

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (23)$$

Wenn man also die drei verschiedenen  $\frac{1}{m}$  nach der Funktion (12) ausrechnet, und zwar nicht bloss für die drei verschiedenen  $y$ , sondern auch mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von  $r$ , entsprechend den geographischen Breiten  $\varphi_1, \varphi_0, \varphi_2$  oder den Abscissen  $x_0, x_1, x_2$ , so bekommt man nach (23) die richtige Entfernungs-Reduktion, ohne dass man dabei die Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  gebraucht hätte; es hat genügt einzusehen, dass sich  $\frac{1}{m}$  durch eine Funktion 3ten Grades von der Form (17) ausdrücken lässt.

Trotzdem wollen wir doch auch noch den Ausdruck (22) mit Einsetzung der Coefficientenwerte  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  nach (18)–(21) bilden, und zwar mit Umsetzung  $s \sin t_1 = y_2 - y_1$  und  $s \cos t_1 = x_2 - x_1$ , wodurch man erhält:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{6 r_1^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) + \frac{\eta^2 t}{6 r^3} (x_2 - x_1) (y_1^2 + 2 y_1 y_2 + 3 y_2^2) \quad (24)$$

Hier kann man noch  $r_1$  auf den Mittelwert  $r_0$  reduzieren, nach (13):

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r_0^2} \left( 1 + \frac{4(x - x_1)}{r} \eta^2 t \right)$$

Dieses mit (24) verbunden giebt:

$$\frac{S}{s} = 1 - \frac{1}{6 r_0^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) - \frac{\eta^2 t}{6 r^2} (x_2 - x_1) (y_2^2 - y_1^2) \quad (25)$$

Hier gilt  $r_0$  als mittlerer Krümmungs-Halbmesser für die mittlere Breite  $\varphi_0$  oder für die mittlere Abscisse  $x_0$  der betrachteten Linie  $AB$ .

Die Gleichung (25) in logarithmischer Form geschrieben wird:

$$\log S - \log s = -\frac{\mu}{6 r_0^2} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) - \frac{\mu \eta^2 t}{6 r^3} (x_2 - x_1) (y_2^2 - y_1^2) \quad (26)$$

Dieses stimmt mit Schreiber S. 49, wenn man wie immer die gegenseitigen Zeichenumformungen macht. In erster Näherung stimmt dieses auch mit dem früheren (12)–(14) § 50, S. 282.

## § 88. Richtungs-Reduktion.

Um das Krümmungs-Differential zu bestimmen, betrachten wir in Fig. 1. und Fig. 2. S. 472 zwei benachbarte Punkte, welche auf dem Ellipsoid durch einen kleinen Bogen  $dS$  und in der Ebene durch  $ds$  verbunden sind, und untersuchen die verschiedenen dabei in Betracht kommenden Richtungen und Winkel, unter Zuziehung dessen, was schon in § 86. bei Fig. 4. S. 465 über die beiden Meridian-Konvergenzen  $\gamma'$  auf dem Ellipsoid und  $\gamma$  in der Ebene gesagt worden ist.

Dann wird man aus Fig. 1. alsbald die folgenden Gleichungen herauslesen können:

$$T_1 = \alpha_1 - \gamma_1 \quad T_2 = \alpha_2 - \gamma_2$$

$$T_1 - T_2 = (\gamma_2 - \gamma_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$T_1 - T_2 = (\gamma_2' - \gamma_1') + (\gamma_2 - \gamma_2') - (\gamma_1 - \gamma_1') - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

oder als Differential:

$$dT = d\gamma' + d(\gamma - \gamma') - d\alpha \quad (1)$$



Auf dem Ellipsoid ist nach (38) § 86. S. 464:

$$\gamma' = \lambda \sin \varphi + \lambda^3 \dots$$

$$\text{also } d\gamma' = d\lambda \sin \varphi + \lambda \cos \varphi d\varphi$$

(2)

Fig. 1. Ellipsoid.

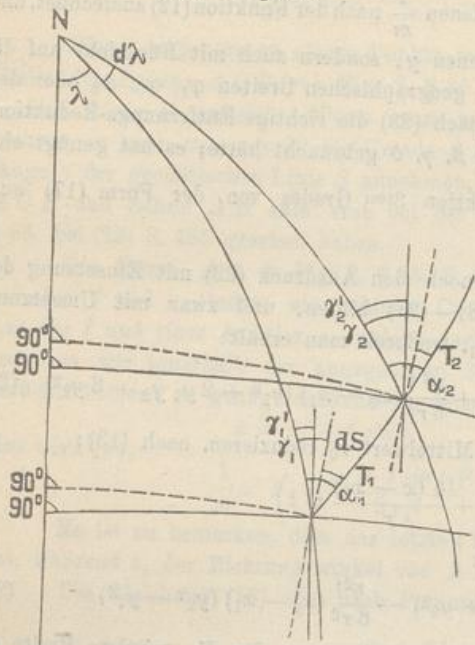
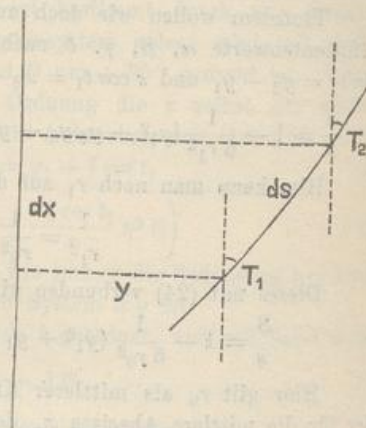


Fig. 2. Ebene.



Dagegen das Differential der Meridian-Konvergenz zwischen den beiden Punkten selbst wie immer nach § 69. Gleichung (5) S. 378:

$$d\alpha = d\lambda \sin \varphi \quad (3)$$

Also nun aus (1), (2), (3) zusammen:

$$dT = \lambda \cos \varphi d\varphi + d(\gamma - \gamma') \quad (4)$$

Von früher (39) § 86. S. 466 hat man:

$$\gamma - \gamma' = \frac{2}{3} \lambda^3 \eta^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

Auch dieses differenziert giebt:

$$d(\gamma - \gamma') = 2 \eta^2 \lambda^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi d\lambda$$

Also im ganzen mit (4) zusammen:

$$dT = \lambda \cos \varphi d\varphi + 2 \eta^2 \lambda^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi d\lambda \quad (5)$$

Hiebei ist nach den Grundformeln von (3) und (4) § 69. S. 378:

$$d\varphi = \frac{dx}{M}$$

$$\text{und } \lambda \cos \varphi = \frac{y}{N} \quad \text{also } d\lambda \cos \varphi = \frac{dy}{N}$$

$$\text{Also wird (5): } dT = \frac{y dx}{MN} + 2 \eta^2 \lambda \frac{y^2}{N^3} dy$$



Hier ist genau  $MN = r^2$  und im zweiten Gliede kann man genähert  $N^3 = r^3$  setzen also:

$$dT = \frac{y dx}{r^2} + 2\eta^2 t \frac{y^2}{r^3} dy \quad (6)$$

Damit wird wieder ebenso verfahren wie bei (23) § 50. S. 283 oder wie bei (9) § 85. S. 453, nämlich mit den Bezeichnungen  $l$  und  $z$  nach Fig. 2. § 85. S. 453.

$$-\frac{d^2 z}{dl^2} = \frac{dT}{dl} = \frac{y}{r^2} \frac{dx}{dl} + 2\eta^2 t \frac{y^2}{r^3} \frac{dy}{dl} \quad (7)$$

Es soll wieder  $r^2$  als veränderlich angenommen werden nach dem früheren (13) § 87. S. 469:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} \left( 1 - \frac{4(x-x_1)}{r} \eta^2 t \right) \quad (8)$$

also wird (7):

$$-\frac{d^2 z}{dl^2} = \frac{y}{r_1^2} \left( 1 - \frac{4(x-x_1)}{r} \eta^2 t \right) \frac{dx}{dl} + 2\eta^2 t \frac{y^2}{r^3} \frac{dy}{dl} \quad (9)$$

Die Coordinatenumwandlung wieder ebenso wie (15) § 87. S. 470 giebt:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + l \cos t_1 & \text{und} & & y &= y_1 + l \sin t_1 \\ \frac{dx}{dl} &= \cos t_1 & & & \frac{dy}{dl} &= \sin t_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Diese (10) in (9) eingesetzt, werden wieder eine algebraische Funktion geben von dieser Form:

$$-\frac{d^2 z}{dl^2} = A + Bl + Cl^2 \quad (11)$$

wobei die Coefficienten folgende Bedeutungen haben:

$$A = \frac{1}{r_1^2} y_1 \cos t_1 + \frac{2}{r^3} \eta^2 t y_1^2 \sin t_1 \quad (12)$$

$$B = \frac{1}{r_1^2} \sin t_1 \cos t_1 + \frac{4}{r^3} \eta^2 t y_1 (\sin^2 t_1 - \cos^2 t_1) \quad (13)$$

$$C = + \frac{2}{r^3} \eta^2 t \sin t_1 (\sin^2 t_1 - 2 \cos^2 t_1) \quad (14)$$

Die übrige Rechnung nimmt wieder den früheren Gang bei (29) § 50. S. 284 und (19) § 85. S. 454, nämlich:

$$\delta_1 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{6} + \frac{Cs^3}{12} \quad (15)$$

$$\delta_2 = \frac{As}{2} + \frac{Bs^2}{3} + \frac{Cs^3}{4} \quad (16)$$

Die Einsetzung von  $A, B, C$  aus (12)–(14) in (15) und (16) wird geben:

$$\delta_1 = \frac{x_2 - x_1}{6r_1^2} (2y_1 + y_2) - \frac{\eta^2 t}{3r^3} (x_2 - x_1)^2 (y_1 + y_2) + \frac{\eta^2 t}{6r^3} (y_2 - y_1) (3y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_1^2) \quad (17)$$

$$\delta_2 = \frac{x_2 - x_1}{6r_1^2} (y_1 + 2y_2) - \frac{\eta^2 t}{3r^3} (x_2 - x_1)^2 (y_1 + 3y_2) + \frac{\eta^2 t}{6r^3} (y_2 - y_1) (y_1^2 + 2y_1 y_2 + 3y_2^2) \quad (18)$$

Die Überführung von  $r_1^2$  in einen Mittelwert wird diesmal so gemacht:

$$x_{12} = \frac{2x_1 + x_2}{3} \quad \text{und} \quad x_{21} = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$$

also 
$$x_{12} - x_1 = \frac{1}{3} (x_2 - x_1) \quad \text{und} \quad x_{21} - x_2 = \frac{1}{3} (x_1 - x_2)$$



Deshalb nach (13) § 87. S. 469:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1^2} &= \frac{1}{r_{12}^2} \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{(x_2 - x_1)}{r} \eta_1^2 t \right) \\ \frac{1}{r_2^2} &= \frac{1}{r_{21}^2} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{x_2 - x_1}{r} \eta_2 t \right)\end{aligned}\quad (19)$$

Damit gehen (17) und (18) über in:

$$\delta_1 = \frac{x_2 - x_1}{6r_{12}^2} (2y_1 + y_2) - \frac{\eta_1^2 t}{9r^3} (x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1) + \frac{\eta_2^2 t}{6r^3} (y_2 - y_1) (3y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2) \quad (20)$$

$$\delta_2 = \frac{x_2 - x_1}{6r_{21}^2} (y_1 + 2y_2) + \frac{\eta_2^2 t}{9r^3} (x_2 - x_1)^2 (y_1 - y_2) + \frac{\eta_1^2 t}{6r^3} (y_2 - y_1) (y_1^2 + 2y_1 y_2 + 3y_2^2) \quad (21)$$

Diese Formeln stimmen mit Schreiber, S. 46, wenn man die Bezeichnungsumänderungen berücksichtigt; und in erster Näherung haben wir auch Übereinstimmung mit den früheren (31)–(32) § 50. S. 284.

#### *Schlussbetrachtung.*

Alle Formeln, welche in den vorstehenden §§ 86.–88. gefunden worden sind, gehen in die entsprechenden früheren Formeln von § 58. und § 50. über, wenn man die höheren Glieder weglässt, wie wir an den betreffenden Stellen bereits angegeben haben. Insbesondere sind die Formeln von § 87. und 88. bei Weglassung aller  $\eta^2$  lediglich die sphärischen Formeln von § 50; und wenn man sich damit begnügen will, so kann man auch die viel einfacheren sphärischen Entwicklungen von § 50. an Stelle der umständlichen §§ 87. und 88. treten lassen.

Für kleine Geltungsbereiche, etwa von der Grösse der vierzig preussischen Katastersysteme, würden in der That die früheren Formeln von § 50. und § 58. mit demselben Rechte angewendet werden können, wie die ebenfalls nicht weiter getriebenen sogenannten Soldnerschen Formeln.

Ein Land mit praktischer Anwendung der Gauss'schen konformen Theorie giebt es zur Zeit in Deutschland nicht (nachdem das Hannoverische System aufgegeben worden ist vgl. S. 329) und deswegen wollen wir auch Zahlenanwendungen zu den §§ 86.–88. hier unterlassen.

### § 89. Vorteile der konformen Koordinaten.

Nachdem wir schon in § 52. eine Vergleichung der kongruenten (Soldnerschen) und der konformen Koordinaten angestellt haben, welche am Schlusse daselbst S. 297 in allem Wesentlichen zu Gunsten der konformen Koordinaten ausgefallen ist, ist es angezeigt, nochmals hierauf zurückzukommen.

Dabei sei auch ein Wort über die Bezeichnung „kongruente Koordinaten“ eingeschaltet. Wir wollen unter kongruenter geodätischer ebener Abbildung einer auf einer krummen Fläche gezogenen Linie diejenige ebene Abbildungslinie verstehen, welche ein Landmesser auf der krummen Fläche mit Theodolit und Messlatten messend, nach gewöhnlichen Feldmess- und Rechenregeln auf einer Zeichenebene herstellen würde (abgesehen von dem Verjüngungsmaassstabe der Zeichnung). Wir bedienen uns dabei wie bei der mathematischen Definition der geodätischen Linie (§ 68. S. 373) der Feldmessenoperationen als Veranschaulichung einer mathematischen Begriffsbestimmung, und wir finden hierauf leicht den Satz, dass die geodätisch kongruente ebene Abbildung einer geodätischen Linie immer eine Gerade der Ebene ist, deren lineare Grösse der rektifizierten geodätischen Linie gleich ist. Die „geodätische Krümmung“ ist in diesem Falle gleich Null (vgl. hiezu § 107).

Die Ordinaten  $\eta$  und  $\eta'$ , der ebenen Soldnerschen Projektion Fig. 1. § 46. S. 275 sind in diesem Sinne geodätisch kongruente Abbildungen der sphärischen Ordinaten  $\eta$  und  $\eta'$  von Fig. 1 § 46. S. 257,



wie auch die sphärischen Abscissen  $x$  und  $z$ , von Fig. 1. S. 257 geodätisch kongruent abgebildet werden (während für irgend eine andere Linie z. B.  $AB = s$  in Fig. 1. S. 257 die Abbildung durchaus nicht mehr geodätisch kongruent ist).

Aus diesen Gründen haben wir die sogenannte Soldnersche Koordinaten-Projektion, um eine kurze mathematische Benennung zu haben, „kongruente“ Projektion genannt im Gegensatz zu der Gauss'schen „konformen Projektion“.

Zuerst nochmals auf das allgemeine Prinzip der Konformität zurückkommend, nach welchem zwei *kleine* Dreiecke im Urbild und im Abbild einander ähnlich sind (vgl. § 50. S. 279) wollen wir unterscheiden, ob die Änderung des Massstabsverhältnisses  $m$  von Punkt zu Punkt so beträchtlich ist, dass auf ein und demselben Kartenblatt die Veränderlichkeit bemerklich wird. Nehmen wir z. B. das bekannte stereographische Halbkugelbild der Erde, so hat dasselbe am Rande doppelt so grossen Massstab als in der Mitte; und deswegen ist der Vorteil der Konformität in diesem Falle nicht unbedingt Ausschlag gebend, denn wenn man doch einmal auf einem Blatte verschiedene Massstäbe an verschiedenen Punkten haben muss, ist die Verschiedenheit des Massstabes in einem Punkte nach verschiedenen Richtungen auch nicht mehr so sehr schlimm.

Andererseits betrachten wir den Fall, dass eine grosse Karte einheitlicher konformer Projektion in so viele einzelne Blätter zerschnitten wird, dass innerhalb des einzelnen Blattes der Massstab als konstant gelten kann; und dann tritt die Konformität in ihr schönstes Licht.

Diesen Fall haben wir aber bei unseren Katasterkarten; setzen wir z. B. als sehr gross  $y_1 = 99000^m$  und  $y_2 = 100\,000^m$ , so wird entsprechend (vgl. § 49. S. 276):

$$m_1 = 1 + \frac{y_1^2}{2r^2} = 1,000\,1203 \quad m_2 = 1 + \frac{y_2^2}{2r^2} = 1,000\,1228$$

$$m_1 - 1 = 0,1203^{mm} \text{ für } 1^m \quad m_2 - 1 = 0,1228^{mm} \text{ für } 1^m$$

Diese zwei Werte sind so nahe einander gleich, dass man ihren Mittelwert,  $0,1215^{mm}$  für  $1^m$ , als konstant für das ganze Blatt annehmen kann, dass man also mit einem Massstabe für das ganze Blatt ausreicht; dieses gilt für konforme Koordinaten.

Dagegen bei Soldnerschen Koordinaten, bei welchen die Formel (4) S. 275 oder (4) S. 292 gilt, kommt man mit einem Massstabe für jedes Kartenblatt nicht aus, sondern man würde in die unangenehme Lage versetzt, eine ganze *Windrose* von Massstäben auf die Karte zu zeichnen, bei denen für jeden einzelnen das Vergrösserungsverhältnis nach  $\cos^2 \alpha$  berücksichtigt werden muss.

Durch einen kleinen Kunstgriff kann man die Maximalverzerrung leicht auf die Hälfte ihres Wertes herunterbringen, indem man einen Mittelwert als konstante Verzerrung einführt, etwo so, dass  $y = b$  dem Maximalwert  $m_1$  und  $y = c$  dem Mittelwert  $m_0$  entspricht, also:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2r^2}, \quad m_0 = 1 + \frac{c^2}{2r^2}, \quad m_1 = 1 + \frac{b^2}{2r^2}, \quad \frac{m}{m_0} = 1 + \frac{y^2 - c^2}{2r^2}$$

Nimmt man  $c^2 = \frac{b^2}{2}$ , so wird für  $y = 0$  und  $y = b$ :

$$\text{Min } \frac{m}{m_0} = 1 - \frac{c^2}{r^2} = 1 - \frac{b^2}{4r^2} \quad \text{und} \quad \text{Max } \frac{m}{m_0} = 1 + \frac{c^2}{2r^2} = 1 + \frac{b^2}{4r^2}$$

Man kann auch  $c^2$  anders annehmen, z. B. so dass die Quadratsumme aller  $\left(\frac{m}{m_0} - 1\right)^2$ , als Integral aufgefasst, ein Minimum wird, was eintritt mit  $c^2 : b^2 = 1 : 3$ .

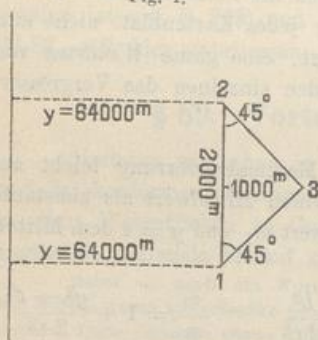


Solche und ähnliche Betrachtungen, für konforme und für Soldnersche Koordinaten haben wir angestellt in „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 249—252, worauf hier verwiesen werden mag.

Die Flächenverzerrungen, von welchen auch schon in § 52. S. 293 gesprochen wurde, sind in der Soldnerschen Projektion im allgemeinen halb so gross als bei der konformen Projektion, und dieser einzige Vorteil ist von Anhängern der Soldnerschen Projektion lebhaft hervorgehoben worden, jedoch ist dazu folgende Überlegung zu machen:

Wenn z. B. bei der preussischen Ordinatengrenze  $y = 64\,000^m$  die Flächenverzerrung 1:20000 in Soldnerscher Projektion beträgt, und 1:10000 in konformer Gausscher Projektion, so ist das in beiden Fällen unschädlich neben den Messungsfehlern; z. B. auf  $1^m$  macht jenes 1:10000 nur  $1^m$ , während nach preussischer Anweisung die zulässige Abweichung zweier Bestimmungen hierfür  $80^m$  oder der mittlere Fehler einer Bestimmung etwa  $\frac{80}{3\sqrt{2}} = \text{rund } 20^m$  beträgt, d. h. das 20 fache des Verzerrungsfehlers. Nimmt man grössere Flächen, etwa  $1^{\text{km}}$ , so kann allerdings scheinbar der von der Projektionsverzerrung herrührende Flächenfehler an den Messungsfehler heranreichen, aber dann ist es zunächst ziemlich gleichgültig, ob dieses im Verhältnis etwa 1:8 oder 1:4 stattfindet; zweitens aber werden grosse Flächen nicht selbständig gemessen, sondern sie werden auf irgend welchen, z. B. polygonometrischen, Wegen aus den Netzkoordinaten abgeleitet und nehmen von dort die Netzverzerrungsfehler als unschädlich mit in sich auf, gerade wie auch die Höhenreduktionen vgl. S. 295), welche gewöhnlich auch nicht besonders berücksichtigt werden. Es ist hier viel richtiger, dass alle Netzproben genügend in sich selbst stimmen, als dass die Netzverzerrung als ganzes mit in Rechnung gebracht wird, was übrigens auch ungehindert geschehen könnte, sowohl in der Soldnerschen als in der konformen Projektion.

Fig. 1.



Übergehend zur Triangulierung betrachten wir mit Fig. 1 ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck, dessen Hypotenuse parallel der  $x$ -Axe des Koordinatensystems liegt mit  $y_1 = y_2 = +64\,000^m$ , und mit der Seite  $1.2 = 2000^m$ . Der dritte Punkt 3. hat dann  $y_3 = +65\,000^m$ .

Dieses sind Naturmasse auf der Kugel ohne Rücksicht auf ebene Kartenprojektion, und es folgen daraus die drei Dreieckswinkel, da das Dreieck hinreichend als eben berechnet werden kann, so:

Winkel 1.	Winkel 2.	Winkel 3.
$45^\circ 0' 0,00''$	$45^\circ 0' 0,00''$	$90^\circ 0' 0,00''$

(1)

Wenn man eine Mittelbreite  $\varphi = 50^\circ$  annimmt, so hat man nach § 50. S. 286:

$$\log \frac{1}{2r^2} = 6.089\,183, \quad \log \frac{1}{6r^2} = 5.612\,062 \quad \text{und} \quad \log \frac{\varrho}{6r^2} = 0.926\,487$$

und damit werden die Koordinaten in Soldnerscher und in konformer Projektion berechnet nach (7) § 49. S. 276 und nach (9) § 50. S. 281, wie folgt:



## I. Projektion Soldner, kongruent:

Punkt 1.	$y_1 = + 64000^m$	$x_1 = + 0,0000^m$	$\tan(1,3) = \frac{1000,0000}{1000,0503}$ $(1,3) = 44^\circ 59' 54,813''$ $1.3 = 1414,2491^m$
" 2.	$y_2 = + 64000$	$x_2 = + 2000,1006$	
" 3.	$y_3 = + 65000$	$x_3 = + 1000,0503$	
$y_3 - y_1 = + 10000$			
$x_3 - x_1 = + 2000,1006$			
$y_2 - y_1 = + 0$			
$x_2 - x_1 = + 1000,0503$			

Die Winkel des ebenen geradlinigen Dreiecks in der Soldner'schen Projektion ergeben sich hieraus:

Winkel 1.	Winkel 2.	Winkel 3.	
$44^\circ 59' 54,813''$	$44^\circ 59' 54,813''$	$90^\circ 0' 10,374''$	(2)
Winkelsumme = $180^\circ 0' 0,000''$			

## II. Projektion Gauss, konform.

Punkt 1.	$Y_1 = + 64001,0730$	$x_1 = + 0,0000$	$\tan(1,3) = \frac{1000,0511}{1000,0503}$ Richtungswinkel $(1,3) = 45^\circ 0' 0,082''$ Entfernung $1.3 = 1414,2853^m$
" 2.	$Y_2 = + 64001,0730$	$x_2 = + 2000,1006$	
" 3.	$Y_3 = + 65001,1241$	$x_3 = + 1000,0503$	
$Y_3 - Y_1 = + 1000,0511$		$x_3 - x_1 = + 1000,0503$	
$Y_2 - Y_1 = + 0,0000$		$x_2 - x_1 = + 2000,1006$	

Es sind also die Winkel des ebenen geradlinigen Dreiecks in der Gauss'schen konformen Projektion:

Winkel 1.	Winkel 2.	Winkel 3.	
$45^\circ 0' 0,082''$	$45^\circ 0' 0,082''$	$89^\circ 59' 59,836''$	(3)
Winkelsumme = $180^\circ 0' 0,000''$			

Die Richtungsreduktionen nach den Formeln (6) und (7) § 52. S. 294 werden für die Richtung (1,2):

$$\text{Soldner } T_{12} - t_{12} = + 0,163'' + 5,268'' = + 5,431''$$

$$\text{Gauss } T_{12} - t_{12} = + 0,163''$$

Dabei bezieht sich  $0,163''$  auf die der Dreiecksseite durch die Projektion erteilte Krümmung, welche in beiden Projektionen gemeinsam ist und der zweite Teil  $5,268''$  ist von der eigentümlich schädlichen Soldner'schen einseitigen Verzerrung herrührend. Wir wollen diese Reduktionen  $T - t$  hier nicht weiter verfolgen. (Bei Soldner'scher Projektion wären dabei die früher in Fig. 4. § 50. S. 278 behandelten Verhältnisse zu berücksichtigen).

Es ist uns hier vielmehr um die Betrachtung der ebenen geradlinigen Dreiecke in beiden Projektionen zu thun, welche durch die Dreieckswinkel (2) und (3) im Vergleich mit (1) genügend charakterisiert sind. Während in der konformen Projektion die grösste Winkelverzerrung  $0,2''$  beträgt, steigt diese Verzerrung auf  $10,4''$  in der Soldner'schen Projektion, und damit ist der grosse Schaden der letzteren, d. h. der Soldner'schen Projektion für Kleintriangulierung und Polygonzugsmessung deutlich vor Augen gelegt.

Der Mecklenburgische Kammeringenieur Vogeler, welcher die Vorteile der konformen Projektion in seinem Lande besitzt, hat in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 260—261 die Vergleichung so zusammengefasst:

Bei der konformen Projektion in Mecklenburg kann die Triangulierung III.—IV.

Ordnung ohne alle Reduktionen  $\frac{1}{r^2}$  u. s. w. ausgeführt werden, und zwar bis zu  $100^{\text{km}}$



Entfernung von der Hauptaxe, es sind hierbei Winkelverzerrungen von grösseren Beträgen als etwa 1"—2" nicht zu befürchten.

Dagegen bei dem Soldnerschen System werden alle Winkel III.—IV. Ordnung bis herunter zu den Polygonzugswinkeln durch Verzerrungen von 5"—10" entsteht, wenn man die Systemgrenze von 60000<sup>m</sup> vom Meridian erreicht, oder um ein geringes überschreitet.

Die nachstehende Tabelle lässt alle Vorzüge der konformen Gauss'schen Projektion und die Nachteile, die die Soldnerschen Koordinaten mit sich bringen, klar erkennen. Dabei ist für die Mittelbreite 50° nach S. 286  $\log \frac{q}{6r^2} = 0.92649$ :

$T - t$  nach den Formeln (7) und (6) § 52. S. 294.

$\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$	$y_1 = 30\,000^m$		$y_1 = 40\,000^m$		$y_1 = 60\,000^m$		$y_1 = 80\,000^m$		$y_1 = 100\,000^m$	
	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner	Gauss	Soldner
50 <sup>m</sup>	0,0	1,1	0,0	2,0	0,0	4,6	0,0	8,1	0,0	12,7
100 <sup>m</sup>	0,0	1,2	0,0	2,0	0,0	4,6	0,0	8,1	0,0	12,7
500 <sup>m</sup>	0,0	1,2	0,1	2,1	0,1	4,7	0,1	8,2	0,1	12,9
1000 <sup>m</sup>	0,1	1,3	0,1	2,2	0,2	4,8	0,2	8,4	0,3	13,0
5000 <sup>m</sup>	0,4	1,7	0,5	2,8	0,8	5,7	1,0	9,6	1,3	14,0
10000 <sup>m</sup>	0,8	2,4	1,1	3,7	1,6	7,0	2,1	11,3	2,6	16,6
20000 <sup>m</sup>	1,9	3,9	2,4	5,6	3,4	9,6	4,4	14,7	5,4	20,8

Hier fällt zuerst in die Augen, dass bei abnehmender Entfernung die Richtungs-Reduktionen bei der konformen Gauss'schen Projektion verschwinden, bei der Soldnerschen Projektion aber *nicht*.

Ferner geht aus dieser Übersicht hervor, dass eine *ebene* Kleintriangulierung mit einer Genauigkeit von  $\pm 2'$  bis  $3''$ , welche den heutigen Instrumenten entspricht und durchaus wünschenswert ist, bei der Soldner'schen Projektion schon von  $y = 40000^m$  an zur inneren Unmöglichkeit wird. Die Soldner'schen Katastersysteme müssten auf 30 bis 40<sup>km</sup> Abstand von der Hauptaxe beschränkt werden, wenn sie den konformen Koordinaten mit einem Geltungsbereiche von 80 bis 100<sup>km</sup> Abstand vom Meridian das Gleichgewicht halten sollten.

In Bayern werden daher nach einer Mitteilung von Franke in „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 332 schon von  $y = 20^m$  an die sphärischen Korrektionsglieder der Soldner'schen Formeln berücksichtigt und zwar mit graphischen Hilfsmitteln, die wir schon in § 46. S. 263 kurz erwähnt haben, und so bleibt die Bayerische Kleintriangulierung immer noch innerhalb 1"—2" richtig, während z. B. im Preussischen Kataster mit  $y = 60^m$  ohne sphärische Korrekturen sich Winkelverzerrungen einstellen, welche die Messungsfehler guter Theodolite bereits merklich übersteigen, und zum mindesten als inkonsequent bezeichnet werden müssen.

Eine Triangulierungs-Betrachtung mag noch auf die Centrierungen bei excentrischen Triangulierungspunkten Bezug nehmen.



Wenn mit  $y = 64^{\text{km}}$  im Soldnerschen System *eben* trianguliert wird, so werden süd-nördliche Verschiebungen von  $5^{\text{cm}}$  auf  $1^{\text{km}}$  vernachlässigt, oder z. B.  $15^{\text{cm}}$  auf  $3^{\text{km}}$ .

Es ist das ähnlich wie wenn ein Trigonometrierer bei Turm-Centrierungen oder dergl. bei rund  $4^{\text{km}}$  Zielweite in nordwestlicher Richtung eine süd-nördliche Excentricität von  $15^{\text{cm}}$  vernachlässigen wollte, während er gleichzeitig sich abmühte, seine Winkel am Theodolit auf wenige Sekunden genau zu messen; — denselben Fehler begehen die Katastervermessungen, welche bei Soldnerschen Coordinaten bis  $y = 64^{\text{km}}$  eben triangulieren.

Eine letzte Betrachtung mag sich noch auf Polygonmessungen beziehen, welche bei Soldnerschen Coordinaten mit  $y = 64^{\text{km}}$  auch schon mehr Verzerrungen erleiden als bei genauen Messungen, z. B. bei einigermaßen feinen Stadtvermessungszügen zulässig ist. Die Polygonwinkel erleiden im Soldnerschen Systeme nach der Tabelle S. 478 Verzerrungen ganz unabhängig von der Streckenlänge bzw. Zielweite, welche bei Zügen zu rund  $50^{\text{m}}$ — $150^{\text{m}}$  angenommen werden mag. Nimmt man  $y_2 - y_1 = x_2 - x_1 = 100^{\text{m}}$  oder  $= 50^{\text{m}}$ , so entsteht bei  $y = 60^{\text{km}}$  eine maximale Richtungsreduktion von  $4,6''$  also eine maximale Winkelverzerrung von  $9,2''$ . Im ganzen kann man bei  $y = 64^{\text{km}}$  eine Winkelverzerrung von  $5''$ — $10''$  annehmen, was bei feinen Stadtvermessungszügen bereits erheblich an die Messungsfehler heranreicht oder sie überschreitet.

Oder betrachte man die linearen Verschiebungen von rund  $1:20000$  oder  $5^{\text{mm}}$  auf  $100^{\text{m}}$ , so sind diese auch schon zu hoch bei feinen Stadtvermessungen.

Statt die Entfernungen  $s$  und die Richtungswinkel  $\alpha$  einzeln nach den Formeln (3) S. 292 und S. 294 unten, zu reduzieren, könnte man zwar auch nur die  $s \cos \alpha$  nach (4) S. 292 reduzieren, allein das würde wieder andere Übelstände mit sich bringen.

Mag man nun solche Fehler als unerheblich oder als bereits schädlich betrachten, jedenfalls muss man vor Augen führen, dass alle diese kleinen Widerwärtigkeiten mit einem Schlage verschwinden, wenn man statt der Soldnerschen Projektion die konforme Gauss'sche Projektion anwendet.

Vgl. hierzu auch mehrere Artikel in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1896, S. 193—215, S. 249—252, S. 257—263, S. 321—339.

## § 90. Preussische Polyeder-Projektion.

Ausser den verschiedenen in diesem Kapitel behandelten mathematischen Projektionen zur ebenen Darstellung rechtwinkliger oder geographischer Coordinaten wollen wir zum Schlusse noch eine Projektionsart betrachten, welche sich hauptsächlich für geographische Coordinaten und Messtischzeichnung eignet, nämlich die Preussische sogenannte Polyeder-Projektion, welche wir in ihren Grundzügen schon in § 57. Fig. 2. S. 319 kennen lernten.

Es war dort davon die Rede, dass man die bekannten Messtisch-Trapeze der topographischen Abtheilung der Landesaufnahme auf zweierlei Arten auftragen kann, erstens unmittelbar nach ihren Vierecksseiten ( $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$  u. s. w. S. 318) und zweitens durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte in irgend welchem anderen System.

Von letzterem sei aber nun nicht die Rede, sondern nur von dem Auftragen der *einzelnen* Trapeze, welche als geradlinig behandelt, mit ihren Rändern links und rechts zusammengelegt eine zusammenhängende Projektion eines Parallelkreistreifens geben, aber mit ihren Nord- und Südrändern nicht scharf zusammenpassen können.





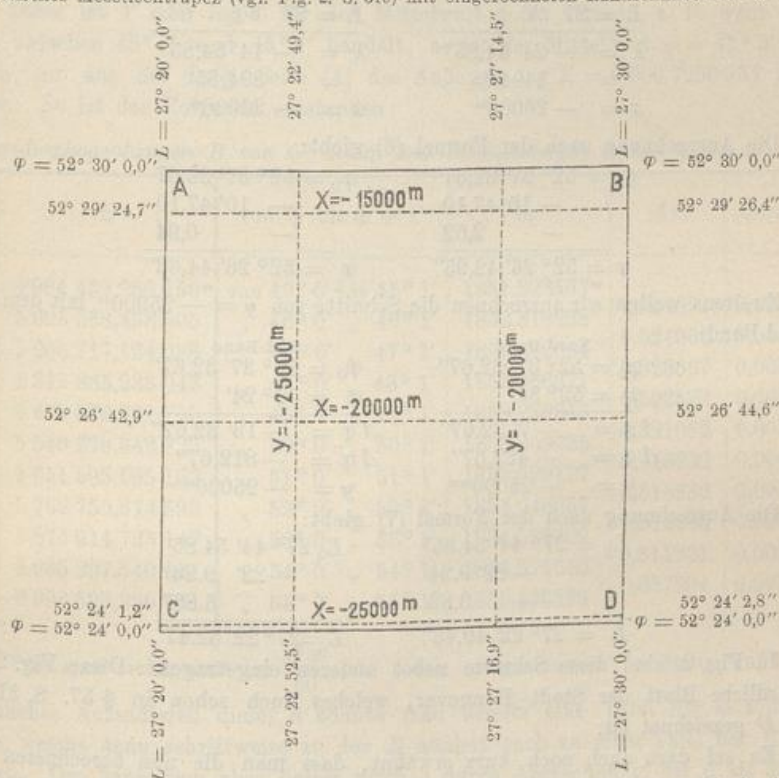


eines Katastersystems einzurechnen, etwa um Kartennachträge aus dem Kataster in das topographische Blatt bequem und genau hinüberzutragen u. s. w. Insofern es sich nur um Zeichnung im Massstab 1:25000 handelt, wollen wir uns mit Genauigkeit von rund 0,1'' in den Breiten  $\varphi$  und in den Längen  $L$  begnügen.

Man könnte daran denken, für runde Werte  $x$  und  $y$  die zugehörigen Breiten  $\varphi$  und  $L$  nach § 55. S. 308 auszurechnen, und darnach das Netz der  $x$ - und  $y$ -Parallelen in das topographische Blatt hineinzubringen; und man kann das wohl thun, wozu ausser dem Schema S. 308 keine weitere Anleitung nötig ist. Aber es bietet sich ein graphisch besseres Verfahren so dar, dass man nur die *Randschnitte* bestimmt, d. h. auf dem West- und Ost-Rand des Blattes die Schnitte für runde  $x$ , und auf dem Süd- und Nord-Rand die Schnitte für runde  $y$ , wie auf nachfolgender Fig. 2 zu sehen ist.

Fig. 2.

Preussisches Messtischtrapez (vgl. Fig. 2. S. 319) mit eingerechneten Randschnitten für  $x$  und  $y$ .



Bleiben wir zuerst bei dem West- und Ost-Rand, so wird die Aufgabe lauten: für gegebene Länge  $L$  und Abscisse  $x$  soll die Breite  $\varphi$  berechnet werden. Wenn  $\varphi_0$  und  $L_0$  die Grundwerte des benützten Kataster-Coordinatensystems sind, z. B. nach S. 308–309:

$$\text{Celle} \quad \varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709'' \quad L_0 = 27^\circ 44' 54,8477'' \quad (2)$$

so hat man auch für jedes  $\varphi$  und  $L$  die

$$\text{Differenzen} \quad \varphi - \varphi_0 = \Delta \varphi \quad L - L_0 = \Delta L \quad (3)$$

Aus (8) § 55. S. 304 und (19) S. 305 folgt:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{x}{M} \varrho - \frac{V^2}{2 \varrho} \lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi + \dots \quad (4)$$



Desgleichen aus (10) S. 304 mit  $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ :

$$\lambda = \frac{y}{N \cos \varphi_0} + \frac{y \Delta\varphi \tan \varphi_0}{N \cos \varphi_0} + \dots \quad (5)$$

Die Ausrechnung mit dem Konstanten (2) giebt:

$$\varphi = 52^\circ 37' 32,67'' + [8.509\,938] x - [4.06902] \lambda^2 \quad (6)$$

$$L = 27^\circ 44' 54,85'' + [8.725\,662] y + [3.52823] y \Delta\varphi \quad (7)$$

Diese Näherungsformeln genügen für den angegebenen Zweck, auf 0,1'' genau; auf genauere Berechnung, welche leicht zu machen wäre, wollen wir hier nicht eingehen.

Man wird natürlich nach einem Netzbilde zuerst überlegen, welche Schnitte überhaupt in Frage kommen, und so wollen wir nach Fig. 2. S. 481 z. B. berechnen den Schnitt von  $x = -20\,000^m$  auf dem West- und Ost-Rand:

West-Rand	Ost-Rand
$L_0 = 27^\circ 44' 54,85''$	$L_0 = 27^\circ 44' 54,85''$
$L = 27 \quad 20$	$L = 27 \quad 30$
$\lambda = -24' 54,85''$	$\lambda = -14' 54,85''$
$= -1494,85$	$= 894,85''$
$x = -20000^m$	$x = -20000^m$

Die Ausrechnung nach der Formel (6) giebt:

$\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,67''$	$\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,67''$
$-10 \quad 47,10$	$-10' 47,10$
$-2,62$	$-0,94$
$\varphi = 52^\circ 26' 42,95''$	$\varphi = 52^\circ 26' 44,63''$

Zweitens wollen wir ausrechnen die Schnitte von  $y = -25000^m$  mit dem Nord- und Süd-Rand:

Nord-Rand	Süd-Rand
$\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,67''$	$\varphi_0 = 52^\circ 37' 32,67''$
$\varphi = 52^\circ 30'$	$\varphi = 52^\circ 24'$
$\Delta\varphi = -7' 32,67''$	$\Delta\varphi = -13' 32,67''$
$\Delta\varphi = -452,67''$	$\Delta\varphi = -812,67''$
$y = -25000^m$	$y = -25000^m$

Die Ausrechnung nach der Formel (7) giebt:

$L_0 = 27^\circ 44' 54,85''$	$L_0 = 27^\circ 44' 54,85''$
$-22' 9,24$	$-22' 9,24''$
$+3,82$	$+6,86''$
$L = 27^\circ 22' 49,43''$	$L = 27^\circ 22' 52,47''$

In Fig. 2. sind diese Schnitte nebst anderen eingetragen. Diese Fig. 2 giebt das nördliche Blatt der Stadt Hannover, welches auch schon in § 57. S. 319 mit  $A B C D$  gezeichnet ist.

Es sei dazu auch noch kurz erwähnt, dass man die nun berechneten Rand-schnitte von Fig. 2. auch dadurch erhalten kann, dass man die früher in § 55. S. 318—320 berechneten Randmasse proportional einteilt, z. B. auf dem West-Rand  $A C$  hat man:

$A$	$\varphi = 52^\circ 30'$	$x = -13909,6$	$\delta x = 1090,4$
		$x = -15000$	5000,0
		$x = -20000$	5000,0
		$x = -25000$	35,9
$C$	$\varphi = 52^\circ 24'$	$x = -25035,9$	
	$\Delta\varphi = 0^\circ 6'$	$\Delta x = 11126,3$	11126,3

Wenn man den  $\delta x$  entsprechende  $\delta\varphi$  proportional einrechnet, so bekommt man dieselben Werte wie nach den Formeln (6) und (7).



## § 91. Abscissen als Meridianbogen.

Obgleich die Meridianbogenlängen schon in § 35. gründlich behandelt worden sind, wollen wir nun doch zum Schlusse dieses Kapitels über geodätische Coordinaten nochmals darauf zurückkommen, und noch eine ausführliche Tafel der Meridianbogenlängen  $B$  vom Äquator  $\varphi = 0$  bis zur Breite  $\varphi$ , von Minute zu Minute, in den Anhangstafeln Seite [55]—[57] begeben.

Um die Berechnung dieser Tafel nachzuweisen, greifen wir zuerst zurück auf die Werte  $B$  von § 35. S. 216, welche im Folgenden wiederkehren, (mit weiteren Dezimalstellen) nebst den Minutenbögen  $m$ , welche nach dem ersten Gliede von (40) S. 218 für  $\Delta\varphi = 1'$  berechnet sind:

$$m = M \frac{\Delta\varphi}{\varrho} = M \frac{1'}{\varrho'} = \frac{c}{\varrho'} \frac{1}{V^3} = [3.269\,8237\,607] \frac{1}{V^3} \quad (1)$$

Dabei ist  $V$  oder  $\log V$  für den Mittelwert  $\varphi$  zu nehmen, z. B. wenn es sich um  $m$  zwischen  $45^\circ 0'$  und  $45^\circ 1'$  handelt, so ist der Mittelwert  $\varphi = 45^\circ 0' 30''$  zu nehmen, um aus der Tafel Seite [4] des Anhangs  $\log V = 0.000\,7280\,957$  zu entnehmen. So ist das Folgende entstanden:

Meridianbogenlängen  $B$  von  $0^\circ$  bis  $\varphi$  und Minutenbogen  $m$  von  $\varphi$  bis  $\varphi + 1'$ .

$\varphi$	$B$	von $\varphi$ bis $\varphi + 1'$	$m$	$\Delta m$	$\delta = \frac{\Delta m}{60}$
45°	4 984 439,266 150 <sup>m</sup>	von 45° 0' bis 45° 1'	1851,993567 <sup>m</sup>	0,324671 <sup>m</sup>	0,0054112 <sup>m</sup>
46	5 095 568,458 505	" 46° 0' " 46° 1'	1852,318238	0,324366	0,0054061
47	5 206 717,124 088	" 47° 0' " 47° 1'	1852,642604	0,323667	0,0053944
48	5 317 885,233 043	" 48° 0' " 48° 1'	1852,966271	0,322572	0,0053762
49	5 429 073,731 700	" 49° 0' " 49° 1'	1853,288843	0,321082	0,0053514
50	5 540 279,542 823	" 50° 0' " 50° 1'	1853,609925	0,319202	0,0053200
51	5 651 505,565 163	" 51° 0' " 51° 1'	1853,929127	0,316930	0,0052822
52	5 762 750,674 593	" 52° 0' " 52° 1'	1854,246057	0,314265	0,0052378
53	5 874 014,723 147	" 53° 0' " 53° 1'	1854,560322	0,311221	0,0051870
54	5 985 297,540 011	" 54° 0' " 54° 1'	1854,871543	0,307794	0,0051299
55	6 096 598,930 561	" 55° 0' " 55° 1'	1855,483323		

Wie man sieht, sind die  $\frac{\Delta m}{60} = \delta$  schon einigermaßen beständig; und durch allmähliches Aufaddieren dieser  $\delta$  könnte man bereits eine Tafel der  $m$  selbst herstellen, welche dann schrittweise zu den  $B$  addiert auch zu einer Tafel der  $B$  führen müssten. Das kann man aber besser machen durch Ausrechnung der  $\delta$  als Differentiale nach (35) S. 217:

$$\frac{d^2 m}{d\varphi^2} = \frac{3M}{V^2} \eta^2 t = \frac{3c}{V^5} e'^2 \cos^2 \varphi \tan \varphi = \frac{3ce'^2}{2V^5} \sin 2\varphi$$

und für Intervall von  $1'$ :

$$\delta = \frac{3ce'^2 \sin 2\varphi}{2\varrho'^2 V^5} = [7.7369599] \frac{\sin 2\varphi}{V^5} \quad (2)$$

Z. B. zwischen  $\varphi = 45^\circ$  und  $\varphi = 46^\circ$  haben wir ausgerechnet:

$\varphi =$	45° 5'	45° 15'	45° 25'	45° 35'	45° 45'	45° 55'
$\delta =$	0,0054116	0,0054117	0,0054115	0,0054113	0,0054108	0,0054102



Die Summe dieser  $\delta$  ist 0,0324671 und das 10 fache = 0,324 671 füllt also gerade das Intervall  $\Delta m$  zwischen den zwei ersten  $m$  unserer Tabelle S. 483.

Allerdings ist in der Gegend von  $\varphi = 45^\circ$  die ganze Rechnungsart am günstigsten, weil hier der Faktor  $\sin 2\varphi$  in der Gleichung (2) nahezu konstant ist; aber auch in weiter abstehenden Breiten bleibt das Verfahren brauchbar, und es ist somit nachgewiesen, dass man nach Ausrechnen der nöthigen  $\delta$  durch einfaches Aufaddieren (mit der Rechenmaschine) die Tabellen Seite [55]—[57] des Anhangs herstellen kann. Dieses ist geschehen in Verbindung mit der vergleichenden Zuziehung der schon auf S. 216 zugezogenen Tabellen von F. G. Gauss und Hartl. Wir haben auch dort schon gesehen, dass die verschiedenen Berechner in den letzten Stellen deswegen von einander abwichen, weil sie von verschiedenen Annahmen in Bezug auf die letzten Stellen der Besselschen Erddimensionen ausgegangen sind. Unsere neue Tafel S. [55]—[57] des Anhangs giebt nun die Werte  $B$  und  $m$  entsprechend den Konstanten der preussischen Landesaufnahme von § 31. S. 191 unten; allerdings auch nicht mit voller Gewähr der letzten Millimeterstelle, weil dazu die bei (2) angedeutete Rechnungsart noch etwas schärfer gemacht werden müsste, was in Ermangelung eines Bedürfnisses scharfer Millimeterangaben vorerst unterblieben ist. Auch muss daran erinnert werden, dass die frühere Tabelle S. [38] aus den angegebenen Gründen die  $B$  ungefähr um  $1^m$  kleiner giebt als die nun ausführliche Tabelle S. [57].

Um eine Anwendung unserer Tabelle Seite [55]—[57] zu zeigen, wollen wir nochmals das Beispiel Celle von S. 220 vornehmen:

$$\text{Celle } \varphi_0 = 52^\circ 37' 32,6709''$$

Dazu soll  $B$  gefunden werden. Man nimmt aus Seite [57]:

$$\text{für } \varphi = 52^\circ 37'$$

$$B_1 = 5\,831\,361,276^m$$

$$\delta \varphi = 32,6709''$$

$$\text{mit } m = 1854,441^m$$

Hiernach kann man ausrechnen:

$\log \delta \varphi$	1.514 1611	
$\log 60$	1.778 1518	
$\log \delta \varphi : 60$	9.736 0098	
$\log m$	3.268 2130	
$\log \delta B$	3.004 2228	$\delta B = \frac{1009,771^m}{B = 5832\,371,047^m}$ (3)

Bequemer und ausserdem noch etwas schärfer rechnet man mit Zuziehung der Coëfficienten [1] aus der Anhangstafel S. [30]—[35]. In unserem Falle ist die Mittelbreite  $\varphi = 52^\circ 37' 16,33545''$  gültig, also nach S. [33]  $\log [1] = 8.509\,9387$ , womit man weiterrechnet:

$\log [1]$	8.509 9387	$B_1 = 5\,831\,361,276^m$
$\log \delta \varphi$	1.514 1611	$\delta B = 1\,009,770^m$
$\log (\delta \varphi : [1])$	3.004 2224	$B = 5\,832\,371,046^m$ (4)

Dieses stimmt mit  $B_0$  von S. 220, weil die Tafeln S. [38] und S. [57] an dieser Stelle übereinstimmen, was, wie schon mehrfach bemerkt, sonst nicht auf  $1^m$  genau der Fall ist.

Mit den Anhangstafeln S. [38] und S. [55]—[57] kann nun stets der Meridianbogen  $B$ , welcher in den Formeln von § 58. S. 323 und dann in § 86. S. 461 vorkommt, als Funktion einer Breite  $\varphi$  bestimmbar betrachtet werden, ebenso wie auch umgekehrt  $\varphi$  als Funktion des zugehörigen  $B$ ; und alle unsere Coordinatenformeln, in welchen ein solches  $B$  vorkommt, sind dadurch gesichert.



Wir wollen aber auch noch die Koordinatenformeln betrachten, in welchen eine Breitendifferenz  $\Delta\varphi$  als Funktion eines Abscissenwertes  $x$  vorkommt oder umgekehrt. Z. B. die Dessauer queraxigen Coordinaten § 83. S. 441 geben mit  $y = 0$  und  $\lambda = 0$  aus (24) und (27) S. 441:

$$\Delta\varphi = x \frac{\sqrt[3]{c}}{c} \varrho - \frac{3}{2} \frac{x^2}{c^2} \sqrt[4]{c} \eta^2 t \varrho + \frac{x^3}{2 c^3} \sqrt[5]{c} \eta^2 \varrho (-1 + t^2 - \eta^2 + 5 \eta^2 t^2) \quad (5)$$

und 
$$x = \frac{\Delta\varphi}{\varrho} \frac{c}{\sqrt[3]{c}} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\varphi^2}{\varrho^2} \frac{c}{\sqrt[5]{c}} \eta^2 t - \frac{\Delta\varphi^3}{2 \varrho^3} \frac{c}{\sqrt[7]{c}} \eta^2 (-1 + t^2 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2) \quad (6)$$

Diese Formel für  $x$  stimmt mit der Formel für  $m$  in (37) § 35. S. 218, wie es sein muss, und ebenso auch mit (33) § 78. S. 413. Die andere Formel  $\Delta\varphi$  ist die Umkehrung von  $x$ , wie man sich unmittelbar überzeugen kann. Wenn es sich nun um Hilfstafeln zu den Formeln S. 441 oder ähnlichen handelt, so wird man zuerst die Hauptglieder von (5) und (6) tabulieren, wie wir für die Dessauer Formeln S. 441 gethan haben, (nicht nur für  $x$  und  $\Delta\varphi$ , sondern auch für  $y$  und  $\lambda$  zu S. 441), und ebenso kann man auch die folgenden Gliedern von (5) und (6) tabellarisch ausrechnen, dabei auch die gleiche Zeichen habenden Glieder mit  $x$  und  $x^3$ , sowie  $\Delta\varphi$  und  $\Delta\varphi^3$  zusammenfassen u. s. w.; und solche Tafeln scheinen uns besser und bequemer als die Tafel der Werte  $B$  selbst von S. [55]—[57], weil man durch Untertabellen mit  $\Delta\varphi = 1'$  dann  $10''$   $1''$   $0,1''$  ... die Sache so bequem einrichten kann, dass nur noch glattes Zusammensetzen nötig ist, alles dieses unter der Voraussetzung, dass die  $x$  und  $\Delta\varphi$  verhältnismässig klein sind, (bei queraxigen Coordinaten).

Dann kommt aber noch die Frage, ob die Coordinaten kongruent oder konform sind, also in § 83, ob die Formeln (24), (27) S. 441 oder (36), (39) S. 444 benützt werden sollen, oder ob die Hilfstafeln so eingerichtet werden sollen, dass sie auf beide Fälle passen.

Alles dieses sind kleine Formfragen, welche aus Veranlassung der Formeln von § 83. aufgestellt wurden, welche auch durch tabellarische Hilfen bereits teilweise beantwortet wurden, ohne dass hier weiter darauf einzugehen wäre.

## Kapitel VIII.

### Konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel.

#### § 92. Allgemeines.

Ausser der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene, welche wir in den früheren §§ 86.—88. behandelt haben, verdanken wir Gauss auch noch eine weitergehende Theorie dieser Art, bei welcher das Umdrehungsellipsoid auf eine Kugel konform abgebildet wird, so dass nur noch die Formeln der sphärischen Trigonometrie erforderlich sind, um geodätische Aufgaben des Ellipsoids zu lösen.

Ausser den schon in § 86. S. 459 zusammengestellten allgemeinen Litteraturangaben ist hier besonders als Quelle zu nennen: „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von Carl Friedrich Gauss“, erste Abhandlung, der Königl. Sozietät überreicht 1843, Okt. 23. In der Gesamtausgabe „Carl Friedrich Gauss, Werke“ ist diese Abhandlung aufgenommen in Band IV, Göttingen 1873, S. 259—300.

Die Theorie der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel hat in jüngster Zeit erhöhte Bedeutung erlangt, indem die trigonometrische Abteilung der