



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

Kapitel VIII. Konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](#)

Wir wollen aber auch noch die Coordinatenformeln betrachten, in welchen eine Breitendifferenz $\Delta\varphi$ als Funktion eines Abscissenwertes x vorkommt oder umgekehrt. Z. B. die Dessauer queraxigen Coordinaten § 83. S. 441 geben mit $y = 0$ und $\lambda = 0$ aus (24) und (27) S. 441:

$$\Delta\varphi = x \frac{V^3}{c} \varrho - \frac{3}{2} \frac{x^2}{c^2} V^4 \eta^2 t \varrho + \frac{x^3}{2 c^3} V^5 \eta^2 \varrho (-1 + t^2 - \eta^2 + 5 \eta^2 t^2) \quad (5)$$

$$\text{und } x = \frac{\Delta\varphi}{\varrho} \frac{c}{V^3} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\varphi^2}{\varrho^2} \frac{c}{V^5} \eta^2 t - \frac{\Delta\varphi^3}{2 \varrho^3} \frac{c}{V^7} \eta^2 (-1 + t^2 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2) \quad (6)$$

Diese Formel für x stimmt mit der Formel für m in (37) § 35. S. 218, wie es sein muss, und ebenso auch mit (33) § 78. S. 413. Die andere Formel $\Delta\varphi$ ist die Umkehrung von x , wie man sich unmittelbar überzeugen kann. Wenn es sich nun um Hilfstafeln zu den Formeln S. 441 oder ähnlichen handelt, so wird man zuerst die Hauptglieder von (5) und (6) tabulieren, wie wir für die Dessauer Formeln S. 441 gethan haben, (nicht nur für x und $\Delta\varphi$, sondern auch für y und λ zu S. 441), und ebenso kann man auch die folgenden Gliedern von (5) und (6) tabellarisch ausrechnen, dabei auch die gleiche Zeichen habenden Glieder mit x und x^3 , sowie $\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi^3$ zusammenfassen u. s. w.; und solche Tafeln scheinen uns besser und bequemer als die Tafel der Werte B selbst von S. [55]—[57], weil man durch Untertabellen mit $\Delta\varphi = 1'$ dann $10'' 1'' 0.1'' \dots$ die Sache so bequem einrichten kann, dass nur noch glattes Zusammensetzen nötig ist, alles dieses unter der Voraussetzung, dass die x und $\Delta\varphi$ verhältnismässig klein sind, (bei queraxigen Coordinaten).

Dann kommt aber noch die Frage, ob die Coordinaten kongruent oder konform sind, also in § 83., ob die Formeln (24), (27) S. 441 oder (36), (39) S. 444 benutzt werden sollen, oder ob die Hilfstafeln so eingerichtet werden sollen, dass sie auf beide Fälle passen.

Alles dieses sind kleine Formfragen, welche aus Veranlassung der Formeln von § 83. aufgestellt wurden, welche auch durch tabellarische Hilfen bereits teilweise beantwortet wurden, ohne dass hier weiter darauf einzugehen wäre.

Kapitel VIII.

Konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel.

§ 92. Allgemeines.

Ausser der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene, welche wir in den früheren §§ 86.—88. behandelt haben, verdanken wir Gauss auch noch eine weitergehende Theorie dieser Art, bei welcher das Umdrehungsellipsoid auf eine Kugel konform abgebildet wird, so dass nur noch die Formeln der sphärischen Trigonometrie erforderlich sind, um geodätische Aufgaben des Ellipsoids zu lösen.

Ausser den schon in § 86. S. 459 zusammengestellten allgemeinen Litteraturangaben ist hier besonders als Quelle zu nennen: „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von Carl Friedrich Gauss“, erste Abhandlung, der Königl. Sozietät überreicht 1843, Okt. 23. In der Gesamtausgabe „Carl Friedrich Gauss, Werke“ ist diese Abhandlung aufgenommen in Band IV, Göttingen 1873, S. 259—300.

Die Theorie der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel hat in jüngster Zeit erhöhte Bedeutung erlangt, indem die trigonometrische Abteilung der

preussischen Landesaufnahme diese Theorie zur Anlage eines konformen rechtwinkligen Coordinatensystems über ganz Preussen verwertet hat, von welchem schon in dem früheren § 59. S. 331 kurz die Rede war, mit einigen Citaten, zu welchen auch noch eine Mitteilung von General Schreiber in den „Verhandlungen der 1887er Konferenz der perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888“, Annex X^b, S. 10–11 gehört.

Die fragliche Anwendung, bestehend in einer Doppelprojektion, werden wir in dem nachfolgenden § 101. ausführlich behandeln. Zunächst haben wir die reine Kugelprojektion vorzunehmen.

Wir behandeln in dem nachfolgenden Kapitel die Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel nach den citierten klassischen Gauss'schen Original-Schriften.

Wir haben in unserer Bearbeitung die Bezeichnung von Gauss beibehalten, jedenfalls die Konstanten P , Q , α , m , u. s. w., während im übrigen unser auch sonst gebrauchtes $v^2 = 1 + \eta^2$ sich nützlich erwiesen hat.

Wegelassen haben wir alle Entwicklungen über die dritte Ordnung, unter Verweisung auf das Original-Werk.

Ändern mussten wir in § 98. den Art. 13, welcher über Azimut-Reduktion handelt, weil hierbei Gauss die geodätische Linie als kürzeste Linie nach der Theorie der Variations-Rechnung einführt, die in unseren Gang (Geodätische Linie S. 367–376) nicht passt, weshalb wir eine andere Entwicklung § 98. an Stelle von Art. 13 gesetzt haben.

Dazu wurde in § 99. eine andere allgemeine Formel von Schols eingefügt.

§ 93. Grundformeln.

In Fig. 1. bezeichnet ds das Differential einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid und in Fig. 2. ist ds' das Differential eines entsprechenden Grosskreisbogens auf einer Kugel vom Halbmesser A . Im übrigen gelten folgende Bezeichnungen und daraus folgende Beziehungen:

Fig. 1.
Ellipsoid.

Fig. 2.
Kugel.

	Ellipsoid	Kugel
Punkt	P	Q
Breite	φ	"
Längen-Unterschied dl	$d\lambda - \alpha dl$	$d\lambda = \alpha dl$

(1)
(2)

Hiebei ist α eine vorläufig eingeführte Konstante, deren Wert sich nachher ergeben wird. Weiter haben wir einander entsprechend:

$$\text{Parallelbogen } P_1P' = N \cos \varphi dl \quad Q_1Q' = A \cos u dl \quad (3)$$

$$\text{Meridianbogen } PP_1 = M d\varphi \quad QQ_1 = A du \quad (4)$$

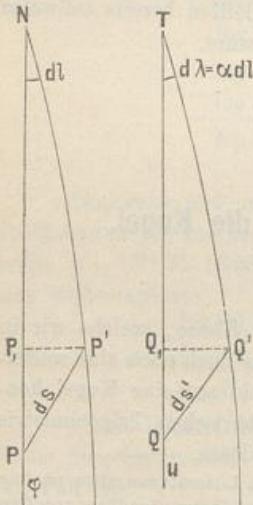
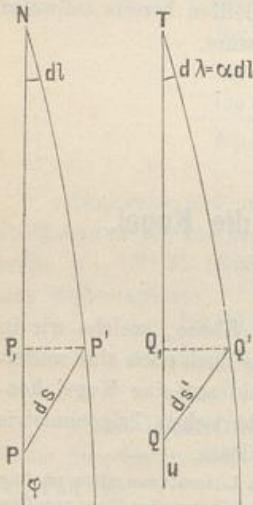
Dabei sind M und N wie gewöhnlich die beiden Hauptkrümmungs-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids.

Wenn nun QQ_1Q' konforme Abbildung von PP_1P' sein soll, so müssen die Seiten der beiden Dreiecke ein konstantes Verhältnis haben, welches mit m bezeichnet sei, also:

$$\frac{A du}{M d\varphi} = \frac{\alpha A \cos u}{N \cos \varphi} = m \quad (5)$$

Hieraus erhält man als Beziehung zwischen der sphärischen Breite u und der sphäroidischen Breite φ die Differentialgleichung:

$$\frac{du}{d\varphi} = \alpha \frac{M \cos u}{N \cos \varphi}$$



Das Krümmungs-Verhältnis $M:N$ wird nach (25) § 32. S. 197 eingeführt:

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{V^2} \text{ also } \frac{du}{d\varphi} = \frac{\alpha \cos u}{V^2 \cos \varphi} \quad (6)$$

oder in anderer Form, mit W^2 statt V^2 nach (25) § 32. S. 197:

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\alpha(1-e^2)}{W^2} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{\alpha(1-e^2)}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \quad (7)$$

Zur Integration zerlegen wir in Teilbrüche:

$$\frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{1}{2} \frac{e^2 \cos \varphi}{1+e \sin \varphi} - \frac{1}{2} \frac{e^2 \cos \varphi}{1-e \sin \varphi}$$

Damit gibt die Integration von (7):

$$\begin{aligned} \log \tan \left(45^\circ + \frac{u}{2}\right) &= \alpha \left\{ \log \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2} e \log(1+e \sin \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e \log(1-e \sin \varphi) \right\} - \log \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Dabei ist $-\log \frac{1}{k}$ als Integrations-Konstante zugesetzt; die vorstehende Gleichung lässt sich damit auch so schreiben:

$$\tan \left(45^\circ + \frac{u}{2}\right) = \frac{1}{k} \tan \alpha \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi}\right)^{\frac{\alpha e}{2}} \quad (8)$$

Wenn diese Beziehung zwischen u und φ erfüllt ist, so wird m aus beiden Formeln (5) übereinstimmend erhalten, und zwar nach der zweiten Form von (5), mit Einsetzung von N nach (22) S. 197, $N=a:W$ also aus (5):

$$m = \frac{\alpha A \cos u}{N \cos \varphi}, \quad m = \alpha \frac{A}{a} \frac{\cos u}{\cos \varphi} W \quad (9)$$

oder auch nach S. 189 und S. 197:

$$\frac{W}{a} = \frac{V}{c} \quad \text{also} \quad m = \frac{A \alpha \cos u}{c \cos \varphi} V \quad (10)$$

Die Beziehung zwischen den geographischen Längen l und λ ergibt sich, da α konstant ist, nach (2) sofort:

$$\lambda = \alpha l \quad (11)$$

Die Gleichungen (8), (10) und (11) enthalten bereits die Lösung der gestellten Aufgabe im Grundzuge, und wir wollen im Anschluss an die umstehenden Fig. 3. und Fig. 4. die bis jetzt gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen:

Fig. 3. S. 488 stellt ein geodätisches Polar-Dreieck auf dem Ellipsoid vor, mit den Breiten φ und φ' und dem Längenunterschied l ; die geodätische Linie, welche die beiden Punkte mit den Breiten φ und φ' verbindet, hat die lineare Grösse s und die beiden Azimute α und α' .

Fig. 4. S. 488 ist das konforme sphärische Abbild von Fig. 3.; den Breiten φ und φ' entsprechen die sphärischen Breiten u und u' nach der Gleichung (8), der sphärische Längenunterschied $\lambda = \alpha l$ wird aus dem Längenunterschied l des Ellipsoide erhalten durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor α ; und der Grosskreisbogen s' steht zu der geodätischen Linie s in Beziehung durch das Vergrösserungs-Verhältnis m , indem $s' = m s$ sein muss.

Die Azimute β und β' auf der Kugel sind nicht genau gleich den Azimuten α und α' auf dem Ellipsoid, jedoch werden bei den nachfolgenden Anwendungen die β und α wenigstens nahezu einander gleich sein.

Fig. 3.
Ellipsoid.

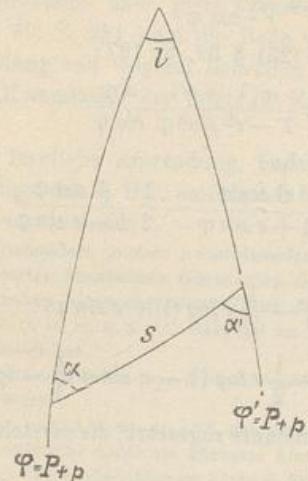
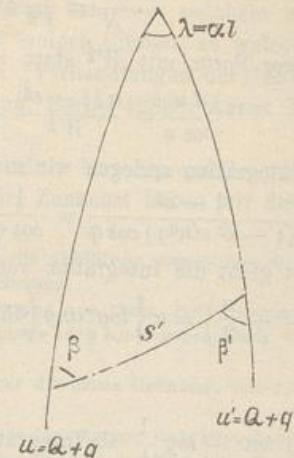


Fig. 4.
Kugel mit dem Halsmesser 4.



Durch die Breiten-Bezeichnungen $\varphi = P + p$ und $u = Q + q$ ist angedeutet, dass P eine gewisse Normalbreite auf dem Ellipsoid und Q die entsprechende Normalbreite auf der Kugel ist, sowie dass p und q Breiten-Differenzen sind.

§ 94. Wahl der Konstanten.

Die Grundgleichungen (8), (10) und (11), welche am Schluss des vorigen § 93. gefunden wurden, enthalten drei willkürliche Konstanten, nämlich α , k und den Kugel-Halbmesser A .

Man hat nun in seiner Gewalt, durch zweckmässige Bestimmung dieser Konstanten α , k und A zu bewirken, dass für ein bestimmtes Gebiet die Abweichung des Vergrösserungs-Verhältnisses m von dem Wert 1 möglichst klein wird.

Zu diesem Zwecke nehmen wir einen etwa der Mitte des Gebietes zugehörigen Wert P der Breite q an, welchem auch ein gewisser Wert Q der Breite u auf der Kugel entsprechen wird.

Indem wir zugleich auch die Bezeichnungen p und q für Breiten-Differenzen auf dem Ellipsoid und auf der Kugel einführen, haben wir, wie auch schon in Fig. 3. und Fig. 4. des vorigen § 93. eingeschrieben ist, die zusammengehörenden Bezeichnungen:

$$\text{Ellipsoid-Breite } \varphi = P + p \quad (1)$$

$$\text{Kugel-Breite } u = Q + q \quad (2)$$

In der Normalbreite P , bzw. Q soll das Vergrösserungs-Verhältnis $m = 1$, also $\log m = 0$ sein, und für irgend welche andere Breite soll $\log m$ bestimmt sein durch eine Reihe, deren erste Glieder die Ableitungen $\frac{d \log m}{d u}$ und $\frac{d^2 \log m}{d u^2}$ sein werden.

Wir können nun über die drei Konstanten α , k und A so verfügen, dass auch diese beiden ersten Ableitungen für die Normalbreite verschwinden, wir haben also für die drei Konstanten α , k und A folgende drei Bedingungen:

$$\text{für } u = Q \text{ soll sein: 1) } m = 1 \text{ oder } \log m = 0 \quad (3)$$

$$2) \frac{d \log m}{d u} = 0 \quad (4)$$

$$3) \frac{d^2 \log m}{d u^2} = 0 \quad (5)$$

Hiernach haben wir uns zuerst mit den beiden ersten Ableitungen von $\log m$ zu beschäftigen, und nehmen zuerst von (10) und (6) § 93. S. 487 die zwei Gleichungen:

$$m = \frac{A}{c} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} V \quad \text{wobei } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (6)$$

und $\frac{d \varphi}{d u} = \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \quad (7)$

Durch Ableitung von V erhält man, ebenso wie bei (13) §. 74. S. 393:

$$\frac{d V}{d \varphi} = -\frac{e'^2}{V} \sin \varphi \cos \varphi = -\frac{\eta^2}{V} \tan \varphi \quad (\text{wo } \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi) \quad (8)$$

Nun gibt (6):

$$\begin{aligned} \log m &= \log \frac{A \alpha}{c} + \log \cos u - \log \cos \varphi + \log V \\ \frac{d \log m}{d u} &= -\tan u + \tan \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} - \frac{\eta^2}{V} \tan \varphi \frac{V^3 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \log m}{d u^2} = -\frac{1}{\cos^2 u} + \frac{1}{\alpha \cos^2 u} \left(\cos \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} + \sin \varphi \sin u \right)$$

$$\frac{d^2 \log m}{d u^2} = \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 u} (-\alpha^2 + V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u) \quad (10)$$

Um nun die Bedingungen (3), (4) und (5) einzuführen, hat man in (6), (9) und (10) zu setzen: $\varphi = P$ und $u = Q$. Dieses gibt:

aus (6): $1 = \frac{A \alpha \cos Q}{c \cos P} V \quad (\text{wo } V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P) \quad (11)$

aus (9): $0 = -\tan Q + \frac{\sin P}{\alpha \cos Q} \quad (12)$

aus (10): $0 = -\alpha^2 + V^2 \cos^2 P + \alpha \sin P \sin Q \quad (13)$

Nun sofort (12): $\alpha \sin Q = \sin P \quad (14)$

Dieses in (13) gesetzt gibt, mit Rücksicht auf V^2 in (11):

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 P \quad (15)$$

(14) gibt auch $\alpha^2 \cos^2 Q = \alpha^2 - \sin^2 P$ und dieses nebst (15) in (11) gesetzt, gibt:

$$A = \frac{c}{V^2} = \frac{c}{1 + e'^2 \cos^2 P} \quad (16)$$

Dieses ist nach (24) § 32. S. 197 der mittlere Krümmungs-Halbmesser in der Breite P . Aus (14) und (15) findet man auch:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \cos^2 Q &= (1 + e'^2 \cos^4 P) - (\sin^2 P) = \cos^2 P + e'^2 \cos^4 P \\ &= \cos^2 P (1 + e'^2 \cos^2 P) \\ \alpha \cos Q &= \cos P V \quad \text{wobei } V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P \end{aligned} \quad (17)$$

Aus (14) und (17) folgt auch:

$$\tan Q = V \tan P \quad (17a)$$

Aus (15) und (16) haben wir also die Konstanten α und A , und durch (14) wird auch die dritte Konstante k bestimmt, insfern dadurch P und Q miteinander verbunden sind; setzt man nun in (8) § 93. S. 487 $q = P$ und $u = Q$, d. h. wendet man jene Gleichung auf die Normalbreite an, so erhält man:

$$k = \frac{\tan \alpha \left(45^\circ + \frac{P}{2}\right)}{\tan \left(45^\circ + \frac{Q}{2}\right)} \left(\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P} \right)^{\frac{\alpha e}{2}} \quad (18)$$

Es bietet sich nun folgender Gang der Rechnung dar: Man nimmt eine Normalbreite P auf dem Ellipsoid willkürlich an, berechnet damit den mittleren Krümmungs-Halbmesser A nach (16), dann α nach (15), Q nach (14) und endlich k nach (18); dann kann man für jede Ellipsoidbreite φ die zugehörige Kugelbreite u und auch das zugehörige Vergrösserungsverhältnis m nach (8) und (9) § 93. S. 487 berechnen.

Statt dessen kann man aber auch so verfahren, dass nicht eine Normalbreite P auf dem Ellipsoid, sondern eine Normalbreite Q auf der *Kugel* als willkürlich (runde Zahl) angenommen wird. In diesem Falle, der nicht wesentlich verschieden von dem ersten Falle ist, kann man aber nicht geradezu nach den Formeln (14) und (15) rechnen, sondern man muss aus (14) und (15) die Breite P eliminieren, um α^2 in Q auszudrücken. Wenn man hiezu aus (14) nimmt:

$$\cos^4 P = (1 - \alpha^2 \sin^2 Q)^2 = 1 - 2 \alpha^2 \sin^2 Q + \alpha^4 \sin^4 Q$$

und wenn man dieses in (15) einsetzt, so wird man auf eine Gleichung geführt, welche α^2 und α^4 enthält, und nach α^2 aufgelöst dieses giebt:

$$\alpha^2 = \frac{1 + 2 e'^2 \sin^2 Q - \sqrt{1 + 4 e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q}}{2 e'^2 \sin^4 Q} \quad (19)$$

Diese Gleichung (19) nebst (14) gestattet dann die Weiterrechnung in der früheren Weise.

Da aber die Formel (19) zur unmittelbaren Ausrechnung sehr wenig geeignet ist, d. h. unmittelbar angewendet keine scharfe Berechnung geben kann, empfiehlt es sich, sie in eine Reihe zu entwickeln nach S. 196:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 4 e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q} &= 1 + \frac{4}{2} e'^2 \sin^2 Q \cos^2 Q - \frac{16}{8} e'^2 \sin^4 Q \cos^4 Q \\ &\quad + \frac{64}{16} e'^6 \sin^6 Q \cos^6 Q - \frac{5}{128} 256 e'^8 \sin^8 Q \cos^8 Q \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

Damit giebt (19) eine Reihe, deren drei erste Glieder sind:

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 Q - 2 e'^4 \sin^2 Q \cos^6 Q + 5 e'^6 \sin^4 Q \cos^8 Q \quad (20)$$

Damit ist alles zur Anwendung vorbereitet.

Es handelt sich um Einführung einer Normalbreite P oder Q . Das nächstliegende wäre, die Ellipsoidbreite P als runde Zahl für die Mitte des geographischen Anwendungsbereiches anzunehmen; aber Gauss hat einen sphärischen Normalwert Q zu Grunde gelegt, nämlich:

$$\text{Kugel } Q = 52^\circ 40' 0'' \quad (21)$$

Ausserdem werden von Gauss als Bessel sche Erddimensionen angenommen:

$$\log a = 6.514 8235 \cdot 337 \text{ für Toisen}$$

$$\text{und } \log a = 6.804 6434 \cdot 637 \text{ für Meter} \quad (22)$$

$$\log \sqrt{1 - e^2} = 9.998 5458 \cdot 202 \quad (23)$$

$$\log e = 8.912 2052 \cdot 079 \quad \log e^2 = 7.824 4104 \cdot 158 \quad (24)$$

Diese Werte (23) und (24) sind dieselben wie die von uns in § 31. S. 190 angegebenen, während $\log e^2$ nach (24) in den letzten Stellen von unserer Annahme auf S. 191 abweicht. Dieses röhrt von den Unsicherheiten her, welche früher überhaupt in Bezug auf die letzten Stellen der Bessel schen Erddimensionen bestanden haben (vgl. § 31. S. 190—191).

Die trigonometrische Abteilung der Preussischen Landesaufnahme hat von der ganzen Gauss schen Theorie der konformen Kugelabbildung mit ihren eigenen Konstanten (d. h. mit den auf S. 191 fett gedruckten Zahlen) eine Neuberechnung mit Tabellen durchgeführt, welche wohl später auch veröffentlicht werden wird.

Soweit wir im Folgenden eigene Berechnungen angeben, haben wir die Zahlen von S. 191 und S. 193 beibehalten, nämlich:

$$\log a = 6.804\,6434\cdot637 \text{ für Meter} \quad (25)$$

$$\log c = 6.806\,0976\cdot435 \quad (26)$$

$$\log e^2 = 7.824\,4104\cdot237, \quad \log e'^2 = 7.827\,3187\cdot833 \quad (27)$$

$$\log(1 - e^2) = \log \frac{1}{1+e'^2} = 9.997\,0916\cdot404 \quad (28)$$

Damit wollen wir die übrigen Konstanten nach den vorstehenden Formeln ausrechnen. Als willkürliche Annahme wird zu Grunde gelegt, wie bei (21) angegeben:

$$\text{Normal-Kugelbreite } Q = 52^\circ 40' 0'' \quad (29)$$

Damit berechnet man α^2 nach der Reihe (20):

$$\alpha^2 = 1,00090\,88703 - 28399 + 111 = 1,00090\,60415 \quad (30)$$

$$\log \alpha = 0.000\,1966\cdot553 \quad (30)$$

$$\alpha = 1 + 0.000\,425\,918 \quad \frac{1}{\alpha} = 1 - 0.000\,452\,713 \quad (31)$$

Es folgt die Berechnung von P nach (14); man findet:

$$P = 52^\circ 42' 2,53251'' \quad (32)$$

$$\log \sin P = 9.900\,6297\cdot679, \quad \log \cos P = 9.782\,4573\cdot113, \quad \log \tan P = 0.118\,1724\cdot566$$

Mit $\cos P$ hat man auch:

$$\log e'^2 \cos^2 P = \log r^2 = 7.392\,2384\cdot059 \quad (33)$$

und damit kann man geradezu $V^2 = 1 + \eta^2$ berechnen:

$$\log V^2 = 0.001\,0702\cdot432, \quad \log V = 0.000\,5351\cdot216 \quad (34)$$

Zur Probe kann man auch $\log V^2$ nach der Formel (24) S. 211 berechnen, oder $\log V$ durch Interpolation aus der Hilfstafel S. [57] des Anhangs bestimmen; beides giebt dasselbe Ergebnis wie (34).

Ehe man weiter geht, kann man auch die Probe nach (17), $\alpha \cos Q = V \cos P$ anstellen, welche mit einem Fehler von 0.001 schliesst, der nicht weiter zu verfolgen ist.

Mit $\log V^2$ nach (34) hat man auch nach (16) den Kugelhalbmeser A , die Ausrechnung mit (26) und (34) giebt:

$$\log A = 6.805\,0274\cdot003 \quad (35)$$

Endlich ist auch noch k nach (18) zu berechnen, man hat hiezu $e \sin P$ = 0,064 988 270 546 und weiter:

$$\begin{array}{l|l} \log \left(\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P} \right)^{\frac{\alpha e}{2}} & 9.997\,6898\cdot845 \\ \log \tan \alpha \left(45^\circ + \frac{P}{2} \right) & 9.471\,9371\cdot356 \\ \log \cot \alpha \left(45^\circ + \frac{Q}{2} \right) & 9.528\,7020\cdot994 \end{array} \left. \begin{array}{l} \log k = 9.998\,3291\cdot195 \\ \log \frac{1}{k} = 0.001\,6708\cdot805 \end{array} \right. \quad (36)$$

$$\text{Gauss giebt } \log \frac{1}{k} = 0.001\,6708\cdot804 \quad (36)$$

Hier haben wir die unerhebliche Differenz 0.001 gegen die Angabe von Gauss in Art. 6. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“, während die anderen Konstanten P , $\log \alpha$, $\log A$ nach (32), (30), (35) bis auf die letzte Dezimale mit den Angaben von Gauss stimmen.

Dieses ist eine Versicherung, dass die Verschiedenheit der Werte $\log e^2$ in (24) und (27) sich in den Konstanten P , α , A und k bei Rechnung mit 10stelligen Logarithmen nicht mehr bemerklich macht; während in den späteren Coefficienten-Berechnungen, wenn der Faktor η^2 auftritt, die kleine Verschiedenheit in den Annahmen von e^2 bzw. e'^2 bemerklich wird.

Wir haben früher auch ein Zahlenbeispiel zur Bestimmung von u und m bei gegebenem φ durchgerechnet, nach den Grundformeln (8) und (10) § 93. S. 487. Die Einzelheiten dieser Rechnung waren in den früheren Auflagen, z. B. 3. Aufl. 1890, S. 431—432 angegeben, wir wollen hier nur noch das Ergebnis dieser Rechnung herstellen, für die Karlsruher Breite:

$$\varphi = 49^\circ 0' 0'' \quad u = 48^\circ 58' 18,08'' \quad \log m = 0,000\,0002\cdot7 \quad (37)$$

Die genaueren Werte hiefür, welche man aus der Hilfstafel S. [60] des Anhangs durch Interpolation finden kann, sind:

$$\varphi = 49^\circ 0' 0'' \quad u = 48^\circ 58' 18,0784'' \quad \log m = 0,000\,0002\cdot48 \quad (38)$$

Die Übereinstimmung zwischen (37) und (38) ist insofern hinreichend, als die Werte u und $\log m$ von (37) nur mit 7stelligen Logarithmen ($\pm 0,25$) gerechnet sind.

Die Rechnung nach den geschlossenen Formeln (8) und (10) § 93. S. 487 ist umständlich und verhältnismässig ungenau.

Ein besseres Rechnungs-Verfahren erhält man durch Reihen-Entwicklungen, zu welchen wir in § 96.—97. übergehen werden.

§ 95. Goniometrische Hilfsgrößen.

Unsere vorstehenden Entwicklungen und Berechnungen zur Bestimmung der Konstanten in den Grundformeln sind sachlich nichts anderes, als was Gauss in Art. 3.—5. der „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung“ gegeben hat. In der Form aber sind wir von Gauss abgewichen, indem wir die bisherigen Bezeichnungen unseres Buches, namentlich $V^2 = 1 + \eta^2$ mit $\eta^2 = e'^2 \cos \varphi^2$ beibehielten, und dann die Ausrechnung auf dem zuerst sich darbietenden Wege machten; und da wir damit den Gauss'schen Zahlenwerten innerhalb der Genauigkeit 10 stelliger Logarithmen-Rechnung gleichgekommen sind, wäre nichts weiter zu bemerken.

Nun hat aber Gauss in Art. 4. der „Untersuchungen“ u. s. w. eine Gruppe von goniometrischen Hilfsgrössen, φ , ζ , η , Θ eingeführt, welche dazu dienen sollen, die logarithmischen Rechnungen bequemer und schärfer zu machen, deren Zusammenhang unter sich und mit den übrigen Grössen e , P , Q nicht sofort einzusehen ist.

Dieser Zusammenhang ist uns durch eine sphärische Figur am besten klar geworden, welche wir in Fig. 1. S. 493 nebst den zugehörigen Gleichungen mitteilen.

Dabei behalten wir die Gauss'sche Numerierung der Gleichungen bei, indem z. B. die Nummern (13), (14) u. s. w. der Gauss'schen Original-Abhandlung „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, erste Abhandlung“ entsprechen.

Es wird zuerst ein Hilfswinkel φ eingeführt durch die Gleichung:

$$\sin \varphi = e \quad (13)$$

damit wird:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \tan^2 \varphi$$

Folglich nach (15) § 94. S. 489:

$$\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 P = 1 + \tan^2 \varphi \cos^4 P$$

Nun setzt man abermals:

$$\tan \varphi \cos^2 P = \tan \zeta \quad (14)$$

$$\text{folglich: } a^2 = 1 + \tan^2 \zeta \quad , \quad \alpha = \frac{1}{\cos \zeta} \quad (16)$$

Weiter wird gesetzt:

$$e \sin P = \sin \theta \quad (22)$$

Die durch (13), (14) und (22) eingeführten Hilfswinkel φ , ζ und θ lassen sich nebst den Breiten P und Q in einer sphärischen Figur vereinigen, welche in Fig. 1. gezeichnet ist. Man hat hiebei den Bogen $AB = \theta$, auf welchem die Bögen AD und BD rechtwinklig aufgesetzt sind, so dass D der Pol von AB ist, also bei D der Winkel θ wieder erscheint.

Nach (13) und (22) ist $BC = P$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC , dessen eine Kathete $AB = \theta$ und dessen Winkel bei $C = \varphi$ ist. Dadurch ist der Punkt C bestimmt und es wird von ihm eine Senkrechte CF auf BD gefällt, ferner $FB' = FB$ abgetragen, so dass $B'CB$ ein gleichschenkliges Dreieck wird. Dass der bei C eingeschriebene Winkel $B'CF = 90^\circ - \zeta$ in Übereinstimmung mit (14) ist, zeigt sich so:

Dreieck CBF gibt

$$\cos P = \cotg(90^\circ - \zeta) \cotg(90^\circ - x)$$

Dreieck CBA gibt $\cos P = \cotg \varphi \cotg x$ woraus durch Multiplikation die Gleichung (14) folgt.

Von (14) und (16) haben wir:

$$\sin Q = \sin P \cos \zeta \quad (17)$$

Dieses entspricht dem rechtwinkligen Dreieck BCF als Sinus-Gleichung, ausführlich geschrieben:

$$\sin Q = \sin P \sin(90^\circ - \zeta)$$

Nun haben wir das Recht, aus der sphärischen Figur, Fig. 1. beliebige Gleichungen herauszulesen, welche die gleiche Berechtigung haben, wie wenn sie aus den bisherigen Gleichungen rein goniometrisch abgeleitet wären. Die Senkrechte $CF = \eta$ wird aus dem rechtwinkligen Dreieck CFB erhalten durch die Gleichung:

$$\tan \eta = \sin \zeta \tan P \quad (15)$$

Dasselbe Dreieck CFB gibt auch:

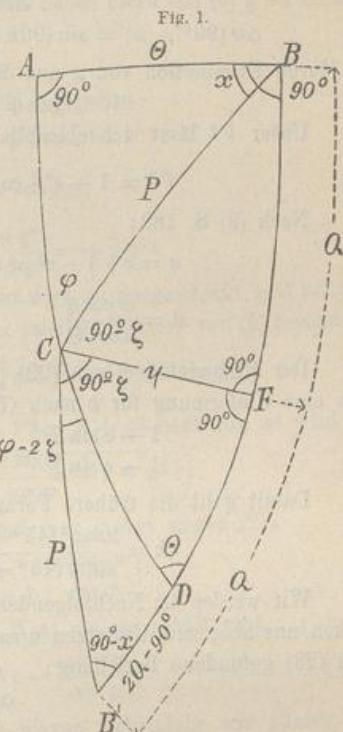
$$\cos \eta \cos Q = \cos P \quad (18)$$

und

$$\sin \eta = \tan \zeta \tan Q \quad (19)$$

und wenn man auf dasselbe Dreieck CFB eine der Gleichungen anwendet, welche durch Division der zweiten und vierten Gauss'schen Gleichungen von § 27. S. 165 entsteht, so bekommt man:

$$\begin{aligned} \tan \frac{P-Q}{2} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(90^\circ - (90^\circ - \zeta))}{\sin \frac{1}{2}(90^\circ + (90^\circ - \zeta))} \tan \frac{\eta}{2} \\ \tan \frac{P-Q}{2} &= \tan \frac{\zeta}{2} \tan \frac{\eta}{2} \end{aligned} \quad (20)$$



Das Dreieck $C D B'$ gibt:

$$\frac{\sin(\varphi - 2\zeta)}{\sin(2Q - 90^\circ)} = \frac{\sin\Theta}{\sin P}$$

Dann wegen (22) und (13):

$$\sin(2\zeta - \varphi) = e \cos 2Q = \sin\varphi \cos 2Q \quad (21)$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken $A B C$ und $B C F$ findet man:

$$\cos\varphi = \sin x \cos\Theta$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin(90^\circ - \zeta) \cos\eta, \text{ oder } \sin x = \cos\zeta \cos\eta$$

und durch Elimination von x aus diesen beiden Gleichungen:

$$\cos\varphi = \cos\zeta \cos\eta \cos\Theta \quad (22)$$

Unser V^2 lässt sich ebenfalls in φ und Θ ausdrücken. Nach (22) und (13) ist:

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 P = \frac{1 - e^2 \sin^2 P}{1 - e^2} = \frac{\cos^2\Theta}{\cos^2\varphi}$$

Nach (9) S. 189:

$$a = c \sqrt{1 - e^2} = c \cos\varphi \quad \text{dazu} \quad A = \frac{c}{V^2}, \text{ also:}$$

$$A = \frac{a \cos\varphi}{\cos^2\Theta}$$

Der Hilfswinkel Θ von (22) (s. oben bei (16), nämlich $\sin\Theta = e \sin P$, gibt auch eine Umformung für k nach (18) § 94., nämlich zunächst nach (22):

$$\frac{1 - e \sin P}{1 + e \sin P} = \frac{1 - \sin\Theta}{1 + \sin\Theta} = \cot^2\left(\frac{90^\circ + \Theta}{2}\right)$$

Damit geht die frühere Formel für k von (18) § 94. über in:

$$k = \frac{\tan^\alpha(45^\circ + \frac{1}{2}P)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}Q)} \cot^\alpha e(45^\circ + \frac{1}{2}\Theta)$$

Wir werden im Nachfolgenden die goniometrischen Hilfsgrößen nicht anwenden, merken uns aber zum Umsetzen unserer Bezeichnungen in jene, hauptsächlich die oben nach (23) gefundene Beziehung:

$$\cos\Theta = V \cos\varphi$$

S. 96. Reihen-Entwicklung für die Breiten-Differenz.

Die Beziehung zwischen der Breite φ auf dem Ellipsoid und der zugehörigen Breite u auf der Kugel ist zwar durch die Gleichung (8) § 93. S. 487 gegeben, welche zu jedem Werte φ den zugehörigen Wert u berechnen lässt; allein mancherlei Bedürfnisse werden dadurch doch nicht befriedigt; jene geschlossene Formel ist zur Rechnung überhaupt unbequem (vgl. das Zahlenbeispiel § 94. S. 492), und kann zur Auflösung nach φ bei gegebenem u nur etwa indirekt benutzt werden. Dieses und andere Gründe machen eine Reihen-Entwicklung erwünscht.

Da auf dem Ellipsoid eine Normalbreite P und auf der Kugel eine Normalbreite Q angenommen wurde, sollen die Breiten allgemein durch ihre Differenzen gegen P und Q ausgedrückt werden, d. h. wir setzen nach § 94. (1) und (2) S. 488:

$$\text{Ellipsoid} \quad \varphi = P + p \quad (1)$$

$$\text{Kugel} \quad u = Q + q \quad (2)$$

Da die Beziehung zwischen P und Q bekannt ist, handelt es sich jetzt nur noch um eine Beziehung zwischen p und q , welche in zwei Formen aufgestellt werden kann, nämlich:

entweder: $p = \frac{d \varphi}{d u} q + \frac{d^2 \varphi}{d u^2} \frac{q^2}{2} + \frac{d^3 \varphi}{d u^3} \frac{q^3}{6} + \dots$ (3)

oder: $q = \frac{d u}{d \varphi} p + \frac{d^2 u}{d \varphi^2} \frac{p^2}{2} + \frac{d^3 u}{d \varphi^3} \frac{p^3}{6} + \dots$ (4)

Dabei soll das Zeichen] andeuten, dass nach Ausführung der Differentierungen, $p = 0$ und $q = 0$, oder $\varphi = P$ und $u = Q$ zu setzen sei.

Wir wollen zuerst die Form (4) vornehmen und haben hiezu von (6) § 93. S. 487:

$$\frac{d u}{d \varphi} = \frac{1}{V^2} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \quad (5)$$

Hiebei ist, wie schon früher in § 34. S. 208 angegeben:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \quad (6)$$

$$\frac{d V}{d \varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t \quad (t = \tan \varphi) \quad (7)$$

$$\frac{d V^n}{d \varphi} = -n \eta^2 V^{n-2} t \quad \text{und} \quad \frac{d \eta^n}{d \varphi} = -n \eta^n t \quad (8)$$

Dieses haben wir, weil es wiederholt gebraucht wird, vorausgeschickt, und nehmen die ebenfalls mehrfach vorkommende Ableitung des zweiten Faktors von (5) besonders:

$$\frac{d}{d \varphi} \left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right) = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(-\alpha \sin u \frac{d u}{d \varphi} \cos \varphi + \alpha \cos u \sin \varphi \right) \quad (9)$$

Setzt man hier (5) ein, und berücksichtigt $V^2 = 1 + \eta^2$ nach (6), so wird:

$$\frac{d}{d \varphi} \left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right) = \frac{1}{V^2} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \left(-\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} + t + \eta^2 t \right) \quad (10)$$

Wenn man nun (5) nochmals ableitet, so hat man zuerst wegen (8):

$$\frac{d^2 u}{d \varphi^2} = \frac{2 \eta^2}{V^4} t \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} + \frac{1}{V^2} \frac{d}{d \varphi} \left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right)$$

Setzt man den bereits in (9) vorbereiteten Wert ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 u}{d \varphi^2} = \frac{1}{V^4} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \left(t + 3 \eta^2 t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right) \quad (11)$$

Als Vorbereitung der nächsten Ableitung hievon behandeln wir zuerst den letzten Teil, und finden in ähnlicher Weise wie oben bei (9) und (10):

$$\frac{d}{d \varphi} \left(\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right) = \frac{1}{V^2} \left(\left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right)^2 + \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} t (1 + \eta^2) \right) \quad (12)$$

Nun giebt (11) weiter:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 u}{d \varphi^3} &= \frac{4 \eta^2}{V^6} t \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \left(t + 3 \eta^2 t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right) \\ &+ \frac{1}{V^4} \frac{d}{d \varphi} \left(\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right) \left(t + 3 \eta^2 t - \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right) \\ &+ \frac{1}{V^4} \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \left((1 + t^2) - 6 \eta^2 t^2 + 3 \eta^2 (1 + t^2) - \frac{d}{d \varphi} \left(\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Da wir bei der dritten Potenz stehen bleiben wollen, handelt es sich jetzt darum, alle die Substitutionen zu machen, welche bei (3) und (4) durch] andeutet sind, d. h. $\varphi = P, u = Q$ zu setzen. Es ist aber nach (14) und (17) § 94. S. 489 $\alpha \sin Q = \sin P$ und $\alpha \cos Q = V \cos P$, und daraus folgt:

$$\frac{\alpha \sin u}{\sin \varphi} = 1 \quad \frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} = t \quad \frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} = V \quad (14)$$

und dieses in (10) und (12) gesetzt, giebt (da $V^2 = 1 + \eta^2$ ist):

$$\frac{d}{d\varphi} \left[\frac{\alpha \cos u}{\cos \varphi} \right] = \frac{\eta^2 t}{V} \quad \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{\alpha \sin u}{\cos \varphi} \right] = 1 + t^2 \quad (15)$$

Wenn man diese (14) und (15) in den drei allgemeinen Ableitungen (5), (11) und (13) einsetzt, so ziehen sich diese Ableitungen sehr zusammen, und wenn man alles gleichartige zusammen ordnet, so erhält man:

$$\frac{d u}{d q} \Big| = \frac{1}{V} \quad , \quad \frac{d^2 u}{d q^2} \Big| = \frac{3 \eta^2}{V^3} t \quad (16)$$

$$\frac{d^3 u}{d q^3} \Big| = \frac{3 \eta^2}{V^5} (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \quad (17)$$

Mit diesen (16) und (17) kann man die Formel (4) zusammensetzen:

$$q = \frac{1}{V} p + \frac{3}{2} \frac{\eta^2 t}{V^3} p^2 + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{V^5} (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) p^3 \quad (18)$$

Auf ähnlichem Wege wie diese Reihe, welche nach Potenzen von p fortschreitet, kann man auch die umgekehrte Reihe (3) finden, welche nach Potenzen von q fortschreitet und p bestimmt; indessen, wenn wir nicht weiter als bis zur dritten Ordnung gehen, bekommen wir die umgekehrte Reihe auch dadurch, dass wir geradezu die Reihe (18) stufenweise umkehren (vgl. § 29. S. 179—181). In erster Näherung giebt (18):

$$\begin{aligned} p &= q V + q^2 \dots , \quad p^2 = q^2 V^2 + q^3 \dots \\ p &= q V - \frac{3}{2} q^2 \eta^2 t , \quad p^2 = q^2 V^2 - 3 q^3 V \eta^2 t + \end{aligned}$$

Dieses p^2 und $p^3 = q^3 V^3$, in (18) eingesetzt, und alles nach gleichen Potenzen geordnet, giebt sofort:

$$p = q V - \frac{3}{2} \eta^2 q^2 t + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{V} (-1 + t^2 - \eta^2 + 5 \eta^2 t^2) q^3 \quad (19)$$

In den Reihen (18) und (19) sind p und q in analytischem Masse verstanden; wir wollen nun statt dessen die unabhängige Veränderliche p in (18), q in (19) in Graden, und die Funktion q oder p in Sekunden zählen; dann nehmen die Reihen (18) und (19) folgende Formen an (welche (6) und (5) S. 485 entsprechen):

$$q = \frac{3600}{V} p + \frac{3600}{\varrho^\circ} \frac{3}{2} \frac{\eta^2 t}{V^3} p^2 - \frac{3600}{\varrho^\circ} \frac{\eta^2}{2 V^5} (-1 + t^2 - \eta^2 - 4 \eta^2 t^2) p^3 \quad (20)$$

$$p = 3600 V q - \frac{3600}{\varrho^\circ} \frac{3}{2} \eta^2 t q^2 + \frac{3600}{\varrho^\circ} \frac{\eta^2}{2 V} (-1 + t^2 - \eta^2 + 5 \eta^2 t^2) q^3 \quad (21)$$

Wenn man hier die Coefficienten mit den Konstanten von § 94. ausrechnet, so bekommt man:

$$q = 3595,566 945 p + 0,304 138 6587 p^2 - 0,000 946 265 801 p^3 + \dots \quad (22)$$

$$p = 3604,438 521 q - 0,305 264 9836 q^2 + 0,001 002 642 525 q^3 + \dots \quad (23)$$

Wenn man diese Reihen als konvergierend und mit der dritten Potenz abbrechend behandeln will, so braucht man die Coefficienten nicht mit so vielen Stellen; wir haben jedoch viele Stellen ausgerechnet zur Vergleichung mit den Zahlenangaben von Gauss, welcher in Art. 6. und Art. 8. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie die Reihen bis zur fünften Potenz ausgeführt giebt. Insbesondere die zur Tafel-Berechnung von Gauss angegebene Reihe von Art. 8. ist

$$\left. \begin{aligned} p - q &= 443,852\,122 \frac{q}{100} \\ &- 3952,649\,780 \left(\frac{q}{100}\right)^2 [3.484\,6769\cdot820] \\ &+ 1002,642\,506 \left(\frac{q}{100}\right)^3 [3.001\,1461\cdot121] \\ &+ 4119,589\,282 \left(\frac{q}{100}\right)^4 [3.614\,8539\cdot196] \\ &- 431,181\,623 \left(\frac{q}{100}\right)^5 [2.634\,661] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die Anwendung dieser Reihe auf $q = -7^\circ$ und $q = +7^\circ$ gibt:

$$\begin{array}{ll} u = Q + q = 45^\circ 40' 0'' & 59^\circ 40' 0'' \\ q = -7^\circ & q = +7^\circ \\ -31,069\,995'' & +31,069\,965 \\ -14,957\,984 & -14,957\,984 \\ -0,343\,906 & +0,343\,906 \\ +0,098\,911 & +0,098\,911 \\ +0,000\,725 & -0,000\,725 \\ \hline p - q & +16,554\,073 \\ p = -7^\circ 0' 46,272\,219'' & +7^\circ 0' 16,554\,073'' \\ hiezu P = 52^\circ 42' 2,53251'' & 52^\circ 42' 2,53251'' \\ q = P + p = 45^\circ 41' 16,26029'' & 59^\circ 42' 19,08658'' \end{array}$$

Diese Werte liegen bereits jenseits der Grenzen der Gauss'schen Tafel, von der wir einen an den Grenzen etwas erweiterten Auszug auf Seite [60]—[61] des Anhangs gegeben haben.

Da das letzte Rechnungsglied immer noch $0,0007''$ ausmacht, und die Konvergenz nicht sehr stark ist, kann man schliessen, dass für die Genauigkeit von $0,00001''$, welche Gauss seiner Tafel gegeben hat, die Werte $q = -7^\circ$ und $q = +7^\circ$ als äusserste Grenzen zu betrachten sind.

§ 97. Reihen-Entwicklung für das Vergrösserungs-Verhältnis.

Das Vergrösserungs-Verhältnis ist nach (10) § 93. S. 487:

$$m = \frac{A \alpha \cos u}{c \cos \varphi} V \quad (1)$$

In der Normalbreite $\varphi = P$ (und $u = Q$) ist dieses Verhältnis $m = 1$; und wenn, wie bisher, irgend eine Breite auf der Kugel $u = Q + q$ gesetzt wird, so wird für irgend eine solche Breite sich das Verhältnis m als Funktion von q darstellen lassen, oder die Reihe für $\log m$ habe zunächst diese Form:

$$\log m = \frac{d \log m}{d q} q + \frac{d^2 \log m}{d q^2} \frac{q^2}{2} + \frac{d^3 \log m}{d q^3} \frac{q^3}{6} + \dots \quad (2)$$

Da aber die beiden ersten Ableitungen von $\log m$ gleich Null gesetzt wurden (4) und (5) § 94. S. 488), so zieht sich (2) zusammen auf:

$$\log m = \frac{d^3 \log m}{d q^3} \frac{q^3}{6} + q^4 \dots \quad (3)$$

Hiezu haben wir von (10) § 94. S. 489 die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2 \log m}{d u^2} = \frac{-\alpha^2 + V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u}{\alpha^2 \cos^2 u} = \frac{Z}{N} \quad (4)$$

also weiter:

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = \frac{1}{N^2} \left(\frac{d Z}{d u} N - \frac{d N}{d u} Z \right) \quad (5)$$

Wenn man nachher wieder die Substitutionen für die Normalbreiten Q und P nach (14) § 96. S. 495 zu machen hat, wird man finden, dass der Zähler Z in (4) verschwindet, es bleibt also nur von (5):

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = \frac{1}{N} \frac{d Z}{d u} \quad (6)$$

Da auch α^2 im Zähler Z von (4) konstant ist, handelt es sich also nur noch um:

$$\begin{aligned} \frac{d Z}{d u} &= \frac{d}{d u} (V^2 \cos^2 \varphi + \alpha \sin \varphi \sin u) \\ &= \left(2 V \frac{d V}{d \varphi} \cos^2 \varphi - 2 V^2 \cos \varphi \sin \varphi \right) \frac{d \varphi}{d u} + \alpha \cos \varphi \frac{d \varphi}{d u} \sin u + \alpha \sin \varphi \cos u \end{aligned} \quad (7)$$

Dabei ist nach (8) und (7) § 94. S. 489 zu beachten mit $\tan \varphi = t$:

$$\frac{d V}{d \varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t \quad \text{und} \quad \frac{d \varphi}{d u} = \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u}$$

Dieses in (7) eingesetzt giebt:

$$(-2 \eta^2 t \cos^2 \varphi - 2 V^2 \cos \varphi \sin \varphi) \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} + \alpha \cos \varphi \frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} \sin u + \alpha \sin \varphi \cos u$$

Nun muss man wieder die Substitutionen (14) § 96. S. 495 machen, wodurch $\frac{V^2 \cos \varphi}{\alpha \cos u} = V$ wird, und die vorstehende Gleichung giebt dadurch mit $t = \tan \varphi$:

$$\frac{d Z}{d u} = -2 V \eta^2 t \cos^2 \varphi - 2 V^3 \cos \varphi \sin \varphi + \alpha \cos \varphi V + \alpha \sin \varphi \cos u$$

Wenn man weiter den Nenner $N = \alpha^2 \cos^2 u$ aus (4) zusetzt und wieder von (14) § 96. S. 495 berücksichtigt, dass $\frac{\cos^2 \varphi}{N} = \frac{1}{V^2}$, so wird man vollends erhalten:

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = -\frac{2 \eta^2}{V} t - 2 V t + \frac{1}{V} t + \frac{1}{V} t$$

und mit $V^2 = 1 + \eta^2$ zieht sich dieses zusammen, wobei nun $t = \tan P$ wird:

$$\frac{d^3 \log m}{d u^3} = -\frac{4 \eta^2}{V} t = -\frac{4 \eta^2}{V} \tan P \quad (8)$$

Die gesuchte Reihe für $\log m$ ist daher nach (3):

$$\log m = -\frac{2 \eta^2}{3 V} t q^3 + q^4 \dots \quad \text{mit } t = \tan P \quad (9)$$

Wenn man hiebei stehen bleiben will, d. h. wenn man q^4 und p^4 vernachlässigen will, so kann man leicht auch $\log m$ in p^3 ausdrücken, denn da nach (19) § 96. S. 496 in erster Näherung $p = q V$ ist, kann man (9) auch so schreiben:

$$\log m = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t p^3 + \dots \quad \text{mit } t = \tan P \quad (10)$$

In (9) und (10) bedeutet \log den natürlichen Logarithmus; will man also gewöhnliche Brigg'sche Logarithmen haben, so muss man noch den Modulus μ zusetzen, und wenn man zugleich die Formeln für q oder p in Graden einrichten will, so muss man noch mit $q^{\circ 3}$ dividieren; d. h. man erhält aus (9):

$$\log m = -\frac{\mu}{q^{\circ 3}} \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t q^3 \quad \text{mit } t = \tan P \quad (11)$$

Die Ausrechnung mit den Konstanten von (25)–(28) § 94. S. 491 gibt für Einheiten der siebenten Logarithmenstelle:

$$\log m = -0.049\,796\,165\,q^3 + \dots \quad (12)$$

Auf gleiche Weise erhält man von (10):

$$\log m = -0.049\,612\,434\,p^3 + \dots \quad (13)$$

In Art. 7. und Art. 9. der „Untersuchungen über Gegenst. d. höheren Geodäsie“ hat Gauss diese Entwicklungen bis zur sechsten Potenz fortgesetzt, wodurch erhalten wurde:

$$\log m = -49796.16394 \left(\frac{q}{100} \right)^3 - 16150.3076 \left(\frac{q}{100} \right)^4 - 23973.954 \left(\frac{q}{100} \right)^5 \\ - 125\,671.0 \left(\frac{q}{100} \right)^6 \quad (14)$$

Dabei ist q in Einheiten von 1° und $\log m$ in Einheiten der 7ten Dezimale des Logarithmus gezählt. Unsere Formel (12) ist also nur die erste Näherung der Gauss'schen Formel (12a), nach welcher die Gauss'schen Werte $\log m$ unserer Anhangstafel Seite [60]–[61] berechnet sind. Beispielshalber nehmen wir für $q = -4^\circ$ oder $u = 46^\circ 40'$ und für $q = +4^\circ$ oder $u = 58^\circ 40'$ aus jener Tafel $\log m = +10.559$ und $\log m = -10.990$, während die Näherungsformel (12) in beiden Fällen nur gibt $\log m = +10.7$ und $= -10.7$.

Bisher haben wir immer nur $\log m$ behandelt, eine Formel für m selbst erhalten wir, da in (9) und (10) natürliche Logarithmen gelten, sehr einfach hieraus:

$$m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t q^3 + \dots \quad \text{oder} \quad m = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t p^3 \quad (15)$$

und umgekehrt (wobei immer $t = \tan P$ bedeutet):

$$\frac{1}{m} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} t q^3 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{m} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t p^3 \quad (16)$$

Reduktion von Entfernungen.

Der Wert m gilt nur für unendlich kleine Entfernungen, d. h. wenn dS eine kleine Entfernung auf dem Ellipsoid und ds die entsprechende Entfernung auf der Kugel bedeutet, so ist

$$m = \frac{ds}{dS} \quad \text{oder} \quad dS = \frac{1}{m} ds$$

und um auch endliche Entfernungen s und S vergleichen zu können, hat man diese Gleichung zu integrieren, ähnlich wie schon in § 50. S. 282 und in § 85. S. 455 geschehen ist.

Zu diesem Zwecke zählen wir die sphärische Breiten-Differenzen q von einem Werte q_1 an, welcher dem Anfang des ganzen Bogens s entspricht und die Länge des Bogens s selbst zählen wir ebenfalls vom Anfang an mit $+x$ in dem Azimut β_1 .

Da der Kugelhalbmesser = A ist, haben wir die Breiten-Differenz $q - q_1$ als eine Reihe nach Potenzen von x mit dem Ausgangs-Azimut β_1 , d. h. wir können dazu die früheren allgemeinen Reihenentwicklungen von § 64. benützen, d. h. wir haben

von (27) S. 359 mit $u = \frac{x}{A} \cos \beta_1$ und mit $v = \frac{x}{A} \sin \beta_1$:

$$\text{Breitendifferenz } q - q_1 = \frac{x}{A} \cos \beta_1 - \frac{x^2}{2 A^2} \sin^2 \beta_1 \tan(Q + q_0)$$

Es genügt für das Folgende zu wissen, dass dieses eine quadratische Funktion von x ist, und dass damit auch $\frac{1}{m}$ nach (16) sich in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lassen wird, ganz ebenso wie bei einer früheren ähnlichen Betrachtung von § 85. sich der Ausdruck $\frac{1}{m}$ als eine Potenzreihe $\alpha + \beta l + \gamma l^2 + \dots$ auf S. 456. oben darstellen liess.

Das genügt auch, um die Beziehung zwischen einer auf dem Ellipsoid liegenden geodätischen Linie S und ihrem Abbilde s auf der Kugel durch eine Beziehung darzustellen, welche der früheren (31) § 85. S. 457 oder auch (16) § 50. S. 282 entsprechend, in erster Näherung so lautet:

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (17)$$

wobei m_1 das Vergrösserungs-Verhältnis am Anfang, m_0 in der Mitte und m_2 am Ende bedeutet.

Wenn die verschiedenen m nicht sehr verschieden sind, so kann man noch mehr genähert rechnen, und z. B. logarithmisch kurz so nehmen:

$$\log s - \log S = \frac{\log m_1 + \log m_2}{2} \quad (18)$$

Das ist auch dasselbe, wie wenn man schreibt:

$$\frac{s}{S} = \sqrt{m_1 m_2} \quad (19)$$

Dazu sei auch nochmals bemerkt, dass S die geodätische Linie auf dem Ellipsoid und s die entsprechende Linie auf der konformen Kugel vom Halbmesser A ist.

§ 98. Azimut-Reduktion.

Wenn zwei Punkte des Ellipsoids auf die Kugel konform abgebildet sind, so kann man auch die Verbindungslinien beider Punkte in Betracht ziehen, und zwar denken wir uns auf dem Ellipsoid beide Punkte durch eine geodätische Linie und auf der Kugel durch einen Grosskreisbogen verbunden.

Man darf aber nicht annehmen, dass nun der Grosskreisbogen schlechthin die Abbildung der geodätischen Linie sei; das ist ebensowenig der Fall, als dass bei der ebenen konformen Abbildung von § 50. die Gerade in der Ebene als Abbildung des Grosskreisbogens genommen werden dürfte, und wir werden eine ähnliche Betrachtung wie bei Fig. 5. S. 281 oder Fig. 2. S. 453 nun auch für die Kugelabbildung anzustellen haben.

In nebenstehender Fig. 1., welche sich auf die Kugel bezieht, betrachten wir zwei von dem Ellipsoid herübergetragene Punkte mit den Kugelbreiten u und u' und dem Längen-Unterschied αl . Der mit K bezeichnete Verbindungsbogen sei grösster Kreisbogen der Kugel, und außerdem haben wir eine Kurve G gezogen, welche das konforme Kugel-Abbild der geodätischen Linie des Ellipsoids ist.

Eine geodätische Linie des Ellipsoids bildet sich, wie schon zu Anfang bemerkt wurde, im allgemeinen nicht als Grosskreisbogen der Kugel ab, und es handelt sich nun darum, die Azimut-Differenzen $\alpha - \beta$ und $\beta' - \alpha'$ zwischen dem Abbild G der geodätischen Linie und dem Grosskreisbogen K zu bestimmen.

Nach dem Prinzip der Konformität sind hiebei die Azimute α und α' , welche das Abbild der geodätischen Linie auf der Kugel zeigt, gleich den Azimuten α und α' der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid, so dass die Azimut-Differenzen $\alpha - \beta$ und $\alpha' - \beta'$ der sphärischen Fig. 1. das sind, was wir bestimmen müssen.

Unsere nächste Aufgabe wird sein, das Krümmungs-Differential der Linie G relativ gegen K (Fig. 1.) zu bestimmen, und dafür haben wir mit Fig. 2. eine Differential-Figur zu Fig. 1. besonders herausgezeichnet.

Wir betrachten mit Fig. 2. die Meridian-Konvergenz $\alpha_2 - \alpha_1$ für ein kleines Stück des Abbildes der geodätischen Linie, und die Meridian-Konvergenz $\beta_2 - \beta_1$ für ein entsprechendes, zwischen denselben Meridianen liegendes Stück des Kreisbogens. Dabei ist dl der Längenunterschied auf dem Ellipsoid, also αdl der entsprechende Längenunterschied auf der Kugel, wobei α die Längen-Reduktionskonstante nach (15) § 94. S. 489 bedeutet.

Dazu bestehen zwei Differentialgleichungen:

$$\text{Grosskreisbogen } KK' \quad \beta_2 - \beta_1 = dl \sin \varphi \quad (1)$$

$$\text{Ellipsoid oder Kugel-Abbild } G G' \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha dl \sin u \quad (2)$$

$$\text{Also die Differenz } \delta = (\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = dl(\alpha \sin u - \sin \varphi) \quad (3)$$

Diese Differenz δ ist die Krümmung des Bogens GG' , indem die drei anderen Seiten des unendlich kleinen Vierecks Fig. 2. als Grosskreisbogen keine geodätische Krümmung haben und in der Differentialbetrachtung als Gerade zu betrachten sind. Es ist nämlich die Winkelsumme des kleinen Vierecks von Fig. 2.:

$(180^\circ - \beta_1) + \beta_2 + (180^\circ - \alpha_2) + \alpha_1 = 360^\circ + (\beta_2 - \beta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = 360^\circ + \delta$
und dieses stimmt mit dem in Fig. 2. eingeschriebenen Winkel δ , sowie mit der Bedeutung von δ in der Gleichung (3).

Zur schärferen Begründung der Gleichung (3) mag auch noch bemerkt werden, dass der Querabstand y der Linien K und G sich nachher als sehr klein, nur von der Ordnung $\eta^2 s^2 q^2$ zeigen wird und deswegen kommt der sphärische Excess des kleinen Vierecks, d. h. die Flächenkrümmung neben der Linienkrümmung, nicht in Betracht.

Fig. 1. (Kugel).

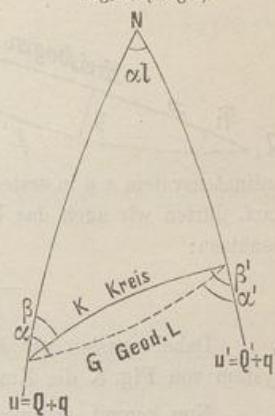
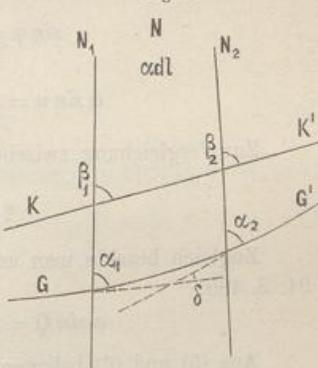


Fig. 2.



Wir wollen nun mit Fig. 3. ein sphärisches Coordinatensystem $x y$ annehmen, wobei der Kreisbogen $Q_1 Q_2$ als x -Axe die Bedeutung von der Linie K in Fig. 1. und Fig. 3.



der Linie L' von Fig. 3. dieselbe Bedeutung wie die Linie G in Fig. 1. hat, nämlich konformes Abbild der geodätischen Linie.

Da man nun aus den schon angegebenen Gründen das sphärische Coordinatensystem $x y$ in erster Näherung wie ein ebenes rechtwinkliges System behandeln darf, dürfen wir auch das bei (3) gefundene Krümmungs-Differential zu der Gleichung benutzen:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\delta}{\alpha} = (\alpha \sin u - \sin \varphi) \frac{dl}{dx} \quad (4)$$

Dabei mussten wir die linke Seite negativ schreiben, weil bei dem Coordinatenystem von Fig. 3. die Kurve L' gegen die x -Achse konkav ist.

Nun kommt es zuerst darauf an, die Funktion $\alpha \sin u - \sin \varphi$ zu entwickeln, und dazu haben wir nach Fig. 3. und Fig. 4. § 93. S. 488

$$\varphi = P + p \quad u = Q + q$$

also nach der Taylor schen Reihe:

$$\sin \varphi = \sin P + p \cos P - \frac{p^2}{2} \sin P \quad (5)$$

$$\alpha \sin u = \alpha \sin Q + \alpha q \cos Q - \alpha \frac{q^2}{2} \sin Q \quad (6)$$

Zur Vergleichung zwischen p und q hat man nach (18) § 96. S. 496 die Reihe:

$$q = \frac{p}{V} + \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{V^3} p^2 \tan P \quad (7)$$

Zugleich beachte man auch die Grundformeln für P und Q nach (14) und (17) § 94. S. 489:

$$\alpha \sin Q = \sin P \quad \text{und} \quad \alpha \cos Q = V \cos P \quad (8)$$

Aus (5) und (6) bekommt man zunächst, da sich die ersten Glieder wegen (8) aufheben:

$$\alpha \sin u - \sin \varphi = \alpha q \cos Q - p \cos P + \frac{p^2 - q^2}{2} \sin P \quad (9)$$

Wegen (8) und (7) ist aber:

$$\alpha q \cos Q = V \cos P \left(\frac{p}{V} + \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{V^3} p^2 \tan P \right)$$

und wegen (7):

$$p^2 = q^2 V^2 = q^2 (1 + \eta^2) \quad \text{oder} \quad p^2 - q^2 = \frac{p}{V^2} \eta^2$$

Damit kann man (9) zusammensetzen:

$$\alpha \sin u - \sin \varphi = \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{V^2} p^2 \sin P + \frac{1}{2} \frac{p^2}{V^2} \eta^2 \sin P$$

$$\alpha \sin u - \sin \varphi = \frac{2 \eta^2}{V^2} p^2 \sin P \quad \text{oder} \quad = 2 \eta^2 q^2 \sin P \quad (10)$$

Zurückgreifend auf (4) haben wir also die Krümmungs-Differentialgleichung:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \eta^2 q^2 \sin P \frac{dl}{dx} \quad (11)$$

Das Differential dl der geographischen Länge l hat man nach der allgemeinen Reihenentwicklung von (6) § 74. S. 393:

$$dl = \frac{V \sin \alpha}{c \cos \varphi} = \frac{dS \sin \alpha}{N \cos \varphi} \quad (12)$$

Statt dS für die geodätische Linie können wir in unserem Falle genügend genau dx setzen, und indem wir auch noch in erster Näherung $\varphi = P$ nehmen, haben wir aus (11) und (12):

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 \eta^2}{N} q^2 \sin \alpha \tan P \quad (13)$$

Dabei beziehen sich N , α und P auf das Ellipsoid, und wenn wir zur Kugel übergehen wollen, ist $N = A V$ zu setzen (da N die Bedeutung von r in (24) § 32. S. 197 hat). Das Azimut α kann hinreichend genau gleich dem Kugelazimut β gesetzt werden und nach (8) ist $\tan Q = V \tan P$, folglich giebt nun (13) beim Übergang zur Kugel:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 \eta^2 q^2}{A V^2} \sin \beta \tan Q \quad (14)$$

wobei wir zur Abkürzung schreiben wollen:

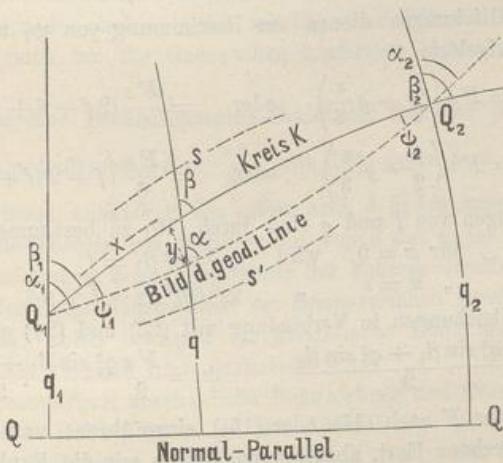
$$\frac{2 \eta^2}{A V^2} \sin \beta \tan Q = F \quad (15)$$

oder $\frac{2 \eta^2}{A V} \sin \beta \tan P = F \quad (15a)$

Um auf x überzugehen, haben wir in erster Näherung nach Fig. 4. zu setzen:

$$q = q_1 + \frac{x}{A} \cos \beta_1 + \dots \quad \text{also} \quad q^2 = q_1^2 + 2 q_1 \frac{x}{A} \cos \beta_1 + \dots \quad (16)$$

Fig. 4.



Hiebei ist q_1 derjenige Wert von q , welcher zu dem Anfangspunkt Q_1 gehört, und q_2 derjenige Wert von q , welcher zu dem Endpunkte Q_2 des betrachteten Bogens s

gehört. In gleicher Weise haben wir auch für das Azimut β , welches der Breite q und der Abscisse x entspricht, nach (29) S. 359 mit $v = \frac{x}{A} \sin \beta_1$:

$$\beta = \beta_1 + \frac{x}{A} \sin \beta_1 \tan Q_1$$

$$\sin \beta = \sin \beta_1 + \frac{x}{A} \sin \beta_1 \cos \beta, \cos \beta, \tan Q_1 \quad (17)$$

Man hat also aus (16) und (17):

$$q^2 \sin \beta = q_1^2 \sin \beta_1 + \frac{x}{A} (2 q_1 \sin \beta_1 \cos \beta_1 + q_1^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 \tan Q_1) \quad (18)$$

Dieses ist eine lineare Funktion von x , welche zur vorübergehenden Abkürzung so geschrieben werden mag:

$$q^2 \sin \beta = f + g x, \text{ wobei } f = q_1^2 \sin^2 \beta_1 \quad (19)$$

Damit wird nach (14) und (15):

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = F(f + g x) \quad (20)$$

$$\text{integriert: } -\frac{dy}{dx} = -\psi_1 + F\left(fx + \frac{gx^2}{2}\right) \quad (21)$$

$$-y = -\psi_1 x + F\left(\frac{fx^2}{2} + \frac{gx^3}{6}\right) \quad (22)$$

Dabei ist $-\psi_1$ bei (2) als Integrations-Konstante zugesetzt, während in (22) bei y , das mit $x = 0$ verschwinden muss, keine weitere Integrations-Konstante hinzukommt. Wenn $x = s$ wird, so muss $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = -\psi_2$ werden, dieses giebt aus (22) und (21) folgende zwei Gleichungen:

$$0 = -\psi_1 s + F\left(\frac{fs^2}{2} + \frac{s^3}{6}\right) \\ + \psi_2 = -\psi_1 + F\left(fs + \frac{s^2}{2}\right)$$

Diese zwei Gleichungen dienen zur Bestimmung von ψ_1 und ψ_2 , und geben nach ψ_1 und ψ_2 aufgelöst:

$$\psi_1 = Fs\left(\frac{f}{2} + g\frac{s}{6}\right) \quad \text{oder} \quad = \frac{Fs}{6}(2f + f + gs) \quad (23)$$

$$\psi_2 = Fs\left(\frac{f}{2} + g\frac{s}{3}\right) \quad \text{oder} \quad = \frac{Fs}{6}(f + 2(f + gs)) \quad (24)$$

Die Bedeutungen von f und g sind durch (19) zu bestimmen:

$$\text{für } x = 0 \quad \text{wird} \quad q_1^2 \sin^2 \beta_1 = f$$

$$\text{„ } x = s \quad \text{,} \quad q_2^2 \sin^2 \beta_2 = f + gs$$

Diese zwei Gleichungen in Verbindung mit (23) und (24) geben:

$$\psi_1 = \frac{Fs}{2} \frac{2q_1^2 \sin \beta_1 + q_1^2 \sin \beta_2}{3} \quad \psi_2 = \frac{Fs}{2} \frac{q_1^2 \sin \beta_1 + 2q_1^2 \sin \beta_2}{3} \quad (25)$$

Um den Faktor F nach (15) oder (15_a) einzuführen, und nachher das, was sich tabellarisch berechnen lässt, abzutrennen, führen wir die Funktion ein:

$$\frac{\eta^2}{V^2} \tan Q q^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\eta^2}{V} \tan P q^2 = k \quad (26)$$

Dieses allgemeine k wird auf den Anfangspunkt und auf den Endpunkt angewendet mit:

$$k_1 = \frac{\eta^2}{V} \tan P q_1^2 \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{\eta^2}{V} \tan P q_2^2 \quad (27)$$

Damit gehen die Formeln (25) und (26) in diese Formen über:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \psi_1 = \frac{2 k_1 \sin \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \quad (28)$$

$$\beta_2 - \alpha_2 = \psi_2 = \frac{k_1 \sin \alpha_1 + 2 k_2 \sin \alpha_2}{3} \frac{s}{A} \quad (29)$$

Zur Anwendung in Zahlen muss man die Funktion k nach (26) auf bestimmtes Mass einrichten. Nehmen wir wie bisher q in Graden und dann die kleinen Winkel ψ in Sekunden, so hat man zu setzen:

$$k = \frac{\varrho''}{\varrho''^2} \frac{\eta^2}{V} \tan P q^2 = 20 \pi \frac{\eta^2}{V} \tan P q^2$$

mit den Konstanten von § 98. wird dieses ausgerechnet:

$$k = 0,203\,259\,386 q^2 \quad (\log = 1.798\,1798)$$

Die hiernach berechneten Werte k sind nur erste Näherungen, welche von den genaueren Werten k der Gauss'schen Tafel ähnliche Abweichungen zeigen, wie zwischen den ersten Näherungen und den genauen Werten von $\log m$, welche wir bei (14) § 97. S. 499 zusammengestellt haben.

§ 99. Allgemeine Beziehung zwischen dem Vergrösserungs-Verhältnis m und dem Krümmungs-Differential der Abbildung.

Im vorigen § 98. haben wir das Krümmungs-Differential δ des Abbildes einer geodätischen Linie durch eine Differentialbetrachtung in Fig. 2. S. 501 aus den besonderen Eigenschaften unseres Abbildungsfalles hergeleitet, und es wird wohl immer möglich sein, die besondere Art einer konformen Abbildung zu Rat zu ziehen, um jenes Krümmungs-Differential zu erlangen.

So haben wir z. B. auch in § 50. mit Fig. 2. S. 283 und in § 85. mit Fig. 2. S. 453, und auch noch bei der Gauss'schen konformen ebenen Abbildung in § 88. S. 472 verfahren.

Es gibt aber eine ganz allgemeine Beziehung zwischen dem Differential dm und dem Krümmungs-Differential $\delta = \frac{ds}{R}$, mit Hilfe deren man, sobald m , das man ja jedenfalls haben muss, entwickelt ist, sofort auch δ finden kann.

Die allgemeine Theorie zur Bestimmung von δ aus m ist von Gauss in Art. 12.—13. der Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie und in §. 14. von Schreiber, Théorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung, Hannover 1866, gegeben, wobei beidemal die geodätische Linie nach den Regeln der Variationsrechnung als kürzeste Linie aufgefasst wird.

Eine mehr geometrisch anschauliche Entwicklung und Darstellung dieser Bahn hat Professor Schols in Delft gegeben in der Abhandlung: Annales de l'école polytechnique de Delft. 1re livraison. Leide, E. J. Brill 1884. Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur, par Ch. M. Schols.

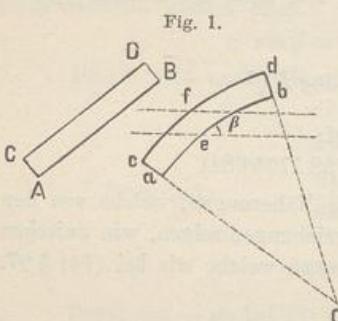
In § 10. dieses Werkes wird mit beistehender Fig. 1. entwickelt:

Das Rechteck $A B C D$ des Urbildes sei aus unendlich kleinen geodätischen Linien gebildet, und werde konform abgebildet in dem krummlinigen Viereck $a b c d$. Durch die Mitten e und f der Seiten $a b$ und $c d$ werden Linien gezogen, in welchen das Vergrösserungs-Verhältnis konstant ist.

(Diese Linien für konstantes Vergrösserungs-Verhältnis m sind in Fig. 1. punktiert gezogen, wobei auch bemerkt sei, dass e die Mitte von $a b$ sein sollte, was in dem Holzschnitt etwas verfehlt dargestellt ist).

Wenn $d z$ der Parallelabstand der beiden punktierten Linien und β deren Winkel mit $a b$ ist, so haben wir:

$$\alpha c = b d = e f \frac{d z}{\cos \beta} \quad (1)$$



Die kurzen Linien $c a$ und $d b$ werden verlängert bis zu ihrem Schnitte o , so dass $o a$ der Krümmungs-Halbmesser der Kurve $a b$ ist, woraus folgt:

$$\frac{o c}{o a} = \frac{o a + a c}{o a} = \frac{c d}{a b} \quad (2)$$

also aus (1) und (2) zusammen:

$$\frac{o a + \frac{d z}{\cos \beta}}{o a} = 1 + \frac{1}{o a \cos \beta} \frac{d z}{\cos \beta} = \frac{c d}{a b} \quad (3)$$

Nun ist zu beachten, dass Fig. 1 eine Differentialfigur sein soll, dass also $c d$ und $a b$ unendlich klein sind, dass also längs $c d$ und $a b$ das Vergrösserungs-Verhältnis m als konstant gilt, und zwar sei:

$$m = \frac{a b}{A B} \quad \text{und} \quad m + d m = \frac{c d}{C D} = \frac{c d}{A B}$$

$$\frac{c d}{a b} = \frac{m + d m}{m} = 1 + \frac{d m}{m} \quad (4)$$

Man hat also aus (3) und (4):

$$1 + \frac{1}{o a} \frac{d z}{\cos \beta} = 1 + \frac{d m}{m}$$

Bezeichnen wir den Krümmungs-Halbmesser $o a$ mit R oder die Krümmung mit $1 : R$, so haben wir also:

$$\text{Krümmung} \quad \frac{1}{R} = \frac{d m}{m d z} \cos \beta \quad (5)$$

oder wenn mit $\log m$ der natürliche Logarithmus von m bezeichnet wird:

$$\text{Krümmung} \quad \frac{1}{R} = \frac{d \log m}{d z} \cos \beta \quad (6)$$

Als erste Anwendung dieser allgemeinen Formel wollen wir den besonderen Fall von § 50. S. 281 nehmen mit:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2 r^2} \quad \text{oder} \quad \log m = \frac{y^2}{2 r^2} \quad (7)$$

Die Richtung der z ist hier mit der Richtung y übereinstimmend, weil die Linien für konstantes m nach Fig. 3. S. 279 parallel der x -Axe gehen, und β von (6) ist

der Richtungswinkel t_1 von Fig. 6. S. 283, es giebt also die allgemeine Gleichung (6) in unserem besonderen Falle:

$$\text{Krümmung } \frac{1}{R} = \frac{\frac{y^2}{d^2 r^2}}{\frac{dy}{dx}} \cos t_1 = \frac{y}{r^2} \cos t_1 \quad (8)$$

Dieses (12) stimmt mit (28) Fig. 50. S. 283, wenn man das auf der folgenden Seite 284 oben stehende $\frac{dx}{d\xi} = \cos t_1$ berücksichtigt, und auch das Vorzeichen — entsprechend der Lage des Coordinatensystems einsetzt.

Nach dieser ersten Anwendung auf den einfachen Fall von § 50. wollen wir auch die Anwendung der allgemeinen Formel (6) auf unseren Fall der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel vornehmen.

Dabei ist es zuerst nötig, die Bedeutung des Winkels β aufzusuchen, d. h. des Winkels, welchen eine abzubildende geodätische Linie mit den Linien konstanter Vergrösserung m bildet, und da in unserem Falle die Vergrösserung m nur von der geographischen Breite abhängt, ist das β der allgemeinen Formel (6) entsprechend $90^\circ - \alpha$, wenn α das von der Meridianrichtung an gezählte Azimut ist. Setzen wir außerdem die Krümmung $1 : R = -\frac{d^2 y}{dx^2}$ in dem Sinne von Fig. 3. und Fig. 4. § 98. S. 502 und 503, so haben wir aus (6) zunächst:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d \log m}{dz} \sin \alpha \quad \text{oder} \quad = \frac{d \log m}{dz} \sin \beta \quad (9)$$

wobei die Azimute α und β von Fig. 4. § 98. S. 503 hinreichend als gleich angenommen werden können. Weiter haben wir von (9) und (10) § 97. S. 498:

$$\log m = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} \tan P p^3 \quad \text{oder} \quad = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} \tan P q^3 \quad (10)$$

Das Differential dz , welches in der allgemeinen Formel (6) vorkommt, ist in der Meridianrichtung zu suchen, d. h. es ist $dz = A dq$, wobei nach (24) S. 197 der mittlere Krümmungs-Halbmesser des Ellipsoids, welcher als Kugelabbildungs-Halbmesser dient, ist:

$$A = \frac{c}{V^3} \quad \text{oder auch} \quad A = \frac{N}{V}$$

weshalb man nun hat:

$$\begin{aligned} \frac{d \log m}{dz} &= \frac{d \log m}{dq} \frac{dq}{dz} = -\frac{2}{V} \frac{\eta^2}{V} q^2 \tan P \frac{dq}{dz} \\ \frac{d \log m}{dz} &= -\frac{2}{V} \frac{\eta^2 q^2}{V A} \tan P = -\frac{2}{V^2} \frac{\eta^2 q^2}{A} \tan Q \end{aligned} \quad (11)$$

Dabei ist $\tan Q = V \tan P$ gesetzt nach (17a) § 94. S. 489.

Aus (6) und (7) hat man also jetzt:

$$-\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{2}{V^2} \frac{\eta^2 q^2}{A} \tan Q \sin \beta \quad (12)$$

Dieses (8) stimmt mit dem früheren (14) § 98. S. 503, womit also eine zweite Herleitung des Krümmungs-Differentials gegeben ist, aus welchem die Azimut-Reduktionen von § 98. sich ergeben.

§. 100. Hilfstafeln und Zahlenbeispiele.

Gauss hat eine ausführliche Tafel zur Reduktion der sphärischen Breiten auf sphäroidische Breiten nebst $\log m$ und k berechnet und in den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“, erste Abhandlung S. 37—45 mitgeteilt. (Carl Friedrich Gauss’ Werke, IV. Band, Göttingen 1873, S. 293—300.)

Auf Seite [60]—[61] unseres Anhangs haben wir einen Auszug der Gauss’schen Tafel abgedruckt, mit dem 10fachen Intervall $\Delta u = 10'$, ($\Delta u = 1'$ bei Gauss). Außerdem haben wir auf Seite [59] eine Hilfstafel zur Reduktion der geographischen Längen mit der Konstanten α beigegeben.

Unsere Haupttafel Seite [60]—[61] verlangt Interpolation mit zweiten Differenzen, wozu § 30. S. 183 Anleitung giebt. Damit bekommt man nahezu dieselbe Genauigkeit, wie mit der Originaltafel selbst, so dass für einzelne Fälle der Auszug als Ersatz des nicht immer zugänglichen Originals dienen kann. Auch giebt der Auszug eine bequeme Übersicht der Gesamt-Verhältnisse; man sieht z. B., dass $\log m$ nicht über 0·1 geht auf der ganzen breiten Zone von $51^\circ 20'$ bis $54^\circ 0'$. Ähnlich verhält es sich mit den Azimut-Korrektionen, welche von der Tafelgröße k abhängen; man kann also auf dieser ganzen nahe 3° oder rund 300 000 Meter breiten Zone eine Triangulierung sphärisch berechnen, ohne eine andere Nebenarbeit als das Verwandeln der Breiten φ und u durch Aufschlagen in der Tafel.

Wenn die neuen Berechnungen der trigonometrischen Abteilung der Preussischen Landesaufnahme, die wir schon in § 94. bei (24)—(25) S. 490 erwähnt haben, veröffentlicht sein werden, so werden diese an Stelle der alten Gauss’schen Originaltafeln zu benützen sein.

Ausser der Gauss’schen Tafel ist in neuerer Zeit noch eine zweite solche Tafel mit südlicherer Normalbreite, nämlich $Q = 46^\circ 36'$, berechnet worden von Marek und Horsky. Dieselbe, welche, wie die Gauss’sche Tafel, die Bessel’schen Erddimensionen zu Grunde legt, ist mitgeteilt in dem Werke von Marek: „Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters, Budapest 1875“, S. 252—262. Einiges weitere hierüber haben wir früher in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1877*, S. 40—46 mitgeteilt, und einen Auszug der Marek’schen Tafel gab unsere frühere dritte Auflage, Karlsruhe 1878, S. 403—404.

Als Anwendung der Gauss’schen Theorie und der zugehörigen Hilfstafeln wollen wir die Berechnung unseres kleinen sphäroidischen Normal-Beispiels (1) § 73. S. 391 nehmen in dieser Form:

$$\begin{aligned} \text{Gegeben: } \varphi_1 &= 49^\circ 30' 0'' & \varphi_2 &= 50^\circ 30' 0'' & (1) \\ l &= 1^\circ 0' 0'' & & & (2) \end{aligned}$$

Gesucht: α_1 , α_2 und s .

Das erste ist, die Breiten φ_1 und φ_2 auf die Kugel zu übertragen, d. h. die entsprechenden u_1 und u_2 aus der Tafel zu entnehmen. Von Seite [60] unseres Anhangs haben wir:

u	φ	Differenzen
$49^\circ 20' 0''$	$49^\circ 21' 44,31358''$	
$49^\circ 30' 0''$	$49^\circ 31' 45,38838''$	$+ 10' 1,07480'' - 0,01736''$
$10' 0''$		$= 601,07480''$
$= 600''$		

$\varphi = 49^\circ 30'$ hat gegen die Nachbarwerte die Differenzen:

$$\begin{aligned} \text{und } & - 8' 15,68642'' = - 495,68642'' \\ & + 1' 45,38838'' = + 105,38838'' \quad \left. \right\} 601,07480'' \end{aligned}$$

Die Interpolation mit Rücksicht auf zweite Differenzen gab:

$$u = 49^\circ 28' 14,79882''$$

Die Rechnung nach der Gauss'schen Originaltafel gab auf 0,00001" genau daselbe, nämlich die Zusammenstellung für alle Werte, die uns hier interessieren:

Ellipsoid, φ	Kugel, u	$\log m$	k	
$49^\circ 30' 0''$	$u_1 = 49^\circ 28' 14,79881''$	1·609	2,049"	
$50^\circ 0' 0''$	$49^\circ 58' 11,67462''$	0·969	1,462"	
$50^\circ 30' 0''$	$u_2 = 50^\circ 28' 8,70541''$	0·525	0,973"	

Aus den drei Werten $\log m$ bilden wir einen Mittelwert nach dem Gesetze der Gleichung (17) § 97. S. 500, welcher in der dort angegebenen Weise auch für $\log m$ gilt, und in unserem Falle giebt:

$$\log m = \frac{1 \cdot 609 + 4 \times 0 \cdot 969 + 0 \cdot 525}{6} = 1 \cdot 017 \quad (4)$$

Der Längenunterschied $l = 1^\circ 0' 0''$ wird auf die Kugel reduziert durch Multiplikation mit der Konstante α , bzw. durch Benützung der Hilfstafel Seite [59] des Anhangs, mit dem Ergebnis:

$$\lambda = \alpha l = 1^\circ 0' 1,630505'' \quad (5)$$

Nun macht man mit u_1 und u_2 von (3) nebst λ von (5) eine sphärische Dreiecksberechnung nach (4) und (5) § 60. S. 339, wodurch man erhält:

$$\text{Sphärische Azimute } \beta_1 = 32^\circ 25' 21,4923'' \quad \beta_2 = 33^\circ 11' 19,4197'' \quad (6)$$

$$\text{und } \log \sin \frac{\sigma}{2} = 8 \cdot 015 \ 5452 \cdot 409 \quad , \quad \frac{\sigma}{2} = 0^\circ 35' 37,85453''$$

$$\begin{aligned} s' &= A \frac{\sigma}{\varrho} \text{ giebt } \log s' = 5.121 \ 6104 \cdot 130 \\ \text{hiezu nach (4)} &\quad - \log m = -1 \cdot 017 \\ &\quad \hline \log s = 5.121 \ 6103 \cdot 113 \quad , \quad s = 132 \ 315,375'' \end{aligned} \quad (7)$$

Es folgen noch die Azimut-Reduktionen nach den Formeln (28) und (29) §. 98. S. 505. Man hat hiezu die schon bei (3) angegebenen k und die abgerundeten Azimute:

$$\begin{array}{ll} k_1 = 2,049'' & k_2 = 0,973'' \\ \alpha_1 = 32^\circ 25' & \alpha_2 = 33^\circ 11' \end{array}$$

Die Ausrechnung nach den Formeln (28) und (29) S. 505 giebt:

$$\psi_1 = \alpha_1 - \beta_1 = +0,0189'' \quad = \psi_2 = \alpha_2 - \beta_2 = -0,0149''$$

Diese Reduktionen zu β_1 und β_2 in (6) hinzugefügt, geben die sphäroidischen Azimute:

$$\alpha_1 = 32^\circ 25' 21,5112'' \quad \alpha_2 = 33^\circ 11' 19,4048'' \quad (8)$$

In diesen (7) und (8) besteht die Auflösung der gestellten Aufgabe, und diese (7) und (8) stimmen auch hinreichend überein mit den entsprechenden Zahlenwerten von § 73. (1) S. 391.

§ 101. Doppel-Projektion der Preussischen Landesaufnahme.

Die Gauss'sche konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel ist zu einer wichtigen, praktischen Anwendung gebracht worden durch General Schreiber bei der trigonometrischen Abteilung der Preussischen Landesaufnahme.

Als Quellschriften hiefür sind zu citieren:

„Verhandlungen der 1887er Konferenz in Nizza der perm. Komm. d. intern. Erdm., Berlin 1888, Annex Xb“, S. 10–12, und frühere Mitteilung in Jordan-Steppes „Deutsches Vermessungswesen, 1882, L“, S. 151–154. Weiteres ist auch citiert und erläutert in „Zeitschr. f. Verm.“, 1886*, S. 253–256, und „Zeitschr. f. Verm.“, 1889*, S. 8–14.

Namentlich v. Schmidt: Projektionsmethode der trigonometrischen Abteilung der Königl. Preuss. Landesaufnahme, „Zeitschr. f. Verm.“, 1894*, S. 385–401 und S. 409–418.

Es mag auch hier nochmals an das erinnert werden, was wir schon in § 59. S. 330–332 hiezu angegeben haben.

Wenn man nach der Gauss'schen Theorie das Ellipsoid auf eine Kugel abgebildet hat, so dass jedem Punkte mit der Länge l und der Breite φ auf dem Ellipsoid, ein Punkt mit der Breite u und der Länge λ auf der Kugel entspricht, so kann man mit diesen sphärischen geographischen Coordinaten u, λ beliebige sphärische Umwandlungen vornehmen, z. B. daraus sphärische rechtwinklige Coordinaten x, y ableiten, und diese letzteren Coordinaten kann man wieder konform in ebene rechtwinklige Coordinaten x, y abbilden.

Dieses ist das System der Doppel-Projektion, welches für die trigonometrische Abteilung der Preussischen Landesaufnahme angenommen worden ist.

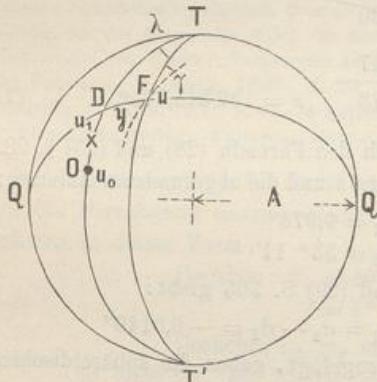
Als Vorbereitung hiezu haben wir bereits in § 50. und in § 85. manches gehabt, was nun weiter auszuführen ist.

I. Berechnung der sphärischen rechtwinkligen Coordinaten x, y .

In Fig. 1. haben wir die Gauss'sche Kugel, vom Halbmesser A (nach § 94. S. 489), und darauf einen Meridian $T O T'$, von welchem die Längen λ gezählt werden.

Fig. 1.

Kugel mit dem Halbmesser A .
 $D F = y$



naten x, y , nebst der Meridian-Konvergenz γ zu bestimmen, so liefert uns die sphärische Trigonometrie sofort:

$$\tan u_1 = \frac{\tan u}{\cos \lambda} , \quad x = \frac{u_1 - u_0}{A} \quad (1)$$

$$\sin \frac{y}{A} = \sin \lambda \cos u \quad (2)$$

$$\tan \gamma = \tan \lambda \sin u \quad (3)$$

Diese Formeln werden wir in dieser geschlossenen Form benützen, und nicht in Reihen entwickeln, weil es sich um grosse Werte x und y handelt, bei welchen die Entwicklung viele Glieder haben müsste.

II. Konforme ebene Abbildung der rechtwinkligen Coordinaten.

In Fig. 2. haben wir wieder dieselben Verhältnisse, wie in der vorhergehenden Fig. 1., jedoch mit zwei Punkten F und G , welche bzw. die rechtwinkligen Coordinaten x, y und x', y' haben.

Fig. 3. zeigt ein ebenes Abbild von Fig. 2., wobei zuerst der Anfangs-Meridian $T E D O T'$ wieder als $T E D O T'$ erscheint, und zwar in unveränderter Grösse, so dass also $O D E$ in Fig. 2. und in Fig. 3. in gleichen Massen dargestellt sind, namentlich auch $O D = O D$ und $D E = D E$ in beiden Figuren.

Da der Punkt D die Breite u_1 und O die Breite u_0 hat, erhält man die Abscisse x des Punktes D und aller Punkte auf der Ordinate DF aus der Differenz $u_1 - u_0$:

$$x = (u_1 - u_0) \frac{A}{\varrho} \quad (4)$$

wobei: $\log \frac{A}{\varrho} = 1.490\ 6022\cdot671$ und $u_0 = 52^\circ 40' 0''$

Die Ordinatenlinie DF' und EG' in Fig. 3. sind geradlinig rechtwinklig zu TT' gezogen, und die Ordinatenlängen $DF' = y$ und $EG' = y'$ sollen so gewählt werden, dass die Abbildung konform wird, d. h. so dass die beiden rechtwinkligen Dreiecke FGH und $F'G'H'$, die wir nun als unendlich klein annehmen, einander ähnlich werden. Hiezu ist nötig, dass zwischen den Katheten ein konstantes Verhältnis besteht:

$$\frac{F'H'}{FH} = \frac{H'G'}{HG} = m \quad (5)$$

Hiebei ist:

$$\left. \begin{aligned} F'H' &= dx, & H'G' &= dy \\ FH &= dx \cos \frac{y}{A}, & HG &= dy \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Daraus folgt:

$$dy = \frac{1}{\cos \frac{y}{A}} dx \quad (7)$$

Die Integration dieser Gleichung giebt:

$$y = \frac{A}{\mu} \log \tan \left(45^\circ + \frac{y}{2A} \right) \quad (8)$$

wobei, wie gewöhnlich, μ der logarithmische Modulus ist. Nachdem die Beziehung zwischen y und y' bestimmt ist, hat man auch das Vergrösserungs-Verhältnis m nach (4) und (7):

$$m = \frac{dy}{dy'} = \sec \frac{y}{A} \quad (9)$$

Fig. 2.
Kugel mit dem Halbmesser A .

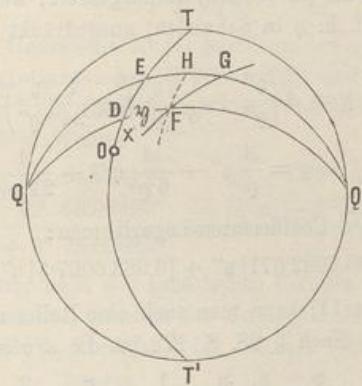
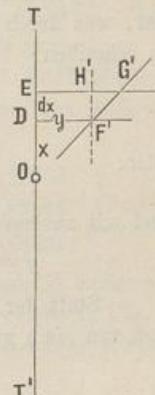


Fig. 3.
Ebene.



Diese Funktion kann man in eine Reihe entwickeln, wie schon in § 85. S. 451, 452 gezeigt wurde, namentlich nach (5) S. 452, wobei nun statt r der Wert A genommen wird:

$$y = \vartheta + \frac{\vartheta^3}{6 A^2} + \frac{\vartheta^3}{24 A^4} + \dots \quad (10)$$

Dabei ist ϑ linear (in Metern) vorausgesetzt; wenn man aber ϑ in Winkelmaß hat, was durch ϑ'' (d. h. ϑ in Sekunden) ausgedrückt sein soll, so hat man (10) so zu schreiben:

$$y = A \left(\frac{\vartheta''}{\varrho''} + \frac{1}{6} \left(\frac{\vartheta''}{\varrho''} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{\vartheta''}{\varrho''} \right)^5 + \dots \right) \quad (11)$$

oder:

$$y = \frac{A}{\varrho} \vartheta'' + \frac{A}{6 \varrho^3} \vartheta''^3 + \frac{A}{24 \varrho^5} \vartheta''^5$$

und mit ausgerechneten Coefficienten-Logarithmen:

$$y = [1.490 6022 \cdot 671] \vartheta'' + [0.083 6007 \cdot 5] \vartheta''^3 + [8.85269] \vartheta''^5 \quad (11a)$$

Statt der Reihe (11) kann man auch eine Reihe entwickeln, welche y als Funktion von $\sin \vartheta$ giebt. Nach § 28. S. 172 ist die arc sin -Reihe:

$$\frac{y}{A} = \sin \frac{\vartheta}{A} + \frac{1}{6} \sin^3 \frac{\vartheta}{A} + \frac{3}{40} \sin^5 \frac{\vartheta}{A}$$

also nach (10):

$$\begin{aligned} \frac{y}{A} &= \left(\sin \frac{\vartheta}{A} + \frac{1}{6} \sin^3 \frac{\vartheta}{A} + \frac{3}{40} \sin^5 \frac{\vartheta}{A} \right) + \frac{1}{6} \left(\sin^3 \frac{\vartheta}{A} + \frac{1}{2} \sin^5 \frac{\vartheta}{A} \right) + \frac{1}{24} \sin^5 \frac{\vartheta}{A} \\ y &= A \sin \frac{\vartheta}{A} + \frac{A}{3} \sin^3 \frac{\vartheta}{A} + \frac{A}{5} \sin^5 \frac{\vartheta}{A} \end{aligned} \quad (12)$$

und mit ausgerechneten Coefficienten-Logarithmen:

$$y = [6.80502 74 \cdot 003] \sin \frac{\vartheta}{A} + [6.327 9061] \sin^3 \frac{\vartheta}{A} + [6.10606] \sin^5 \frac{\vartheta}{A} \quad (12a)$$

Diese Entwicklung bis zur fünften Ordnung ist ausreichend für Abstände etwa bis zu 3° ; für weitere Ausdehnung ist eine Entwicklung von Schols gegeben in der Abhandlung: Annales de l'école polytechnique de Delft, Ire livraison, Leide, 1884. Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur, par Ch. M. Schols. Bis zur 11ten Ordnung giebt Schols § 25.:

$$y = \vartheta + \frac{1}{6} \frac{\vartheta^3}{A^2} + \frac{1}{24} \frac{\vartheta^5}{A^4} + \frac{61}{5040} \frac{\vartheta^7}{A^6} + \frac{277}{72576} \frac{\vartheta^9}{A^8} + \frac{50521}{39916800} \frac{\vartheta^{11}}{A^{10}}$$

und die Umkehrung:

$$\vartheta = y - \frac{1}{6} \frac{y^3}{A^2} + \frac{1}{24} \frac{y^5}{A^4} - \frac{61}{5040} \frac{y^7}{A^6} + \frac{277}{72576} \frac{y^9}{A^8} - \frac{50521}{39916800} \frac{y^{11}}{A^{10}}$$

Schols giebt auch die Umkehrung unserer Formel (12) bis zur 11. Ordnung und noch vieles Interessante, was auch zu unserem früheren § 85. in Beziehung steht.

Alles weitere, was für die Preussische Landesaufnahme gebraucht wird, haben wir schon in § 50. und in § 85. entwickelt und es ist nur noch zu bemerken, dass der dort mit r bezeichnete Kugel-Halbmesser nun überall durch A zu ersetzen ist, mit $\log A = 6.805 0274 \cdot 003$ nach (35) § 94. S. 491.

Wir wollen die Anwendung der besprochenen Theorien an unserem schon mehrfach benützten hannoverschen Beispiele Ägidius-Wasserturm zeigen (vgl. S. 309, 314 und Fig. 3. S. 315).

Diese beiden Punkte haben folgende geographische Coordinaten im Systeme der Landesaufnahme.

$$\begin{array}{lll} \text{Breite} & \text{Länge } L & l = L 31^\circ \\ \text{Ägidius } \varphi_2 = 52^\circ 22' 14,9611'' & L_2 = 27^\circ 24' 24,6290'' & l_2 = -3^\circ 35' 35,3710'' \\ \text{Wasserturm } \varphi_1 = 52^\circ 21' 49,9080'' & L_1 = 27^\circ 22' 25,0168'' & l_1 = -3^\circ 37' 34,9832'' \end{array} \quad \left. \right\} \quad (13)$$

Differenzen + 0' 25,0531'' + 1' 59,6122'' = + 1' 59,6122''

Die Reduktion auf die Gauss'sche Kugel geschieht bei φ durch Anwendung der Hilfstafel Seite [61] (bzw. der Gauss'schen Originaltafel), und bei l durch Multiplikation mit der Konstante $\alpha = 1,000\,452\,918$, bzw. nach der hiezu gehörigen Hilfstafel Seite [59]. Man findet auf diese Weise:

$$\begin{array}{lll} \text{Ägidius } u_2 = 52^\circ 20' 13,92412'' & \lambda_2 = -3^\circ 35' 41,22966'' \\ \text{Wasserturm } u_1 = 52^\circ 19' 48,90327'' & \lambda_1 = -3^\circ 37' 40,89604'' \end{array} \quad \left. \right\} \quad (14)$$

Differenzen + 0' 25,02085'' + 0' 59,66638''

Für die weitere Rechnung nach den sphärischen Formeln (1) und (2) wollen wir eine kleine Zeichenänderung machen, nämlich die Fusspunktsbreite, welche in Fig. 1. und in den Gleichungen (1) mit u_1 bezeichnet ist, soll nun mit u' bezeichnet werden, also:

$$\tan u' = \frac{\tan u}{\cos \lambda} \quad x = \frac{u' - u_0}{A} \quad (15)$$

$$\sin \frac{\gamma}{A} = \sin \lambda \cos u \quad , \quad \tan \gamma = \tan \lambda \sin u \quad (16)$$

Hiernach ist berechnet:

$$\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & & \text{Wasserturm} \\ u'_2 = 52^\circ 23' 36,875'' & u'_1 = 52^\circ 23' 9,01197'' \\ \log \sin \frac{\varphi_2}{A} = 8,583\,3160\cdot272 & \log \sin \frac{\varphi_1}{A} = 8,587\,3764\cdot060 \\ \frac{\varphi_2}{A} \rho = 2^\circ 11' 44,00948'' & \frac{\varphi_1}{A} \rho = 2^\circ 12' 58,29036'' \\ = 7904,00948'' & = 7978,29036'' \\ \gamma_2 = 2^\circ 50' 49,5606'' & \gamma_1 = 2^\circ 52' 23,4645'' \\ \gamma_1 - \gamma_2 = 1' 33,9089'' & \end{array} \quad \left. \right\} \quad (17)$$

Wir gehen über zur Berechnung von x :

$$\begin{array}{lll} \text{Ägidius} & & \text{Wasserturm} \\ u'_2 = 52^\circ 23' 30,36875'' & u'_1 = 52^\circ 23' 9,01197'' \\ u_0 = 52^\circ 40' & u_0 = 52^\circ 40' \\ \hline u'_2 - u_0 = -16' 29,63125'' & u'_1 - u_0 = -16' 50,98803'' \\ = -989,63125'' & = -1010,98803'' \end{array}$$

Dann nach der Gleichung (4) ausgerechnet:

$$x_2 = -30624,970^m \quad x_1 = -31285,873^m \quad (18)$$

Die Berechnung der y geschieht nach der Reihe (11) bzw. (11a) und giebt:

$$\begin{array}{ll} -244\,596,2079^m & -246\,894,8920^m \\ -59,8609 & -61,5645 \\ -0,0220 & -0,0230 \\ \hline y_2 = -244\,656,0908^m & y_1 = -246\,956,4795^m \end{array} \quad (19)$$

Zur Kontrolle kann man auch nach der Reihe (12) bzw. (12a) rechnen, was insofern angenehm ist, als man ja die $\log \sin \frac{y}{A}$ bereits von der Rechnung (17) her hat. Man bekommt in unserem Falle:

$$\begin{array}{r} -244\,536,3511^m \\ -119,6339 \\ -0,1053 \\ \hline y_2 = -244\,656,0908^m \end{array} \quad \begin{array}{r} -246\,833,3323^m \\ -123,0368 \\ -0,1104 \\ \hline y_1 = -246\,956,4795^m \end{array} \quad (20)$$

Dieses stimmt hinreichend mit (19).

Aus (18)–(20) haben wir also nun in Zusammenstellung:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Ägidius} & y_2 = -244\,656,090^m & x_2 = -30\,624,970^m \\ \text{Wasserturm} & y_1 = -246\,956,480^m & x_1 = -31\,285,873^m \end{array} \right\} \quad (21)$$

Zu diesen von uns selbst auf dem angegebenen Wege berechneten Coordinaten stellen wir auch die im Jahre 1887 amtlich von der Landesaufnahme erhaltenen Werte zur Vergleichung:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Ägidius} & y_2 = -244\,656,090^m & x_2 = -30\,621,971^m \\ \text{Wasserturm} & y_1 = -246\,956,479^m & x_1 = -31\,285,875^m \end{array} \right\} \quad (22)$$

Die Übereinstimmung zwischen (21) und (22) ist genügend. Wir behalten (22) bei, und haben davon:

$$y_2 - y_1 = +2300,389^m \quad x_2 - x_1 = +660,904^m \quad (23)$$

Hieraus die Richtungswinkel, von Nord über Ost, zunächst eben:

$$\begin{aligned} \tan t_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \tan t_2 &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ t_1 &= 73^\circ 58' 14,12'' & t_2 &= 253^\circ 58' 14,12'' \end{aligned}$$

Hiezu kommen die Korrektionsglieder nach (31) und (32) § 50. S. 284, nämlich:

$$T_1' - t_1 = [0.92622] (x_2 - x_1) (2y_1 + y_2) = -0,41''$$

$$T_2 - t_2 = [0.92622] (x_1 - x_2) (y_1 + 2y_2) = +0,41''$$

Nehmen wir auch die schon bei (17) berechneten Meridian-Konvergenzen γ dazu, so haben wir:

$$\begin{array}{ll} \text{Ägidius} & \text{Wasserturm} \\ \text{ebene Richtungswinkel: } t_1 &= 73^\circ 58' 14,12'' & t_2 &= 253^\circ 58' 14,12'' \\ T_1 - t_1 &= -0,41'' & T_2 - t_2 &= +0,41'' \\ \text{sphär. Richtungswinkel: } T_1 &= 73^\circ 58' 13,71'' & T_2 &= 253^\circ 58' 14,53'' \\ \gamma_1 &= -2^\circ 52' 23,46'' & \gamma_2 &= -2^\circ 50' 49,56'' \\ \text{Azimute: } \alpha_1 &= 71^\circ 5' 50,25'' & \alpha_2 &= 251^\circ 7' 24,97'' \end{array} \quad (24)$$

Um auch die Entfernung zu bestimmen, haben wir zunächst eben:

$$s = \frac{y_2 - y_1}{\sin t_1} = \frac{x_2 - x_1}{\cos t_1} \quad \log s = 3.379\,0236$$

Die Reduktion auf S geschieht nach (14) § 50. S. 282, und gibt:

$$\begin{array}{c} \log S - \log s = -3220 \\ S = 2391,672^m \end{array} \quad \begin{array}{c} \log S = 3.378\,7016 \\ \log S = 3.378\,7016 \end{array} \quad (25)$$

Bei dieser kleinen Entfernung kann man $\log s - \log S$ auch kurz = $\log m$ = $\log 1 + \frac{y_2}{2A_2}$ nehmen, indem man für y das Mittel aus y_1 und y_2 , nämlich $y = -245\,806^m$ nimmt, nämlich $y = -245\,806^m$; dieses genügt hier, weil die fragliche Entfernung sehr klein ist.

Zur Berechnung von m in beiden Punkten getrennt, hat man auch noch die scharfe Formel (9) nämlich:

$$m = \sec \frac{\vartheta}{A}$$

Nimmt man hiezu die bei (17) angegebenen Winkel $\frac{\vartheta}{A}$ bzw. $\frac{\vartheta}{A} \rho$, so findet man:

$$\text{Ägidius } \log \sec 2^\circ 11' 44,009'' = 0,000\ 3189\cdot4$$

$$\text{Wasserturm } \log \sec 2^\circ 12' 58,290'' = 0,000\ 3249\cdot6$$

$$\text{Mittel } \log m = 0,000\ 3219\cdot5 \quad (26)$$

Dieses stimmt mit 3220 bei (25).

Zur Versicherung können wir auch noch die früheren Berechnungen mit Soldner-schen Coordinaten zuziehen, nämlich in § 56. S. 315 wurde gefunden (18) $\log s = 3.378\ 7020$, und auf S. 314 bei (14) $\log s = 3.378\ 7016$, was alles mit dem neuen (25) $\log s = 3.378\ 7016$ genügend stimmt.

Auch hatten wir früher schon die Azimute bei (14) S. 314:

$$\alpha = 71^\circ 5' 50,33'' \quad \alpha' = 71^\circ 7' 25,05'' \quad (27)$$

Diese α und α' sollen mit unserem neuen (24) übereinstimmen (abgesehen von $\pm 180^\circ$ bei α'). Wenn nun kleine Differenzen von $0,28''$ zwischen (24) und (27) bestehen, während wir doch in allen trigonometrischen Rechnungen mindestens auf $0,01''$ scharf gerechnet haben, so ist das hier doch unerheblich, weil der Rechnungsweg über rechtwinklige lineare Coordinaten (22) geführt hat, die auf $0,001''$ als letzte Rechen-einheit angegeben wurden, so dass sie die gewöhnlichen Abrundungs-Unsicherheiten in den rechtwinkligen Coordinaten bei kurzer Entfernung bereits $0,01''$ erheblich be-einflussen.

Oder kurz: Ebenso wie auf S. 314—315 die Berechnungen für geographische Coordinaten und rechtwinklige Soldner-sche Coordinaten in Bezug auf den Meridian von Celle hinreichend unter sich gestimmt haben, so stimmen auch nun alle Berech-nungen mit den konformen rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf den 31. Längen-grad als x -Axe, sowie alle unsere auf die konforme Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel gemachten Berechnungen völlig hinreichend unter sich überein.

§ 102. Die Haupt-Dreiecksketten und Netze der Preussischen Landes-Triangulation.

Im Anschluss an die Projektions-Theorie der Preussischen Landes-Triangulation wollen wir auch noch eine Übersichts-Karte der Haupt-Dreiecksketten und Netze der Preussischen Landes-Triangulation hier vorführen in der Zeichnung von S. 520—521.

Dieselbe ist eine verkleinerte und vereinfachte Darstellung nach dem VII. Teil des Werkes: „Preussische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, Berlin 1895“ (Mittler & Sohn, Kochstrasse 68/70). Dieser schon auf S. 134 von uns citierte Band enthält eine Karte in 1:2 000 000 mit allen Dreieckspunkten I. Ordnung, nach welcher unsere verkleinerte Übersichtskarte in 1:5 000 000 hergestellt wurde.

Es sind darauf alle Haupt-Dreiecksketten dargestellt mit allen Dreieckspunkten und Verbindungslien, und mit Namen der Punkte an den Grenzen der Ketten, während alle Namen einzuschreiben der Raum nicht ausreichte.

Im unteren Teile von S. 520—521 ist auch eine Übersicht aller Ketten und Netze seit 1834, im wesentlichen nach der Zeitfolge geordnet, beigegeben, wobei die „Netze“, d. h. die Ausfüllnetze zwischen den Ketten, mit kleinerer Schrift angegeben sind. Diese Füllnetze, im ganzen sechs an der Zahl, konnten in unserer Figur S. 520 und 521 nur als leere Räume angedeutet werden, weil die ursprünglich versuchte Punkt- und Linien-Ausführung in diesen Ketten den Zusammenhang der Ketten nicht mehr deutlich hätte hervortreten lassen. Die kleinen Füllnetze im Nordosten sind auch in dem Originalplan des VII. Teiles, Hauptdreiecke, nur als leere Flächen angegeben, während die schönen Netze von 1872 an, dort mit allen Sichten ausgeführt sind. (Zu bemerken ist auch, dass Mecklenburg, welches ganz von preussischen Ketten umschlossen ist, nicht preussisches Netz, sondern eigenes mecklenburgisches Netz ist, dessen Projektions-Theorie in unseren §§ 80.—81. S. 419—431 mitgeteilt wurde.)

Wie schon in unserem früheren § 21. S. 134 unten zusammengestellt wurde, sind einzelne Ketten und Netze schon besonders von uns beschrieben worden und als Ergänzung jener Citate S. 134 wollen wir auch noch einige Berichte aus der „Zeitschr. f. Verm.“ hier anführen, die übrigens mit jenen auf S. 134 angegebenen Darstellungen zum Teil übereinstimmen.

„Zeitschr. f. Verm.“	1888 S. 382 und S. 399 die Elbkette,
“	1889 S. 4 das Wesernetz,
“	1891 S. 229,
“	1891 S. 456 die Elbkette,
“	1892 S. 193,
“	1893 S. 1,
“	1894 S. 3, mit Netzbild S. 9,
“	1894 S. 454 das Schlesisch-posesische Dreiecksnetz,
“	1895 S. 115,
“	1895 S. 311 Hannoversch-sächsische Kette und sächsisches Netz.

Obgleich durch alle diese Einzeldarstellungen der Gang der Preussischen Landes-Triangulation im wesentlichen als bekannt vorausgesetzt werden kann, wird es doch beim Anblick der Übersichtskarte S. 520 und 521, da das nun vor 60 Jahren begonnene Werk im wesentlichen fertig vorliegt, angezeigt sein, folgendes kurz zu rekapitulieren:

Der wissenschaftliche Grund zu der heutigen Landes-Triangulation wurde gelegt durch die berühmte Gradmessung in Ostpreussen von Bessel und Baeyer 1832—1834 und durch die daran anschliessende Küstenvermessung von Baeyer 1837—1846.

Die heutigen geographischen Coordinaten der Landesaufnahme wurden 1859 bestimmt durch *eine* astronomische Messung bzw. Annahme für den Ausgangspunkt Berlin Sternwarte bzw. dessen Übertragung auf den benachbarten Punkt Rauenberg, und durch *ein* astronomisches Azimut, Rauenberg-Marienturm (vgl. hiezu § 59. S. 331).

Man könnte die Frage aufwerfen, warum für ein so grosses Gebiet von rund 1100^{km} Länge und 800^{km} Breite nicht mehr als *ein* astronomischer Orientierungs-ausgangspunkt genommen wurde, etwa mit Ausgleichung der Lotablenkungswidersprüche an den Grenzen u. s. w.?

Indessen wären solche Fragen nicht angebracht, angesichts der Entwicklung, welche ein so wichtiges Staatsunternehmen unter wechselnder Leitung seit mehr als einem halben Jahrhundert thatsächlich genommen hat.

Man hat dem rein trigonometrischen widerspruchsfreien Zusammenhang aller geodätischen Elemente des grossen preussischen Staates den Vorzug gegeben vor dem Hereinziehen astronomisch-physikalischer Elemente, und erst das nächste Jahrhundert und künftige Generationen von Erd- und Landmessern werden hierin Neues sehen.

Acht Grundlinien, mit dem Bessel schen Apparate gemessen, geben die lineare Fundierung in den verschiedenen Landesteilen, nämlich Königsberg 1834, Berlin 1846, Bonn 1847, Strehlen 1854, Braak 1871, Oberhergheim 1877, Göttingen 1880, Meppen 1883 mit Nachmessungen von Strehlen, Berlin, Bonn. (Näheres hiezu s. S. 101—102 und S. 146.)

Der Ausgleichungsgang ist nun im wesentlichen ganz klar: Die Ketten legen sich zunächst frei aus, nur mit ihren eigenen inneren Bedingungsgleichungen ausgeglichen, und erst wenn eine Anzahl von Ketten sich zu einem Kranz schliessen, muss auch Polygonausgleichung stattfinden, deren Zwang dann gewöhnlich die letzte Kette zu tragen hat, weil, dem Fortschreiten der Messungen II.—III. Ordnung entsprechend, man unmöglich mit dem Kranzabschluss warten konnte, bis alle Ketten gemessen waren.

Als Beispiel hierfür wollen wir aus unserem I. Band, „Handb. d. Verm.“, 4. Aufl. 1895, S. 511 (oder auch „Zeitschr. f. Verm.“ 1895, S. 313) entnehmen, dass die Hannoversch-sächsische Kette 1880—1881 zwischen Hagelsberg und Lüss einem Anschlusszwang von $0,173^m$ in y und von $0,367^m$ in x zu tilgen hatte.

Ist ein Kranzsystem geschlossen, so folgt die Einschaltung des Füllnetzes ebenfalls mit Anschlusszwang am Rande, wie ebenfalls in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 512 (oder Zeitschr. 1895, S. 314) an dem Beispiele des sächsischen Dreiecksnetzes 1881—1882 ersehen werden kann, oder an dem Beispiele des Schlesisch-Posenschen Netzes in Band I, 4. Aufl. 1895, S. 415.

Je weiter die Ketten und Netze hinausgehen, desto grösser muss natürlich der Anschlusszwang wachsen, doch ist er nirgends so gross, dass deswegen die praktische Verwendung der ausgeglichenen Coordinaten Schwierigkeiten begegnete.

Von besonderem Interesse für die Theorieen solcher Zwangsanschlüsse ist eine Abhandlung von Krüger: „Über den Anschluss eines sekundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz“ in „Zeitschr. f. Verm.“ 1895, S. 289—307, S. 339—347 und S. 368—375. Es wird hier zuerst die Theorie der konformen Übertragung mit Anschluss an 2 feste Punkte (S. 291), 3 feste Punkte (S. 293) und 4 feste Punkte (S. 298) behandelt mit Citaten nach Baur und Schols, und auch der allgemeine Fall mit n festen Punkten (S. 306) behandelt.

Nach diesem wird ein Näherungsverfahren angegeben (S. 342), welches darin besteht, dass die Coordinaten-Transformationsformeln mit solchen Konstanten für lineare Vergrösserung und für Verdrehung versehen werden, welche den aus allen Anschlüssen hervorgehenden Mittelvergrösserungen und Mittelverdrehungen sich am besten anpassen.

Solches Verfahren wird dann angewendet („Zeitschr. 1895“ S. 368) auf das thüringische Dreiecksnetz 1880, dessen Lage aus unserem kleinen Netzbilde S. 520—521 genügend ersehen werden kann, indem es gegen Norden die 4 festen Anschlusspunkte Inselsberg, Ettersberg, Wilsdorf, Leipzig hat, und im übrigen frei ausliegt. Krüger giebt an der citierten Stelle („Zeitschr. f. Verm. 1895“, S. 368—375) zwei eigene Ausgleichungen nach seinem angegebenen Näherungsverfahren und deren Vergleichung mit der amtlichen Ausgleichung der Landesaufnahme, welch letztere nach der Correlatmethode unter Einführung von 6 Zwangsanschlussgleichungen gemacht ist (Königl. Preuss. Landestriangulation, Hauptdreiecke, VII. Teil, 1895, S. 79—85).

Nach diesen nicht unwichtigen Citaten Krüger betrachten wir nochmals die Gesamtheit der Preussischen Landes-Triangulation in dem Übersichtsbilde S. 520—521.

Dieses grosse in sich widerspruchsfrei geodätisch ausgeglichene Werk, welches für alle praktischen Vermessungszwecke in ganz Preussen einheitliche widerspruchsfreie Coordinaten und Abrisse liefert, ist ein Werk, welches seinesgleichen kaum in einem anderen Staate haben wird, welches jeden Landmesser mit Freude erfüllen muss, der auf irgend welchem Teile desselben und in irgend einer der Formen, in welchen die Ergebnisse desselben noch verwertet werden können, mitzuwirken berufen sein wird.

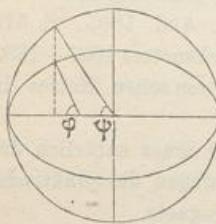
Kapitel IX.

Polar-Dreieck mit reduzierten Breiten.

§ 103. Die reduzierte Breite.

Eine neue Behandlung der geodätischen Linie bekommen wir durch Einführung eines sphärischen Hilfsdreiecks mit „reduzierten Breiten“. Es ist das eine Theorie, welche bei Berechnung sehr langer geodätischer Linien eine wichtige Rolle spielt.

Fig. 1.



Wir betrachten mit Fig. 1. einen Hilfswinkel, der „reduzierte Breite“ heisst, und den wir im Folgenden allgemein mit ψ bezeichnen wollen, während die geographische Breite wie immer mit φ bezeichnet werden soll.

Man kann die gewöhnliche Ellipsen-Gleichung zur Einführung von ψ benützen, denn wenn für die Ellipse die Gleichung besteht:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

so kann man unbedingt setzen:

$$\frac{x}{a} = \cos \psi \quad , \quad \frac{y}{b} = \sin \psi \quad (2)$$

Dabei ist nach (16) § 32. S. 196:

$$\frac{x}{a} = \frac{\cos \varphi}{W} \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{y}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin \varphi}{W} \sqrt{1-e^2} \quad (3)$$

$$\text{also: } \cos \psi = \frac{\cos \varphi}{W} \quad , \quad \sin \psi = \frac{\sin \varphi}{W} \sqrt{1-e^2} \quad (4)$$

$$\text{wobei gesetzt ist: } W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (5)$$

Die geometrische Bedeutung des so eingeführten Winkels ψ ist durch Fig. 1. veranschaulicht, man wird auf die Hilfsbreite ψ auch geführt durch eine bekannte Ellipsen-Konstruktion, bei welcher zwei konzentrische Kreise mit den Halbmessern a und b benutzt werden.

Eine zweite Veranlassung zur Einführung der reduzierten Breite haben wir in dem Satze von der geodätischen Linie, den wir in (11) § 69. S. 378 gefunden haben, nämlich:

$$p \sin \alpha = k \quad (6)$$

wo p der Parallelkreis-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids ist, d. h. derselbe Wert, der in (1) und (2) mit x bezeichnet wurde, man hat also:

$$p = x = \frac{a \cos \varphi}{W} = a \cos \psi, \text{ d. h. } \cos \psi = \frac{\cos \varphi}{W} \quad (7)$$