



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

Kapitel IX. Polar-Dreieck mit reduzierten Breiten.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

Dieses grosse in sich widerspruchsfrei geodätisch ausgeglichene Werk, welches für alle praktischen Vermessungszwecke in ganz Preussen einheitliche widerspruchsfreie Coordinaten und Abrisse liefert, ist ein Werk, welches seinesgleichen kaum in einem anderen Staate haben wird, welches jeden Landmesser mit Freude erfüllen muss, der auf irgend welchem Teile desselben und in irgend einer der Formen, in welchen die Ergebnisse desselben noch verwertet werden können, mitzuwirken berufen sein wird.

## Kapitel IX.

### Polar-Dreieck mit reduzierten Breiten.

#### § 103. Die reduzierte Breite.

Eine neue Behandlung der geodätischen Linie bekommen wir durch Einführung eines sphärischen Hilfsdreiecks mit „reduzierten Breiten“. Es ist das eine Theorie, welche bei Berechnung sehr langer geodätischer Linien eine wichtige Rolle spielt.

Fig. 1.



Wir betrachten mit Fig. 1. einen Hilfswinkel, der „reduzierte Breite“ heisst, und den wir im Folgenden allgemein mit  $\psi$  bezeichnen wollen, während die geographische Breite wie immer mit  $\varphi$  bezeichnet werden soll.

Man kann die gewöhnliche Ellipsen-Gleichung zur Einführung von  $\psi$  benützen, denn wenn für die Ellipse die Gleichung besteht:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

so kann man unbedingt setzen:

$$\frac{x}{a} = \cos \psi, \quad \frac{y}{b} = \sin \psi \quad (2)$$

Dabei ist nach (16) § 32. S. 196:

$$\frac{x}{a} = \frac{\cos \varphi}{W}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin \varphi}{W} \sqrt{1-e^2} \quad (3)$$

$$\text{also:} \quad \cos \psi = \frac{\cos \varphi}{W}, \quad \sin \psi = \frac{\sin \varphi}{W} \sqrt{1-e^2} \quad (4)$$

$$\text{wobei gesetzt ist:} \quad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (5)$$

Die geometrische Bedeutung des so eingeführten Winkels  $\psi$  ist durch Fig. 1. veranschaulicht, man wird auf die Hilfsbreite  $\psi$  auch geführt durch eine bekannte Ellipsen-Konstruktion, bei welcher zwei konzentrische Kreise mit den Halbmessern  $a$  und  $b$  benützt werden.

Eine zweite Veranlassung zur Einführung der reduzierten Breite haben wir in dem Satze von der geodätischen Linie, den wir in (11) § 69. S. 378 gefunden haben, nämlich:

$$p \sin \alpha = k \quad (6)$$

wo  $p$  der Parallelkreis-Halbmesser des Umdrehungs-Ellipsoids ist, d. h. derselbe Wert, der in (1) und (2) mit  $x$  bezeichnet wurde, man hat also:

$$p = x = \frac{a \cos \varphi}{W} = a \cos \psi, \text{ d. h. } \cos \psi = \frac{\cos \varphi}{W} \quad (7)$$



Der dadurch bestimmte Wert  $\psi$  ist derselbe, den wir schon in (4) kennen gelernt und reduzierte Breite genannt haben. Damit giebt die Gleichung (6):

$$a \cos \psi \sin \alpha = a \cos \psi' \sin \alpha' = k \quad (8)$$

Die letzte Gleichung ist eine Anwendung des Satzes (6) auf zwei zusammengehörige Wertpaare  $\psi, \alpha$  und  $\psi', \alpha'$ ; und indem man dabei den konstanten Faktor  $a$  und das allgemeine Zeichen  $k$  fortlässt, hat man aus (6) oder (8):

$$\cos \psi \sin \alpha = \cos \psi' \sin \alpha' \quad (9)$$

Dieser Gleichung (9) entspricht ein sphärisches Dreieck, das wir in Fig. 2. des nächsten § 104. näher betrachten wollen; und damit erlangt die reduzierte Breite  $\psi$ , welche nun als Repräsentant des sphäroidischen Parallelkreis-Halbmessers  $p = x$  in Gleichung (7) erscheint, erhöhte Bedeutung.

Wir haben also durch die Gleichung (7) ausführlicher:

$$\cos \psi = \frac{\cos \varphi}{W} \quad (\text{wo } W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}) \quad (10)$$

oder auch mit Einführung von  $V = W: \sqrt{1 - e^2}$  wie immer nach (1) und (2), S. 202 bis 203:

$$\cos \psi = \frac{\cos \varphi}{V \sqrt{1 - e^2}} \quad (\text{wo } V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}) \quad (11)$$

Daraus findet man durch geometrische Umformung:

$$\sin \psi = \frac{1}{V} \sin \varphi \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \frac{\cos \psi}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \psi}} \quad (12)$$

$$\tan \psi = \tan \varphi \sqrt{1 - e^2}, \quad \text{oder} \quad \tan \varphi = \tan \psi \sqrt{1 + e'^2} \quad (13)$$

Wir brauchen auch noch die Differentialbeziehung zwischen  $\varphi$  und  $\psi$ , welche sich am einfachsten aus (13) ergibt, nämlich:

$$\frac{d\psi}{\cos^2 \psi} = \frac{d\varphi \sqrt{1 - e^2}}{\cos^2 \varphi} \quad (14)$$

also wegen (11):

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = V^2 \sqrt{1 - e^2}$$

$$\text{Aus (11) findet man auch: } V^2 = \frac{1 + e'^2}{1 + e'^2 \sin^2 \psi}$$

$$\text{und} \quad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}} \quad (15)$$

Die geometrische Bedeutung von  $V^2$  ist, nach (25) S. 197, das Haupt-Krümmungsverhältnis, d. h. das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser  $N$  und  $M$  in einem Punkte des Ellipsoids mit der Breite  $\varphi$ ; und die Formel (15), welche nun  $V^2$  bzw.  $V$  auch als Funktion von  $\psi$  giebt, ist für spätere Anwendung wichtig.

#### Numerische Berechnung von $\varphi - \psi$ .

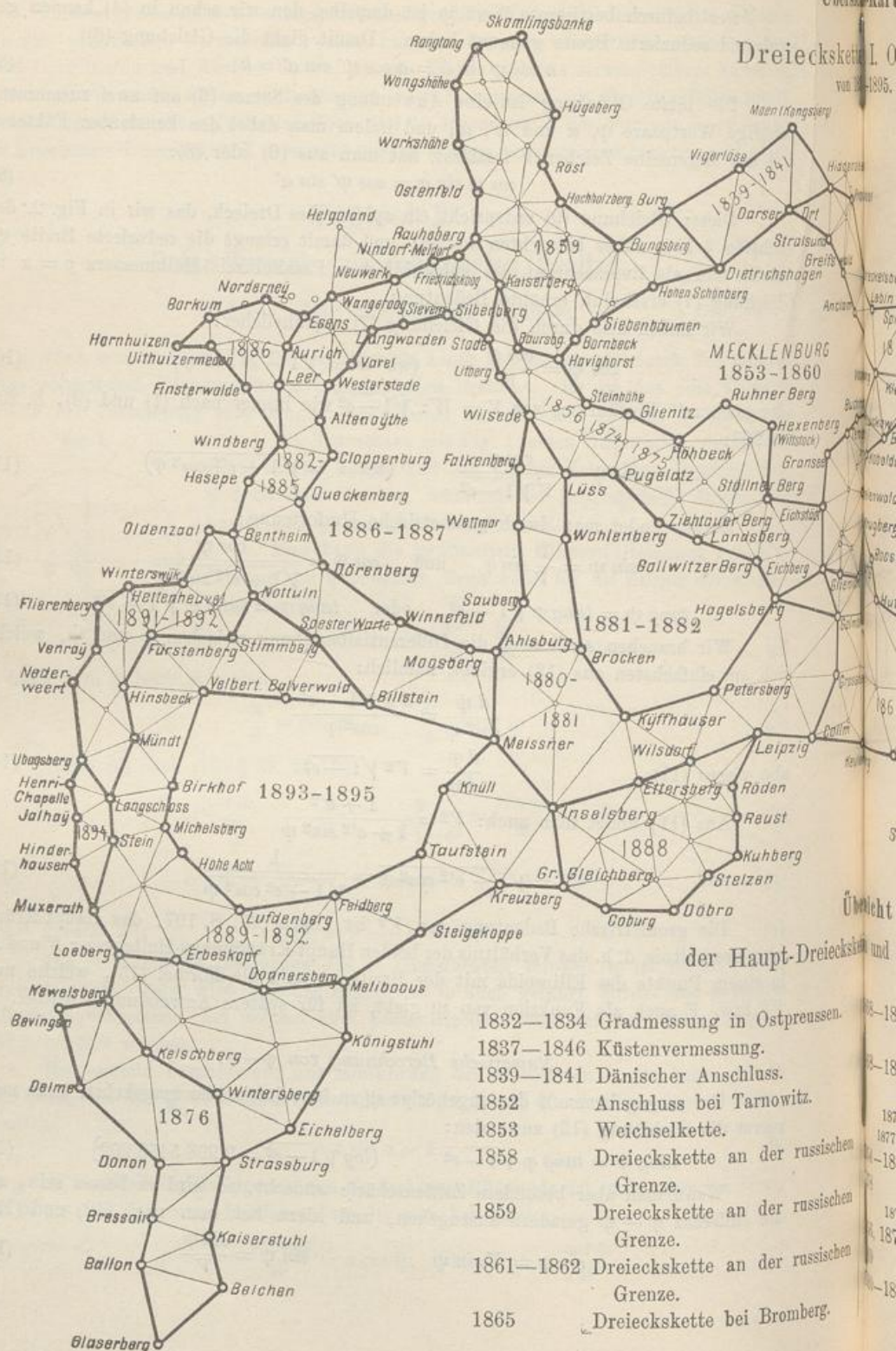
Um zu gegebenem  $\varphi$  das zugehörige  $\psi$  zu berechnen oder umgekehrt, kann man zuerst die Gleichung (13) anwenden:

$$\tan \psi = \tan \varphi \sqrt{1 - e^2} \quad (\log \sqrt{1 - e^2} = 9.998\,5458\,202) \quad (16)$$

Wenn man aber besondere Zahlenscharfe wünscht, so wird es besser sein, auf die Differenz  $\varphi - \psi$  geradezu auszugehen, und hiezu hat man nach (12) und (11):

$$\sin \varphi = V \sin \psi \quad \sin \psi = \frac{\sin \varphi}{V} \quad (17)$$







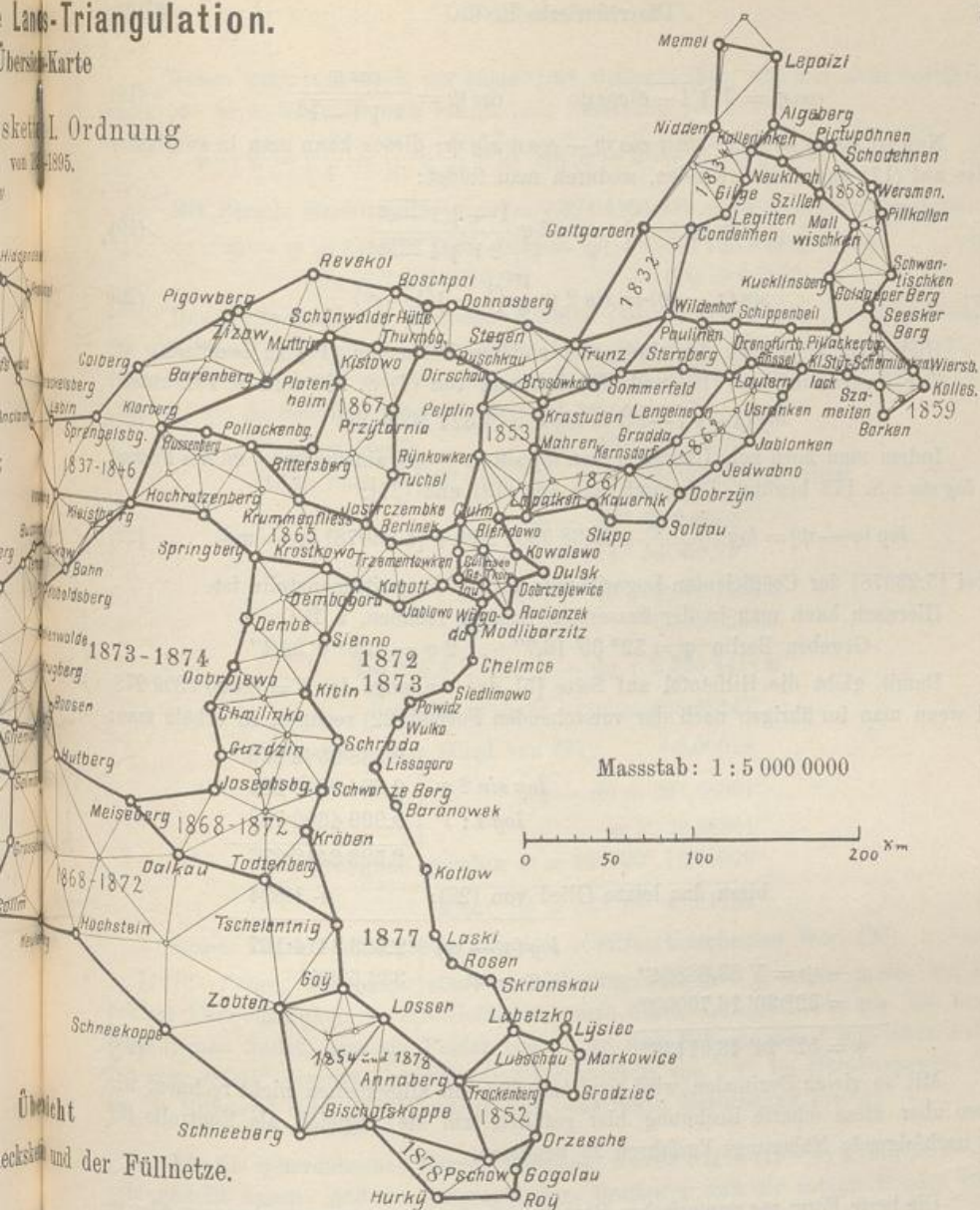
# Lands-Triangulation.

Übersichtskarte

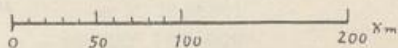
skizze L. Ordnung

von 1895.

521



Massstab: 1 : 5 000 000



Übersicht  
ecksa und der Füllnetze.

- 1872 Märkisch - schlesische Dreiecks-kette.
- 1872 Schlesisch - posensche Dreiecks-kette.
- 1872-1873 Posensches Dreiecksnetz.
- 1877 Schlesisch-posensches Dreiecksnetz.
- 1878 Schlesische Dreiecks-kette.
- Österreichischer Anschluss.
- 1873-1874 Märkisches Dreiecksnetz.
- 1874 und 1875 Elbkette.
- Schleswig-holst. Dreiecks-kette.
- 1881 Hannoversch-sächsische Dreiecks-kette.

- 1881-1882 Sächsisches Dreiecksnetz.
- 1882-1885 Hannoversche Dreiecks-kette.
- 1886-1887 Wesernetz.
- 1888 Thüringisches Dreiecksnetz.
- 1889-1892 Rheinisch - hessische Dreiecks-kette.
- 1893-1894 Niederrheinisches Dreiecksnetz.
- 1886, 1889-1892 Niederländischer Anschluss.
- 1894 Belgischer Anschluss.
- 1895 Pfälzisches Dreiecksnetz.
- 1876 Elsass-lothringische Kette.



$$\cos \varphi = V \sqrt{1-e^2} \cos \psi \quad \cos \psi = \frac{\cos \varphi}{V \sqrt{1-e^2}} \quad (18)$$

Nun ist  $\sin(\varphi - \psi) = \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi$ ; dieses kann man in zweifacher Weise auf (17) und (18) anwenden, wodurch man findet:

$$\sin(\varphi - \psi) = \sin 2\varphi \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{2 V \sqrt{1-e^2}} \quad (19)$$

oder: 
$$\sin(\varphi - \psi) = \sin 2\psi \frac{V}{2} (1 - \sqrt{1-e^2}) \quad (20)$$

Hiebei ist  $V$  je nach der einen oder anderen Form von (15) zu benützen.

Zur Anwendung von (19) und (20) hat man von (7) S. 180 und S. 192 unten:

$$\log(1 - \sqrt{1-e^2}) = \log \alpha = 7.524\,1069\,093 \quad (21)$$

Indem man noch zum Übergang von  $\log \sin(\varphi - \psi)$  auf  $\log(\varphi - \psi)$  die Formel für  $\log \sin x$  S. 173 benützt, bekommt man aus (19) und (21):

$$\log(\varphi - \psi) = \log \frac{\sin 2\varphi}{V} + 2.538\,9562\,266 + [5.23078] (\varphi - \psi)^2 \quad (22)$$

wobei [5.23078] der Coefficienten-Logarithmus für 7te Logarithmenstelle ist.

Hiernach kann man in der äussersten Schärfe rechnen, z. B.:

$$\text{Gegeben Berlin } \varphi = 52^\circ 30' 16,7'' \quad , \quad 2\varphi = 105^\circ 0' 33,4''$$

Damit giebt die Hilfstafel auf Seite [5] des Anhangs  $\log V = 0.000\,5399\,278$ , und wenn man im übrigen nach der vorstehenden Formel (22) rechnet, so erhält man:

	2.538 9562 266
$\log \sin 2\varphi$	9.984 9249 285
$\log 1: V$	9.999 4600 722
	2.523 3412 273

hiez u das letzte Glied von (22):  $+ 1.894$

	$\log(\varphi - \psi)$	2.523 3414 167
$\varphi - \psi = 5' 33,68864''$	$\varphi - \psi =$	333,68864
$\varphi = 52^\circ 30' 16,70000''$		
$\psi = 52^\circ 24' 43,01136''$		

(23)

Mit so vielen Dezimalen wird man natürlich im allgemeinen nicht rechnen, wir haben aber diese scharfe Rechnung hier geführt, um sie zugleich als Kontrolle für das nachfolgende Näherungs-Verfahren zu benützen.

Die beste Form zur numerischen Berechnung von  $\varphi - \psi$  aus gegebenen  $\varphi$  oder  $\psi$  erhält man durch eine Reihen-Entwicklung nach dem Grundsatz des Mittelarguments (§ 29. S. 178—179). Nach (13) ist:

$$\tan \psi = \sqrt{1-e^2} \tan \varphi = \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8}\right) \tan \varphi$$

andererseits  $\tan \varphi - \tan \psi = \frac{\varphi - \psi}{\cos^2 \mu} + (\varphi - \psi)^3 \dots$  mit  $\frac{\varphi - \psi}{2} = \mu$

damit wird:  $\varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8}\right) \cos^2 \mu \tan \varphi$  ,  $\varphi = \mu + \frac{e^2}{4} \sin \mu \cos \mu$

woraus weiter: 
$$\varphi - \psi = \left(\frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8}\right) \sin(\varphi + \psi)$$



Dieses kann man noch um einen Grad weiter treiben, was hier nicht ausführlich angegeben wird, wodurch man erhält (mit Zusetzung von  $\varrho''$ ):

$$\varphi - \psi = \left( \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5}{64} e^6 \right) \varrho'' \sin(\varphi - \psi) + \frac{1}{384} e^6 \varrho'' \sin^3(\varphi + \psi) \quad (24)$$

Mit Bessels Excentricität  $\log e^2 = 7.824\,4104\cdot237$  giebt dieses ausgerechnet:

$$\varphi - \psi = 345,325\,3808 \sin(\varphi + \psi) + 0,000\,160 \sin^3(\varphi + \psi) \quad (25)$$

( $\log = 2.538\,2285\cdot0$ )                      ( $\log = 6.2033$ )

Das zweite Glied mit höchstens  $0,00016''$  ist für gewöhnlich zu vernachlässigen. Um die Formel (25) bequem anzuwenden, muss man einen Näherungswert von  $\varphi - \psi$  vorher haben, und ein solcher wird durch unsere Hilfstafel Seite [58] des Anhangs geliefert; die Anwendung mag ein Beispiel zeigen:

Gegeben Berlin	$\varphi = 52^\circ 30' 16,7''$
Hiezu nach S. [58]: $\varphi - \psi$	$= 5' 33,65''$ genähert
	$\psi = 52^\circ 24' 43,05''$
	$\varphi + \psi = 104^\circ 54' 59,75''$
	$\log \sin(\varphi + \psi)$ 9.985 1126.8
	$\log 345,3 \dots$ 2.538 2285.0
	$\log 345,3 \dots \sin(\varphi + \psi)$ 2.523 3411.8
	$345,3 \dots \sin(\varphi + \psi) = 333,68847''$
Hiezu das zweite Glied von (25):	$+0,00014$
	$(\varphi - \psi) = 333,68861''$
	$= 5' 33,68861''$
Ursprünglich gegeben $\varphi = 52^\circ 30' 16,70000''$	
Also: $\psi = 52^\circ 24' 43,01139''$	(26)

Dieses stimmt hinreichend mit dem schärfer berechneten Wert (23).

Die Frage, wie genau man den Näherungswert  $\varphi + \psi$  haben muss, um eine gewisse Endgenauigkeit zu erreichen, kann man durch Differentiieren von (25) beantworten; man findet, dass ein Fehler von  $1''$  an dem Näherungswert nur einen Fehler von etwa  $0,001''$  erzeugt, weshalb eine Genauigkeit von  $0,1''$  im Näherungswert (wie sie die Hilfstafel Seite [58] gewährt) zur endgiltigen Berechnung genügt.

Für die sphäroidischen Normal-Beispiele, welche wir in (1)–(5) § 73. S. 391–392 vorangestellt haben, sind die geographischen Breiten  $\varphi$  und die entsprechenden reduzierten Breiten  $\psi$  die folgenden:

$\varphi = 45^\circ 0' 0''$	$\psi = 44^\circ 54' 14,67493''$		
$49^\circ 30' 0''$	$49^\circ 24' 18,83709''$		
$50^\circ 0' 0''$	$49^\circ 54' 19,82230''$		
$50^\circ 30' 0''$	$50^\circ 24' 20,91117''$		
$55^\circ 0' 0''$	$54^\circ 54' 35,31462''$		
		Mecklenburg	
		$\varphi = 53^\circ 0'$	$\psi = 52^\circ 54' 27,89895''$
		$54^\circ 30'$	$54^\circ 24' 33,31059''$
Tübingen	$\varphi = 48^\circ 31' 12,4000''$	$\psi = 48^\circ 25' 29,6082''$	
Hornisgrinde	$\varphi = 48^\circ 36' 21,8966''$	$\psi = 48^\circ 30' 30,2280''$	
Berlin	$\varphi = 52^\circ 30' 16,7''$	$\psi = 52^\circ 24' 43,0014''$	
Königsberg	$\varphi = 54^\circ 42' 50,6''$	$\psi = 54^\circ 37' 24,7564''$	



### § 104. Das sphärische Hilfsdreieck mit reduzierten Breiten.

Wir knüpfen an die im vorigen § 103. (9) S. 521 gefundene Gleichung an:

$$\cos \psi \sin \alpha = \cos \psi' \sin \alpha' \quad (1)$$

Dieser Gleichung entspricht die nachstehende Fig. 2.

In nachstehender Fig. 1. sind  $P$  und  $P'$  zwei Punkte auf dem Ellipsoid,  $s$  die verbindende geodätische Linie mit den Azimuten  $\alpha$  und  $\alpha'$ . Die beiden Punkte  $P$  und  $P'$  haben die geographischen Breiten  $\varphi$  und  $\varphi'$  und den Längen-Unterschied  $l$ .

Fig. 1. Ellipsoid.

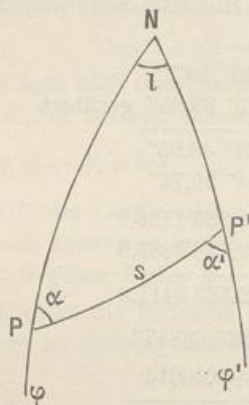
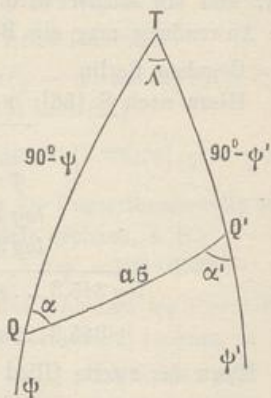


Fig. 2. Kugel.



In Fig. 2. ist ein entsprechendes sphärisches Dreieck  $TQ'Q$  gezeichnet, dessen Bogen  $Q'Q$  dieselben Azimute  $\alpha$  und  $\alpha'$  hat wie die geodätische Linie  $PP'$ . Der Bogen  $Q'Q$  ist mit  $a\sigma$  bezeichnet, indem der Kugelhalbmesser  $= a$  (Äquatorhalbmesser des Ellipsoids) und der Centriwinkel  $= \sigma$  angenommen ist. Der Längenunterschied zwischen  $Q$  und  $Q'$  ist  $= \lambda$ , verschieden von  $l$ . Auch die sphärischen Breiten  $\psi$  und  $\psi'$  sind andere als die ellipsoidischen, es sind die zu  $\varphi$  und  $\varphi'$  gehörigen reduzierten Breiten, d. h. nach (13) § 103. S. 521 bestehen die Beziehungen:

$$\tan \psi = \tan \varphi \sqrt{1-e^2}, \quad \tan \psi' = \tan \varphi' \sqrt{1-e^2} \quad (2)$$

Die Richtigkeit all dieser Beziehungen ist durch die sphärische Gleichung (1) bewiesen, und wir wissen nun, dass einem geodätischen Polardreieck  $NP'P$  auf dem Ellipsoid immer ein sphärisches Dreieck  $TQ'Q$  entspricht, mit gleichen Azimuten  $\alpha, \alpha'$  und mit reduzierten Breiten  $\psi, \psi'$ , welche zu  $\varphi, \varphi'$  gehören. Dagegen sind die übrigen Stücke, die Entfernung beider Punkte und deren Längenunterschied, in beiden Dreiecken verschieden.

Es kommt nun darauf an, eine Beziehung herzustellen zwischen  $s$  und  $\sigma$  und eine Beziehung zwischen  $l$  und  $\lambda$ , denn da zwischen allen übrigen Stücken von Fig. 1. und Fig. 2. vermöge der Gleichungen (1) und (2) bereits Beziehungen bestehen, werden wir dann in allen Teilen von dem sphäroidischen Dreieck auf das sphärische Dreieck übergehen können und umgekehrt.

Wir haben nach (1), (2) S. 392 und (1), (2), S. 347 folgende Differential-Gleichungen, mit den Bezeichnungen unserer vorstehenden Fig. 1. und 2. (geographische Länge auf dem Ellipsoid  $= l$ , auf der Kugel  $= \lambda$ ):



Ellipsoid

$$ds \cos \alpha = M d\varphi$$

$$ds \sin \alpha = N \cos \varphi d\lambda$$

Kugel

$$a d\sigma \cos \alpha = a d\psi \quad (3)$$

$$a d\sigma \sin \alpha = a \cos \psi d\lambda \quad (4)$$

Hieraus durch Division:

$$\frac{ds}{a ds} = \frac{M d\varphi}{a d\psi}$$

$$\frac{d\lambda}{d\psi} = \frac{M \cos \psi d\varphi}{N \cos \varphi d\psi}$$

Hiebei ist nach (11) und (14) § 103. S. 521:

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \psi} = V \sqrt{1-e^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = V^2 \sqrt{1-e^2} \quad (5)$$

Nach § 32. S. 196–197 ist  $\frac{M}{a} = \frac{1-e^2}{W^3} = \frac{1}{V^3 \sqrt{1-e^2}}$  und  $\frac{M}{N} = \frac{1}{V^2}$  womit

die beiden Gleichungen (5) folgende einfache Gestalt annehmen:

$$ds = a d\sigma \frac{1}{V} \quad (6)$$

$$d\lambda = d\psi \frac{1}{V} \quad (7)$$

Die hier zweimal auftretende Grösse  $V$  ist die stets von uns benützte Funktion der Breite, welche entweder in  $\varphi$  oder in  $\psi$  ausgedrückt nach (15) § 103. S. 521 ist:

$$V = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{V} = \sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi} \quad (8)$$

Die geometrische Bedeutung von  $V$  haben wir schon in (25) § 32. S. 197 angegeben, es ist nämlich  $V^2$  das Verhältnis der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser  $N$  und  $M$ .

## § 105. Integration der Differential-Gleichungen des Polar-Dreiecks.

Wir haben vom vorigen § 104. (6) und (8) (s. oben) die Differential-Gleichung:

$$ds = a d\sigma \sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi'} \quad (1)$$

Diese Gleichung bezieht sich auf die untenstehenden Fig. 1. und Fig. 2., indem  $ds$  das Differential der geodätischen Linie  $s$  in Fig. 1. und  $a d\sigma$  das Differential des sphärischen Bogens  $\sigma$  (auf den Halbmesser  $a$  bezogen) von Fig. 2. ist; auch  $\psi'$  ist sphärische Breite eines Punktes auf dem Bogen  $\sigma$ .Um die Gleichung (1) nach  $\sigma$  integrieren zu können, muss man  $\psi'$  in  $\sigma$  ausdrücken, wozu die Formeln der sphärischen Trigonometrie dienen, welche wir schon früher in (20)–(22) § 60. S. 343 angegeben haben, nämlich mit Übertragung auf unsere neue Fig. 2.:

Fig. 1. Ellipsoid.

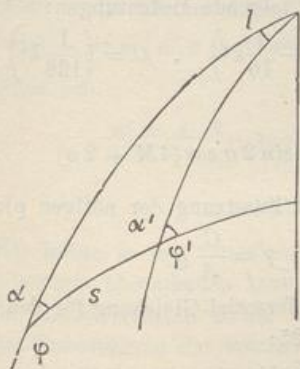
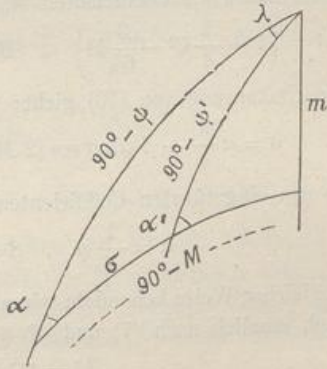


Fig. 2. Kugel.





$$\sin m = \cos \psi \sin \alpha, \quad \tan M = \frac{\sin \psi}{\cos \psi \cos \alpha} \quad (2)$$

$$\cos m = \frac{\sin \psi}{\sin M} = \frac{\cos \psi \cos \alpha}{\cos M} \quad (3)$$

$$\sin \psi' = \cos m \sin (M + \sigma) \quad (4)$$

Nun setzen wir zur Schreib-Abkürzung im Folgenden:

$$M + \sigma = x, \quad \text{wobei } M \text{ konstant, also } d\sigma = dx \quad (5)$$

also:  $\sin^2 \psi' = \cos^2 m \sin^2 x$  und  $\cos^2 \psi' = 1 - \cos^2 m \sin^2 x$  (6)

Dieses in (1) gesetzt giebt:

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m \sin^2 x} d\sigma$$

$$\frac{e^2}{1 - e^2} = e'^2, \quad \text{also } ds = a \sqrt{1 - e'^2} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 m \sin^2 x} d\sigma \quad (7)$$

$$a \sqrt{1 - e'^2} = b, \quad e' \cos m = k, \quad ds = b \sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} dx \quad (8)$$

Nun wird nach den gewöhnlichen Reihen S. 169 und S. 176 entwickelt:

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 x - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 x$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \quad (9)$$

Dieses zusammen giebt:

$$\sqrt{1 + k^2 \sin^2 x} \left( 1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 \right) + \left( -\frac{1}{4} k^2 + \frac{1}{16} k^4 \right) \cos 2x - \frac{k^4}{64} \cos 4x \quad (10)$$

Zur Integration hat man:

$$\int \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \int \cos 4x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\int_M^{M+\sigma} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \left( \sin (2M + 2\sigma) - \sin 2M \right) = \sin \sigma \cos (2M + \sigma) \quad (11)$$

$$\int_M^{M+\sigma} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \left( \sin (4M + 4\sigma) - \sin 4M \right) = \frac{1}{2} \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \quad (12)$$

Damit kann man die Integrale von (9), d. h. auch die Integration von (8) zusammensetzen, wodurch man einen Ausdruck von dieser Form erhält:

$$s = A b \sigma - B b \sin \sigma \cos (2M + \sigma) - C b \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \quad (13)$$

Dabei haben die Coefficienten  $A$ ,  $B$  und  $C$  folgende Bedeutungen:

$$A = \left( 1 + \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 \right), \quad B = \left( \frac{1}{4} k^2 - \frac{1}{16} k^4 \right), \quad C = \left( \frac{1}{128} k^4 \right) \quad (14)$$

Die Umkehrung von (13) giebt:

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \quad (15)$$

wobei die neu eingeführten Coefficienten sind (mit Zusetzung der nötigen  $\varrho$ ):

$$\alpha = \frac{1}{A} \varrho, \quad \beta = \frac{B}{A} \varrho, \quad \gamma = \frac{C}{A} \varrho \quad (16)$$

In gleicher Weise behandeln wir auch die Differential-Gleichung für den Längenunterschied, nämlich nach (7) und (8) § 104. S. 525:

$$d\lambda = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\lambda \quad (17)$$



Hier wird nach (11) S. 169 entwickelt:

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 \psi - \frac{e^4}{8} \cos^4 \psi - \frac{e^6}{16} \cos^6 \psi \quad (18)$$

Hiebei bestehen sphärische Gleichungen, nach (1) § 61. S. 347:

$$d\lambda \cos \psi = d\sigma \sin \alpha$$

dann nach den zu Fig. 2. gehörigen Gleichungen (2):

$$\sin \alpha = \frac{\sin m}{\cos \psi}, \quad \text{also } d\lambda = \frac{\sin m}{\cos^2 \psi} d\sigma \quad (19)$$

Damit kann man (17) in eine Integration nach  $\sigma$  umformen, nämlich mit Rücksicht auf (18):

$$l = \lambda - e^2 \sin m \int \left( \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} \cos^2 \psi + \frac{e^4}{16} \cos^4 \psi + \dots \right) d\sigma \quad (20)$$

Nun hat man wieder nach (6):

$$\cos^2 \psi = 1 - \cos^2 m \sin^2 x$$

$$\cos^4 \psi = 1 - 2 \cos^2 m \sin^2 x + \cos^4 m \sin^4 x$$

Ausserdem hat man  $\sin^2 x$  und  $\sin^4 x$  ausgedrückt in  $\cos 2x$  und  $\cos 4x$  durch (9), und all dieses zusammen bringt die zu integrierende Funktion (20) auf eine Reihe, welche nach  $\cos 2x$ ,  $\cos 4x$  u. s. w. fortschreitet, d. h. (20) wird:

$$l = \lambda - e^2 \sin m \int (A' + B' \cos 2x + C' \cos 4x + \dots) dx \quad (21)$$

Dabei haben die Coefficienten folgende Bedeutungen:

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} + \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{16} - \frac{e^2}{16} \cos^2 m - \frac{e^4}{16} \cos^2 m + \frac{3}{128} e^4 \cos^4 m \\ B' &= \frac{e^2}{16} \cos^2 m + \frac{e^4}{16} \cos^2 m - \frac{e^4}{32} \cos^4 m \\ C' &= \frac{e^4}{128} \cos^4 m \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Denkt man sich diese Coefficienten in (21) eingesetzt, integriert, und die Grenzen ebenso wie früher bei (11) und (12) eingeführt, so überblickt man leicht, dass folgendes erhalten wird:

$$l = \lambda - e^2 \sin m \left( A' \sigma + B' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \frac{C'}{2} \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) + \dots \right) \quad (23)$$

Hier ist noch bei  $B'$  und  $C'$  der Faktor  $\varrho$  zuzusetzen; indem wir dieses thun, und auch  $e^2$  in die Klammer hineinziehen, bilden wir aus (23) diese letzte Form:

$$l = \lambda - \sin m (\alpha' \sigma + \beta' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma' \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma)) \quad (24)$$

Dabei ist:

$$\alpha' = A' e^2, \quad \beta' = B' e^2 \varrho, \quad \gamma' = \frac{C' e^2}{2} \varrho \quad (25)$$

#### Entwicklung auf höhere Potenzen.

Wir haben in der vorstehenden Entwicklung nur so viele Glieder beibehalten, als man bequem überschauen kann, und so viele, als für gewöhnlich nötig sind.

Zu einem sicheren Urteil über den Einfluss der höheren Glieder muss man die Weiter-Entwicklung der vorstehenden Reihen machen. Wir setzen nur die Schluss-ergebnisse der Reihen-Entwicklung hier her.



Die Reihe (15) bekommt noch ein Glied, und ist dann:

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) + \delta \sin 3\sigma \cos (6M + 3\sigma) \quad (26)$$

Folgendes sind die dazu gehörigen Coefficienten mit  $k = e' \cos m$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{A} \varrho, & A &= \left( 1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6 - \frac{175}{36384} k^8 \right) \\ \beta &= \frac{B}{A} \varrho, & B &= \left( \frac{k^2}{4} - \frac{k^4}{16} + \frac{15}{112} k^6 - \frac{35}{2048} k^8 \right) \\ \gamma &= \frac{C}{A} \varrho, & C &= \left( \frac{k^4}{128} - \frac{3}{512} k^6 + \frac{35}{8192} k^8 \right) \\ \delta &= \frac{D}{A} \varrho, & D &= \left( \frac{k^6}{1536} - \frac{5}{6144} k^8 \right) \\ \varepsilon &= \frac{E}{A} \varrho, & E &= \left( \frac{5}{65536} k^8 \right) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Auch die Reihe (24) bekommt ein weiteres Glied und wird:

$$l = \lambda - \sin m \left( \alpha' \sigma + \beta' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma' \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) + \delta' \sin 3\sigma \cos (6M + 3\sigma) \right) \quad (28)$$

Folgendes sind die hiezu gehörenden Coefficienten:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{e^2}{2} \left( 1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \frac{5e^6}{64} \right) - \frac{e^4 \cos^2 m}{16} \left( 1 + e^2 + \frac{15}{16} e^4 \right) \\ &\quad + \frac{3}{16} e^6 \cos^4 m \left( 1 + \frac{15}{8} e^2 \right) - \frac{25}{2048} e^8 \cos^6 m \\ \beta' &= \varrho \left( \frac{e^4}{16} \cos^2 m \left( 1 + e^2 + \frac{15}{16} e^4 \right) - \frac{e^6}{32} \cos^4 m \left( 1 + \frac{15}{8} e^2 \right) + \frac{75}{4096} e^8 \cos^6 m \right) \\ \gamma' &= \varrho \left( \frac{e^6}{256} \cos^4 m \left( 1 + \frac{15}{8} e^2 \right) - \frac{15}{4096} e^8 \cos^6 m \right) \\ \delta' &= \varrho \left( \frac{5}{12288} e^8 \cos^6 m \right) \end{aligned} \right\} \quad (28a)$$

Wenn man hier alle konstanten Teile mit der Besselschen Excentricität  $e$  ( $\log e^2 = 7.824\,4104.287$  nach S. 193) ausrechnet, so bekommt man:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= 0,003\,342\,773\,183 - [4.447\,6079] \cos^2 m + [1.84854] \cos^4 m - [9.3843] \cos^6 m \\ \beta' &= [9,762\,0330] \cos^2 m - [7.28791] \cos^4 m + [4.87477] \cos^6 m \\ \gamma' &= [6,38482] \cos^4 m - [4.17580] \cos^6 m \\ \delta' &= [3.22156] \cos^6 m \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Diese Reihen gehen weit über das gewöhnliche Bedürfnis. Bei geodätischen Linien von mehreren Graden Ausdehnung braucht man von (29) meist nur  $\alpha'$  und  $\beta'$  und dabei nur die zwei ersten Glieder von  $\alpha'$  und das erste Glied von  $\beta'$ .

Etwas mehr braucht man gewöhnlich bei der Reihe (26) mit den Coefficienten (27), doch auch meist nur  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  nur etwa bis  $k^4$ . Dabei ist etwa 8stellige Logarithmen-Rechnung angenommen. Mit den Coefficienten (27) und (29) kann man auch die grössten Fälle 10stellig berechnen.

#### Anwendung der vorstehenden Entwicklungen.

Durch die Gleichungen (26) und (28) mit den zugehörigen Coefficienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  u. s. w. sind die gesuchten Beziehungen zwischen Fig. 1. und Fig. 2 hergestellt und man kann damit das Polardreieck auflösen in folgender Weise:



Von einem Punkte des Ellipsoids mit der geographischen Breite  $\varphi$  geht eine geodätische Linie  $s$  unter dem Azimut  $\alpha$  aus; man soll die Breite  $\varphi'$  des Endpunktes dieser geodätischen Linie bestimmen, sowie das Azimut  $\alpha'$  daselbst und den Längenunterschied  $l$  beider Punkte.

Aus der gegebenen Breite  $\varphi$  berechnet man die zugehörige reduzierte Breite  $\psi$  nach der Gleichung  $\tan \psi = \sqrt{1 - e^2} \tan \varphi$  (oder nach einem anderen in § 103. angegebenen Verfahren). Mit diesem  $\psi$  und dem Azimut  $\alpha$  kann man in dem sphärischen rechtwinkligen Dreieck in Fig. 2. die beiden Hilfsgrößen  $m$  und  $M$  bestimmen und damit die Gleichung (15) oder (26) nach  $\sigma$  auflösen.

Damit hat man drei Stücke  $\psi$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma$ , mit welchen das schiefwinklige sphärische Dreieck von Fig. 2. aufgelöst werden kann, so dass die jenseitige sphärische Breite  $\psi'$  und der sphärische Längenunterschied  $\lambda$  bekannt werden.

Von der sphärischen (reduzierten) Breite  $\psi'$  geht man zurück zu der wirklichen Breite  $\varphi'$  durch die Gleichung  $\tan \varphi' = \tan \psi' \sqrt{1 + e'^2}$  (oder durch ein anderes in § 103. angegebenes Verfahren), und von der sphärischen Länge  $\lambda$  kommt man zu der sphäroidischen Länge  $l$  durch die Gleichung (24) oder (28), womit die Lösung der ganzen Aufgabe vollendet ist.

Zu einem Zahlen-Beispiel hiefür wollen wir nach (5) § 73. S. 392 nehmen:

$$\text{Berlin } \varphi = 52^\circ 30' 16,7000'' \quad (30)$$

$$\text{Berlin-Königsberg } \alpha = 59^\circ 33' 0,6892'' \quad \log s = 5,724\,2591\,353 \quad (31)$$

Die Berechnung der reduzierten Breite von Berlin haben wir bereits in (26) § 103. S. 523 behandelt und gefunden:

$$\text{Berlin } \psi = 52^\circ 24' 43,0114'' \quad (32)$$

Nun kommt die Berechnung von  $m$  und  $M$  nach den Gleichungen (2) und (3):

$$m = 31^\circ 43' 31,13'' \quad M = 68^\circ 41' 19,95'' \quad (33)$$

Weiter brauchen wir die Coefficienten zur Berechnung von  $\sigma$ , und zwar zuerst  $k' = e' \cos m$  nach (8), es ist:

$$\log e' \cos m = \log k' = 8,843\,3740$$

und damit nach (14) und (16) hinreichend genau, ohne die Weiter-Entwicklung (27):

$$\log A = 0,000\,5270\,0 \quad \log B = 7,084\,1599\,2 \quad \log C = 3,266\,286$$

$$\log \alpha = 5,313\,8981\,0 \quad \log \beta = 2,398\,0580\,5 \quad \log \gamma = 8,580\,184$$

Mit diesen Coefficienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  kann man die Gleichung (15) nach  $\sigma$  auflösen, allerdings nicht geradezu, weil  $\sigma$  selbst rechts vorkommt; allein die Reihe (15) ist sehr rasch konvergierend, so dass es genügt, einen ersten Näherungswert von  $\sigma$  nur aus dem ersten Gliede von (15) zu berechnen, d. h.  $\sigma = \frac{as}{b}$  zu setzen, womit man auch die folgenden Glieder ausrechnen kann; oder kurz, man löst die Gleichung (15) durch Näherung indirekt, stufenweise nach  $\sigma$  auf. Dieses Verfahren gab in unserem Falle:

$$\text{erste Näherung } \alpha \frac{s}{b} = \sigma = 4^\circ 46' 17,8''$$

$$\text{hiezu } \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) = - \quad 16,4''$$

$$\text{zweite Näherung } \sigma = 4^\circ 46' 1,4''$$

Damit kann man das zweite und dritte Glied von (15) ausrechnen, und hat dann im ganzen:



$$\begin{aligned}\alpha \frac{s}{b} &= 4^\circ 46' 17,8176'' \\ \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) &= - 16,4086'' \\ \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) &= + 0,0015'' \\ \text{endgiltig } \sigma &= 4^\circ 46' 1,4105''\end{aligned}\quad (34)$$

Nun stellen wir von (32), (31), (34) zusammen:

$$\psi = 52^\circ 24' 43,0114'' \quad \alpha = 59^\circ 33' 0,6892'' \quad \sigma = 4^\circ 46' 1,4105'' \quad (34a)$$

Damit kann man das sphärische Dreieck auflösen, welches  $\psi'$ ,  $\alpha'$  und  $\lambda$  liefert; die Rechnung nach den Formeln (14) und (15) § 60. S. 341 (in gleicher Weise wie das Zahlen-Beispiel auf S. 341—342) hat ergeben:

$$\psi' = 54^\circ 37' 24,7566'' \quad \alpha' = 65^\circ 16' 9,3655'' \quad (35)$$

$$\lambda = 7^\circ 6' 30,1340'' \quad (36)$$

Der so gefundene sphärische Wert  $\psi'$  ist die reduzierte Breite von Königsberg, woraus man nach § 103. die wirkliche Breite berechnet, nämlich:

$$\varphi' = 54^\circ 42' 50,6002'' \quad (37)$$

Nun haben wir noch die Aufgabe, den sphärischen Längenunterschied  $\lambda$  von (36) in den sphäroidischen Längenunterschied  $l$  zu verwandeln, wozu die Gleichung (28) mit den Coefficienten (29) dient. Wir berechnen nach (29), jedoch nur mit den Gliedern bis  $\cos^4 m$ :

$$\log \alpha' = 7.523\ 8439 \quad \log \beta' = 9.62045 \quad \log \gamma' = 6.098$$

Demnach (24):

$$l = \lambda - 30,1479'' + 0,0144'' + 0,0000 \dots = \lambda - 30,1335''$$

also nach (32):

$$l = 7^\circ 6' 30,1340'' - 30,1335'' = 7^\circ 6' 0,0005'' \quad (38)$$

Nun haben wir in (37), (35), (38) die ganze Auflösung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Königsberg } \varphi' = 54^\circ 42' 50,6002'' \\ \text{Königsberg-Berlin } \alpha' = 65^\circ 16' 9,3655'' \quad , \quad l = 7^\circ 6' 0,0005'' \end{array} \right\} \quad (39)$$

Mit den erweiterten Formeln (26)—(29) wollen wir auch noch das grosse Normal-Beispiel (2) § 73. S. 391 berechnen, wofür die Hauptzahlen folgende sind:

$$\text{Gegeben } \varphi = 45^\circ 0' 0'' \quad \alpha = 29^\circ 3' 15,4598'' \quad (40)$$

$$\log s = 6.120\ 6674\ 805 \quad (41)$$

Die Rechnung beginnt mit der reduzierten Breite zu  $\varphi = 45^\circ$ :

$$\psi = 44^\circ 54' 14,67493'' \quad (42)$$

Das rechtwinklige sphärische Hilfsdreieck giebt:

$$m = 20^\circ 7' 8,712'' \quad M = 48^\circ 44' 46,551'' \quad (43)$$

Die Coefficienten zur Berechnung von  $\sigma$  werden nach (27):

$$\log \alpha = 5.313\ 7831\ 066 \quad , \quad \log \beta = 2.483\ 7124 \quad , \quad \log \gamma = 8.749\ 94 \quad , \quad \log \delta = 5.445$$

und damit  $\sigma$  selbst in 4 Gliedern:

$$\begin{aligned}\sigma &= 42\ 782,021\ 652'' - 20,794\ 012'' - 0,017\ 667'' + 0,000\ 012'' \\ \sigma &= 11^\circ 52' 41,20998''\end{aligned}\quad (44)$$

Mit  $\psi$ ,  $\alpha$  und  $\sigma$  von (42), (40) und (44) wird das sphärische Dreieck aufgelöst; dasselbe giebt:

$$\psi' = 54^\circ 54' 35,3145'' \quad \alpha' = 36^\circ 45' 7,4006'' \quad (45)$$

$$\lambda = 10^\circ 0' 49,11952'' \quad (46)$$



Die reduzierte Breite  $\psi'$  wird in die Breite  $\varphi'$  verwandelt, nach § 103, nämlich:

$$\varphi' = 54^\circ 59' 59,9999'' \quad (\text{soll } 55^\circ 0' 0'') \quad (47)$$

Das Azimut  $\alpha'$  nach (45) ist bereits auch sphäroidisches Azimut; wir haben also, um die Auflösung zu vollenden, nur noch  $\lambda$  von (46) in  $l$  zu verwandeln, wozu die Gleichung (28) mit den Coefficienten (29) dient.

Die Coefficienten-Berechnung nach (29) giebt:

$$\log \alpha' = 7.523\,7864\,329 \quad \log \beta' = 9.706\,0623 \quad \log \gamma' = 6.27300$$

und damit wird:

$$l = \lambda - 49,131\,513'' + 0,011\,935'' + 0,000\,020 = -49,119\,558''$$

$$\text{also nach (46):} \quad l = 9^\circ 59' 59,99996'' \quad (\text{soll } = 10^\circ 0' 0'') \quad (48)$$

In  $\alpha'$ ,  $\varphi'$  und  $l$  von (45), (47) und (48) haben wir die vollständige Auflösung der gestellten Aufgabe in hinreichender Übereinstimmung mit den Angaben von (2) § 73. S. 391.

#### Umkehrung der Aufgabe.

Wenn nicht  $\varphi$ ,  $\alpha$  und  $s$  gegeben sind, sondern  $\varphi$ ,  $\varphi'$  und  $\lambda$ , so dass  $s$ ,  $\alpha$  und  $\alpha'$  gesucht werden, so kann man das im Vorstehenden behandelte Verfahren auch noch anwenden, aber nur indirekt und umständlich, weil die sphärischen Winkel  $m$  und  $M$ , oder in erster Näherung wenigstens  $m$ , bereits zur Reduktion von  $l$  auf  $\lambda$  gebraucht werden.

Indessen haben wir für den Fall, dass  $\varphi$ ,  $\varphi'$  und  $l$  gegeben, und  $s$ ,  $\alpha$  und  $\alpha'$  gesucht sind, die günstigere Auflösung unseres nachfolgenden § 106.

#### Vergleichung unserer Formeln mit der Besselschen Methode.

Der Grundgedanke der Auflösung eines sphäroidischen Polar-Dreiecks durch ein sphärisches Hilfs-Dreieck mit reduzierten Breiten ist von Bessel behandelt in einer Abhandlung: „Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen, Astr. Nachr. Nr. 86, 4. Band 1826“, S. 241–254, nebst „Tafeln zur Berechnung der geodätischen Vermessungen“.

Diese Besselsche Theorie mit den Hilfstafeln bildet auch einen Teil des Werkes: „Das Messen auf der sphäroidischen Oberfläche u. s. w. von J. J. Baeyer, Berlin 1862“.

Um die Besselsche Methode nebst ihren Hilfstafeln mit den Formeln unseres vorstehenden § 105. zu vergleichen, bemerken wir zuerst, dass unsere Coefficienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  nach (27) dieselben sind, wie die Besselschen Coefficienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , deren Logarithmen in der ersten Besselschen Hilfstafel enthalten sind; allerdings ist die Form der Berechnung in beiden Fällen verschieden.

Die Coefficienten  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  des zweiten Teils der Besselschen Hilfstafel sind mit unseren Coefficienten  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  von (29) nicht unmittelbar identisch, aber sie sind denselben proportional. Es kommt bei Bessel ein konstanter Faktor in Rechnung, den wir hier  $F$  nennen wollen:

$$F = \frac{e^2}{\sqrt{1-0,75e^2}} \quad (\log F = 7.825\,1389^0) \quad (49)$$

Indem wir für den nächsten Zweck der Vergleichung die Besselschen Coefficienten mit  $\alpha''$ ,  $\beta''$ ,  $\gamma''$  bezeichnen, und mit  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  die Coefficienten unserer Entwicklung nach (29) S. 528, haben wir:

$$F\alpha'' = \alpha', \quad F\beta'' = \beta', \quad F\gamma'' = \gamma' \quad (50)$$

Als Argument für die erste Besselsche Tafel,  $\log \alpha$ ,  $\log \beta$ ,  $\log \gamma$  dient der Logarithmus des Modulus  $k = e' \cos m$ , welcher nach (8) und (27) auch Argument unserer  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ist, also erstes Argument  $= \log e' \cos m$ . Dagegen für den zweiten Teil der Besselschen Tafel dient als Argument eine Grösse  $\log k'$ , wobei  $k'$  diese Bedeutung hat:

$$k' = \frac{e\sqrt{0,75}}{\sqrt{1-0,75e^2}} \cos m \quad \left( \log \frac{e\sqrt{0,75}}{\sqrt{1-0,75e^2}} = 8.850\,8255^6 \right) \quad (51)$$

Mit diesen Beziehungen kann man unsere Coefficienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  statt sie nach (27) und (29) zu berechnen, auch aus der Besselschen Hilfstafel entnehmen, indem man mit dem Argument  $\log e' \cos m$  in den ersten Teil und mit dem Argument  $\log k'$  nach (51) in den zweiten Teil von Bessels Tafel eingeht, worauf zu den gefundenen  $\log \alpha'$  und  $\log \beta'$  noch der konstante  $\log F$  nach (49) zu addieren ist, um unsere  $\alpha'$ ,  $\beta'$  zu erhalten.



### § 106. Neue Auflösung des geodätischen Polar-Dreiecks. \*)

(Bezeichnungen nach Fig. 1. und Fig. 2. § 104. S. 524.)

Wir nehmen die zwei Differential-Grundformeln nach (6), (7) § 104. S. 525 nochmals vor: nämlich:

$$d\sigma = \frac{V}{a} ds \quad (1)$$

$$d\lambda = V dl \quad (2)$$

wobei, wie gewöhnlich,  $V$  diese Bedeutung hat:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (e'^2 \cos^2 \varphi = \eta^2) \quad (3)$$

Wenn die beiden Gleichungen (1) und (2) integriert sind, so sind alle Beziehungen zwischen einem geodätischen Polar-Dreieck und einem sphärischen Polar-Hilfsdreieck (Fig. 1. und Fig. 2. S. 524) bekannt, und man kann die Aufgabe auflösen, wie wir in § 104. S. 524 auseinandergesetzt haben.

Wir wollen nun die Integration der Grundgleichungen (1) und (2) durch Entwicklung nach dem Maclaurinschen Satze bewirken, d. h. zunächst bis zur dritten Potenz, durch Entwicklung der Reihen:

$$\sigma = \frac{d\sigma}{ds} s + \frac{d^2\sigma}{ds^2} \frac{s^2}{2} + \frac{d^3\sigma}{ds^3} \frac{s^3}{6} \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{d\lambda}{dl} l + \frac{d^2\lambda}{dl^2} \frac{l^2}{2} + \frac{d^3\lambda}{dl^3} \frac{l^3}{6} \quad (5)$$

Wir gehen zuerst näher auf (4) ein, und weil  $a$  konstant, nämlich nach (9) § 31. S. 189  $a = c \sqrt{1 - e^2}$  ist, haben wir aus (1):

$$\sqrt{1 - e^2} \sigma = \frac{1}{c} \left\{ V s + \frac{dV}{ds} \frac{s^2}{2} + \frac{d^2V}{ds^2} \frac{s^3}{6} \right\} \quad (6)$$

Die hier nötigen Ableitungen machen wir in gleicher Form und Behandlung wie früher in § 74. die Ableitungen für  $\varphi$ ,  $l$  und  $\alpha$ . Auch citieren wir von dort (5), (6), (7), § 74. S. 393 mit  $\tan \varphi = t$ :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^3}{c} \cos \alpha, \quad \frac{dl}{ds} = \frac{V \sin \alpha}{c \cos \varphi}, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{V}{c} \sin \alpha t \quad (7)$$

$$(13), (14), \text{ S. 393: } \frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2}{V} t, \quad \frac{dV}{ds} = -\eta^2 \frac{V^2}{c} \cos \alpha t \quad (8)$$

Weiter wird abgeleitet:

$$\frac{d^2V}{ds^2} = -\eta^2 \frac{V^3}{c^2} \left\{ \cos^2 \alpha (1 - t^2 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha t^2 \right\} \quad (9)$$

Nun kann man bereits die Formel (6) zusammensetzen, und man bemerkt, dass dabei  $s$  mit  $V$  und  $c$  immer in derselben Kombination vorkommen, wie auch bei den früheren Reihen (vgl. (22) § 74. S. 394), wir setzen deshalb für analytisches Mass (ohne  $\varphi$ ):

$$\frac{V}{c} s = S \quad (10)$$

und damit geben (6), (8) und (9):

$$\sigma \sqrt{1 - e^2} = S - \frac{S^2}{2} \cos \alpha \eta^2 t - \frac{S^3}{6} \eta^2 \left( \cos^2 \alpha (1 - t^2 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha t^2 \right) \quad (11)$$

\*) Erstmals veröffentlicht in der „Zeitschr. f. Verm.“, 1883, S. 65–82.



In gleicher Weise haben wir auch die Längen-Formel zu bilden, nämlich zunächst (2) und (5):

$$\lambda = V l + \frac{dV}{dl} \frac{l^2}{2} + \frac{d^2V}{dl^2} \frac{l^3}{6} \quad (12)$$

Die hierzu nötigen Ableitungen sind:

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dl}, \quad \frac{d\varphi}{dl} = V^2 \cotg \alpha \cos \varphi, \quad \frac{d\alpha}{dl} = \sin \varphi$$

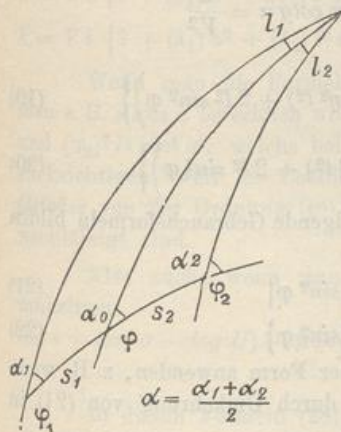
$$\frac{dV}{dl} = -\eta^2 V \cotg \alpha \sin \varphi \quad \text{oder} \quad = -\eta^2 V \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \cos \alpha t \quad (13)$$

$$\frac{d^2V}{dl^2} = -\eta^2 V \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha} \left\{ \cos^2 \alpha (1 - 3t^2 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha t^2 \right\} \quad (14)$$

Damit kann man (12) zusammensetzen:

$$\lambda = V \left\{ l - \frac{l^2 \cos \varphi}{2 \sin \alpha} \eta^2 \cos \alpha t - \frac{l^3 \cos^2 \varphi}{6 \sin^2 \alpha} \eta^2 (\cos^2 \alpha (1 - 3t^2 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha t^2) \right\} \quad (15)$$

Fig. 1.



Die Formeln (11) und (15) geben  $\sigma$  und  $\lambda$  als Funktion der Ausgangsbreite  $\varphi$  und des Ausgangsazimutes  $\alpha$  der geodätischen Linie; wir wollen nun aber das Prinzip des mittleren Argumentes anwenden, welches bereits in § 77. sehr nützliche Dienste geleistet hat.

Wir nehmen zu diesem Zwecke die Bezeichnungen von nebenstehender Fig. 1. an, d. h. wir nehmen drei Punkte in gleichen Breiten-Abständen:

$$\varphi_2 - \varphi = \varphi - \varphi_1, \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi \quad (16)$$

Von der Mittelbreite  $\varphi$  geht eine geodätische Linie  $s_2$  unter dem Azimut  $\alpha_0$  aus, und eine zweite geodätische Linie  $s_1$  unter dem Azimut  $\alpha_0 \pm 180^\circ$ . Den geodätischen Linien  $s_2$  und  $s_1$ , deren Summe  $s_2 + s_1 = s$  sei, entsprechen zwei Grössen  $S_2$  und  $S_1$

nach (10), mit der Summe  $S_2 + S_1 = S$ . Damit giebt die doppelte Anwendung der Formel (11):

$$\sigma \sqrt{1-e^2} = S - \frac{S_2^2 - S_1^2}{2} \cos \alpha_0 \eta^2 t - \frac{S_2^3 + S_1^3}{6} \eta^2 (\cos^2 \alpha_0 (1 - t^2 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha_0 t^2)$$

Hier ist von (4) § 77. S. 403 zu benützen:

$$S_2 - S_1 = \frac{S^2}{4} t \left( \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos \alpha_0} + 3\eta^2 \cos \alpha_0 \right)$$

Wenn man dieses in das Vorstehende einsetzt, so darf man auch überall  $\alpha$  statt  $\alpha_0$  schreiben, und damit bekommt man:

$$\sigma \sqrt{1-e^2} = S - \frac{S^3}{24} \eta^2 \left\{ \sin^2 \alpha 2t^2 + \cos^2 \alpha (1 - t^2 + \eta^2 + 6\eta^2 t^2) \right\} \quad (17)$$

Nun wenden wir auch die Gleichung (15) in zweifacher Weise auf Fig. 1. an und erhalten mit  $l_2 + l_1 = l$ ,  $\lambda_2 + \lambda_1 = \lambda$ :

$$\lambda = V \left\{ l - \frac{l_2^2 - l_1^2}{2} \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha_0} \eta^2 \cos \alpha_0 t - \frac{l_2^3 + l_1^3}{6} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha_0} \eta^2 (\cos^2 \alpha_0 (1 - 3t^2 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) - \sin^2 \alpha_0 t^2) \right\}$$



Hiezu hat man von (17) § 77. S. 404:

$$(l_2 - l_1) \cos \varphi = \frac{S^2 \sin^3 \alpha}{4 \cos \alpha} t + \frac{S^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha t (2 + 3 \eta^2) \quad (21)$$

Hier kann man setzen  $S \sin \alpha = l \cos \varphi$ , also:

$$(l_2 - l_1) = \frac{l^2 \sin \alpha}{4 \cos \alpha} \cos \varphi t + \frac{l^2 \cos \alpha}{4 \sin \alpha} \cos \varphi t (2 + 3 \eta^2)$$

Dieses setzt man in die vorhergehende Formel für  $\lambda$ , wobei auch wieder  $\alpha_0$  und  $\alpha$  vertauscht werden können; dadurch erhält man:

$$\lambda = V \left\{ l - \frac{l^3 \cos^2 \varphi}{24 \sin^2 \alpha} \eta^2 \left( \sin^2 \alpha t^2 + \cos^2 \alpha (1 + 3 t^2 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2) \right) \right\} \quad (18)$$

Die Gleichungen (17) und (18) enthalten bereits die Lösung unserer Aufgabe, wenn man  $S$ ,  $\alpha$  und  $l$  wenigstens näherungsweise als gegeben voraussetzt; indessen ist es bequemer, alles auf den Breiten-Unterschied  $b$  und den Längen-Unterschied  $l$  zu reduzieren. Hiezu hat man für die Korrektionsglieder:

$$S \sin \alpha = l \cos \varphi, \quad S \cos \alpha = l \cos \varphi \cotg \alpha = \frac{b}{V^2}$$

Dieses in (17) und (18) eingesetzt giebt:

$$\sigma = \frac{S}{V \sqrt{1 - e^2}} \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left( \frac{b^2}{V^4} (1 - t^2 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2) + 2 l^2 \sin^2 \varphi \right) \right\} \quad (19)$$

$$\lambda = V l \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{24} \left( \frac{b^2}{V^4} (1 + 3 t^2 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2) + 2 l^2 \sin^2 \varphi \right) \right\} \quad (20)$$

Wir wollen die Coefficienten herausheben und folgende Gebrauchsformeln bilden (mit Berücksichtigung der nötigen  $\varphi$ ):

$$\sigma = U s \left\{ 1 + (\sigma_1) b^2 + (\sigma_2) l^2 \sin^2 \varphi \right\} \quad (21)$$

$$\lambda = V l \left\{ 1 + (\lambda_1) b^2 + (\lambda_2) l^2 \sin^2 \varphi \right\} \quad (22)$$

Man kann diese Formeln auch in logarithmischer Form anwenden, z. B. wenn  $\log \sigma$  gegeben und  $\log s$  zu bestimmen ist, hat man durch Umkehrung von (21) in logarithmischer Form:

$$\log s = (\log \sigma - \log U) - \mu (\sigma_1) b^2 - \mu (\sigma_2) l^2 \sin^2 \varphi \quad (23)$$

Dabei ist  $V$  die bisher immer mit  $V$  bezeichnete Funktion:

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad (24)$$

und

$$U = \frac{V}{c \sqrt{1 - e^2}} \varrho \quad \text{oder} \quad = \frac{V}{a} \varrho$$

$$\log U = \log V + 8.509\,7816\,695 \quad (25)$$

Den Wert  $\log V$  bzw.  $\log V^2$  kann man aus der Hilfstafel S. [2]—[7] unseres Anhangs 10 stellig entnehmen und nach (25) hat man dann auch  $\log U$ .

Für die Coefficienten  $(\sigma_1)$ ,  $(\sigma_2)$ ,  $(\lambda_1)$ ,  $(\lambda_2)$  in (21) und (22) ergeben sich durch Vergleichung mit (19) und (20) folgende Bedeutungen:

$$(\sigma_1) = + \frac{\eta^2}{24 \varrho^2 V^4} (t^2 - (1 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2)), \quad (\sigma_2) = - \frac{\eta^2}{12 \varrho^2} \quad (26)$$

$$(\lambda_1) = - \frac{\eta^2}{24 \varrho^2 V^4} (3 t^2 + 1 + \eta^2 + 6 \eta^2 t^2), \quad (\lambda_2) = - \frac{\eta^2}{12 \varrho^2} \quad (27)$$

Dabei sind die konstanten Coefficienten-Logarithmen:

$$\log \frac{1}{24 \varrho^2} = 7.990\,9385 - 20, \quad \log \frac{1}{12 \varrho^2} = 8.291\,9685 - 20$$



*Weiter-Entwicklung bis zur fünften Ordnung.*

Man kann mit den bisher entwickelten Formeln bereits geodätische Linien von mehreren Grad Ausdehnung berechnen, wie aus der Vergleichung der nachfolgenden Zahlen-Beispiele mit den Ergebnissen von § 105. zu ersehen ist.

Das beste Mittel jedoch, zur Gewinnung eines Urteils über das bisher behandelte Verfahren und über die Möglichkeit seiner Erweiterung, hat man in der Weiter-Entwicklung um eine Stufe höher, d. h. bis zur fünften Ordnung.

Wir haben diese Entwicklung durchgeführt, und in der „Zeitschr. f. Verm., 1883“, S. 72–76 die Haupt-Zwischenstufen angegeben; da es sich dabei um sehr lange, im Druck kaum wiederzugebende Formelhäufungen handelt, deren mathematischer Grundgedanke schon durch das Vorhergehende völlig klar gemacht ist, geben wir hier nur die End-Ergebnisse.

Die Formeln (21) und (22) werden so erweitert (vgl. (30) und (31)):

$$\sigma = U s \{ 1 + (\sigma_1) b^2 + (\sigma_2) l^2 \sin^2 \varphi + (\sigma_3) b^4 + (\sigma_4) b^2 l^2 \cos^2 \varphi + (\sigma_5) l^4 \cos^4 \varphi \} \quad (28)$$

$$\lambda = V l \{ 1 + (\lambda_1) b^2 + (\lambda_2) l^2 \sin^2 \varphi + (\lambda_3) b^4 + (\lambda_4) b^2 l^2 \cos^2 \varphi + (\lambda_5) l^4 \cos^4 \varphi \} \quad (29)$$

Wenn man die Formeln (28) und (29) umgekehrt anwenden will, d. h. wenn man z. B.  $s$  aus  $\sigma$  berechnen will, so braucht man die Glieder  $(\sigma_1)^2 b^4$ ,  $(\sigma_1)(\sigma_2) b^2 l^2 \sin^2 \varphi$  und  $(\sigma_2)^2 l^4 \sin^4 \varphi$ , welche bei der Reihenumkehrung zunächst auftreten, nicht zu berücksichtigen, weil die Coefficienten  $(\sigma_1)$  und  $(\sigma_2)$  beide den Faktor  $\eta^2$  haben, und Glieder von der Ordnung  $(\eta^4)$  in den Coefficienten  $(\sigma_3)$ ,  $(\sigma_4)$  und  $(\sigma_5)$  überhaupt vernachlässigt sind.

Also auch, wenn man logarithmisch rechnen will, kann man (28) kurz so umkehren:

$$\log s = (\log \sigma - \log U) - \mu(\sigma_1) b^2 - \mu(\sigma_2) l^2 \sin^2 \varphi - \mu(\sigma_3) b^4 - \mu(\sigma_4) b^2 l^2 \cos^2 \varphi - \mu(\sigma_5) l^4 \cos^4 \varphi \quad (30)$$

In diesen Formeln (28), (29), (30) sind die Coefficienten  $(\sigma_1)$ ,  $(\sigma_2)$ ,  $(\lambda_1)$ ,  $(\lambda_2)$  dieselben, wie schon bei (26) und (27) angegeben wurde; die übrigen haben, auf  $\eta^2$  einschliesslich genau, folgende Bedeutungen:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_3) &= \frac{\eta^2}{480 \varrho^4} (1 - t^2) &= [3.88838] \cos^2 \varphi (1 - t^2) \\ (\sigma_4) &= \frac{\eta^2}{720 \varrho^4} (-1 + 2 t^2 + 15 t^4) &= [3.712 229] \cos^2 \varphi (-1 + 2 t^2 + 15 t^4) \\ (\sigma_5) &= -\frac{\eta^2}{720 \varrho^4} (9 t^2 - 5 t^4) &= [3.712 229_n] \cos^2 \varphi (9 t^2 - 5 t^4) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_3) &= -\frac{\eta^2}{1440 \varrho^4} (1 + 15 t^2) &= [3.411 256_n] \cos^2 \varphi (1 + 15 t^2) \\ (\lambda_4) &= \frac{\eta^2}{720 \varrho^4} (-1 - 10 t^2 + 15 t^4) &= [3.712 286] \cos^2 \varphi (-1 - 10 t^2 + 15 t^4) \\ (\lambda_5) &= \frac{\eta^2}{240 \varrho^4} (-3 t^2 + t^4) &= [4.189 407] \cos \varphi (-3 t^2 + t^4) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Die eingeklammerten Zahlen sind hier Logarithmen, und angehängtes  $n$  bedeutet, dass die zugehörige Zahl negativ ist. Wie immer bedeutet  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$  und  $t = \tan \varphi$ .



Eine Coëfficienten-Tabelle haben wir hiernach berechnet und auf S. [62]–[63] des Anhangs mitgeteilt. Zu Weiterem können auch die Tabellen [47] und [48] des Anhangs benützt werden.

In den vorstehenden Formeln kommen verschiedene Konstanten vor, welche wir zum Gebrauch hier zusammenstellen:

$$\left. \begin{array}{ll} \log(1: 12 \varrho^2) = 8.291\,9684\cdot9 - 20 & \log(e'^2: 12 \varrho^2) = 6.119\,2832\cdot7 - 20 \\ \log(1: 24 \varrho^2) = 7.990\,9384\cdot9 - 20 & \log(e'^2: 24 \varrho^2) = 5.818\,2572\cdot8 - 20 \\ \log(1: 240 \varrho^4) = 6.362\,0882 - 30 & \log(e'^2: 240 \varrho^4) = 4.189\,4070 - 30 \\ \log(1: 480 \varrho^4) = 6.061\,0582 - 30 & \log(e'^2: 480 \varrho^4) = 3.888\,3770 - 30 \\ \log(1: 720 \varrho^4) = 5.884\,9670 - 30 & \log(e'^2: 720 \varrho^4) = 3.712\,2858 - 30 \\ \log(1: 1440 \varrho^4) = 5.583\,9370 - 30 & \log(e'^2: 1440 \varrho^4) = 3.411\,2558 - 30 \end{array} \right\} \quad (33)$$

Um eine Übersicht zu gewinnen, wie viel die Glieder fünfter Ordnung in unseren Breiten etwa ausmachen, haben wir die folgenden zwei Übersichts-Tabellen berechnet, für den Gesamtbetrag der 3 Endglieder in (28) und (29).

I. Glieder fünfter Ordnung in der Formel (28) für  $\sigma$ , mit  $\varphi = 50^\circ$ .

$b =$	$l = 2^\circ$	$l = 4^\circ$	$l = 6^\circ$	$l = 8^\circ$	$l = 10^\circ$
$2^\circ$	+ 0,00000"	+ 0,00000"	+ 0,00001"	+ 0,00001"	+ 0,00001"
$4^\circ$	+ 0,00000	+ 0,00002	+ 0,00005	+ 0,00010	+ 0,00016
$6^\circ$	+ 0,00001	+ 0,00006	+ 0,00014	+ 0,00030	+ 0,00048
$8^\circ$	+ 0,00001	+ 0,00012	+ 0,00031	+ 0,00061	+ 0,00103
$10^\circ$	+ 0,00002	+ 0,00018	+ 0,00056	+ 0,00111	+ 0,00186

II. Glieder fünfter Ordnung in der Formel (29) für  $\lambda$ , mit  $\varphi = 50^\circ$ .

$b =$	$l = 2^\circ$	$l = 4^\circ$	$l = 6^\circ$	$l = 8^\circ$	$l = 10^\circ$
$2^\circ$	— 0,00000"	— 0,00000"	— 0,00001"	— 0,00003"	— 0,00012"
$4^\circ$	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00001	— 0,00004
$6^\circ$	— 0,00004	— 0,00006	— 0,00006	— 0,00005	— 0,00005
$8^\circ$	— 0,00011	— 0,00020	— 0,00025	— 0,00026	— 0,00022
$10^\circ$	— 0,00028	— 0,00053	— 0,00070	— 0,00079	— 0,00078

Als erste Anwendung der entwickelten Formeln wollen wir unser fünftes Normal-Beispiel (5) § 74. S. 392 nehmen in dieser Weise:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gegeben Berlin} \quad \varphi_1 = 52^\circ 30' 16,7'' \\ \text{Königsberg} \quad \varphi_2 = 54^\circ 42' 50,6'' \end{array} \right\} \quad l = 7^\circ 6' 0'' \quad (36)$$

Es soll die geodätische Linie  $s$  zwischen beiden Punkten, und beide Azimute  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  berechnet werden.

Man bildet zuerst das Mittel der gegebenen Breiten:

$$\varphi = 53^\circ 36' 33,65'' \quad (37)$$

Damit geht man in die Hilfstafeln Seite [5] und Seite [62]–[63] des Anhangs ein, und entnimmt die Coëfficienten:

$$\log V = 0.000\,5129.683 \quad (38)$$

$\log(\lambda_1)$	$\log(\lambda_2)$	$\log(\lambda_3)$	$\log(\lambda_4)$	$\log(\lambda_5)$
6.17908 <sub>n</sub>	5.66582 <sub>n</sub>	4.414 <sub>n</sub>	4.756	4.065



Damit rechnet man nach der Formel (29), mit  $l = 7^\circ 6' 0'' = 25560$ ; das Hauptglied wird  $25590,208\,116''$ , dann die 5 Korrektionsglieder:

$$\begin{aligned} & -0,024\,452'' \quad , \quad -0,050\,187'' \quad , \quad -0,000\,003'' \quad , \quad +0,000\,021'' \quad , \quad -0,000\,016'' \\ & \lambda = 25590,208\,116'' - 0,074\,637'' = 25590,133\,479'' \\ & \lambda = 7^\circ 6' 30,133\,479'' \end{aligned} \quad (39)$$

Wir haben hier mit 6 Dezimalen der Sekunden gerechnet, um zu sehen, wie weit sich überhaupt die drei letzten Glieder bemerklich machen; da dieselben nur  $0,0002''$  ausmachen, könnte man dieselben ganz weglassen.

Nun nehmen wir die reduzierten Breiten zu (36) nebst  $\lambda$  von (39) zusammen:

$$\begin{aligned} \text{Berlin} \quad \psi_1 &= 52^\circ 24' 43,01137'' \\ \text{Königsberg} \quad \psi_2 &= 54^\circ 37' 24,75639'' \end{aligned} \quad \lambda = 7^\circ 6' 30,13348'' \quad (40)$$

Das dadurch bestimmte sphärische Dreieck haben wir nach den Gauss'schen Formeln (4), (5) § 60. S. 339 aufgelöst, wodurch gefunden wurde:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 59^\circ 33' 0,6889'' & \alpha_2 &= 65^\circ 16' 9,3650'' \\ \sigma &= 4^\circ 46' 1,41023'' = 17161,41023'' \end{aligned} \quad (41)$$

Um  $\sigma$  auf  $s$  zu reduzieren, braucht man wieder Coefficienten, zuerst  $\log U$  nach der Formel (25) mit Benützung des schon bei (38) berechneten  $\log V$ :

$$\log U = 8.510\,2946.378.$$

Aus der Hilfstafel Seite [62]–[63] entnimmt man mit dem Argument  $\varphi = 53^\circ 36' 33,65''$  von (37), die 5 Coefficienten-Logarithmen für  $s$ :

$$\begin{array}{ccccc} \log(\sigma_1) & \log(\sigma_2) & \log(\sigma_3) & \log(\sigma_4) & \log(\sigma_5) \\ 5.27256 & 5.66582_n & 3.360_n & 4.987 & 5.839_n \end{array}$$

Damit rechnen wir nach der Formel (30), und haben zunächst das Hauptglied  $5.724\,2583.351$  und die 5 logarithmischen Korrektionsglieder:

$$\begin{aligned} & -0.5146 & +8.5179 & +0.0000 & -0.0061 & +0.0002 \end{aligned}$$

Dieses giebt im ganzen:

$$\log s = 5.724\,2583.351 + 7.997 = 5.724\,2591.348 \quad s = 529\,979,578'' \quad (42)$$

Die Länge  $s$  und die beiden Azimute von (41) stellen die Lösung vor, welche mit den entsprechenden Werten (31) und (39) des vorigen § 105. S. 529–531 hinreichend stimmen.

Nach diesem wollen wir noch unser grosses Normal-Beispiel (2) § 73. S. 391 behandeln:

$$\begin{aligned} \text{Gegeben} \quad \varphi_1 &= 45^\circ 0' 0'' & l &= 10^\circ 0' 0'' \\ \varphi_2 &= 55^\circ 0' 0'' \\ \text{Mittel} \quad \varphi &= 50^\circ 0' 0'' \end{aligned} \quad (43)$$

Damit geht man in die Hilfstafeln Seite [5] und Seite [62]–[63] ein, und entnimmt die Coefficienten:

$$\log V = 0.000\,6020.131 \quad \log U = 8.510\,3836.826 \quad (44)$$

$$\begin{array}{ccccc} \log(\sigma_1) & \log(\sigma_2) & \log(\sigma_3) & \log(\sigma_4) & \log(\sigma_5) \\ 5.02731 & 5.73542_n & 3.128_n & 4.835 & 3.759_n \end{array} \quad (45)$$

$$\begin{array}{ccccc} \log(\lambda_1) & \log(\lambda_2) & \log(\lambda_3) & \log(\lambda_4) & \log(\lambda_5) \\ 6.155\,215_n & 5.73542_n & 4.376_n & 4.506 & 4.156_n \end{array} \quad (46)$$

Die Reduktion für  $\lambda$  nach der Formel (29) giebt das Hauptglied  $36049,93731''$  und die 5 Korrektionsglieder:

$$\begin{aligned} & -0,667\,923'' \quad , \quad -0,149\,088'' \quad , \quad -0,001\,438'' \quad , \quad +0,000\,802'' \quad , \quad -0,000,148'' \end{aligned}$$



$$\text{Im ganzen: } \lambda = 36049,93731'' - 0,817\,795'' = 36049,11952'' \quad (47)$$

Die beiden reduzierten Breiten sind:

$$\psi_1 = 44^\circ 54' 14,67493'' \quad \psi_2 = 54^\circ 54' 35,31462'' \quad (48)$$

Diese  $\psi_1$  und  $\psi_2$  nebst  $\lambda$  von (47) bestimmen ein sphärisches Dreieck, dessen Auflösung giebt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 29^\circ 3' 15,45983'' & \alpha_2 &= 36^\circ 45' 7,40055'' \\ \sigma_1 &= 11^\circ 52' 41,20996'' & &= 42761,20996'' \end{aligned} \quad (49)$$

Zur Reduktion von  $\sigma$  auf  $s$  hat man die Formel (30) mit den Coefficienten (45); das Hauptglied wird 6.120 6663 024 und die 5 Korrektionsglieder:

$$-5,994 \quad , \quad +17,961 \quad , \quad +0,010 \quad , \quad -0,206 \quad , \quad 0,007$$

Im ganzen:

$$\log s = 6.120\,6663\,024 + 11,778 = 6.120\,6674\,802 \quad s = 1\,320\,284,365'' \quad (50)$$

Die Werte (49) und (50) stellen die Lösung der Aufgabe vor, welche mit (40), (41), (45) des vorigen § 105. S. 530 verglichen, genügend stimmen.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1883“ S. 81–82 haben wir eine Coefficienten-Tabelle für die Formeln (28) und (29) gegeben, welche nicht dieselbe ist wie die neu berechnete Tabelle Seite [62]–[63] unseres Anhangs. Nur die Coefficienten  $(\sigma_1)$ ,  $(\sigma_2)$ ,  $(\lambda_1)$ ,  $(\lambda_2)$  sind mit den früheren [1], [3], [1], [3] identisch, abgesehen von einer kleinen Differenz in den letzten Stellen von  $\log(\sigma_1)$  und  $\log(\lambda_1)$  daher rührend, dass früher  $\frac{1}{r^2} = 1 - 2\eta^2$  gesetzt war, was Vernachlässigung von  $\eta^4$  enthält, welche in den neuen Coefficienten  $(\sigma_1)$ ,  $(\sigma_2)$ ,  $(\lambda_1)$ ,  $(\lambda_2)$  nicht mehr vorkommt. Ausserdem besteht der Unterschied, dass Funktionen  $\sin^2 \varphi$ ,  $\cos^2 \varphi$ ,  $\cos^4 \varphi$ , welche früher in die Coefficienten gezogen waren, nun in der Formel bleiben, damit die Coefficienten-Tafel kleinere Differenzen bekommt. Nur der in  $\eta^2$  enthaltene Faktor  $\cos^2 \varphi$  ist in die Coefficienten gezogen, weil der Modul  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$  sich analytisch gut findet, und auch formell den Faktoren  $r^2$  gegenüber in den Coefficienten zum Gleichgewicht beiträgt.

Als ein weiteres Beispiel für die Anwendung des im vorstehenden § 106. behandelten Verfahren können wir die Mecklenburgische Diagonale citieren, welche schon unter unseren Normalbeispielen in § 73. S. 392 angegeben, in „Zeitschr. f. Verm. 1896“ S. 240–248 berechnet wurde.

## Kapitel X.

### Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

*Vorbemerkung.* Dieses Kapitel enthält im Wesentlichen den Inhalt der Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas, auctore Carolo Friderico Gauss, Göttingae 1828 (societati regiae oblatae d. 8. Octob. 1827) und in „Carl Friedrich Gauss Werke“, IV. Band, Göttingen 1873, S. 217–258. In deutscher Übersetzung herausgegeben: „Allgemeine Flächentheorie u. s. w. von A. Wangerin, Leipzig, Engelmann 1889.“

Wir haben versucht, die analytischen Entwicklungen des ersten Teiles dieser klassischen Abhandlung durch unsere geometrischen Betrachtungen von § 107. und 108. zu ersetzen.

### §. 107. Geodätischer Excess.

Dem sphärischen Excess, den wir in § 40. kennen gelernt haben, mit der Formel (2a) S. 231

$$\varepsilon = \frac{E}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F}{r^2} \varrho \quad \text{in Sekunden} \quad (1)$$