



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

Kapitel X. Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

Im ganzen: $\lambda = 36049,93731'' - 0,817\,795'' = 36049,11952''$ (47)

Die beiden reduzierten Breiten sind:

$$\psi_1 = 44^\circ 54' 14,67493'' \quad \psi_2 = 54^\circ 54' 35,31462'' \quad (48)$$

Diese ψ_1 und ψ_2 nebst λ von (47) bestimmen ein sphärisches Dreieck, dessen Auflösung giebt:

$$\alpha_1 = 29^\circ 3' 15,45983'' \quad \alpha_2 = 36^\circ 45' 7,40055'' \quad (49)$$

$$\sigma_1 = 11^\circ 52' 41,20996'' = 42761,20996''$$

Zur Reduktion von σ auf s hat man die Formel (30) mit den Coefficienten (45); das Hauptglied wird 6.120 6663 024 und die 5 Korrektionsglieder:

$$-5,994 \quad , \quad +17,961 \quad , \quad +0,010 \quad , \quad -0,206 \quad , \quad 0,007$$

Im ganzen:

$$\log s = 6.120\,6663\,024 + 11,778 = 6.120\,6674\,802 \quad s = 1\,320\,284,365'' \quad (50)$$

Die Werte (49) und (50) stellen die Lösung der Aufgabe vor, welche mit (40), (41), (45) des vorigen § 105. S. 530 verglichen, genügend stimmen.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1883“ S. 81–82 haben wir eine Coefficienten-Tabelle für die Formeln (28) und (29) gegeben, welche nicht dieselbe ist wie die neu berechnete Tabelle Seite [62]–[63] unseres Anhangs. Nur die Coefficienten (σ_1) , (σ_2) , (λ_1) , (λ_2) sind mit den früheren [1], [3], [1], [3] identisch, abgesehen von einer kleinen Differenz in den letzten Stellen von $\log(\sigma_1)$ und $\log(\lambda_1)$ daher rührend, dass früher $\frac{1}{r^2} = 1 - 2\eta^2$ gesetzt war, was Vernachlässigung von η^4 enthält, welche in den neuen Coefficienten (σ_1) , (σ_2) , (λ_1) , (λ_2) nicht mehr vorkommt. Ausserdem besteht der Unterschied, dass Funktionen $\sin^2 \varphi$, $\cos^2 \varphi$, $\cos^4 \varphi$, welche früher in die Coefficienten gezogen waren, nun in der Formel bleiben, damit die Coefficienten-Tafel kleinere Differenzen bekommt. Nur der in η^2 enthaltene Faktor $\cos^2 \varphi$ ist in die Coefficienten gezogen, weil der Modul $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ sich analytisch gut findet, und auch formell den Faktoren r^2 gegenüber in den Coefficienten zum Gleichgewicht beiträgt.

Als ein weiteres Beispiel für die Anwendung des im vorstehenden § 106. behandelten Verfahren können wir die Mecklenburgische Diagonale citieren, welche schon unter unseren Normalbeispielen in § 73. S. 392 angegeben, in „Zeitschr. f. Verm. 1896“ S. 240–248 berechnet wurde.

Kapitel X.

Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

Vorbemerkung. Dieses Kapitel enthält im Wesentlichen den Inhalt der Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas, auctore Carolo Friderico Gauss, Göttingae 1828 (societati regiae oblatae d. 8. Octob. 1827) und in „Carl Friedrich Gauss Werke“, IV. Band, Göttingen 1873, S. 217–258. In deutscher Übersetzung herausgegeben: „Allgemeine Flächentheorie u. s. w. von A. Wangerin, Leipzig, Engelmann 1889.“

Wir haben versucht, die analytischen Entwicklungen des ersten Teiles dieser klassischen Abhandlung durch unsere geometrischen Betrachtungen von § 107. und 108. zu ersetzen.

§. 107. Geodätischer Excess.

Dem sphärischen Excess, den wir in § 40. kennen gelernt haben, mit der Formel (2a) S. 231

$$\varepsilon = \frac{E}{r^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F}{r^2} \varrho \quad \text{in Sekunden} \quad (1)$$

entspricht ein ganz analoger Satz auf irgend einer krummen Fläche, deren Haupt-Krümmungs-Halbmesser in einem Punkte M und N und deren mittlerer Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ ist, wobei ein unendlich kleines Dreieck vorausgesetzt ist, das, durch geodätische Linien begrenzt, die kleine Fläche F hat.

Hiezu betrachten wir in den nachstehenden Fig. 1. und Fig. 2. ein kleines rechtwinkliges geodätisches Dreieck, dessen Katheten $CA = p$ und $CB = q$ in den Richtungen der beiden Haupt-Krümmungen liegen, auf einer krummen Fläche, welche nach CA den Krümmungs-Halbmesser M und nach CB den Krümmungs-Halbmesser N hat.

Wir nehmen dabei die Bezeichnungen wie gewöhnlich für das Umdrehungs-Ellipsoid, und denken unter p und M die Beziehung zum Meridian, unter q und N die Beziehung rechtwinklig zum Meridian (indessen kann man die nächsten Betrachtungen auch allgemeiner führen).

Unter K_m und K_n verstehen wir die beiden Krümmungs-Mittelpunkte, so dass für einen kleinen Bogen $AC = p$ die beiden Normalen CK_m und $AK_m = M$ und entsprechend $CK_n = BK_n = N$ angenommen werden kann; damit ist auch die kleine Entfernung $K_n K_m = N - M$ bestimmt.

Wir haben hiernach wieder den Fall des früheren § 71. S. 382 und S. 384, und wir wollen von den dort auf S. 386 gefundenen Formeln einen Gebrauch machen, um den geodätischen Excess des geodätischen Dreiecks Fig. 2 mit den Katheten p und q und der Hypotenuse s zu bestimmen.

Figur 2. giebt uns drei Dreiecke, nämlich zwei sphärische und ein geodätisches.

I. Sphärisches Dreieck mit dem Halbmesser M :

$$\begin{aligned} 90^\circ + \alpha_1 + \beta' - 180^\circ &= \varepsilon_m \\ \alpha_1 + \beta' + 90^\circ &= \varepsilon_m = \frac{pq}{2M^2} \end{aligned} \quad (2)$$

II. Sphärisches Dreieck mit dem Halbmesser N :

$$\begin{aligned} 90^\circ + \alpha' + \beta_1 - 180^\circ &= \varepsilon_n \\ \alpha' + \beta_1 - 90^\circ &= \varepsilon_n = \frac{pq}{2N^2} \end{aligned} \quad (3)$$

III. Geodätisches Dreieck mit der geodätischen Linie s :

$$\begin{aligned} 90^\circ + \alpha + \beta - 180^\circ &= \varepsilon \\ \alpha + \beta - 90^\circ &= \varepsilon \end{aligned} \quad (4)$$

Zwischen den Winkeln dieser drei Dreiecke bestehen nach (16) S. 386 folgende Beziehungen:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3} \eta^2 \varepsilon \quad \beta - \beta_1 = \frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon \quad (5)$$

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon \quad \beta' - \beta = \frac{2}{3} \eta^2 \varepsilon \quad (6)$$

Fig. 1.

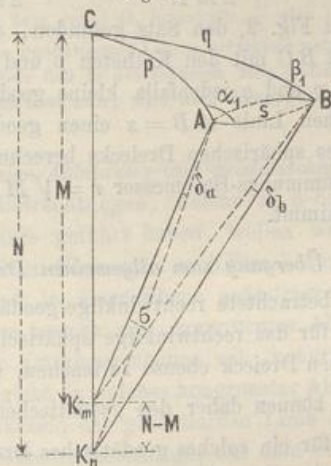
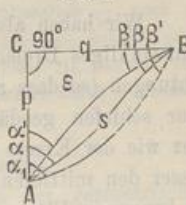


Fig. 2.



Dabei kann ε entweder $= \varepsilon_m$ oder $= \varepsilon_n$ nach (2) oder (3) genommen werden, denn wegen des Faktors $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ kommt es hier auf solche Unterscheidung nicht an.

Durch Vergleichung von (2), (3), (4) mit Rücksicht auf (5) und (6) findet man:

$$\varepsilon = \varepsilon_m - \eta^2 \varepsilon = \varepsilon_m (1 - \eta^2) = \frac{p q}{2 M^2} (1 - \eta^2) \quad (7)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \eta^2 \varepsilon = \varepsilon_n (1 + \eta^2) = \frac{p q}{2 N^2} (1 + \eta^2) \quad (8)$$

Wenn man beachtet, dass $1 + \eta^2 = V^2 = N : M$ (nämlich wie immer nach unseren Grundformeln § 32. S. 197) und wenn man auch genähert $1 - \eta^2 = \frac{1}{1 + \eta^2}$ setzt, so geben die beiden Formeln (7) und (8) übereinstimmend:

$$\varepsilon = \frac{p q}{2 M N} \quad \text{oder} \quad = \frac{p q}{2 r^2} \quad (9)$$

Wir haben also zu Fig. 2. den Satz gefunden, dass ein kleines geodätisches, rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten p und q in den Haupt-Krümmungsrichtungen (so dass also p und q jedenfalls kleine geodätische Linien sind) und mit einer schiefen geodätischen Linie $AB = s$ einen geodätischen Excess ε giebt, der ganz wie der Excess eines sphärischen Dreiecks berechnet wird, wenn man als Halbmesser den mittleren Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ an der betreffenden Stelle der krummen Fläche annimmt.

Übergang zum allgemeinen Dreieck.

Nachdem für das betrachtete rechtwinklige geodätische Dreieck dieselbe Formel gefunden ist, wie früher für das rechtwinklige sphärische Dreieck, ist auch der Übergang zu einem allgemeinen Dreieck ebenso zu machen, wie für das sphärische Dreieck Fig. 4. S. 248, und wir können daher den geodätischen Excess bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich nun auch für ein solches geodätisches Dreieck, das sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken von der Form Fig. 2. S. 539 zusammensetzen lässt, als bewiesen annehmen.

Das ist aber noch nicht der ganz allgemeine Fall, denn jenes rechtwinklige Dreieck Fig. 2. hat die Besonderheit, dass seine Katheten p und q in den Richtungen der beiden Haupt-Krümmungen der Fläche liegen; und wir können daher nach dem bisherigen Beweisgang den Satz nur für solche geodätische Dreiecke als bewiesen annehmen, welche eine Seite in einer Haupt-Krümmungsrichtung liegen haben.

Indessen lässt sich der Übergang von einem solchen Dreieck zu einem beliebig gestalteten und auch gegen die Haupt-Krümmungsrichtungen beliebig liegenden Dreieck vollends leicht bewerkstelligen, indem nach Fig. 3. das allgemeine Dreieck ABC in zwei Dreiecke ACD und ABD zerlegt wird, welche die Seite AD in einer Haupt-Krümmungsrichtung gemeinschaftlich haben.

Wenn ε_1 und ε_2 die Excesse dieser beiden Dreiecke ACD und ABD sind, so hat man nach Fig. 3.:

$$\varepsilon_1 = \frac{(q - e) p}{2 r^2} \quad \varepsilon_2 = \frac{(q' + e) p}{2 r^2}$$

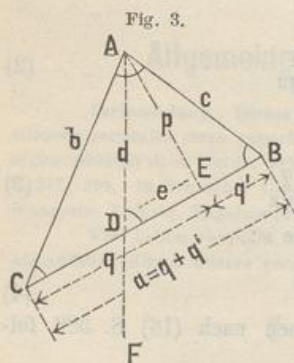


Fig. 3.

also:

$$s_1 + \varepsilon_2 = \frac{(q + q')p}{2r^2} = \frac{ap}{2r^2} = \varepsilon$$

allgemein:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \quad (10)$$

Es gilt also für kleine geodätische Dreiecke dieselbe Excessberechnung in erster Näherung, wie für ein sphärisches Dreieck nach Gleichung (1), wenn man nur den mittleren Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ anwendet, wobei übrigens auch noch angenommen ist, dass die beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser M und N unter sich nahe gleich sind, so dass $\frac{N}{M} = 1 + \eta^2$ und $\frac{M}{N} = 1 - \eta^2$ gesetzt werden kann, d. h. dass η^4 gegen η^2 vernachlässigt werden kann.

Durch solche einfache Betrachtungen, welche zu den Formeln (7)–(10) geführt haben, kann man nicht bloss, wie hier geschehen, die Formel für den Excess herleiten, sondern man kann auch noch nachweisen, dass innerhalb $\frac{1}{r^2}$ die sphärischen Formeln von § 44, nämlich (8)–(10) S. 246 und 247 und auch der Legendrische Satz von § 41. innerhalb $\frac{1}{r^2}$ also ausschliesslich $\frac{1}{r^4}$ auch für ein geodätisches Dreieck mit kleinen geodätischen Linien auf irgend welcher krummen Fläche ebenso gilt, wie die Excessformel. Wir haben das in der früheren 3ten Auflage dieses III. Bandes, 1890, § 93. gezeigt und durchgeführt, was aber nun, weil kein dringendes Bedürfnis dafür vorhanden ist, übergangen werden soll.

Kongruente Linien-Abbildung und geodätischer Excess.

Im Anschluss an die Betrachtungen, welche in § 68. zu der geometrischen Definition der geodätischen Linie geführt haben, wollen wir irgend eine Linie auf einer krummen Fläche in einzelnen Elementen nach Streckenmass und Azimutalwinkeln aufgenommen, und entsprechend in einer Ebene aufgetragen denken. Die dadurch entstehende Linie in der Ebene nennen wir „kongruentes Abbild“ der Linie auf der krummen Fläche, und das ganze Verfahren nennen wir „kongruente Linien-Abbildung“.

Eine geodätische Linie giebt in solcher kongruenter Abbildung eine Gerade von gleicher Grösse wie die Rektifikation der geodätischen Linie (vgl. § 89. S. 474).

Wenn von einem geschlossenen Linienzuge, auf dem Umdrehungs-Ellipsoid oder auf einer anderen krummen Fläche, in dieser Weise eine kongruente ebene Abbildung gemacht wird, so wird der abgebildete ebene Zug im allgemeinen nicht schliessen, und die dabei sich zeigenden Schlussfehler stehen in Beziehung zu der Krümmung der Fläche, auf welcher der geschlossene Linienzug liegt. Nur bei einer abwickelbaren Fläche wird die kongruente ebene Abbildung eines geschlossenen Zuges im allgemeinen wieder geschlossen sein.

Die Schlusswidersprüche werden, wie bei den durch Messungsfehler erzeugten Schlussfehlern der Feldmess-Züge, teils linear, teils als Winkel sich zeigen, und der in der Winkelsumme auftretende Schluss-Widerspruch soll „geodätischer Excess“ heissen.

In Fig. 4. seien AB und BC die kongruenten ebenen Abbildungen zweier Seiten eines geodätischen Dreiecks auf einer krummen Fläche, so dass die zwei Seiten AB , BC und der Winkel bei B kongruent abgebildet sind; will man aber die Abbildung auch für die dritte Seite CA fortsetzen, so bekommt man entweder CA' oder AC' , welche beide das Dreieck ABC nicht schliessen, sondern sich in D schneiden und daselbst den geodätischen Excess ε zur Anschauung bringen. Man kann den Excess ε auch durch die Krümmung einer

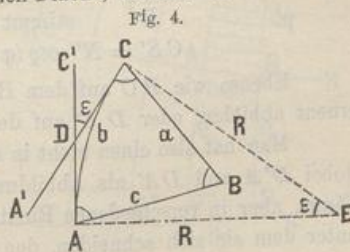


Fig. 4.

dätischen Excess des Trapezes auf der krummen Fläche darstellt. Um diesen Winkel ε näher zu bestimmen, haben wir aus Fig. 5.:

$$\varepsilon = \Theta' - \Theta$$

oder wegen (13): $\varepsilon = l(\sin(\varphi + d\varphi) - \sin \varphi) = l \cos \varphi d\varphi$ (14)

Da der Parallelbogen $AB = N l \cos \varphi$ ist, kann für die Fläche des Trapezes nach (12) angegeben werden:

$$F = BC \cdot AB \quad \text{also} \quad F = MN l \cos \varphi d\varphi \quad (15)$$

Mit Einführung des mittleren Krümmungs-Halbmessers r also mit $r^2 = MN$ hat man hieraus, mit (14):

$$l \cos \varphi d\varphi = \frac{F}{r^2} = \varepsilon \quad (16)$$

Der Längenunterschied l kann hierbei beliebig gross sein; zur weiteren Anwendung wollen wir aber auch l unendlich klein annehmen, und damit den Satz aussprechen, dass der Excess jedes unendlich kleinen Trapezes von der Form Fig. 5. sich nach der Formel (16) aus F und r^2 berechnen lässt. Endlich da jede andere unendlich kleine Fläche als zusammengesetzt aus unendlich kleinen Trapezen betrachtet werden darf, ist es nach dem Ergebnis unserer Betrachtung richtig, den Excess einer irgendwie begrenzten kleinen Fläche F des Umdrehungs-Ellipsoids, oder einer anderen Umdrehungsfläche nach der Formel (16) aus F und r^2 zu berechnen.

Wir haben also für den Excess eines Trapezes einer Umdrehungsfläche dieselbe Berechnung wie für den Excess eines kleinen geodätischen Dreiecks nach (10) S. 541, und wir können nun den weiteren Schluss bilden, dass für irgend einen durch kleine Dimensionen begrenzten Teil einer krummen Fläche, der geodätische Excess durch die Formel (10) oder (16) angegeben wird.

§108. Geodätische rechtwinklige Coordinaten und Polar-Coordinaten.

Ganz analog den Coordinaten-Systemen, welche wir in der Ebene mit geraden Linien und auf der Kugel mit grössten Kreisen benützen, kann man auch auf irgend einer Fläche mit geodätischen Linien Coordinaten-Systeme anordnen.

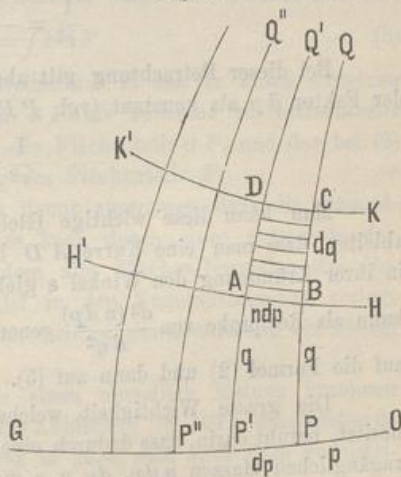
In Fig. 1. sei OG eine geodätische Linie, auf welcher ein Punkt P durch das Mass $OP = p$ bestimmt ist, und ebenso auch andere Punkte P' , P'' u. s. w. durch ihre auf der geodätischen Linie OG gemessenen Abstände.

In den Punkten P , P' , P'' u. s. w. werden geodätische Linien PQ , $P'Q'$, $P''Q''$ u. s. w. rechtwinklig zu OG gezogen, und auf den Linien PQ werden gleiche Masse q abgetragen, so dass eine geodätische Parallele HH' entsteht, und eine zweite Parallele KK' im Abstände $q + dq$ von der Anfangslinie OG .

Solcher Linien der zwei Systeme PQ und HH' können wir ganze Scharen gezogen denken; dieselben schneiden sich gegenseitig rechtwinklig (geodätische Parallele § 70. S. 381) und bilden ein System von Vierecken, deren eines $ABCD$ in Fig. 1. besonders hervorgehoben ist.

Die ganze Anordnung der Linien in Fig. 1. können wir ein rechtwinkliges geo-

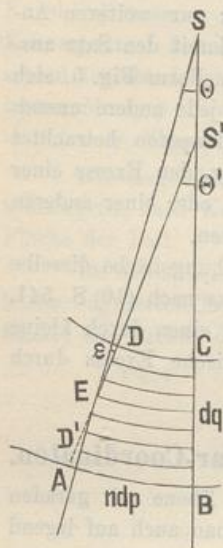
Fig. 1.



dätisches Coordinaten-System nennen, mit dem Nullpunkte O , von welchem die Abscissen p in der Richtung OG , und die Ordinaten q rechtwinklig zu OG gezählt werden. Es hat also der Punkt B die Coordinaten p, q , der Punkt C hat $p, q + dq$, der Punkt A hat $p + dp, q$ u. s. w.

Der Abscissen-Unterschied PP' ist $= dp$ angenommen, und das entsprechende Mass BA haben wir mit ndp bezeichnet, wobei n eine von der Krümmung der Fläche abhängige Funktion ist, mit welcher wir uns später besonders zu beschäftigen haben werden (§ 109. S. 546).

Fig. 2.



Nachdem somit alle Verhältnisse des Vierecks klar gemacht sind, betrachten wir in Fig. 2. die kongruente ebene Abbildung des Linienzuges $ABCD$ in dem Sinne von § 107.

Der Linienzug $ABCD A$ wird in der kongruenten Abbildung nicht schliessen, sondern einen Winkelschluss-Fehler $\epsilon = \Theta' - \Theta$ geben, den wir nun näher zu bestimmen haben.

Der Winkel Θ kann mit den Bezeichnungen von Fig. 2. dargestellt werden (auch bei windschiefem Viereck) in der Form:

$$\Theta = -\frac{d(ndp)}{dq} \quad (1)$$

Dabei soll Θ selbst als positiv gelten, und die Ableitung von ndp nach q muss negativ gesetzt werden, wenn ndp abnimmt bei wachsendem q , wie in Fig. 2. angenommen ist.

Der kleine Winkel $\epsilon = \Theta' - \Theta$ kann als Differential von Θ aufgefasst werden, d. h.:

$$\epsilon = d\Theta = -\frac{d^2(ndp)}{dq^2} dq \quad (2)$$

Betrachtet man ferner die Fläche F des Vierecks, d. h. $F = ndp dq$, so hat man nach dem Satze von § 107. Seite 543:

$$\epsilon = \frac{F}{r^2} = \frac{ndp dq}{r^2} \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n} \frac{1}{dp} \frac{d^2(ndp)}{dq^2} \quad (4)$$

Bei dieser Betrachtung gilt aber in der zweiten Ableitung von ndp nach q der Faktor dp als konstant (vgl. $PP' = dp$ in Fig. 1.), es wird also:

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n} \frac{d^2 n}{dq^2} \quad (5)$$

Man kann diese wichtige Gleichung (5) bzw. (4) auch dadurch aus Fig. 2. ableiten, dass man eine Kurve AD betrachtet, welche AS und $D'S'$ berührt, also in ihrer Krümmung den Winkel ϵ giebt. Der Krümmungs-Halbmesser der Kurve AD kann als Reciproke von $\frac{d^2(ndp)}{dq^2}$ genommen werden, und damit kommt man ebenfalls auf die Formel (2) und dann auf (5).

Die grosse Wichtigkeit, welche die Differential-Formel (5) für die Geodäsie besitzt, beruht darin, dass dadurch eine Beziehung hergestellt wird zwischen geodätisch zugänglichen Massen ndp, dq u. s. w. einerseits, und dem geodätisch unzugänglichen

Krümmungs-Halbmesser r andererseits. Legt man das Messungs-System Fig. 1. in einer Ebene an, so wird das Viereck $ABCD$ ein Rechteck mit $BA = CD = PP'$; und auf einer krummen Fläche gestatten die geodätisch messbaren Verkürzungen von BA und CD gegen PP' , nach dem Gesetz der Formel (5) einen Schluss auf die Krümmung der Fläche.

Polar-Coordinaten.

In ähnlicher Weise, wie ein System rechtwinkliger Coordinaten in Fig. 1. gebildet wurde, kann man auch ein System von Polar-Coordinaten mit geodätischen Linien anordnen.

Man braucht nur anzunehmen, dass in Fig. 1. die geodätischen Linien PQ , $P'Q'$, $P''Q''$ u. s. w., welche alle von einer Abscissenlinie OP ausgehen, statt dessen alle von einem Punkte (in der Verlängerung von Q) ausgehen, oder alle nach einem Punkte zusammenlaufen, und dass dann die Linien HH' , KK' , nicht mehr geodätische Parallelen, sondern geodätische Kreise um jenen Punkt seien; dann kann man alles, was sich auf Fig. 1. bezieht, auch auf das beschriebene Polar-System übertragen.

Das Krümmungsmass.

Als „mittleren Krümmungs-Halbmesser“ r in einem Punkte einer krummen Fläche haben wir das geometrische Mittel der beiden Haupt-Krümmungs-Halbmesser N und M bezeichnet, also $r = \sqrt{MN}$ oder $r^2 = MN$ gesetzt.

Der reciproke Wert von r^2 wird nach Gauss das „Krümmungsmass“ (mensura curvaturae) genannt, d. h. es ist:

$$\text{Krümmungsmass } k = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{MN} \quad (6)$$

und mit dieser neuen Bezeichnung schreiben wir die wichtige Gleichung (5) nochmals, d. h.:

$$k = \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{n} \frac{d^2 n}{dq^2} \quad (7)$$

Gleichzeitig damit ist der Begriff und die Bezeichnung Gesamtkrümmung (curvatura totalis seu integra) eines begrenzten Flächenteils eingeführt worden, nämlich:

$$\text{Gesamtkrümmung} = \int k dF \quad (8)$$

Das Produkt eines differentialen Flächenteiles dF in das für einen einzelnen Punkt von dF gültige und im Bereiche von dF als konstant zu betrachtende Krümmungsmass k giebt die Gesamtkrümmung des Flächenteils dF , und das bei (8) angegebene Integral giebt die Gesamtkrümmung des Flächenteils F .

Diese Begriffe und Benennungen hängen damit zusammen, dass die Gesamtkrümmung eines Flächenteils F gemessen werden kann durch einen entsprechenden Teil F' einer Kugel vom Halbmesser $= 1$, indem alle Flächen-Normalen der Begrenzungs-Linie von F mit sich selbst parallel in den Kugelmittelpunkt verlegt werden, und so den Teil F' der Kugel begrenzen, welcher gewissermassen ein Abbild des Flächenteils F wird.

Sobald man sich überzeugt hat, dass für einen unendlich kleinen krummen Flächenteil dF der durch kongruente Umfangs-Abbildung (§ 107.) darzustellende geodätische Excess $d\varepsilon = k dF$ ist (wo $k = 1:r^2$), so kann man auch nach geometrischer Anschauung so weiterschliessen:

Die Fläche F wird in eine grosse Zahl kleiner Teilflächen dF zerlegt, welche alle ihrem Umfang nach in einer Ebene geschlossen, folglich nicht kongruent, abgebildet werden. Bei einem ersten Teil dF_1 wird in der Abbildung der Schluss erzungen durch eine lineare relative Krümmung $d\epsilon_1$, welche irgendwo an dem Umfang von dF_1 angebracht werden muss. Ein an dieser Stelle ansetzender zweiter Flächenteil dF_2 muss dann, wenn er in der Ebene geschlossen dargestellt werden soll, nicht bloss seinen eigenen Excess $d\epsilon_2$, sondern auch den von dF_1 ihm zugeschobenen Betrag $d\epsilon_1$, durch eine der konformen Abbildung widersprechende lineare Krümmung $d\epsilon_1 + d\epsilon_2$ zum Ausdruck bringen. So wird das ebene Kartenbild $\int dF'$, wenn es die einzelnen Teile dF' sämtlich geschlossen darstellt, an seinem Umfange allmählich alle Beträge $d\epsilon$ in Gestalt von linearen Krümmungen, die der kongruenten Abbildung des Umfangs widerstreiten, zum Ausdruck bringen, und der Polygon-Schlussfehler ϵ des kongruent abgebildet gedachten Umfangs wird daher der Summe aller Einzel-Excesse der Flächenteile gleich sein, d. h.:

$$\epsilon = \int k dF \quad (9)$$

Dieses ist mit (8) übereinstimmend.

Bei einer abwickelbaren Fläche ist in jedem Punkte der eine Haupt-Krümmungshalbmesser unendlich, der andere endlich, setzen wir also $N = \infty$, $M = M$, so wird auch $r^2 = \infty$ und $k = 0$, folglich auch die Gesamtkrümmung nach (8) und der Excess ϵ nach (9), beide = Null.

§ 109. Verbindung eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems.

In Fig. 1. S. 547 ist O der Ausgangspunkt zweier geodätischer Coordinatensysteme, eines rechtwinkligen Systems und eines Polar-Systems, so dass z. B. der Punkt A die rechtwinkligen Coordinaten p, q und die Polar-Coordinaten s, α hat. Entsprechend hat der Punkt B die rechtwinkligen Coordinaten $p + dp, q + dq$ und die Polar-Coordinaten $s + ds, \alpha + d\alpha$.

Ausser dem Richtungswinkel α des Polar-Systems ist der Winkel β eingeführt, welchen der Strahl s und die Ordinate q bei A miteinander bilden.

Zwischen beiden Ordinaten q und $q + dq$ bei A sei der Querabstand $AD = n dp$ und entsprechend $AC = m d\alpha$ der Querabstand bei A zwischen den beiden Strahlen OA und OB .

Dabei sind n und m Funktionen von ähnlicher Bedeutung wie n im vorigen § 108. bei (1)–(5) S. 544. Zur Verdeutlichung dieser Funktionen n und m mag man sich etwa den Fall denken, dass das ganze System auf einer Kugel vom Halbmesser r läge, dann wäre sehr einfach:

$$\left. \begin{aligned} n &= \cos \frac{q}{r} & m &= \sin \frac{s}{r} \\ \text{oder entwickelt: } n &= 1 - \frac{q^2}{2r^2} + \dots & m &= \frac{s}{r} - \frac{s^3}{6r^3} + \dots \end{aligned} \right\} \text{ (Kugel) } \quad (1)$$

Zur Untersuchung des allgemeinen Falles irgend einer krummen Fläche, auf welcher das System Fig. 1. S. 547 liege, betrachten wir zuerst das kleine Viereck $ACBD$, welches bei C und D rechtwinklig ist. Indem wir in differentialem Sinne

dieses Viereck als eben behandeln, entnehmen wir aus demselben durch Coordinaten-Umformung die Gleichungen:

$$ds = n dp \sin \beta + dq \cos \beta \quad (2)$$

$$m d\alpha = dq \sin \beta - n dp \cos \beta \quad (3)$$

oder in Gestalt von Differential-Gleichungen:

$$\frac{\partial s}{\partial p} = n \sin \beta \quad \frac{\partial s}{\partial q} = \cos \beta \quad (4)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p} = -\frac{n}{m} \cos \beta \quad \frac{\partial \alpha}{\partial q} = \frac{1}{m} \sin \beta \quad (5)$$

Aus den beiden Gleichungen (4) folgt durch Quadrieren:

$$n^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial q} \right)^2 \quad (6)$$

ferner aus (4) und (5) durch Multiplizieren:

$$\frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial \alpha}{\partial p} = -n^2 \frac{\partial s}{\partial q} \frac{\partial \alpha}{\partial q} \quad (7)$$

Nun muss die Funktion n entsprechend der Flächen-Krümmung eingeführt werden.

Um die Beziehung von n zu der Flächen-Krümmung zunächst unbestimmt zu halten, wird n als algebraische Funktion mit unbestimmten Coëfficienten $f, g, h \dots$ eingeführt:

$$n = 1 + f q^2 + g q^3 + h q^4 + \dots \quad (8)$$

Dabei ist kein Glied mit der ersten Potenz q angenommen, weil nach (1) die Bedeutung von n so ist, dass auf einer Kugel kein Glied mit q vorkommt, und weil dasselbe auch bei dem Ellipsoid und allen Flächen von stetiger konvex-konvexer Krümmung der Fall ist, oder allgemeiner, weil dem rechtwinkligen Abgehen der Ordinaten q von der Abscissenaxe OP in Fig. 1., die erste Ableitung $\frac{dn}{dq}$ für $q = 0$, selbst $= 0$ entsprechen muss.

Durch die Gleichung (8) ist n nur als Funktion von q dargestellt; um n auch als Funktion von p zu erhalten, muss man die Coëfficienten f, g, h u. s. w. von (8) selbst wieder als Funktionen von p darstellen, dieses geschehe durch die Annahmen:

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + \dots \\ g &= g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + \dots \\ h &= h_0 + h_1 p + h_2 p^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

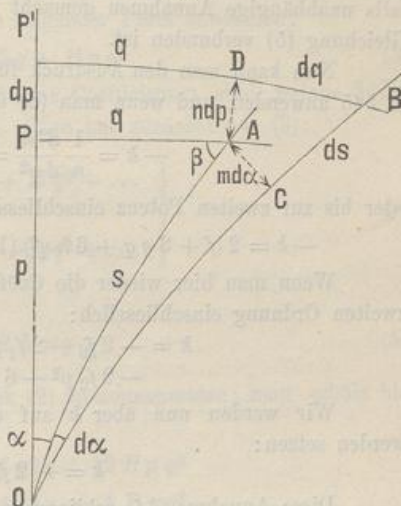
Wenn man diese Ausdrücke (9) in (8) einsetzt, und dabei nur die Glieder bis zur vierten Potenz einschliesslich beibehält, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} n &= 1 + f_0 q^2 + f_1 p q^2 + f_2 p^2 q^2 + \dots \\ &\quad + g_0 q^3 + g_1 p q^3 + \dots \\ &\quad + h_0 q^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Wenn man dieses zweimal partiell nach q ableitet, und dann wieder die Bedeutung der Coëfficienten (9) berücksichtigt, oder wenn man unmittelbar (8) nach q zweimal ableitet, so bekommt man:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial q^2} = 2f + 6gq + 12hq^2 \quad (11)$$

Fig. 1.



Durch diese Annahmen für die Funktion n ist die krumme Fläche, auf welcher das Coordinaten-System Fig. 1. liegt, soweit charakterisiert, als für die nachfolgenden geodätischen Aufgaben nötig ist; für die analoge Funktion m dürfen nicht etwa ebenfalls unabhängige Annahmen gemacht werden, weil m bereits mit n durch die erste Gleichung (5) verbunden ist.

Nun kann man den Ausdruck für das Krümmungsmass nach (5) und (7) § 108. S. 545 anwenden, und wenn man (8) und (11) hier einsetzt, so bekommt man:

$$-k = \frac{1}{n} \frac{d^2 n}{dq^2} = \frac{2f + 6gq + 12hq^2}{1 + fq^2 + gq^3 + hq^4}$$

oder bis zur zweiten Potenz einschliesslich genau:

$$-k = 2(f + 3gq + 6hq^2)(1 - fq^2) = 2(f + 3gq + (6h - f^2)q^2) \quad (12)$$

Wenn man hier wieder die Coëfficienten (9) einsetzt, so bekommt man bis zur zweiten Ordnung einschliesslich:

$$\left. \begin{aligned} k &= -2f_0 - 2f_1p - 6g_0q \\ &\quad - 2f_2p^2 - 6g_1pq - (12h_0 - 2f_0^2)q^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Wir werden nun aber k auf eine lineare Funktion beschränken, d. h. wir werden setzen:

$$k = -2f_0 - 2f_1p - 6g_0q \quad (14)$$

Diese Annahme (14) schliesst in sich, dass in (13) ist:

$$f_2 = 0, \quad g_1 = 0, \quad 12h_0 = 2f_0^2 \text{ oder } h_0 = \frac{1}{6}f_0^2 \quad (15)$$

Damit reduziert sich auch das frühere n von (10) auf:

$$n = 1 + f_0q^2 + f_1pq^2 + g_0q^3 + \frac{1}{6}f_0^2q^4 \quad (16)$$

Im Folgenden braucht man mehrfach auch $\frac{1}{n}$, weshalb man nach S. 169 die Reciproke entwickelt:

$$\frac{1}{n} = 1 - f_0q^2 - f_1pq^2 - g_0q^3 + \frac{5}{6}f_0^2q^4 \quad (17)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Theorie des geodätischen Dreiecks übergehen.

§ 110. Reihen-Entwicklung für das rechtwinklige geodätische Dreieck.

Wir haben von (6) § 109. S. 547:

$$n^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)^2 + n^2 \left(\frac{\partial s}{\partial q}\right)^2 \quad (1)$$

Um hier statt der Ableitungen von s nach p und nach q die entsprechenden Ableitungen von s^2 einzuführen, hat man:

$$\frac{\partial(s^2)}{\partial p} = \frac{\partial(s^2)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial p} = 2s \frac{\partial s}{\partial p} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(s^2)}{\partial q} = 2s \frac{\partial s}{\partial q} \quad (1a)$$

$$\text{also:} \quad n^2 = \left(\frac{1}{2s} \frac{\partial(s^2)}{\partial p}\right)^2 + n^2 \left(\frac{1}{2s} \frac{\partial(s^2)}{\partial q}\right)^2$$

$$\text{oder:} \quad 4s^2 = \left(\frac{1}{n} \frac{\partial(s^2)}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial(s^2)}{\partial q}\right)^2 \quad (2)$$

Denkt man sich s^2 in eine Reihe nach Potenzen von p und q entwickelt, so wird diese Reihe mit den Gliedern $p^2 + q^2$ beginnen, weil für unendlich kleine Werte p und q die Fig. 1. S. 550 auf ein ebenes rechtwinkliges Dreieck zusammenschrumpft. Wir wollen daher die Reihe für s^2 zunächst in folgender Form annehmen:

$$s^2 = p^2 + q^2 + A p^2 q + B p q^2 \quad (3)$$

wobei A und B vorläufig unbestimmt angenommene Coefficienten sind, welche durch Vergleichung mit (2) bestimmt werden müssen. Man hat zunächst aus (3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(s^2)}{\partial p} &= 2p + 2A p q + B q^2 + \dots \\ \frac{1}{n} &= 1 - f_0 q^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

hiezv von (17) § 109. S. 548:

Ferner aus (3):

$$\frac{\partial(s^2)}{\partial q} = 2q + A p^2 + 2B p q + \dots \quad (5)$$

Aus (4) und (5) kann man den Ausdruck (2) zusammensetzen; man erhält bis zur dritten Potenz:

$$\text{aus (2):} \quad 4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 12A p^2 q + 12B p q^2$$

$$\text{andererseits aus (3):} \quad 4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 4A p^2 q + 4B p q^2$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt als Coefficienten-Vergleichung $12A = 4A$ und $12B = 4B$, d. h. $A = 0$ und $B = 0$.

Man findet also, dass in der Reihe (3) nur die zwei ersten Glieder bestehen, und dass die Glieder mit dritten Potenzen $p^2 q$ und $p q^2$ verschwinden. Wir machen deshalb nun eine Annahme mit Gliedern vierter Ordnung, d. h. statt (3) sei nun:

$$s^2 = p^2 + q^2 + A p^3 q + B p^2 q^2 + A' p q^3 \quad (6)$$

Dieses giebt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(s^2)}{\partial p} &= 2p + 3A p^2 q + 2B p q^2 + A' q^3 \\ \frac{1}{n} &= 1 - f_0 q^2 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

hiezv von (17) § 109. S. 548:

Ferner aus (6):

$$\frac{\partial(s^2)}{\partial q} = 2q + A p^3 + 2B p^2 q + 3A' p q^2 \quad (8)$$

Wenn man aus (7) und (8) die Formel (2) zusammensetzt, so findet man:

$$\text{aus (2):} \quad 4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 16A p^3 q + 8(2B - f_0) p^2 q^2 + 16A' p q^3$$

$$\text{andererseits aus (6):} \quad 4s^2 = 4p^2 + 4q^2 + 4A p^3 q + 4B p^2 q^2 + 4A' p q^3$$

Die Coefficienten-Vergleichung in diesen beiden Gleichungen giebt:

$$16A = 4A \quad 16B - 8f_0 = 4B \quad 16A' = 4A'$$

$$\text{d. h.:} \quad A = 0 \quad B = \frac{2}{3} f_0 \quad A' = 0$$

Folglich nun nach (6):

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3} f_0 p^2 q^2 \quad (9)$$

Auf diesem Wege eine Stufe weiter gehend, erhält man bis zur fünften Ordnung:

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{2}{3} f_0 p^2 q^2 + \frac{1}{2} f_1 p^3 q^2 + \frac{1}{2} g_0 p^2 q^3 \quad (10)$$

Um zur sechsten Ordnung zu gelangen, fügen wir zu (10) noch folgende unbestimmte Glieder hinzu (wobei A, B, C wieder *neue* Bedeutungen haben):

$$+ A p^6 + B p^5 q + C p^4 q^2 + D p^3 q^3 + C' p^2 q^4 + B' p q^5 + A' q^6 \quad (10a)$$

Wenn man damit den Ausdruck (2) bildet, so erhält man:

$$\begin{aligned} 4 s^2 = & 4 p^2 + 4 q^2 + \frac{8}{3} f_0 p^2 q^2 + 2 f_1 p^3 q^2 + 2 g_0 p^2 q^3 \\ & + 24 A p^6 + 24 B p^5 q + \left(24 C + \frac{16}{9} f_0^2 \right) p^4 q^2 + 24 D p^3 q^3 \\ & + 24 A' q^6 + 24 B' p q^5 + \left(24 C' + \frac{16}{9} f_0^2 \right) p^2 q^4 \end{aligned}$$

Wenn man dieses, in Hinsicht auf die Coëfficienten, mit (10) und (10a) vergleicht, so sieht man, dass A, B, D, B', A' sämtlich = 0 werden, und es wird:

$$C = C' = -\frac{4}{45} f_0^2$$

Damit giebt die bis zur sechsten Ordnung vervollständigte Reihe (10) und (10a):

$$s^2 = p^2 + q^2 + \frac{1}{6} (4 f_0 p^2 q^2 + 3 f_1 p^3 q^2 + 3 g_0 p^2 q^3) - \frac{4}{45} f_0^2 (p^4 q^2 + p^2 q^4) \quad (11)$$

Dabei ist für lineare Funktion k , nach (15) § 110. S. 548, $f_2 = 0, g_1 = 0$ und $h_0 = \frac{1}{6} f_0^2$ gesetzt. (Wenn man diese beschränkenden Annahmen für f_2, g_1 und h_0 nicht macht, bekommt man statt der vorstehenden (11) die allgemeinere Formel [1] von Art. 24. der „Disquisitiones generales etc.).

Einführung des Krümmungsmasses.

Der allgemeine lineare Ausdruck für das Krümmungsmass ist nach (14) § 109. S. 548:

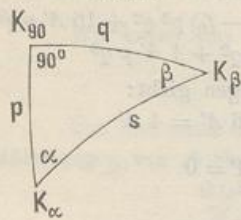
$$k = -2 f_0 - 2 f_1 p - 6 g_0 q \quad (12)$$

Wenden wir diese Funktion auf unseren Fall nach Andeutung von Fig. 1. an, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} k_\alpha &= -2 f_0 \\ k_{90} &= -2 f_0 - 2 f_1 p \\ k_\beta &= -2 f_0 - 2 f_1 p - 6 g_0 q \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$k_\alpha + 2 k_{90} + 2 k_\beta = -(8 f_0 + 6 f_1 p + 6 g_0 q)$$

Fig. 1.



Dieses ist gerade der Ausdruck, welcher in der grossen Klammer von (11) vorkommt, und wenn wir zugleich in der letzten Klammer von (11) statt $4 f_0^2$ den Wert k_α^2 aus (13) setzen, oder weil es in dem letzten Gliede einer konvergierenden Reihe ist, kurzweg k statt k_α , so geht (11) über in:

$$s^2 = p^2 + q^2 - \frac{k_\alpha + 2 k_{90} + k_\beta}{12} p^2 q^2 - \frac{k^2}{45} p^2 q^2 (p^2 + q^2) \quad (14)$$

Reihen-Entwicklungen für $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$.

Von den allgemeinen Differential-Formeln des § 109. haben wir (4) S. 547:

$$n \sin \beta = \frac{\partial s}{\partial p} \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{\partial s}{\partial q}$$

oder mit Einführung der Veränderlichen s^2 , wie oben bei (1a):

$$\begin{aligned} n \sin \beta &= \frac{1}{2s} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} & \cos \beta &= \frac{1}{2s} \frac{\partial (s^2)}{\partial q} \\ 2s \sin \beta &= \frac{1}{n} \frac{\partial (s^2)}{\partial p} & 2s \cos \beta &= \frac{\partial (s^2)}{\partial q} \end{aligned} \quad (15)$$

Nun ist s^2 nach (11) bestimmt worden, woraus man durch Differenzieren findet:

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial p} = 2p + \frac{4}{3} f_0 p q^2 + \frac{3}{2} f_1 p^2 q^2 + g_0 p q^3 - \frac{16}{45} f_0^2 p^3 q^2 - \frac{8}{45} f_0^2 p^2 q^4 \quad (16)$$

$$\text{hiez u (17) S. 548: } \frac{1}{n} = 1 - f_0 q^2 - f_1 p q^2 - g_0 q^3 + \frac{5}{6} f_0^2 q^4$$

Ferner die Ableitung nach q von (11):

$$\frac{\partial (s^2)}{\partial p} = 2q + \frac{4}{3} f_0 p^2 q + f_1 p^3 q + \frac{3}{2} g_0 p^2 q^2 - \frac{8}{45} f_0^2 p^4 q - \frac{16}{45} f_0^2 p^2 q^3 \quad (17)$$

Die beiden Gleichungen (15) lassen sich nach (16) und (17) ausführen, und geben:

$$s \sin \beta = p - \frac{1}{3} f_0 p q^2 - \frac{1}{4} f_1 p^2 q^2 - \frac{1}{2} g_0 p q^3 - \frac{8}{45} f_0^2 p^3 q^2 + \frac{7}{90} f_0^2 p^2 q^4 \quad (18)$$

$$s \cos \beta = q + \frac{2}{3} f_0 p^2 q + \frac{1}{2} f_1 p^3 q + \frac{3}{4} g_0 p^2 q^2 - \frac{4}{45} f_0^2 p^4 q - \frac{8}{45} f_0^2 p^2 q^3 \quad (19)$$

Wenn man wieder die Krümmungsmasse nach (13) einführt, so bringt man (18) und (19) auf diese Formen:

$$s \sin \beta = p + \frac{k_\alpha + k_{g_0} + 2k_\beta}{4} \frac{p q^2}{6} - \frac{k^2}{360} p q^2 (16 p^2 - 7 q^2) \quad (20)$$

$$s \cos \beta = q - \frac{2k_\alpha + 3k_{g_0} + 3k_\beta}{8} \frac{p^2 q}{3} - \frac{k^2}{45} p^2 q (p^2 + 2 q^2) \quad (21)$$

Diese Gleichungen gelten natürlich auch für den anderen Winkel α , und geben mit entsprechender Vertauschung der p , q und der k :

$$s \sin \alpha = q + \frac{k_\beta + k_{g_0} + 2k_\alpha}{4} \frac{p^2 q}{6} - \frac{k^2}{360} p^2 q (16 q^2 - 7 p^2) \quad (22)$$

$$s \cos \alpha = p - \frac{2k_\beta + 3k_{g_0} + 3k_\alpha}{8} \frac{p q^2}{3} - \frac{k^2}{45} p q^2 (q^2 + 2 p^2) \quad (23)$$

Zur Probe kann man auch rechnen:

$$(s \sin \beta)^2 + (s \cos \beta)^2 = s^2 \quad \text{oder} \quad (s \sin \alpha)^2 + (s \cos \alpha)^2 = s^2$$

Man wird dadurch denselben Ausdruck für s^2 finden, wie schon bei (14).

Man kann die Reihen (20)–(23) auch umkehren (ähnlich wie in § 44. S. 246 bis 247 die Reihen für $s \sin \alpha$ und $s \cos \alpha$ umgekehrt wurden). Man findet:

$$p = s \cos \alpha + \frac{s^3}{3} \sin^2 \alpha \cos \alpha \frac{3k_\alpha + 3k_{g_0} + 2k_\beta}{8} + \frac{k^2}{15} p q^2 (-p^2 + 2 q^2) \quad (24)$$

$$q = s \sin \alpha - \frac{s^3}{6} \sin \alpha \cos^2 \alpha \frac{2k_\alpha + k_{g_0} + k_\beta}{4} + \frac{k^2}{120} p^2 q (p^2 - 8 q^2) \quad (25)$$

Dabei ist im letzten Glied $p = s \cos \alpha$ und $q = s \sin \alpha$ genommen.

Ausserdem kann man durch Zeichenvertauschung auch folgende Formeln bilden:

$$p = s \sin \beta - \frac{s^3}{6} \sin \beta \cos^2 \beta \frac{k_\alpha + k_{g_0} + 2k_\beta}{4} + \frac{k^2}{120} p q^2 (q^2 - 8 p^2) \quad (26)$$

$$q = s \cos \beta + \frac{s^3}{3} \sin^2 \beta \cos \beta \frac{2k_\alpha + 3k_{g_0} + 3k_\beta}{8} + \frac{k^2}{15} p^2 q (2 p^2 - q^2) \quad (27)$$

Geodätischer Excess des rechtwinkligen Dreiecks.

Nach Fig. 1. S. 550 ist:

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + 90^\circ) - 180^\circ = \alpha + \beta - 90^\circ \quad (28)$$

$$\sin \varepsilon = -\cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \quad (29)$$

Da wir die Reihen für $s \sin \alpha$, $s \sin \beta$, sowie $s \cos \alpha$, $s \cos \beta$ in (20)–(23) haben, können wir die zwei zu (29) erforderlichen Produkte bilden, nämlich:

$$\begin{aligned} s^2 \sin \alpha \sin \beta &= p q + \frac{p^3 q}{6} \frac{2k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{4} + \frac{k^2}{360} p^3 q (7p^2 - 16q^2) \\ &\quad + \frac{p q^3}{6} \frac{k_\alpha + k_{90} + 2k_\beta}{4} + \frac{k^2}{36} p^3 q^3 \\ &\quad + \frac{k^2}{360} p q^3 (-16p^2 + 7q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 \cos \alpha \cos \beta &= p q - \frac{p q^3}{3} \frac{3k_\alpha + 3k_{90} + 2k_\beta}{8} - \frac{k^2}{360} p q^3 (16p^2 + 8q^2) \\ &\quad - \frac{p^3 q}{3} \frac{2k_\alpha + 3k_{90} + 3k_\beta}{8} + \frac{k^2}{9} p^3 q^3 \\ &\quad - \frac{k^2}{360} p^3 q (8p^2 + 16q^2) \end{aligned}$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke von einander abzieht, und wenn man dabei die gleichartigen Glieder zusammen ordnet, so erhält man:

$$s^2 \sin \varepsilon = \frac{p q}{2} \frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} (p^2 + q^2) + \frac{15}{360} k^2 p q (p^2 - q^2)^2 \quad (30)$$

Hiezu hat man von (14):

$$\frac{p^2 + q^2}{s^2} = 1 + \frac{k_\alpha + 2k_{90} + k_\beta}{12s^2} p^2 q^2 + k^2 \dots$$

Wenn man dieses in (30) einsetzt und in den Gliedern mit k^2 die einzelnen k_α , k_β , k_{90} nicht mehr unterscheidet (wie auch bei früheren Formeln in gleichem Falle nicht unterschieden wurde) und wenn man die Glieder von der Ordnung k^3 (ebenfalls wie bisher) ganz vernachlässigt, so erhält man aus (30):

$$\varepsilon = \frac{p q}{2} \frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} + \frac{p q}{24} k^2 (p^2 + q^2) \quad (31)$$

Diese Formel, welche mit $\frac{k_\alpha + k_{90} + k_\beta}{3} = \frac{1}{r^2}$ in die frühere sphärische Formel (3) S. 246 übergeht, sagt in Worten, dass man den geodätischen Excess eines rechtwinkligen geodätischen Dreiecks erhält, wenn man das Dreieck wie ein sphärisches Dreieck berechnet, dessen Kugelhalbmesser r dem arithmetischen Mittel der Krümmungsmasse k_α , k_{90} , k_β in den drei Ecken des Dreiecks entspricht.

Dieser Satz lässt sich auch leicht auf ein beliebiges schiefwinkliges Dreieck ausdehnen, wie wir alsbald im nächsten § 111. sehen werden.

§. 111. Berechnung des allgemeinen (schiefwinkligen) geodätischen Dreiecks.

Mit den Reihen-Entwicklungen für das rechtwinklige geodätische Dreieck, welche wir in dem vorstehenden § 110. kennen gelernt haben, kann man durch Zusammensetzung zweier rechtwinkliger Dreiecke zu einem allgemeinen (schiefwinkligen) Dreieck auch die trigonometrische Berechnung solcher allgemeiner geodätischer Dreiecke zu stande bringen.

Wir werden dabei in gleicher Weise vorgehen, wie früher in § 44., wo wir mit Fig. 4. S. 248 aus den Formeln für zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke den erweiterten Legendreschen Satz hergeleitet haben. Ebenso werden wir nun die Formeln behandeln, durch welche Gauss im Jahre 1827 in Art. 25. der „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ den bedeutenden Schritt von Legendres Kugel-Satze zur Trigonometrie auf irgend einer krummen Fläche gemacht hat.

Indem wir im wesentlichen die früheren Bezeichnungen beibehalten, bilden wir in Fig. 1. ein geodätisches Dreieck mit den Seiten b, c und $a = q + q'$, indem eine Senkrechte p das Dreieck b, c, a in zwei rechtwinklige Dreiecke p, q , sowie p, q' zerlegt.

Sind ε_1 und ε_2 die geodätischen Excesse der beiden rechtwinkligen Teildreiecke, so ist nach (31) des vorigen § 110. S. 352:

$$\varepsilon_1 = \frac{pq}{2} \frac{k_a + k_{q_0} + k_c}{3} + k^2 \dots \quad (1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{pq'}{2} \frac{k_a + k_{q_0} + k_b}{3} + k^2 \dots \quad (2)$$

Indem wir zunächst die Glieder von der Ordnung k^2 bei Seite lassen, können wir uns leicht überzeugen, dass der Excess $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ des ganzen Dreiecks in erster Näherung (d. h. vorbehaltlich der Glieder mit k^2) so berechnet wird:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{p(q+q')}{2} \frac{k_a + k_b + k_c}{3} \quad (3)$$

Um die Übereinstimmung dieser Formel (3) mit der Summe von (1) und (2) nachzuweisen, braucht man nur die der ganzen Theorie zu Grunde liegende Annahme einzuführen, dass das Krümmungsmass k eine lineare Funktion der Coordinaten auf der Fläche sein, also auf der Linie $a = q + q'$ sich proportional den Strecken q und q' ändern soll, d. h. es muss sein:

$$k_{q_0} = k_c + \frac{q}{q+q'}(k_b - k_c) \quad \text{oder} \quad k_{q_0}(q - q') = k_c q' + k_b q \quad (4)$$

und damit geht die Summe von (1) und (2) in (3) über. Man kann also nun die Gleichung (3) so schreiben:

$$\varepsilon = \frac{ap}{2} \frac{k_a + k_b + k_c}{3} + k^2 \dots \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \Delta \frac{k_a + k_b + k_c}{3} + k^2 \dots \quad (5)$$

Dabei soll Δ ein Näherungswert für die Fläche des Dreiecks sein, z. B. kann Δ statt $\frac{ap}{2}$ auch die Fläche eines ebenen Dreiecks sein, das man aus den drei Seitenlängen a, b, c konstruiert. Wenn übrigens die in (5) vernachlässigten Glieder von der Ordnung k^2 berücksichtigt werden sollen, dann muss auch die Bedeutung von Δ , z. B. ob es $\frac{ap}{2}$ oder gleich der Fläche des ebenen Dreiecks a, b, c sein soll, unterschieden werden, weil je nach dieser Unterscheidung auch die höheren Glieder von der Ordnung k^2 verschieden ausfallen.

Fig. 1.

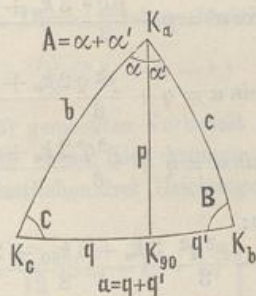
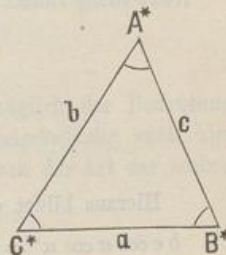


Fig. 2.



In Fig. 2. haben wir ein ebenes Dreieck gezeichnet, welches dieselben Seiten a, b, c wie das geodätische Dreieck Fig. 1. hat, aber deswegen andere Winkel A^*, B^*, C^* haben muss, deren Summe $= 180^\circ$ ist, und deren Differenzen gegen die geodätischen Winkel A, B, C nun untersucht werden sollen.

Von (20)–(23) § 110. S. 551 haben wir folgende 4 Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} b \cos \alpha &= p - \frac{p q^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{90} + 2 k_c}{8} \\ c \cos \alpha' &= p - \frac{p q'^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{90} + 2 k_b}{8} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} b \sin \alpha &= q + \frac{p^2 q}{6} \frac{2 k_a + k_{90} + k_c}{4} \\ c \sin \alpha' &= q' + \frac{p^2 q'}{6} \frac{2 k_a + k_{90} + k_b}{4} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hieraus bildet man:

$$b c \cos \alpha \cos \alpha' = p^2 - \frac{p^2 q^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{90} + 2 k_c}{8} - \frac{p^2 q'^2}{3} \frac{3 k_a + 3 k_{90} + 2 k_b}{8}$$

$$b c \sin \alpha \sin \alpha' = q q' + \frac{p^2 q q'}{6} \frac{2 k_a + k_{90} + k_c}{4} + \frac{p^2 q q'}{6} \frac{2 k_a + k_{90} + k_b}{4} = k_b$$

Da $\alpha + \alpha' = A$, also $\cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha' = \cos A$ ist, erhält man hieraus:

$$\left. \begin{aligned} b c \cos A &= p^2 - q q' - \frac{p^2 k_a}{24} (3 q^2 + 3 q'^2 + 4 q q') - \frac{p^2 k_c}{24} (2 q^2 + q q') \\ &\quad - \frac{p^2 k_{90}}{24} (3 q^2 + 3 q'^2 + 2 q q') - \frac{p^2 k_b}{24} (2 q'^2 + q q') \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Zwischen den verschiedenen Dreiecksseiten bestehen Beziehungen, nämlich nach (14) § 110. S. 550:

$$b^2 = p^2 + q^2 - \frac{p^2 q^2}{3} \frac{k_a + 2 k_{90} + k_c}{4} \quad (9)$$

$$c^2 = p^2 + q'^2 - \frac{p^2 q'^2}{3} \frac{k_a + 2 k_{90} + k_b}{4} \quad (10)$$

Nun wird nach Fig. 2. das ebene Dreieck betrachtet, welches dieselben Seitenlängen b, c und $a = q + q'$ hat wie das geodätische Dreieck Fig. 1., während die Winkel andere werden, nämlich A^*, B^*, C^* .

Dieses Dreieck Fig. 2. giebt die Gleichung:

$$a^2 = (q + q')^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos A^* \quad (11)$$

Man hat also aus (11), (10) und (9):

$$\begin{aligned} 2 b c \cos A^* &= b^2 + c^2 - (q^2 + q'^2 + 2 q q') \\ &= 2 p^2 - 2 q q' - \frac{k_a p^2}{12} (q^2 + q'^2) - \frac{k_{90} p^2}{6} (q^2 + q'^2) - \frac{k_c p^2}{12} q^2 - \frac{k_b p^2}{12} q'^2 \end{aligned}$$

Vergleicht man dieses mit (8), so erhält man:

$$\begin{aligned} b c (\cos A^* - \cos A) &= \frac{p^2 k_a}{24} (2 q^2 + 2 q'^2 + 4 q q') + \frac{p^2 k_{90}}{24} (q^2 + q'^2 + 2 q q') \\ &\quad + \frac{p^2 k_c}{24} (q^2 + q q') + \frac{p^2 k_b}{24} (q'^2 + q q') \\ b c (\cos A^* - \cos A) &= \frac{p^2 (q + q')}{24} \left(2 k_a (q + q') + k_{90} (q + q') + k_c q + k_b q' \right) \quad (12) \end{aligned}$$

Hier ist wieder das Krümmungsmass k_{90} mit Hilfe der Gleichung (4) zu eliminieren; dadurch bekommt man aus (12):

$$b c (\cos A^* - \cos A) = \frac{p^2 (q + q')^2}{24} (2k_a + k_b + k_c) \quad (13)$$

Hier ist:

$$\cos A^* - \cos A = (A - A^*) \sin A^*$$

und

$$b c \sin A^* = p (q + q') = 2 \triangle$$

wobei \triangle ein Näherungswert für die Dreiecksfläche sein soll. Damit giebt (13):

$$A - A^* = \frac{\triangle}{12} (2k_a + k_b + k_c)$$

Indem wir den schon bei (5) gemachten Vorbehalt bezüglich der Bedeutung von \triangle als erster Näherung für die ebene oder krumme Dreiecksfläche auch hier machen müssen, schreiben wir die sämtlichen drei Gleichungen von der Art der soeben gefundenen zusammen:

$$\left. \begin{aligned} A - A^* &= \frac{\triangle}{12} (2k_a + k_b + k_c) \\ B - B^* &= \frac{\triangle}{12} (k_a + 2k_b + k_c) \\ C - C^* &= \frac{\triangle}{12} (k_a + k_b + 2k_c) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\text{Summe: } \varepsilon = \triangle \frac{k_a + k_b + k_c}{3} \quad (15)$$

Dieses ist wieder dieselbe Gleichung, wie die schon bei (5) gefundene, und wenn wir die Glieder von der Ordnung k^2 vernachlässigen wollen, so ist die sphäroidische Dreiecks-Berechnung durch die Formeln (14) und (15) erledigt, ebenso wie die sphärische Dreiecks-Berechnung durch den einfachen Legendre'schen Satz (11)–(12) § 42. S. 236 bis zur Ordnung $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, aber $\frac{1}{r^4}$ ausschliesslich, bestimmt war.

Um nun in unserem Falle auch noch die Glieder von der Ordnung k^2 (entsprechend $\frac{1}{r^4}$) zu finden, können wir die ganze vorstehende Entwicklung (6)–(15) mit Zusetzung aller Glieder von der Ordnung k^2 wiederholen, und es ist dabei nur etwa das eine besonders zu bemerken, dass dann die Dreiecksfläche \triangle nicht mehr nach Belieben $= \frac{ap}{2}$ oder $= \frac{bc}{2} \sin A^*$ gesetzt werden darf.

Indem wir für Entwicklung mit Gliedern k^2 nun festsetzen, dass \triangle die Fläche des ebenen aus den drei Seitenlängen a, b, c zu konstruierenden Hilfsdreiecks Fig. 2. sein soll, erhalten wir eine Beziehung zwischen $p (q + q')$ und \triangle , zunächst durch weitere Benützung der Gleichungen (6) und (7), nämlich:

$$\sin A = \sin (\alpha + \alpha') = \sin \alpha \cos \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha'$$

$$b c \sin A = p (q + q') \left(1 + \frac{k}{6} (p^2 - 2 q q') \right)$$

$$b c \sin A = b c \left(\sin A^* + \frac{\triangle}{3} k \cos A^* \right) \text{ u. s. w.}$$

In gleicher Weise hat man auch:

$$\frac{\partial F}{\partial q} dq = III \quad (2)$$

wenn mit *III* das schmale Dreieck *OAB* bezeichnet wird.

Um die drei Flächenteile *I*, *II*, *III* näher zu untersuchen, beginnen wir mit *I*, welches ist:

$$I = \int n dp dq = dp \int n dq \quad (3)$$

Dabei ist *dp* als Basis *PP'* des Streifens *I* konstant.

Das Dreieck *II* lässt sich zu *III* in Beziehung setzen durch das Verhältnis *EA* : *AB*, nämlich:

$$II : III = EA : AB$$

Dabei ist *AB* = *dq* und *EA* = *n dp cotg β*; daraus folgt mit Rücksicht auf (2):

$$II = \frac{\partial F}{\partial q} n dp \cotg \beta \quad (4)$$

Man hat also nun aus (1), (3) und (4):

$$\frac{\partial F}{\partial p} dp = dp \int n dq - n dp \cotg \beta \frac{\partial F}{\partial q}$$

Der Faktor *dp* fällt fort, und dann hat man:

$$\sin \beta \frac{\partial F}{\partial p} + \cos \beta n \frac{\partial F}{\partial q} = \sin \beta \int n dq$$

oder, weil *sin β* und *cos β* von den früheren Entwicklungen nur in den Produkten *s sin β* und *s cos β* vorhanden sind, schreiben wir:

$$s \sin \beta \frac{\partial F}{\partial p} + n s \cos \beta \frac{\partial F}{\partial q} = s \sin \beta \int n dq \quad (5)$$

Diese zur Bestimmung von *F* dienende Gleichung soll in Übereinstimmung gebracht werden mit der folgenden Gleichung, deren Coefficienten *A*, *B*, *C*, *D* zunächst unbestimmt eingeführt werden:

$$F = \frac{1}{2} p q + A p^2 + B q^2 + C p^2 q + D p q^2 \quad (6)$$

Nach Anleitung von (5) wird hieraus gebildet:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{2} q + 2 A p + 2 C p q + D q^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{2} p + 2 B q + C p^2 + 2 D p q$$

Hiezu nehmen wir in erster Näherung von (18) und (19) S. 551 und (16) S. 548:

$$s \sin \beta = p \quad s \cos \beta = q \quad n = 1 + f_0 q^2$$

Wenn man hiemit die Gleichung (5) bildet, und mit (6) vergleicht, so findet man *A* = 0, *B* = 0, *C* = 0, *D* = 0, d. h. die Reihe für *F* hat keine Glieder von der Form *p*², *q*², *p*²*q*, *p**q*².

Nachdem dieses erkannt ist, wird als neue Form angenommen:

$$F = \frac{1}{2} p q + A p^3 q + B p^2 q^2 + C p q^3 \quad (7)$$

Hieraus wird $\frac{\partial F}{\partial p}$ und $\frac{\partial F}{\partial q}$ gebildet, hiezu in zweiter Näherung von (18), (19) § 110. S. 551 nebst (16) § 109. S. 548:

$$s \sin \beta = p - \frac{1}{3} f_0 p q^2 \quad s \cos \beta = q + \frac{2}{3} f_0 p^2 q$$

$$n = 1 + f_0 q^2$$

Dieses wird in (5) eingesetzt, der entstehende Ausdruck mit (7) verglichen, wodurch sich ergeben wird:

$$4A = -\frac{1}{3} f_0 \quad 4B = 0 \quad 4C = -\frac{1}{3} f_0$$

Und setzt man auch noch nach (13) § 110. S. 550, $2f_0 = -k$, so giebt (7):

$$F = \frac{1}{2} p q + \frac{p q}{24} k (p^2 + q^2) \quad (8)$$

In der nächsten Stufe haben wir 4 weitere unbestimmte Glieder zugesetzt von der Form $A p^4 q + B p^3 q^2 + B' p^2 q^3 + A' p q^4$, wozu auch $s \sin \beta$, $s \cos \beta$ und n entsprechend höher zu nehmen waren. Die Ausführung und Coëfficienten-Vergleichung nach dem bisherigen Verfahren gab:

$$F = \frac{1}{2} p q + \frac{p q}{120} \left(-10 f_0 p^2 - 10 f_0 q^2 - 6 f_1 p^3 - 9 g_0 p^2 q - 7 f_1 p q^2 - 12 g_0 q^3 \right)$$

Wenn man hier wieder die Krümmungsmasse nach (13) § 110. S. 550 einführt, so kann man den vorstehenden Ausdruck für F auf folgende Form bringen:

$$F = \frac{p q}{2} + \frac{p q}{240} \left\{ k_\alpha (4 p^2 + 3 q^2) + k_{90} (3 p^2 + 3 q^2) + k_\beta (3 p^2 + 4 q^2) \right\} \quad (9)$$

Setzt man die verschiedenen k_α , k_β , k_γ hier einander gleich, schlechthin $= k$, so erhält man wieder die Gleichung (8).

Nun kommt es darauf an, von der Fläche F eines rechtwinkligen geodätischen Dreiecks überzugehen auf die Fläche eines allgemeinen Dreiecks mit beliebigen Winkeln. Der Weg hiezu ist bereits durch die Entwicklung von § 110. mit Fig. 1. S. 553 vorgezeichnet; wir werden wieder das allgemeine Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, und haben dann, die Flächen der beiden rechtwinkligen Dreiecke nach dem bisherigen mit F_1 und F_2 bezeichnend, und für die Gesamtfläche das Zeichen F annehmend:

$$F = F_1 + F_2 \quad (10)$$

Wenn wir die Formel (9) für die Fläche F eines rechtwinkligen Dreiecks, auf die beiden Teile von Fig. 1. anwenden, so haben wir:

$$F_1 = \frac{p q}{2} + \frac{p q}{240} \left(k_\alpha (4 p^2 + 3 q^2) + k_{90} (3 p^2 + 3 q^2) + k_\epsilon (3 p^2 + 4 q^2) \right)$$

$$F_2 = \frac{p' q'}{2} + \frac{p' q'}{240} \left(k_\alpha (4 p'^2 + 3 q'^2) + k_{90} (3 p'^2 + 3 q'^2) + k_b (3 p'^2 + 4 q'^2) \right)$$

Hiezu hat man nach (24)–(27) § 110. S. 551:

$$p = b \cos \alpha \left(1 + \frac{q^2}{3} \frac{3 k_\alpha + 3 k_{90} + 2 k_\epsilon}{8} \right), \quad p = c \cos \alpha' \left(1 + \frac{q'^2}{3} \frac{3 k_\alpha + 3 k_{90} + 2 k_b}{8} \right)$$

$$q = b \sin \alpha \left(1 + \frac{p^2}{6} \frac{2 k_\alpha + k_{90} + k_\epsilon}{4} \right), \quad q' = c \sin \alpha' \left(1 - \frac{p'^2}{6} \frac{2 k_\alpha + k_{90} + k_b}{4} \right)$$

$$p = c \cos \alpha' \left(1 + \frac{q'^2}{3} \frac{3 k_\alpha + 3 k_{90} + 2 k_b}{8} \right), \quad p = b \cos \alpha \left(1 + \frac{q^2}{3} \frac{3 k_\alpha + 3 k_{90} + 3 k_b}{8} \right)$$

Dadurch ist der Weg gezeigt, auf welchem man die krumme Dreiecksfläche F zunächst in p, q, q' nebst den verschiedenen k ausdrücken kann. Dann hat man verschiedene geometrische Beziehungen in dem Dreieck selbst, z. B. $p^2 + q^2 = b^2$, $p^2 + q'^2 = c^2$ als erste Näherungen u. s. w. Wenn man nach diesen Andeutungen die Rechnung durchführt, so wird man erhalten:

$$F = \frac{bc \sin A}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{120} k_a (3b^2 + 3c^2 - 12bc \cos A) + \frac{1}{120} k_b (3b^2 + 4c^2 - 9bc \cos A) + \frac{1}{120} k_c (4b^2 + 3c^2 - 9bc \cos A) \right\} \quad (11)$$

Diese Gleichung (11), welche man auch noch in zwei anderen Formen mit $ac \sin B$ und mit $ab \sin C$, anschreiben kann, ist nicht symmetrisch, weil eines der drei Elemente A, B, C bzw. a, b, c bevorzugt ist. Wir wollen deshalb $bc \sin A$ durch \triangle ersetzen, und haben hiezu von (14) § 111. S. 553:

$$A = A^* + \frac{\triangle}{3} \frac{2k_a + k_b + k_c}{4}$$

und im ebenen Dreieck: $2bc \cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$

Da man in den Gliedern zweiter Ordnung von (11) stets A mit A^* vertauschen darf, kann man mittelst der soeben geschriebenen zwei Gleichungen die (11) auf folgende Form bringen:

$$F = \triangle \left\{ 1 + \frac{1}{120} k_a (a^2 + 2b^2 + 2c^2) + \frac{1}{120} k_b (2a^2 + b^2 + 2c^2) + \frac{1}{120} k_c (2a^2 + 2b^2 + c^2) \right\} \quad (12)$$

Setzt man hier $k_a = k_b = k_c = k$, so erhält man:

$$F = \triangle \left(1 + \frac{1}{24} k (a^2 + b^2 + c^2) \right) \quad (13)$$

Dieses entspricht dem früheren (36) S. 251, und damit kann man auch (31)–(42) von S. 251–252 leicht auf unseren Fall übertragen, was in der Formel-Zusammenstellung des 113. geschehen soll.

In der vorigen 3. Auflage dieses Bandes, 1890, S. 480–488, hatten wir hier eine zweite Begründung der Grundformeln geodätischer Dreiecke eingeschaltet (auch in teilweise anderer Form früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1889“, S. 295–304 gegeben), welche auf das Prinzip der reduzierten Breite (Kap. IX) gegründet, ein sphärisches Hilfsdreieck benützt. Dieses mag diesesmal übergangen werden.

§ 113. Praktische Anwendung der allgemeinen Theorie der geodätischen Dreiecke.

(Bezeichnungen nach Fig. 1. und 2. S. 553.)

Wir wollen zuerst die verschiedenen von § 111. und § 112. zur praktischen Anwendung geeigneten Formeln zusammenstellen, und dazu auch noch einige zusammenfassende Bezeichnungen einführen. Wenn die Krümmungsmasse in den drei Ecken eines Dreiecks mit k_a, k_b, k_c bezeichnet sind, so nehmen wir hiezu einen Mittelwert:

$$\frac{k_a + k_b + k_c}{3} = k_0 \quad (1)$$

Dieser Wert k_0 entspricht dem Schwerpunkt des Dreiecks und dem arithmetischen Mittel der geographischen Breiten der drei Endpunkte des Dreiecks.

Wenn die drei Seiten eines geodätischen Dreiecks die Längen a, b, c haben, so berechnen wir das mittlere Seitenquadrat:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = m^2 \quad (2)$$

Die Winkel des geodätischen Dreiecks sind A, B, C , und die Winkel eines ebenen Dreiecks, welches mit dem geodätischen Dreieck gleiche Seitenlängen a, b, c hat, sind A^*, B^*, C^* . Die Winkelsumme des ebenen Dreiecks, d. h. $A^* + B^* + C^*$ ist $= 180^\circ$, und die Summe der Winkel des geodätischen Dreiecks, d. h. $A + B + C$ ist $= 180^\circ + \varepsilon$, wo ε der geodätische Excess des Dreiecks heisst.

Die Fläche des geodätischen Dreiecks, auf der krummen Oberfläche gemessen, sei F , und die Fläche des ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c sei \triangle .

Mit diesen Bezeichnungen haben wir von (16) und (17) § 112. S. 556 mit Zusetzung der nötigen ϱ :

$$A - A^* = \frac{\triangle}{3} \varrho \frac{2k_a + k_b + k_c}{4} + \frac{\triangle}{24} \varrho k^2 \frac{a^2 + 7b^2 + 7c^2}{15} \quad (3)$$

oder mit Einführung von k_0 und von m^2 in dreifacher Form:

$$\left. \begin{aligned} A - A^* &= \frac{\triangle}{3} \varrho k_0 + \frac{\triangle}{12} \varrho (k_a - k_0) + \frac{\triangle}{120} \varrho k^2 (7m^2 - 2a^2) \\ B - B^* &= \frac{\triangle}{3} \varrho k_0 + \frac{\triangle}{12} \varrho (k_b - k_0) + \frac{\triangle}{120} \varrho k^2 (7m^2 - 2b^2) \\ C - C^* &= \frac{\triangle}{3} \varrho k_0 + \frac{\triangle}{12} \varrho (k_c - k_0) + \frac{\triangle}{120} \varrho k^2 (7m^2 - 2c^2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{Summe } \varepsilon = \triangle \varrho k_0 + 0 + \frac{\triangle}{8} \varrho k^2 m^2 \quad (5)$$

Der theoretischen Vollständigkeit wegen fügen wir auch die Formel für die krumme Oberfläche F hier bei, nach (13) § 112. S. 559:

$$F = \triangle + \frac{\triangle}{8} k m^2 \quad (6)$$

und als Folge von (5) und (6):

$$\varepsilon = F \varrho k_0 + k^3 \dots \quad (7)$$

Endlich bildet man aus (4) und (5) durch Elimination von \triangle die Differenz:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} \frac{2k_a + k_b + k_c}{4k_0} + \varepsilon \frac{k}{180} (-2a^2 + b^2 + c^2) \quad (8)$$

oder mit Einführung der Mittelwerte k_0 und m^2 nach (1) und (2) in dreifacher Form:

$$\left. \begin{aligned} A - A^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12} \left(\frac{k_a - k_0}{k_0} \right) + \frac{\varepsilon k}{60} (m^2 - a^2) \\ B - B^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12} \left(\frac{k_b - k_0}{k_0} \right) + \frac{\varepsilon k}{60} (m^2 - b^2) \\ C - C^* &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12} \left(\frac{k_c - k_0}{k_0} \right) + \frac{\varepsilon k}{60} (m^2 - c^2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{Summe } \varepsilon = \varepsilon.$$

Wo in den höheren Gliedern dieser Formeln k schlechthin steht, sind die einzelnen k_a , k_b , k_c nicht mehr unterschieden, und man kann dann nach Belieben etwa $k = k_0$ nehmen.

Die Zahlenwerte von k kann man aus der Hilfstafel S. [8]–[29] unseres Anhangs entnehmen, denn es ist:

$$k = \frac{1}{r^2}, \quad \log k = \log \frac{1}{r^2}$$

Auch darf man sich wohl erlauben, wenn es sich um den Mittelwert k_0 nach (1) handelt, statt des Mittels aus den k selbst, das Mittel aus den verschiedenen $\log k$ als $\log k_0$ gelten zu lassen, oder man kann auch $\log k_0$ zu dem arithmetischen Mittel der Breiten φ der drei Ecken des Dreiecks nehmen, insofern auf nicht zu weite Erstreckung die Differenzen zwischen den Breiten φ , zwischen den Werten k und den Werten $\log k$ alle nahezu einander proportional angenommen werden dürfen.

Wenn die Proportionalität zwischen $\Delta \varphi$ und Δk nicht mehr stattfindet, so ist auch die der ganzen Theorie zu Grunde liegende Annahme, dass k eine lineare Funktion der Flächen-Coordinationen sei, nicht mehr erfüllt (vgl. (13) und (14) § 109. S. 548 und (13) § 110. S. 550).

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir zuerst wieder das klassische Dreieck Inselsberg-Hohehagen-Brocken, welches uns schon mehrfach, auf S. 232 und S. 253 als Rechen-Beispiel gedient hat.

Wir nehmen nach S. 232 zuerst wieder die genäherten geographischen Breiten der drei Eckpunkte des Dreiecks, und entnehmen darnach von S. [20] des Anhangs die Krümmungsmasse:

Punkt	Breite	$\log k = \log \frac{1}{r^2}$	
Inselsberg	50° 51' 9"	$\log k_a = 6.390\,1277.8$	(10)
Hohehagen	51° 28' 31"	$\log k_b = 6.390\,0659.4$	
Brocken	51° 48' 2"	$\log k_c = 6.390\,0337.4$	
Mittel	51° 22' 34"	$\log k_0 = 6.390\,0758.2$	

Wir haben dabei ausnahmsweise scharf gerechnet, d. h. von Seite [20] zuerst $\log r$ interpoliert, und daraus $\log r^2$ und $\log k$ gebildet. Wir wollen damit die Winkel auf 0,000 001" genau berechnen, was nur formellen Sinn für ein Vergleichs-Beispiel hat.

Indem wir die früheren Zahlenwerte von S. 237 und S. 253 wieder benützen, haben wir:

$$\begin{aligned} a &= 69,194^{km} & b &= 105,973^{km} & c &= 84,941^{km} \\ a^2 &= 4787,8^{km} & b^2 &= 11230,2^{km} & c^2 &= 7215,0^{km} & m^2 &= 7744,3^{km} \\ \log \triangle &= 9.467\,2167.6 & \triangle &= 2\,932\,356\,450^{mm} \end{aligned}$$

$$\text{hiemit nach (5): } \varepsilon = 14,849\,701'' + 0,000\,353'' = 14,850\,054'' \quad (11)$$

$$\text{dann nach (6): } F = 2\,932\,356\,450^{mm} + 69\,693^{mm} = 2\,932\,426\,143^{mm}$$

$$\text{und damit } \varepsilon \text{ nach (7): } \varepsilon = 14,850\,054'' \text{ (stimmt mit (11))}$$

Die Gruppe (4) und (5) giebt:

$$\begin{aligned} A - A^* &= 4,949\,900'' - 0,000\,148'' + 0,000\,136'' = 4,949\,888'' \\ B - B^* &= 4,949\,900'' + 0,000\,028'' + 0,000\,096'' = 4,950\,024'' \\ C - C^* &= 4,949\,900'' + 0,000\,120'' + 0,000\,121'' = 4,950\,141'' \\ \varepsilon &= 14,849\,700'' + 0 & + 0,000\,353'' &= 14,850\,053'' \end{aligned} \quad (12)$$

Ferner giebt die Gruppe (9):

$$\left. \begin{aligned} A - A^* &= 4,950\,018'' + 0,000\,148'' + 0,000\,018'' = 4,950\,184'' \\ B - B^* &= 4,950\,018'' - 0,000\,028'' - 0,000\,021'' = 4,949\,969'' \\ C - C^* &= 4,950\,018'' - 0,000\,120'' + 0,000\,003'' = 4,949\,901'' \\ \varepsilon &= 14,850\,054'' + 0 \quad + \quad = 14,850\,054'' \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Wenn man diese Winkel (12) und (13) mit den früheren sphärischen Angaben auf S. 253 vergleicht, so findet man nur Differenzen von etwa $0,0001''$, woraus zu ersehen ist, dass in diesem Falle eines sehr grossen Dreiecks die Berechnung nach den sphäroidischen Formeln keine merkbare Abweichung von der sphärischen Rechnung bringt.

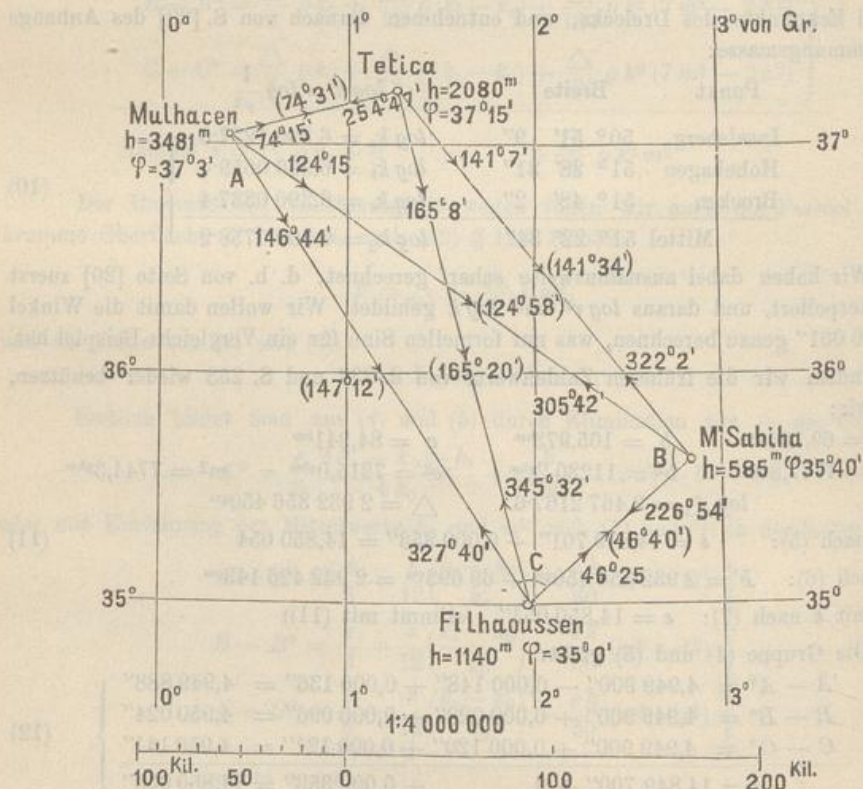
Die Zahlenwerte, welche wir hier in (12) und (13) berechnet haben, stimmen nicht überein mit den Werten, welche Gauss selbst in Art. 23. der „Disquisitiones generales etc.“ gegeben hat, die Gauss'schen Angaben sind nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \text{Inselsberg} \quad A - A^* &= 4,95131'' \\ \text{Hohehagen} \quad B - B^* &= 4,95113'' \\ \text{Brocken} \quad C - C^* &= 4,95104'' \\ \varepsilon &= 14,85348'' \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Es rührt das davon her, dass Gauss im Jahre 1827 andere Erddimensionen seiner Rechnung zu Grunde legte, als die erst von 1841 herrührenden Bessel'schen Erddimensionen, welche unseren Berechnungen zu Grunde liegen.

Fig. 1. (vgl. Fig. 4. S. 23).

Trigonometrische Verbindung zwischen Spanien und Algier.



Die im Vorstehenden berechneten Winkel-Reduktionen sind unabhängig von den Reduktionen zwischen den geodätischen Linien und den vertikalen Schnitten, welche durch die früheren Formeln von § 71. bestimmt sind. Jene Reduktionen müssen vorher schon angebracht sein, ehe die geodätische Theorie von § 109.—112. zur Anwendung kommt.

Wir wollen dieses an einem grösseren Beispiele zeigen, welches in Fig. 1. S. 562 dargestellt ist.

Hiezu nehmen wir eines der grossen Dreiecke, welche im Jahre 1879 von Ibanez und Perrier zur trigonometrischen Verbindung zwischen Spanien und Algier angelegt worden sind, wie wir schon früher auf S. 22—23 im allgemeinen berichtet haben.

Diese grossen Dreiecke eignen sich sehr gut als Zahlen-Beispiele zur Anwendung der geodätischen Formeln mit sphäroidischen Gliedern, und in diesem Sinne ist auch schon eine Berechnung nach Helmerts Formeln mitgeteilt worden von Fenner in der „Zeitschr. f. Verm. 1882“, S. 303—308. Im übrigen haben wir die Quellenschriften: „Enlace geodésico y astronómica de Europa y Africa, Madrid 1880“ und in dem „Generalbericht d. europ. Gradm. für 1880“, S. 44—57: „Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne“, und in endgiltiger Berechnung in dem Werke: „Memorias del instituto geográfico y estadístico. Tomo VII. Madrid 1888“, S. 97—111.

Nach diesen Schriften und einigen Nebenberechnungen haben wir die zur Berechnung nötigen Hauptwerte der Breiten und der Azimute in Fig. 1. zusammengestellt, welche nun in Verbindung mit Fig. 1. S. 23 alles wesentliche giebt.

Wir wollen hier nur eines der vier Verbindungs-Dreiecke durchrechnen, nämlich das grösste: Mulhacen, M'Sahiba, Filhaoussen.

Die gemessenen Winkel sind folgende (Memorias etc. S. 100):

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Mulhacen} & A = 22^\circ 28' 45,269'' \\ \text{M'Sabiha} & B = 78^\circ 48' 45,563'' \\ \text{Filhaoussen} & C = 78^\circ 43' 39,198'' \end{array} \right\} \quad (15)$$

$$\text{Summe} = 180^\circ 0' 70,030''$$

Wir wollen jedoch für unsere Zwecke diese 3 Winkel lieber in Gestalt von 6 Richtungen darstellen, und zwar so, dass die Richtungen nahezu gleich den Azimuten der betreffenden Seiten werden:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Mulhacen} & \text{M'Sabiha} & \text{Filhaoussen} \\ (A B) = 124^\circ 15' 0,000'' & (B C) = 226^\circ 53' 0,000'' & (C A) = 327^\circ 40' 0,000'' \\ (A C) = 146^\circ 43' 45,269'' & (B A) = 305^\circ 41' 45,563'' & (C B) = 46^\circ 23' 39,198'' \\ A = 22^\circ 28' 45,269'' & B = 78^\circ 48' 45,563'' & C = 78^\circ 43' 39,198'' \end{array} \right\} \quad (16)$$

Die Differenzen A, B, C sind wieder dieselben wie bei (15). Dass (AB) und (BA) u. s. w. nicht nahezu um 180° verschieden sind, obgleich die Richtungen selbst auf etwa $1'$ genau Azimute sind, rührt von den Meridian-Konvergenzen her; die Mittelwerte zweier solcher Gegenrichtungen sind als Mittel-Azimute genähert in Fig. 1. eingeschrieben, z. B. $(147^\circ 12')$ als Mittel aus $146^\circ 44'$ und $327^\circ 40' \pm 180^\circ$.

Nun müssen die gemessenen Richtungen (16) zunächst in zweifacher Weise wegen der Abplattung der Erde reduziert werden.

Erstens erfolgt die Reduktion wegen der Höhe der Zielpunkte über dem Meere; es ist nach der Formel für γ in § 68. S. 372 die Reduktion für einen Zielpunkt der in der Höhe h über dem Meere, im Azimut α angezielt wird, in Sekunden:

$$\gamma = \eta^2 \frac{h}{N} \rho \sin \alpha \cos \alpha \quad (17)$$

Zweitens ist Reduktion erforderlich von den vertikalen Schnitten, in welchen die Richtungen (16) gemessen sind, auf die geodätischen Linien; hiefür haben wir nach (16) S. 386 nebst Fig. 5. S. 384 die Reduktion in genügender Näherung:

$$v = -\frac{1}{3} \eta^2 \varepsilon = -\frac{1}{6} \eta^2 \frac{s^2}{N^2} \varrho \sin \alpha \cos \alpha \quad (18)$$

Der in (17) und (18) vorkommende Faktor η^2 hat wie gewöhnlich die Bedeutung $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$. Da die Breiten φ der drei Eckpunkte in Fig. 1. angegeben sind, hat man damit auch die Mittelbreiten für die drei Seiten, und hiezu lassen sich die drei Werte $\log \eta^2$ berechnen, sowie die nötigen $\log N$ aus der Tafel Seite [16] entnehmen:

M'Sabiha	35° 40'	Mulhacen	37° 3'	Mulhacen	37° 3'
Filhaoussen	35° 0'	Filhaoussen	35° 0'	M'Sabiha	35° 40'
Mittelbreite $\varphi = 35^\circ 20'$			36° 2'		36° 22'
$\log \eta^2$	7.65049		7.64286		7.63917
$\log N$	6.80513		6.80514		6.80515

Da im übrigen zu der Rechnung nach den Formeln (17) und (18) nichts weiter zu bemerken ist, indem die nötigen Elemente teils in (19) gegeben, teils in Fig. 1 eingeschrieben sind, so teilen wir sofort die Ergebnisse dieser Rechnungen mit:

Richtung	Mulhacen		M'Sabiha		Filhaoussen	
	(AB)	(AC)	(BC)	(BA)	(CA)	(CB)
γ	-0,039"	-0,074"	+0,082"	-0,230"	-0,225"	+0,042"
v	+0,126"	+0,123"	-0,021"	+0,126"	+0,123"	-0,021"
$\gamma + v$	+0,087", +0,049"		+0,061", -0,104"		-0,102", +0,021"	
	-0,038"		-0,165"		+0,123"	

Indem wir diese Reduktionen (20) den gemessenen Richtungen (16) hinzufügen, erhalten wir folgende neue Tabelle der Richtungen, die wir zur Unterscheidung von (AB) u. s. w. nun mit [AB] u. s. w. bezeichnen wollen:

Mulhacen		M'Sabiha		Filhaoussen	
[AB]	= 124° 15' 0,087"	[BC]	= 226° 53' 0,061"	[CA]	= 327° 39' 59,898"
[AC]	= 146° 43' 45,318"	[BA]	= 305° 41' 45,459"	[CB]	= 46° 23' 39,219"
A'	= 22° 28' 45,231"	B'	= 78° 48' 45,398"	C'	= 78° 43' 39,321"

Um nun das Dreieck, welchem diese Winkel angehören, auf ein ebenes Dreieck mit gleich langen Seiten zu reduzieren, oder um die früher mit A^* , B^* , C^* bezeichneten Winkel zu finden, hat man wieder die hiefür giltigen Formeln anzuwenden, welche wir am Anfang dieses § 113. unter (1)–(9) S. 559–560 zusammengestellt haben.

Die hiezu nötigen Krümmungsmasse k , bzw. die entsprechenden $\log k \varrho$ sind:

A, Mulhacen	$\varphi = 37^\circ 3'$	$\log k \varrho = \log \frac{\varrho}{r^2} =$	1.705 9395
B, M'Sabiha	.. 35° 40'	1.706 0732
C, Filhaoussen	.. 35° 1'	1.706 1356

Was die Rechnung im übrigen betrifft, so haben wir die Seite $AC = b = 269\,926_m$ zu Grunde gelegt, die Winkel A , B , C zunächst vorläufig auf 180° ausgeglichen und damit erste Näherungen von A^* , B^* , C^* erhalten, woraus weiter folgte: $BC = a$

= 105 173,9^m und $AB = c = 269\,845,7^m$. Damit konnte weiter gerechnet werden $\log \Delta = 10.143\,6726$ und $\varepsilon = 70,7607''$ und endlich:

$$A' - A^* = 23,5866'' \quad B' - B^* = 23,5866'' \quad C - C^* = 23,5875'' \quad (22)$$

Zieht man diese (22) von den A', B', C' in (21) ab, so erhält man:

$$A^* = 22^\circ 28' 21,644''$$

$$B^* = 78^\circ 48' 21,811''$$

$$C^* = 78^\circ 43' 15,733''$$

$$\text{Summe} = 179^\circ 59' 59,188''$$

$$w = -0,812'' \quad (23)$$

Dieser nun noch bleibende Widerspruch $w = -0,812''$ rührt von den Beobachtungs-Fehlern her. Die geodätische Winkel-Reduktion an sich ist damit vollendet.

Wenn man die praktische Frage aufwirft, ob die kleinen Reduktionen, mit denen wir uns hier beschäftigt haben, bei Triangulierungen in Rechnung zu bringen sind, so wird man beim heutigen Stande der Beobachtungskunst diese Frage für die gewöhnlichen kleinen Dreiecke und geringen Höhen vereinen; dagegen bei solch grossen Verhältnissen, wie diejenigen der Triangulierung zwischen Spanien und Algier, sind kleine Grössen wie die unter (20) erhaltenen neben einem nur etwa 8 mal grösseren Messungs-Fehler w nach gewöhnlicher Anschauung nicht zu vernachlässigen.

Dieses betrifft diejenigen Reduktionen, deren Theorie in den früheren §§ 66., 67. und 71. behandelt worden ist. Die kleinen Grössen, welche durch die Theorie dieses Kapitels X. § 110.—§ 112 gewonnen wurden, sind noch erheblich kleiner, und der praktische Gewinn unseres ganzen Kapitels X. beschränkt sich also sogar bei der grossen spanisch-algerischen Triangulierung auf Glieder von 0,001'' Betrag.

Wenn hiernach die Theorie der Gauss'schen „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ sich hier nur als schöne Theorie zeigt, welche man in der Praxis kaum unmittelbar braucht, so ist die Theorie damit doch auch praktisch nicht überflüssig, denn ohne diese Theorie wüsste man eben nicht, dass die zweifellos vorhandenen Einflüsse der Abplattung der Erde in diesem Falle so wenig ausmachen, und die höheren sphärischen Glieder mit $\frac{1}{r^4}$ in § 44. würden ohne die Kenntnis der sphäroidischen Glieder wertlos sein.

Kapitel XI.

Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids.

§ 114. Bestimmung der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen.

Das älteste Mittel zur Bestimmung der Erddimensionen sind die sogenannten Breiten-Gradmessungen, deren Geschichte wir in der Einleitung S. 1—9 mitgeteilt haben.

Unter einer Breiten-Gradmessung versteht man die Messung eines Meridian-bogens der Erde und der Polhöhen oder geographischen Breiten seiner Endpunkte.

Wenn man die Messungs-Ergebnisse zweier solcher Gradmessungen unter verschiedenen Breiten kennt, so kann man die Dimensionen der dadurch bestimmten Meridian-Ellipse berechnen.