Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

Kapitel XI. Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

$= 105\,173{,}9^m$ und $A\,B = c = 269\,845{,}7^m$. Damit konnte weiter gerechnet werden $\log \triangle = 10.143\,6726$ und $\varepsilon = 70{,}7607''$ und endlich:

$$A' - A^* = 23{,}5866'' \qquad B' - B^* = 23{,}5866'' \qquad C - C^* = 23{,}5875'' \tag{22}$$

Zieht man diese (22) von den A', B', C' in (21) ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} A^* &= 22^\circ\ 28'\ 21{,}644'' \\ B^* &= 78^\circ\ 48'\ 21{,}811'' \\ C^* &= 78^\circ\ 43'\ 15{,}733'' \\ \hline \text{Summe} &= 179^\circ\ 59'\ 59{,}188'' \\ w &= \qquad\quad -0{,}812'' \end{aligned} \tag{23}$$

Dieser nun noch bleibende Widerspruch $w = -0{,}812''$ rührt von den Beobachtungs-Fehlern her. Die geodätische Winkel-Reduktion an sich ist damit vollendet.

Wenn man die praktische Frage aufwirft, ob die kleinen Reduktionen, mit denen wir uns hier beschäftigt haben, bei Triangulierungen in Rechnung zu bringen sind, so wird man beim heutigen Stande der Beobachtungskunst diese Frage für die gewöhnlichen kleinen Dreiecke und geringen Höhen verneinen; dagegen bei solch grossen Verhältnissen, wie diejenigen der Triangulierung zwischen Spanien und Algier, sind kleine Grössen wie die unter (20) erhaltenen neben einem nur etwa 8 mal grösseren Messungs-Fehler w nach gewöhnlicher Anschauung nicht zu vernachlässigen.

Dieses betrifft diejenigen Reduktionen, deren Theorie in den früheren §§ 66., 67. und 71. behandelt worden ist. Die kleinen Grössen, welche durch die Theorie dieses Kapitels X. § 110.—§ 112 gewonnen wurden, sind noch erheblich kleiner, und der praktische Gewinn unseres ganzen Kapitels X. beschränkt sich also sogar bei der grossen spanisch-algierischen Triangulierung auf Glieder von 0,001″ Betrag.

Wenn hiernach die Theorie der Gauss schen „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ sich hier nur als schöne Theorie zeigt, welche man in der Praxis kaum unmittelbar braucht, so ist die Theorie damit doch auch praktisch nicht überflüssig, denn ohne diese Theorie wüsste man eben nicht, dass die zweifellos vorhandenen Einflüsse der Abplattung der Erde in diesem Falle so wenig ausmachen, und die höheren sphärischen Glieder mit $\frac{1}{r^4}$ in § 44. würden ohne die Kenntnis der sphäroidischen Glieder wertlos sein.

Kapitel XI.

Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids.

§ 114. Bestimmung der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen.

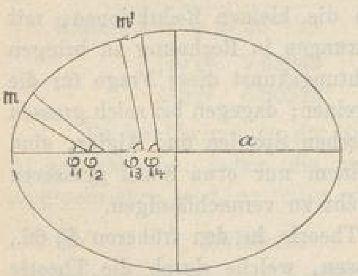
Das älteste Mittel zur Bestimmung der Erddimensionen sind die sogenannten Breiten-Gradmessungen, deren Geschichte wir in der Einleitung S. 1—9 mitgeteilt haben.

Unter einer Breiten-Gradmessung versteht man die Messung eines Meridianbogens der Erde und der Polhöhen oder geographischen Breiten seiner Endpunkte.

Wenn man die Messungs-Ergebnisse zweier solcher Gradmessungen unter verschiedenen Breiten kennt, so kann man die Dimensionen der dadurch bestimmten Meridian-Ellipse berechnen.

Ehe wir uns damit beschäftigen, ist eine Bemerkung über die Messung der Meridianbögen zu machen. Geradezu auf einem Meridian der Erde eine Linie unmittelbar zu messen, das war das Bestreben der ersten Gradmesser (vgl. z. B. S. 3, arabische Gradmessung und S. 7, amerikanische Gradmessung), und wenn der gemessene Bogen einen kleinen Winkel α mit der Meridianrichtung bildete, so konnte man leicht eine Reduktion auf den Meridian ausführen, welche im wesentlichen in der Multiplikation des gemessenen Bogens mit $\cos \alpha$ besteht. Auch Triangulierungsketten, welche nach ihrer Haupterstreckung nahe der Meridianrichtung liegen, lassen sich auf den Meridian reduzieren, wie wir ausführlicher im nächsten § 115. zeigen werden.

Fig. 1.
Zwei Breiten-Gradmessungen.



Nach Andeutung von Fig. 1. nehmen wir nun an, man habe zwei Gradmessungen in demselben Meridian, oder, was hier dasselbe ist, zwei Gradmessungen, deren Elemente in einer Meridian-Ellipse dargestellt sind. Die erste Gradmessung habe den Meridianbogen m mit den Breiten φ_1 und φ_2 seiner Endpunkte, und die zweite Gradmessung entsprechend den Meridianbogen m' mit den Breiten φ_3 und φ_4. Zur Abkürzung wollen wir hiezu schreiben:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi \qquad \varphi_4 - \varphi_3 = \Delta \varphi' \tag{1}$$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi \qquad \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2} = \varphi' \tag{2}$$

Nun wissen wir von § 35. S. 210 und S. 219, dass man die Länge m eines mässig grossen Meridianbogens als Kreisbogen berechnen kann, dessen Halbmesser der Meridian-Krümmungs-Halbmesser M für die Mittelbreite φ, und dessen Centriwinkel die Breiten-Differenz $\Delta \varphi$ ist; d. h. man hat für die beiden Gradmessungen:

$$m = \frac{\Delta \varphi}{\varrho} M \qquad m' = \frac{\Delta \varphi'}{\varrho} M' \tag{3}$$

Dabei ist nach (21) und (19) S. 196—197:

$$M = \frac{c}{V^3} \qquad M' = \frac{c}{V'^3} \tag{4}$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi \qquad V'^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi' \tag{5}$$

Wenn man diese (5) und (4) in (3) einsetzt, und dann die beiden Gleichungen (3) dividiert, so erhält man:

$$\left(\frac{m}{m'} \frac{\Delta \varphi'}{\Delta \varphi}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{6}$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$\left(\frac{m}{m'} \frac{\Delta \varphi'}{\Delta \varphi}\right)^{\frac{2}{3}} = q^2 \tag{6a}$$

Die Gleichung (6) ist in Bezug auf e'^2 linear, und kann daher geradezu nach e'^2 aufgelöst werden. Wenn man dabei die Abkürzung (6a) benützt, so erhält man

$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi'} \tag{7}$$

Hat man hieraus e'^2 berechnet, so erhält man mit Probe aus (3), (4) und (5):

$$c = \frac{m}{\Delta \varphi} \varrho \, V^3 \quad \text{oder} \quad c = \frac{m'}{\Delta \varphi'} \varrho \, V'^3 \tag{8}$$

Die beiden Ellipsen-Halbaxen a und b erhält man aus c und e'^2 nach (18) S. 196:

$$a = \frac{c}{\sqrt{1+e'^2}} \qquad b = \frac{c}{1+e'^2} \tag{9}$$

wobei man nochmals zur Probe bilden kann:

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = e'^2$$

Damit hat man auch e^2 und die Abplattung α nach (5) und (7) S. 189:

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2} \quad , \quad \alpha = 1 - \sqrt{1-e^2} \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} \tag{10}$$

Auch die Länge des Meridian-Quadranten Q kann nach (246) S. 215 berechnet werden:

$$Q = a\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{16}\right) \tag{11}$$

Zur Anwendung der entwickelten Formeln wollen wir die bekannten klassischen Gradmessungen von Peru und Lappland benützen.

Nach Bessels Angabe im 14. Band, 1837, der „Astr. Nachr." S. 334 und S. 337 sind die Ergebnisse der Gradmessungen in Peru und Lappland (Schweden) die folgenden:

Gradmessung in Peru:

$$\left.\begin{array}{l} m = 176\,875{,}5 \text{ Toisen} = 344\,736{,}772 \text{ Meter} \\ \varphi_1 = -3^\circ\, 4'\, 32{,}068'' \qquad \varphi_2 = +0^\circ\, 2'\, 31{,}387'' \end{array}\right\} \tag{12}$$

Gradmessung in Lappland:

$$\left.\begin{array}{l} m' = 92\,777{,}981 \text{ Toisen} = 180\,827{,}654 \text{ Meter} \\ \varphi_3 = 65^\circ\, 31'\, 30{,}265 \qquad \varphi_4 = 67^\circ\, 8'\, 49{,}830'' \end{array}\right\} \tag{13}$$

Man bildet hieraus die Differenzen und die Mittel:

$$\begin{array}{ll} \Delta\varphi = 3^\circ\, 7'\, 3{,}455'' & \Delta\varphi' = 1^\circ\, 37'\, 19{,}565'' \\ = 11\,223{,}455'' & = 5839{,}565'' \\ \varphi = -1^\circ\, 31'\, 30{,}3405'' & \varphi' = 66^\circ\, 20'\, 10{,}0475'' \end{array}$$

Nun rechnet man nach den angegebenen Formeln:

$$log\,\frac{m}{\Delta\varphi} = 1.487\,3610{\cdot}4 \qquad log\,\frac{m'}{\Delta\varphi'} = 1.490\,8843.5 \qquad log\,q^2 = 9.997\,6511{\cdot}3$$

$$e'^2 = \frac{1 - 0{,}994\,606{\cdot}119}{0{,}993\,901\,593 - 0{,}161\,096\,660} = 0{,}006\,476\,764$$

$$log\,V^2 = 0.0028017{\cdot}7 \qquad log\,V'^2 = 0.000\,4529{\cdot}0$$

$$log\,c = 6.805\,9888{\cdot}4 \qquad log\,a = 6.804\,5869{\cdot}6 \qquad log\,b = 6.803\,1850{\cdot}8$$

$$\alpha = 1:310{,}29534 \qquad Q = 10\,000\,157 \text{ Meter} \tag{14}$$

Wenn man statt e'^2 zuerst e^2 haben will, so kann man dieses aus (7) ableiten, denn es ist nach (5) § 31. S. 189, mit Anwendung auf (7):

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2} = \frac{1-q^2}{sin^2\varphi' - q^2\,sin^2\varphi} \tag{15}$$

Auf dieselbe Formel wird man auch unmittelbar dadurch geführt, dass man von vornherein statt c und e'^2 und V^2 mit den Konstanten a, e^2 und W^2 rechnet:

$$W^2 = 1 - e^2\,sin^2\varphi \qquad W'^2 = 1 - e^2\,sin^2\varphi' \tag{16}$$

Wenn man dieses ebenso behandelt, wie früher (3) — (6), so wird man auf (16) geführt, worauf aus (17) auch a mit Probe folgt.

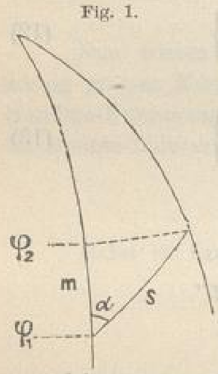
Berechnungen von solcher Art spielten eine wichtige Rolle in der Zeit der Gradmessungen des vorigen Jahrhunderts (vgl. Einleitung S. 7); heute ist dieses nicht mehr der Fall, indem die Frage nach den Erddimensionen jetzt in anderer Form auftritt.

§ 115. Reduktion eines Gradmessungs-Bogens auf den Meridian.

Wir haben die am Eingange des vorigen § 114. berührte Aufgabe nun nachzuholen, nämlich Berechnung des Meridianbogens m, welcher einem schief gegen den Meridian gelegten Gradmessungs-Bogen s zwischen den Breiten der Endpunkte entspricht. Oder im Anschluss an die nachfolgende Fig. 1. haben wir die Aufgabe, den Meridianbogen m zu berechnen, welcher zwischen denselben Breiten φ_1 und φ_2 liegt, wie ein schief gelegter Bogen $AB = s$, dessen Richtung wenigstens durch *ein* Azimut α bestimmt ist.

Der Bogen s kann unmittelbar gemessen sein, im allgemeinen ist aber anzunehmen, dass dieser Bogen s als lange Diagonale einer Triangulierungskette nach Art von AB in Fig. 2. S. 388 oder Fig. 3. S. 389 berechnet sei, wobei die Haupterstreckung AB nach dem Meridian gerichtet ist. Dabei ist angenommen, dass auch das Azimut α, dessen astronomische Messung nicht geradezu auf die Sicht der Linie s gemacht werden konnte, durch Rechnung auf s bezogen wurde.

Fig. 1.



Hiernach kann man das Ergebnis s mit einem Azimut α (oder mit zwei Azimuten α_1, α_2, nach Fig. 3. S. 571) als geodätische Linie mit geodätischen Azimuten betrachten, und als solche weiter behandeln.

Wir betrachten nun zuerst nach Fig. 1. den einfachen Fall, dass nur *ein* Azimut α gemessen sei; wir wollen dann aber als Erleichterung andererseits annehmen, dass dieses α ziemlich *klein* sei, d. h. dass der Gradmessungs-Bogen s nahezu die Meridianrichtung habe, was ja bei reinen Breitengrad-Messungen von vornherein angestrebt wird.

Zwischen $\varphi_2 - \varphi_1$, s und α besteht eine Beziehung, welche in erster Näherung durch die zwei ersten Glieder von (25) S. 395 ausgedrückt wird, nämlich:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = V^2\left(u - \frac{v^2}{2}\,t\right) \tag{1}$$

Dabei ist nach (22) und (23) S. 394:

$$V^2 = \frac{N}{M} \quad , \quad u = \frac{s}{N}\cos\alpha \quad , \quad v = \frac{s}{N}\sin\alpha \quad , \quad t = tang\,\varphi_1$$

also:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{s}{M}\cos\alpha - \frac{s^2}{2\,MN}\sin^2\alpha\,tang\,\varphi_1$$

Dieselbe Gleichung auf den Meridianbogen m angewendet, giebt mit $\alpha = 0$:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M}$$

Dieses mit der vorhergehenden Gleichung verbunden giebt:

$$m = s\cos\alpha - \frac{s^2}{2N}\sin^2\alpha \operatorname{tang}\varphi_1 + \dots \qquad (2)$$

Für den Quer-Krümmungs-Halbmesser N, der hier als Nenner nur im zweiten Gliede vorkommt, kann man einen abgerundeten Näherungswert nehmen. Wenn das Azimut α ziemlich klein ist, so wird das zweite Glied mit $\sin^2\alpha$ sehr klein, und es ist dann ziemlich gleichgiltig, wie der hiebei nötige Näherungswert N angenommen wird.

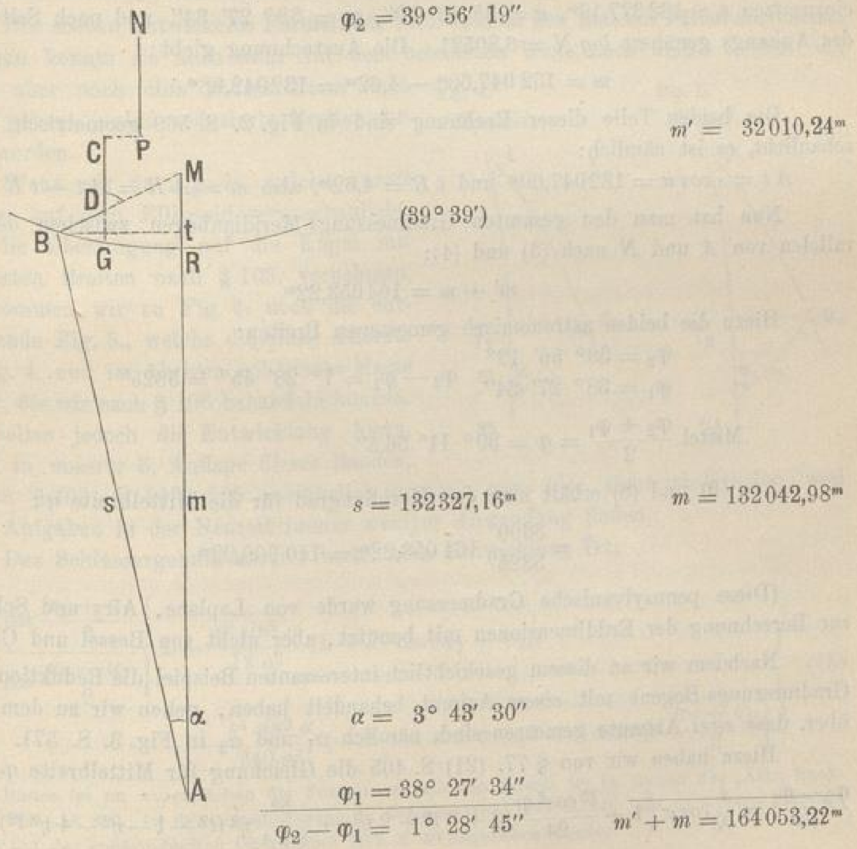
Man könnte die Formel (2) leicht auch noch auf höhere Glieder entwickeln, indem man bei (1) weitere Glieder von (25) S. 395 berücksichtigte; wir wollen das aber hier nicht ausführen, sondern ein einfaches Zahlen-Beispiel vornehmen, bei welchem die Reduktionsformel (2) völlig ausreicht.

Als solches Beispiel soll die durch Einfachheit sich auszeichnende pennsylvanische Gradmessung dienen, welche im vorigen Jahrhundert, 1764—1768, von Mason und Dixon nicht durch Triangulierung, sondern durch unmittelbare Lattenmessung ausgeführt wurde, wie wir schon in der Einleitung S. 6. angegeben haben.

Die Haupt-Zahlenangaben über diese merkwürdige Messung wurden von Prof. J. Howard Gore in Washington in der „Zeitschr. f. Verm. 1888", S. 33—39 mitgeteilt, woraus wir folgendes entnehmen:

Fig. 2.

Pennsylvanische Gradmessung (1764—1768).



Die Hauptmessung erfolgte in der Geraden AB, welche von dem südlichsten Punkte A mit der astronomisch gemessenen Breite $\varphi_1 = 38° \, 27' \, 34''$ unter dem Azimut $\alpha = 3° \, 43' \, 30''$ sich bis zu einem Punkte B erstreckt, dessen Breite nicht astronomisch gemessen ist (39° 39′ durch nachträgliche Interpolation). Dann wurde noch ein gebrochener Zug $B\,D\,C\,P\,N$ hinzugemessen bis zu dem nördlichsten Punkte N, dessen astronomisch gemessene Breite $\varphi_2 = 39° \, 56' \, 19''$ ist.

Als gemessene Längen sind angegeben: erstens die schiefe Hauptlänge $s = 434\,011{,}64$ Fuss und die Summe der zwei unmittelbaren Meridianbögen $GC + PN$ $= 104\,988{,}4$ Fuss. (In Fig. 2. S. 569 soll $B\,G\,R$ den Parallelkreis von B, und $C\,P$ ein kleines Stück des Parallels von C vorstellen.)

Dazu wird angegeben, dass der hier benützte englische Fuss $= \frac{107}{144}$ Pariser Fuss sei, woraus man berechnet 1 Fuss $= 0{,}304\,893\,06$ Meter.

Der heutige englische Fuss ist kleiner, nämlich $= 0{,}304\,797\,27^{m}$. Die in unserer Einleitung S. 7 angegebene Reduktion 434011,64 Fuss = 132 286 Meter beruht auf dem neuen Verhältnis 1 Fuss $= 0{,}304\,79727^{m}$.

Mit dieser Verhältniszahl rechnen wir die beiden mitgeteilten Entfernungen in Meter um, wie auch bei Fig. 2. S. 569 beigeschrieben ist:

$$m' = 104\,988{,}4 \text{ Fuss} = 32\,010{,}24^{m} \text{ und } s = 434\,011{,}64 \text{ Fuss} = 132\,327{,}16^{m} \tag{3}$$

Nun kommt die Hauptaufgabe, welche uns hier beschäftigt, nämlich die schiefe Länge s auf die Meridianlänge zu reduzieren, wozu die Formel (2) dient. Dabei ist einzusetzen $s = 132\,327{,}16^{m}$, $\alpha = 3° \, 43' \, 30''$, $\varphi_1 = 38° \, 27' \, 34''$ und nach Seite [16] des Anhangs genähert $\log N = 6.80521$. Die Ausrechnung giebt:

$$m = 132\,047{,}60^{m} - 4{,}62^{m} = 132\,042{,}98^{m} \tag{4}$$

Die beiden Teile dieser Rechnung sind in Fig. 2. S. 569 geometrisch veranschaulicht, es ist nämlich:

$$A\,t = s \cos \alpha = 132\,047{,}60^{m} \text{ und } t\,R = 4{,}62^{m}, \text{ also } m = A\,R = A\,t - t\,R \tag{5}$$

Nun hat man den gesamten Gradmessungs-Meridianbogen zwischen den Parallelen von A und N nach (3) und (4):

$$m' + m = 164\,053{,}22^{m} \tag{6}$$

Hiezu die beiden astronomisch gemessenen Breiten:

$$\begin{matrix} \varphi_2 = 39° \, 56' \, 19'' \\ \varphi_1 = 38° \, 27' \, 34'' \end{matrix} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 1° \, 28' \, 45'' = 5325'' \tag{7}$$

$$\text{Mittel } \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi = 39° \, 11' \, 56{,}5'' \tag{8}$$

Aus (6) und (8) erhält man den Meridiangrad für die Mittelbreite φ:

$$G = \frac{3600''}{5325''} \, 164\,053{,}22^{m} = 110\,909{,}22^{m} \tag{9}$$

(Diese pennsylvanische Gradmessung wurde von Laplace, Airy und Schubert zur Berechnung der Erddimensionen mit benützt, aber nicht von Bessel und Clarke.)

Nachdem wir an diesem geschichtlich-interessanten Beispiel die Reduktion eines Gradmessungs-Bogens mit *einem* Azimut behandelt haben, gehen wir zu dem Falle über, dass *zwei* Azimute gemessen sind, nämlich α_1 und α_2 in Fig. 3. S. 571.

Hiezu haben wir von § 77. (21) S. 405 die Gleichung für Mittelbreite φ:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{s}{N} \cos \alpha \left(1 + \frac{l^2 \cos^2 \varphi}{24} (2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2) + \frac{b^2}{8\,V^4} \eta^2 (t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2 t^2)\right) \tag{10}$$

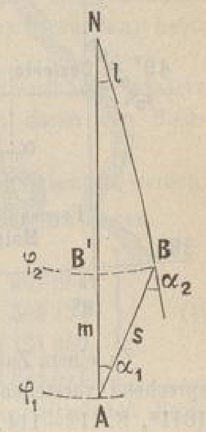
Dieselbe Formel gilt auch für den Meridianbogen m, wenn das mittlere Azimut $\alpha = 0$ und auch der Längenunterschied $l = 0$ gesetzt wird, also:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{V^2} = \frac{m}{N}\left(1 + \quad \cdot\,\cdot \quad + \frac{b^2}{8\,V^4}\,\eta^2\,(t^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\eta^2\,t^2)\right) \qquad (11)$$

Nun giebt die Division von (10) und (11):

$$m = s\cos\alpha\left(1 + \frac{l^2\cos^2\varphi}{24}\,(2 + 3\,t^2 + 2\,\eta^2)\right) \qquad (12)$$

Fig. 3.



Diese Formel kann man unmittelbar anwenden, wenn man für den geographischen Längenunterschied l einen Näherungswert einsetzt und φ als Mittelbreite annimmt (auch in $\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi$).

Man kann jedoch auch in erster Näherung nach (16) § 77. S. 404 setzen:

$$l\cos\varphi = \frac{s}{N}\sin\alpha \qquad (13)$$

Damit giebt (12):

$$m = s\cos\alpha\left(1 + \frac{s^2\sin^2\alpha}{24\,N^2}\,(2 + 3\,t^2 + 2\eta^2)\right) \qquad (14)$$

Für N^2 und η^2 genügen hier irgend welche leicht zu beschaffende Näherungswerte.

Die soeben entwickelte Formel (14) wird wohl in den meisten Fällen ausreichen, und man könnte sie auch wohl auf dem betretenen Wege noch weiter treiben; wir wollen aber noch eine andere Form nach Bessel geben, wobei reduzierte Breiten benützt werden.

Fig. 4. *Ellipsoid.*

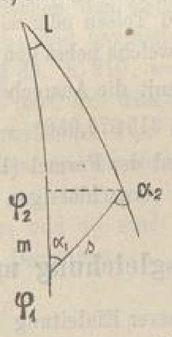
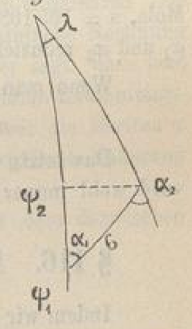


Fig. 5. *Kugel.*



Wenn wir zu Fig. 4., welche unsere Aufgabe auf dem Ellipsoid veranschaulicht, auch die Übertragung auf die Kugel mit reduzierten Breiten nach § 103. vornehmen, so bekommen wir zu Fig. 4. noch die entsprechende Fig. 5., welche dieselben Azimute wie Fig. 4. und im übrigen sphärische Masse enthält, die wir nach § 106 behandeln können. Wir wollen jedoch die Entwicklung hiezu, welche in unserer 3. Auflage dieses Bandes, 1890 in § 103, S. 503—505 ausführlich gegeben war, hier nicht wiederholen, weil solche Aufgaben in der Neuzeit immer weniger Anwendung finden.

Das Schlussergebnis unserer berichteten Entwicklung ist:

$$m = s\,\frac{\cos\dfrac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}}{\cos\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}\left\{1 + \frac{s^2\sin^2\alpha}{12\,a^2}\,(1 + e'^2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)) - \frac{s^4\sin^2\alpha}{240\,a^4}\left(-2 + 3\cos^2\alpha + 5\cos^2 a\tan^2\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\right\} \qquad (15)$$

Dieses ist im wesentlichen die Formel, welche von Bessel im 14. Bande der „Astr. Nachrichten 1837", S. 310, in der „Gradmessung in Ostpreussen" 1838, S. 446 und in General Baeyers „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche" 1862, S. 48 angegeben wurde.

Fig. 6.

Süd-Ende der französisch-spanischen Gradmessung von 1792. Massstab 1 : 10 000 000).

Matas $\varphi_2 = 41° \; 30' \; 29{,}04''$

$\alpha_2 = 11° \; 26' \; 1{,}71''$

$$\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 40° \; 5' \; 12{,}575''$$

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = 11° \, 11' \; 52{,}325''$$

$\alpha_1 = 10° \; 57' \; 42{,}94''$

Mola $\varphi_1 = 38° \; 39' \; 56{,}11''$

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 0° \; 14' \; 9{,}385''$$

Zu einem Zahlen-Beispiel für die Anwendung der Formel (15) nehmen wir entsprechend vorstehender Fig. 6. eine Mitteilung von Bessel „Astr. Nachr., 19. Band, 1841“, S. 112—114, über seine Neuberechnung des südlichen Teiles der alten französisch-spanischen Gradmessung von Dünkirchen bis zu den balearischen Inseln. Der nördliche Punkt Matas liegt an der spanischen Küste bei Barcelona, und der südliche Punkt Mola ist der südlichste Gradmessungspunkt auf der Insel Formentera.

Aus der Triangulierung hat Bessel die geodätische Linie zwischen Matas und Mola, $s = 165\,108{,}586$ Toisen oder $= 321\,802{,}629^{\text{m}}$ berechnet, sowie auch die Azimute α_1 und α_2 reduziert, welche nebst den Breiten φ_1 und φ_2 bei Fig. 6. eingeschrieben sind.

Wenn man damit die Ausrechnung nach der Formel (27) macht, so findet man:

$$m = 315\,678{,}950^{\text{m}} + 2{,}529^{\text{m}} - 0{,}001^{\text{m}} = 315\,681{,}478^{\text{m}}$$

Das letzte Glied der Formel (15) bringt also hier nur 1 Millimeter; dieses Glied wird wohl immer zu vernachlässigen sein.

§ 116. Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen.

Indem wir unserer Einleitung S. 7—10 folgen, kommen wir zu der Bestimmung der Dimensionen des Erd-Ellipsoids aus mehr als zwei Breiten-Gradmessungen, oder zu der Ausgleichung mehrerer Breiten-Gradmessungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Man geht dabei von der Anschauung aus, dass die astronomische Messung der Polhöhen φ verhältnismässig viel ungenauer ist, als die geodätische Messung der Meridianbögen m, denn ein Fehler von $1''$ an der Polhöhe oder Breite φ erzeugt bereits eine Änderung von etwa 31 Meter an dem Meridianbogen m, während der mittlere Fehler der geodätischen Meridianbogen-Messung ein viel geringerer ist.

Allerdings überzeugte man sich bald, dass auch die Messungsfehler der Polhöhen φ nicht genügten zur Erklärung der Widersprüche in den verschiedenen Gradmessungen; allein man behielt doch die Form der Ausgleichungs-Rechnung, wonach die Quadratsumme aller Polhöhen-Änderungen zu einem Minimum gemacht wurde, noch lange bei, obgleich man wusste, dass die Polhöhen-Widersprüche zum grossen Teil gar nicht in Messungsfehlern, sondern in Lotabweichungen ihren Grund haben. Die Methode der kleinsten Quadrate hat bei solcher Anwendung nur die Bedeutung einer empirischen Vermittlung widerstrebender Elemente, und die dabei übrig bleibenden Fehler v geben erste Fingerzeige, an welchen Stellen Lotablenkungen zu suchen sind.

Wir wollen nun einen Teil einer solchen Ausgleichung von Breiten-Gradmessungen vornehmen, und dazu die von Bessel 1837—1841 gesammelten und gesichteten Gradmessungs-Ergebnisse benützen, aus welchen Bessel 1841 seine berühmten, heute noch benützten Erddimensionen (vgl. S. 190) abgeleitet hat.

Wir wollen aber nicht die Besselsche Rechnung selbst hier vorführen, sondern wir wollen nur einige Zahlenwerte derselben herausgreifen, um daran den Rechnungsgang zu zeigen.

Von der französischen Gradmessung sollen folgende 5 Stationen benützt werden:

Station	Polhöhe φ	$\Delta\varphi$	Meridianbogen	
1. Formentera	$\varphi_1 = 38° 39' 56{,}1''$	. .	. .	(1)
2. Barcelona	$\varphi_2 = 41\ 22\ 47{,}9$	$2° 42' 51{,}8''$	$301\,354^m$	
3. Carcassonne	$\varphi_3 = 43\ 12\ 54{,}3$	$4\ 32\ 58{,}2$	$505\,137$	
4. Pantheon	$\varphi_4 = 48\ 50\ 49{,}4$	$10\ 10\ 53{,}3$	$1\,131\,050$	
5. Dünkirchen	$\varphi_5 = 51\ 2\ 8{,}8$	$12\ 22\ 12{,}7$	$1\,374\,572$	

Um die Fehler-Gleichungen für eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen zu erhalten, legen wir die Besselschen Erd-Dimensionen a und e^2 nach § 81. S. 193 zu Grunde, und bestimmen solche Verbesserungen von a und von e^2, welche die Quadratsumme aller an den Polhöhen φ anzubringenden Verbesserungen zu einem Minimum machen.

Dazu müssen wir zuerst Beziehungen zwischen den Polhöhen-Differenzen $\Delta\varphi$ und den zugehörigen Meridianbögen m ermitteln; und um hiebei einfache Rechnung zu haben, verfahren wir nach dem Satze von § 35. S. 210, welcher sagt, dass man einen Meridian-Bogen m als Kreisbogen berechnen darf, mit dem Meridian-Krümmungs-Halbmesser M der Mittelbreite und mit dem Centriwinkel $\Delta\varphi$. Da wir die Breiten φ auf 0,1″, entsprechend 3 Meter, abgerundet haben, so ist die angegebene Näherung zulässig.

Die zwei ersten gemessenen Polhöhen φ_1 und φ_2 sind mit dem dazwischen liegenden Meridianbogen m verbunden durch die Beziehung:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{m}{M}\varrho$$

wobei nach (17) und (15) S. 196 für M die Formel gilt:

$$\frac{1}{M} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} \text{ mit } \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \tag{2}$$

Da die hier vorkommenden Erddimensionen a und e^2 für unsere Ausgleichung die Unbekannten sind, zerlegen wir dieselben in Näherungswerte a_0 und e_0^2 mit zugehörigen Verbesserungen δa und δe^2, d. h. wir setzen:

$$a = a_0 + \delta a \qquad e^2 = e_0^2 + \delta e^2 \tag{3}$$

Wir bezeichnen auch mit M_0 denjenigen Wert von M, welcher durch die Näherungs-Annahmen $a = a_0$ und $e^2 = e_0^2$ entsteht; und demnach entwickeln wir nach dem Taylorschen Satz:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_0} + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{M}\right)\delta a + \frac{\partial}{\partial e^2}\left(\frac{1}{M}\right)\delta e^2 \tag{4}$$

Die beiden hier gebrauchten partiellen Ableitungen der Funktion $\frac{1}{M}$ entwickeln wir nur in erster Näherung, nach (2), mit Vernachlässigung aller Glieder mit e^2:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{M}\right) = -\frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial e^2}\left(\frac{1}{M}\right) - \frac{1}{a}\left(1 - \frac{3}{2}\, sin^2\, \varphi\right) \tag{5}$$

Nun kann man zur Bildung der Fehler-Gleichungen schreiten. Die Gleichung (1), welche wegen der Beobachtungsfehler im allgemeinen nicht erfüllt sein wird, wird dadurch zum Stimmen gebracht, dass den beobachteten φ_1 und φ_2 ihre Verbesserungen v_1 und v_2 zugesetzt werden, also:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m\,\varrho\left(\frac{1}{M}\right) \tag{6}$$

Wenn man hier (4) und (5) einsetzt, so bekommt man:

$$\varphi_2 - \varphi_1 + v_2 - v_1 = m\,\varrho\left\{\frac{1}{M_0} - \frac{\delta\, a}{a^3} + \left(1 - \frac{3}{2}\, sin^2\, \varphi\right)\frac{\delta\, e^2}{a}\right\} \tag{7}$$

Hier darf man in den Gliedern mit $\delta\, a$ und mit $\delta\, e^2$ statt der Unbekannten a, deren Näherungswert a_0 setzen; ja wir wollen sogar, da ohnehin schon alle Glieder mit e^2 in den Coëfficienten von $\delta\, a$ und $\delta\, e^2$ vernachlässigt sind, hier $a = M$, also nach (1) das Produkt $\frac{m\,\varrho}{a} = \frac{m\,\varrho}{M} = \varphi_2 - \varphi_1$ setzen, und damit wird (7):

$$v_2 - v_1 = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0}\,\delta\, a + \left(1 - \frac{3}{2}\, sin^2\, \varphi\right)(\varphi_2 - \varphi_1)\,\delta\, e^2 + \frac{m\,\varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{8}$$

Um bequeme Zahlen zur Rechnung zu bekommen, wollen wir nicht $\delta\, a$ und $\delta\, e^2$ selbst bestimmen, sondern von $\delta\, a$ das Tausendel und von $\delta\, e^2$ das Tausendfache; d. h. wir wollen zwei neue Unbekannte x und y einführen durch die Gleichungen:

$$x = \frac{\delta\, a}{1000} \qquad y = 1000\,\delta\, e^2 \tag{9}$$

Dieses in (8) eingesetzt, wird geben:

$$v_2 - v_1 = a'\,x + b'\,y + l' \tag{10}$$

wobei a', b' und l' folgende Bedeutungen haben:

$$a' = -1000\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{a_0} \qquad b' = +\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1000}\left(1 - \frac{3}{2}\, sin^2\, \varphi\right) \tag{11}$$

$$l' = \frac{m\,\varrho}{M_0} - (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{12}$$

Als Näherungswerte a_0 und e_0^2 nehmen wir die bekannten Besselschen, vom Jahre 1841 nach § 31. S. 193, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 6\,377\,397{,}155^{\mathrm{m}} & log\, a_0 &= 6.804\,6434.6 \\ e_0^2 &= 0{,}006\,674\,372 & log\, e_0^2 &= 7.824\,4104.2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wir werden dadurch die Annehmlichkeit haben, dass unsere Absolutglieder l' in (12) geradezu gleich den Besselschen endgiltigen $v_2 - v_1$ u. s. w. werden; doch wollen wir hier davon zunächst keinen Gebrauch machen, sondern die Anwendung der Formeln (10), (11), (12) an den zwei ersten Werten der Tabelle (1) von S. 573 zeigen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Formentera} \quad \varphi_1 = 38^\circ\, 39'\, 56{,}1'' \\ &\text{Barcelona} \quad \varphi_2 = 41^\circ\, 22'\, 47{,}9'' \qquad m = 301\,354^{\mathrm{m}} \\ &\qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \ \ 2^\circ\, 42'\, 51{,}8'' = 9771{,}8'' \\ &\qquad \text{Mittel } \varphi = 40^\circ \ \ 1'\, 22{,}0'' \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Damit man nach den Formeln (11) sofort berechnen:

$$a' = -1{,}532 \qquad b' = +3{,}709 \tag{15}$$

Auch die Berechnung von l nach (12) hat keine Schwierigkeit, indem dabei M_0 derjenige Wert ist, welcher den Werten a_0 und e_0^2 von (13) entspricht, d. h.:

$$M_0 = \frac{a_0\,(1 - e_0^2)}{(1 - e_0^2\,sin^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad , \; log\,M_0 = 6.803\,5358 \tag{16}$$

Indessen können wir wohl auch den günstigen Umstand ausnützen, dass die a_0 und e_0^2 von (13) die bekannten Bessel schen sind, welche auch unseren Hilfstafeln S. [8]—[29] des Anhangs zu Grunde liegen; und wir können daher, statt nach (16) $log\,M_0$ auszurechnen, dasselbe auch von Seite [18] des Anhangs entnehmen, oder lieber noch sofort von Seite [19]:

für $\varphi = 40°\ 1'\ 22''$ $\quad log\,[1] = log\,\dfrac{\varrho}{M_0}$	8.510 8893	
hiezu von (14) $log\,m = log\,301\,354$	5.479 0770	
$log\,\dfrac{m\,\varrho}{M_0}$	3.989 9663	$\dfrac{m\,\varrho}{M_0} = 9771{,}6''$

$$\begin{aligned} \text{hiezu von (14)}\quad \varphi_2 - \varphi_1 &= 9\,771{,}8'' \\ \text{also}\qquad l' &= \;-0{,}2'' \end{aligned} \tag{17}$$

Nimmt man dieses mit (15) zusammen, so hat man die erste Gleichung von der Form (10):

$$v_2 - v_1 = -1{,}53\,x + 3{,}71\,y - 0{,}2'' \tag{18}$$

Nachdem wir so die Aufstellung einer Gleichung mit Ausrechnung der Coëfficienten und des Absolutgliedes in aller Ausführlichkeit gezeigt haben, werden wir das Ergebnis der Berechnung für die 4 übrigen, welche zu den bei (1) angegebenen französischen Gradmessungen gehören, kurz anschreiben.

Fehlerdifferenz-Gleichungen.

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{Formentera-Barcelona} & v_2 - v_1 = & -1{,}53\,x + 3{,}71\,y - 0{,}2'' \\ \quad\;\text{„}\qquad\text{-Carcassone} & v_3 - v_1 = & -2{,}57\,x + 5{,}83\,y - 1{,}4 \\ \quad\;\text{„}\qquad\text{-Pantheon} & v_4 - v_1 = & -5{,}75\,x + 10{,}36\,y - 2{,}1 \\ \quad\;\text{„}\qquad\text{-Dünkirchen} & v_5 - v_1 = & -6{,}98\,x + 11{,}31\,y + 1{,}2 \end{array}\right\} \tag{19}$$

Ähnliche Gleichungsgruppen entstehen auch für alle anderen Gradmessungen, Bessels Ausgleichung hat im Ganzen 10 solcher Gleichungsgruppen mit zusammen $38 - 10 = 28$ solcher Gleichungen, wie aus unserer Zusammenstellung von § 1. S. 9 unten zu ersehen ist, wozu wir aber bemerken, dass schon in der Gruppe (1) nur 5 Stationen aufgenommen sind, während nach S. 9 die Zahl der französischen Stationen 7 ist; wir haben deren 2 weggelassen.

Die Gleichungen (19) sind keine Fehler-Gleichungen in dem gewöhnlichen Sinne, weil in jeder Gleichung zwei Verbesserungen v auftreten. Die Trennung der v geschieht dadurch, dass man für jede Gradmessung eine Polhöhen-Verbesserung v selbst als Unbekannte einführt. Der Fall ist ganz entsprechend der Ausgleichung geodätischer Richtungsmessungen, wo man auch für jeden Satz von Messungen eine Nullpunkts-Korrektion als Unbekannte einführen muss.

Auf diese Weise entstehen aus den 4 Gleichungen (19) folgende 5 wirkliche Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{llrrr} v_1 = v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_2 = v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -1{,}53\,x & +\ 3{,}71\,y & -0{,}2'' \\ v_3 = v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -2{,}57\,x & +\ 5{,}83\,y & -1{,}4'' \\ v_4 = v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -5{,}75\,x & +10{,}36\,y & -2{,}1'' \\ v_5 = v_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & -6{,}98\,x & +11{,}31\,y & +1{,}2'' \end{array}\right\} \quad (20)$$

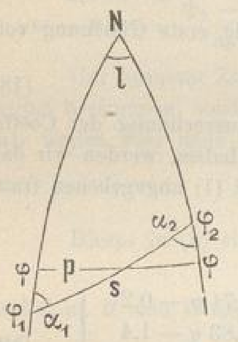
Jede der 10 Gradmessungen giebt eine solche Gruppe von Fehlergleichungen, und da jede Gradmessung eine besondere Unbekannte v hereinbringt, wie z B. v_1 in der Gruppe (20), so überblickt man, dass die Zahl aller Umbekannten $= 10 + 2$ sein muss, nämlich die 10 besonderen v und dann die 2 eigentlichen Unbekannten x und y.

Nun steht nichts im Wege, die zugehörigen 12 Normalgleichumgen zu bilden, aus denen man die 10 Hilfsunbekannten v so rasch als möglich eliminieren wird.

Da der Gang der Ausgleichung hierdurch genügend klar gemacht ist, wollen wir dabei abbrechen. Eine ausführlichere, auf die ganze Ausgleichung mit 6 Gradmessungen in Europa und mit zusammen 20 Stationen sich erstreckende Berechnung war in unserer 3. Auflage dieses Bandes 1890, § 104. S. 507—516, enthalten.

§ 117. Längen-Gradmessung.

Fig. 1.



Wenn man eine Triangulierungskette in der Haupterstreckung von West nach Ost anlegt, und die beiden Endpunkte durch eine astronomische Längen-Bestimmung verbindet, so erhält man eine Längen-Gradmessung.

Während in früherer Zeit, namentlich im vorigen Jahrhundert, wegen der grossen Unsicherheit der astronomischen Längen-Bestimmungen, diese Form der Gradmessung wenig Bedeutung hatte, ist jetzt, seit die elektro-telegraphischen Zeitübertragungen nahezu die Genauigkeit der Breitenmessungen erreicht haben, das Verhältnis ein anderes geworden, und die Längen-Gradmessungen sind jetzt den Breiten-Gradmessungen nahezu gleichberechtigt.

Um die Theorie der Längen-Gradmessung in ihren Grundzügen zu behandeln, brauchen wir nur die Gleichung (16) § 77. S. 404 für Mittelbreite φ vorzuführen:

$$l \cos \varphi = S \sin \alpha \left\{1 + \frac{S^2}{24}\left(\sin^2 \alpha\, t^2 - \cos^2 \alpha\,(1 + \eta^2 - 9\,\eta^2 t^2)\right)\right\} \quad (1)$$

Dabei ist noch (1a) S. 403, da $N = c : V$ die Bedeutung von S diese:

$$S = \frac{s}{c}\, V = \frac{s}{c}\sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{und} \quad t = \operatorname{tang} \varphi \quad (2)$$

dazu auch
$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \qquad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad (3)$$

Ausser dem astronomischen Längenunterschied l und dem geodätischen Bogen s sind auch noch die Breiten φ_1, φ_2 und die Azimute α_1, α_2 durch Messung zu bestimmen (vgl. Fig. 1.). Wenn die Messung unter niederen Breiten (in der Nähe des Äquators) stattfindet, braucht φ nicht sehr genau zu sein, und wenn der Bogen s wesentlich west-östliche Erstreckung hat (α nahezu $= 90°$), braucht α nicht sehr genau zu sein.

Die Ausrechnung nach der Formel (1) hat die Bedeutung einer Reduktion der geodätischen Linie s auf den Parallelkreis der Mittelbreite φ, und diese Reduktion spielt hier dieselbe Rolle wie die Reduktion einer Breiten-Gradmessung auf den Meridian, die wir in § 115. ausführlich für sich behandelt haben.

Wir denken nun die Reduktion nach (1) ausgeführt, und wir setzen zur Abkürzung:

$$s \sin \alpha \left\{1 + \left(\frac{s}{c} V\right)^2 \left(\sin^2 \alpha\, t^2 - \cos^2 \alpha \,(1 + \eta^2 - 9\, \eta^2 t^2)\right)\right\} = p \tag{4}$$

Dann ist nach (1) und (2):

$$l \cos \varphi = \frac{p}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{5}$$

Hier erscheint der Parallelbogen p in gleicher Weise als gemessene Grösse wie der Meridianbogen m bei den Breiten-Gradmessungen.

Nun sollen zwei solcher Messungen p vorliegen, nämlich ausser (5) auch noch entsprechend:

$$l' \cos \varphi' = \frac{p'}{c} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) kann man die beiden Unbekannten e'^2 und c bestimmen; wir schreiben hiebei zur Abkürzung:

$$\frac{p\, l' \cos \varphi'}{p'\, l \cos \varphi} = q \tag{7}$$

Dann wird:

$$e'^2 = \frac{1 - q^2}{q^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi'} \tag{8}$$

Dann mit Probe aus (5) und (6):

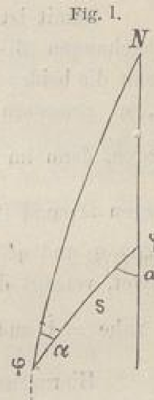
$$c = \frac{p}{l \cos \varphi} \sqrt{1 + e'^2 \cos \varphi} = \frac{p'}{l' \cos \varphi'} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi'} \tag{9}$$

Diese Gleichungen (7), (8), (9) sind ganz entsprechend den früheren für zwei Breiten-Gradmessungen gefundenen Gleichungen in § 114.

§ 118. Azimut-Übertragung.

Nachdem wir gesehen haben, dass die Excentricität der Meridian-Ellipse durch zwei Breiten-Gradmessungen bestimmt werden kann, und dass dieselbe Aufgabe auch durch zwei Längen-Gradmessungen gelöst wird, ist drittens noch zu zeigen, dass auch zwei Azimut-Messungen mit den zugehörigen Breiten und mit einer Triangulierungs-Verbindung, zur Bestimmung der Excentricität der Meridian-Ellipse führen.

Fig. 1.



Azimut-Messungen sind auch schon bei den Breiten-Gradmessungen und bei den Längen-Gradmessungen mit benützt worden, aber mehr nur als *Hilfs*-Messungen, zur Reduktion der gemessenen Bögen auf den Meridian oder rechtwinklig zum Meridian; dagegen bei der dritten Aufgabe, die wir nun vorhaben, sind die Azimute gerade die Hauptwerte der Messung.

Wenn man nach Andeutung von Fig. 1. die beiden Breiten φ, φ' und die beiden Azimute α, α' gemessen hat, so kann man zwischen diesen 4 Grössen einerseits, und der Excentrizität der Meridian-Ellipse andererseits, eine Beziehung herstellen durch Vermittlung der reduzierten Breiten.

Bezeichnen wir die reduzierten Breiten mit ψ und ψ', so ist nach (11) § 103. S. 519:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{V\sqrt{1-e^2}} \qquad \cos\psi' = \frac{\cos\varphi'}{V'\sqrt{1-e^2}} \tag{1}$$

oder:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi\sqrt{1+e'^2}}{V} \qquad \cos\psi' = \frac{\cos\varphi'\sqrt{1+e'^2}}{V'} \tag{1a}$$

Die reduzierten Breiten ψ und ψ' geben mit den Azimuten α und α' nach (1) § 104. S. 524 die Gleichung:

$$\cos\psi\sin\alpha = \cos\psi'\sin\alpha' \tag{2}$$

Dieses in Verbindung mit (1a) giebt:

$$\left(\frac{\cos\varphi'\sin\alpha'}{\cos\varphi\sin\alpha}\right)^2 = \frac{V'^2}{V^2} = \frac{1+e'^2\cos^2\varphi'}{1+e'^2\cos^2\varphi}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{\cos\varphi'\sin\alpha'}{\cos\varphi\sin\alpha} = q \tag{3}$$

so wird:

$$e'^2 = \frac{1-q^2}{q^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} \tag{4}$$

Damit hat man auch:

$$1+e'^2 = \frac{\sin^2\varphi' - q^2\sin^2\varphi}{q^2\cos^2\varphi - \cos^2\varphi'} = \frac{1}{1-e^2} \tag{5}$$

Man hat also in (3)—(5) abermals ein Gleichungs-System von derselben Form wie bei zwei Breiten-Gradmessungen in § 114 und bei zwei Längen-Gradmessungen in § 117.

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Trunz} & \varphi' = 54°\ 13'\ 11{,}466'' & \alpha' = 67'\ 26'\ 56{,}156'' \\ \text{Berlin} & \varphi = 52°\ 30'\ 16{,}680'' & \alpha = 62'\ 31'\ 15{,}416'' \end{array}\right\} \tag{6}$$

Wenn man diese (6) in die Formeln (3), (4) und (5) einsetzt, so bekommt man:

$$\log q^2 = 9.999\,9152{\cdot}63 \quad , \quad e'^2 = \frac{0{,}000\,195\,095}{0{,}370\,440\,0839 - 0{,}341\,846\,755} \tag{7}$$

$$\log e'^2 = 7.833\,981 \quad , \quad \log(1+e'^2) = \log\frac{1}{1-e^2} = 9.997\,0468 \tag{8}$$

Damit ist die Excentricität der Meridian-Ellipse bestimmt. Man sieht aus den Gleichungen (3) und (4) unmittelbar, dass das ganze Verfahren unbrauchbar wird, wenn die beiden Punkte, in welchen die Breiten φ, φ' und die gegenseitigen Azimute α, α' gemessen werden, entweder auf demselben Meridian oder auf gleicher Breite liegen, denn im Meridian ist $\alpha = \alpha' = 0$, also $q = \frac{0}{0}$; und wenn $\varphi' = \varphi$ ist, so muss wegen (1) und (2), auch $\alpha' = \alpha$ werden, also wieder $q = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt. Auch wenn φ und φ' beide klein sind, d. h. die Messung in der Nähe des Äquators stattfindet, versagt die Methode, weil dann α und α' sehr wenig verschieden sind, also q nahe $= 1$ und e'^2 nahezu $= \frac{0}{0}$.

Hiernach ist das Verfahren anwendbar in höheren Breiten mit Erstreckung schief zum Meridian.

Wenn ausser den astronomischen Messungs-Ergebnissen φ, φ', α, α' auch die Länge s der verbindenden geodätischen Linie bekannt ist, so kann man auch die Erdaxe bestimmen.

Wir können hiezu die Gleichung (17) § 106. S. 533 benützen, nämlich mit Einsetzung von S nach (10) S. 532:

$$\sigma\sqrt{1-e^2} = \frac{s}{c}\,V\left\{1 - \frac{\eta^2}{24}\left(2\left(\frac{s}{c}\,V\sin\alpha\right)^2 t^2 + \left(\frac{s}{c}\,V\cos\alpha\right)^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 6\,\eta^2 t^2)\right)\right\}$$

Hier ist nach (9) S. 189 $c\sqrt{1-e^2} = a$, also giebt vorstehende Gleichung, mit Zusetzung des nötigen ϱ:

$$a = s\,V\frac{\varrho}{\sigma}\left\{1 - \frac{\eta^2}{24}\left(2\left(\frac{s}{c}\,V\sin\alpha\right)^2 t^2 + \left(\frac{s}{c}\,V\cos\alpha\right)^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 6\,\eta^2 t^2)\right)\right\} \tag{9}$$

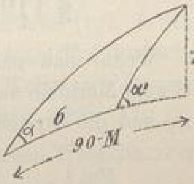
Es kommt also nur noch darauf an, σ zu berechnen, und das ist eine rein sphärische Aufgabe, welche mit Hilfe der Fig. 2. bzw. der ausführlicheren Fig. 2. in § 105. S. 525 gelöst wird.

Als Vorbereitung hiezu berechnet man die beiden reduzierten Breiten ψ und ψ', wobei der zuvor in (5) und (7) ermittelte Excentricitätswert e bzw. e' zu benützen ist.

$$tang\,\psi = \sqrt{1-e^2}\,tang\,\varphi \quad , \quad tang\,\psi' = \sqrt{1-e^2}\,tang\,\varphi' \tag{10}$$

Nun hat man in dem sphärischen Dreieck von Fig. 2. vier Stücke gegeben, nämlich ψ, ψ', α, α''; die Berechnung von σ ist also nicht bloss bestimmt, sondern sogar überbestimmt, wodurch eine Rechenprobe entsteht, denn die reduzierten Breiten ψ und ψ' nach (10) beruhen auf derjenigen Excentricität e bzw. e', welche in (3)—(5) aus den 4 Grössen φ, φ', α, α' selbst abgeleitet worden ist. Würde also die Rechenprobe bei der Doppelbestimmung von σ nicht stimmen, so könnte der Grund entweder in der sphärischen Rechnung nach Fig. 2. oder aber auch in der vorhergehenden Berechnung der reduzierten Breiten nach (10) liegen.

Fig. 2.
(entsprechend Fig. 2. S. 525.)



Die zu der genannten sphärischen Berechnung von σ nach Fig. 2. nötigen Formeln können wir von § 105. S. 526 entnehmen; wir wollen dabei zwei Werte M einführen, den ersten zu ψ und α gehörig, den zweiten zu ψ' und α' gehörig, dann ist:

$$\sigma = M' - M \tag{11}$$

Für M und M' hat man nach (2) S. 526:

$$tang\,M = \frac{tang\,\psi}{\cos\alpha} \quad , \quad tang\,M' = \frac{tang\,\psi'}{\cos\alpha'} \tag{12}$$

Aus (12) und (11) hat man bereits das gewünschte σ. Die dazu gehörige, oben erwähnte Rechenprobe kann man auf verschiedene Art erlangen, z. B. durch Vermittlung des Bogens m, welcher für M und M' derselbe ist. Nach (2) und (3) S. 526 ist:

$$\sin m = \cos\psi\,\sin\alpha = \cos\psi'\,\sin\alpha'$$

dann:

$$\sin M = \frac{\cos m}{\sin\psi} \quad , \quad \sin M' = \frac{\cos m}{\sin\psi'} \tag{13}$$

Damit hat man die zweite Bestimmung von M und M', als Versicherung für (12). Wenn aber M und M' erheblich grösser als 45° sind, so sind die Bestimmungen (13) nicht günstig; dann rechnet man lieber:

$$cotg\,\lambda_1 = tang\,M\,sin\,m \quad , \quad cotg\,\lambda_2 = tang\,M'\,sin\,m$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda$$

$$sin\,\sigma = \frac{sin\,\lambda\,cos\,\psi'}{sin\,\alpha} = \frac{sin\,\lambda\,cos\,\psi}{sin\,\alpha'} \tag{14}$$

Die Anwendung dieser Formeln auf unser Beispiel (6) giebt:

Trunz	$\psi' = 54°\ 7'\ 38{,}6482''$	$\alpha' = 67°\ 26'\ 56{,}152''$
Berlin	$\psi = 52°\ 24'\ 37{,}8514''$	$\alpha = 62°\ 31'\ 15{,}416''$

$$M = 70°\ 26'\ 40{,}0950'' \qquad M' = 74°\ 29'\ 58{,}3496''$$

$$M' - M = \sigma = 4°\ 3'\ 18{,}2546'' \quad , \quad m = 32°\ 45'\ 50{,}2488'' \tag{15}$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda = 6°\ 8'\ 45{,}6806'' \quad , \quad \sigma = 4°\ 3'\ 18{,}2548'' \tag{16}$$

Die beiden Werte σ nach (15) und (16) stimmen unter sich hinreichend; wir haben mit dem Mittel $\sigma = 4°\ 3'\ 18{,}2547''$ weiter gerechnet, und damit aus (9) erhalten:

$$log\,\eta^2 = 7.385\,5669 \quad , \quad log\,V^2 = 0.001\,0593.6$$

$$a = 6\,380\,516{,}074^{m} - 9{,}543^{m} + 0{,}448^{m} = 6\,380\,506{,}979^{m} \quad , \quad log\,a = 5.804\,8551 \cdot 88 \tag{17}$$

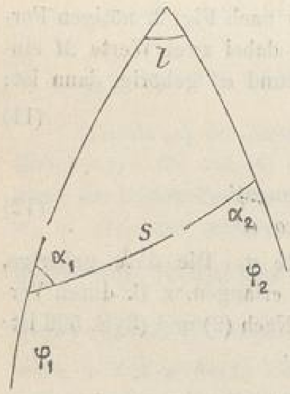
Die Korrektionsglieder von (9) haben also hier nur $9{,}5^{m}$ und $0{,}4^{m}$ ausgemacht, woraus zugleich zu ersehen ist, dass keine Wiederholung der Rechnung nötig ist wegen des in (9) vorläufig benützten $c = a\sqrt{1 + e'^2}$.

Der Grundgedanke, die Excentricität der Meridian-Ellipse aus einer Gradmessung schief zum Meridian zu bestimmen, ist zuerst von J. Tobias Mayer erfasst worden, wie aus „Astr. Nachr. 13. Band, 1836", S. 353, hervorgeht. Die erste Ausführung dieses Gedankens haben wir in der „Gradmessung in Ostpreussen" von Bessel, welcher in der Vorrede S. V—VI seines Werkes über diese Gradmessung Tobias Mayer citiert.

§ 119. Gradmessung schief zum Meridian.

Wenn man nach Fig. 1. eine geodätische Linie s (bzw. eine Dreieckskette) schief zum Meridian anlegt, am Anfangspunkt und am Endpunkt derselben die Azimute α_1, α_2 und die Breiten φ_1, φ_2 und endlich noch den Längenunterschied l astronomisch misst, so hat man alles das, was wir bisher als Breiten-Gradmessung, Längen-Gradmessung und Azimut-Übertragung getrennt behandelt haben, nun vereinigt; und da eine schiefe geodätische Linie mit Azimuten und Breiten an den Endpunkten nach § 118. hinreicht zur Bestimmung der Ellipsen-Dimensionen, so haben wir in der Vereinigung der 6 genannten Messungen bereits eine über das unmittelbare Bedürfnis hinausgehende Bestimmung der Erddimensionen.

Fig. 1



Man kann sich dieses auch so klar machen: Ein sphärisches Dreieck von der Form Fig. 1. ist seiner Form nach bestimmt durch 3 Stücke, z. B. durch φ_1, φ_2, l; um auch den Halbmesser zu bestimmen, auf welchem das sphärische Dreieck liegen soll, braucht man ein viertes Stück, s linear gemessen. Geht man über zu einem Ellipsoid, auf welchem das Dreieck Fig. 1. liegen soll, so tritt eine weitere Unbekannte auf in der Excentricität, so dass nun 5 Messungsstücke erforderlich werden. Wenn also in Fig. 1. im ganzen 6 Stücke gemessen sind, so ist auch für das Ellipsoid noch *eine* Messung überschüssig, oder man hat es mit einer Ausgleichung zu thun.

Wie gewöhnlich wird diese Ausgleichung dadurch behandelt, dass man Näherungswerte der Erddimensionen einführt, und durch Differentiieren Beziehungen herstellt zwischen Verbösserungen jener Näherungswerte einerseits und Änderungen der beobachteten Grössen andererseits.

Man überblickt auch sofort, dass man *mehrere* solcher Systeme, wie das in Fig. 1. dargestellte, in eine Gesamtausgleichung zusammenfassen kann.

Dieses ist der Grundgedanke der heutigen internationalen Erdmessung. Eine wichtige Rolle spielen dabei die Lotabweichungen, von welchen wir im nächsten Kapitel XII noch das Nötigste behandeln werden.

Kapitel XII.

Lotabweichungen.

§ 120. Allgemeines über Lotabweichungen.

Anknüpfend an das, was wir schon in der Einleitung S. 11 über den Begriff der Lotabweichungen und des Geoids erwähnt haben, gehen wir nun zu näherer Betrachtung der Lotabweichungen über.

Wenn wir bei unseren Triangulierungen die unmittelbar gemessenen Grundlinien auf die Höhe des Meeres, (bzw. auf Normal-Null) reduzieren (vgl. S. 67), so legen wir damit unseren Messungen und Berechnungen eine ideale Erdoberfläche zu Grunde, welche, in erster Näherung, mit der Oberfläche der Weltmeere zusammenfallend, und unter den Kontinenten stetig fortgesetzt, angenommen wird.

Wenn wir ferner bei unseren geodätischen und astronomischen Winkelmessungen die vertikale Axe der Instrumente durch die Wasserwage einstellen, und die so erhaltenen Messungen in üblicher Weise weiter rechnerisch behandeln, so nehmen wir die durch die Wasserwage bestimmte Schwere-Richtung als geometrische Normale jener idealen Erdoberfläche an, und führen für diese Fläche ein Umdrehungs-Ellipsoid von gewissen Dimensionen in die Rechnung ein.

Nun haben aber schon die ersten zusammenfassenden Berechnungen der Gradmessungen ergeben, dass jene ideale Erdoberfläche nicht genau ein Ellipsoid ist, und man kann durch eine einfache physikalische Betrachtung zeigen, dass die ideale Erdoberfläche, welche wir den geodätischen Messungen und Berechnungen zu Grunde legen, kein Ellipsoid sein kann, weil auch die physische Erdoberfläche mit ihren Bergen und Thälern, Kontinenten und Meeren, selbst nicht ellipsoidisch ist.

Die Schwerkraft, welche auf einen Punkt (bzw. ein Massen-Element) an der Erdoberfläche einwirkt, ist die Resultante der Anziehungen, welche alle einzelnen Massenteile des Erdkörpers auf den Punkt ausüben, in Verbindung mit der Einwirkung der Centrifugalkraft.

Zwischen zwei Massenteilen m_1 und m_2, welche sich im Abstand r von einander befinden, besteht eine Anziehung, welche proportional $\frac{m_1\, m_2}{r^2}$ ist.