



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

Kapitel XII. Lotabweichungen.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](#)

Wie gewöhnlich wird diese Ausgleichung dadurch behandelt, dass man Näherungswerte der Erddimensionen einführt, und durch Differentieren Beziehungen herstellt zwischen Verbesserungen jener Näherungswerte einerseits und Änderungen der beobachteten Größen andererseits.

Man überblickt auch sofort, dass man *mehrere* solcher Systeme, wie das in Fig. 1. dargestellte, in eine Gesamtausgleichung zusammenfassen kann.

Dieses ist der Grundgedanke der heutigen internationalen Erdmessung. Eine wichtige Rolle spielen dabei die Lotabweichungen, von welchen wir im nächsten Kapitel XII noch das Nötigste behandeln werden.

## Kapitel XII.

### Lotabweichungen.

#### § 120. Allgemeines über Lotabweichungen.

Anknüpfend an das, was wir schon in der Einleitung S. 11 über den Begriff der Lotabweichungen und des Geoids erwähnt haben, gehen wir nun zu näherer Betrachtung der Lotabweichungen über.

Wenn wir bei unseren Triangulierungen die unmittelbar gemessenen Grundlinien auf die Höhe des Meeres, (bzw. auf Normal-Null) reduzieren (vgl. S. 67), so legen wir damit unseren Messungen und Berechnungen eine ideale Erdoberfläche zu Grunde, welche, in erster Näherung, mit der Oberfläche der Weltmeere zusammenfallend, und unter den Kontinenten stetig fortgesetzt, angenommen wird.

Wenn wir ferner bei unseren geodätischen und astronomischen Winkelmessungen die vertikale Axe der Instrumente durch die Wasserwaage einstellen, und die so erhaltenen Messungen in üblicher Weise weiter rechnerisch behandeln, so nehmen wir die durch die Wasserwaage bestimmte Schwere-Richtung als geometrische Normale jener idealen Erdoberfläche an, und führen für diese Fläche ein Umdrehungs-Ellipsoid von gewissen Dimensionen in die Rechnung ein.

Nun haben aber schon die ersten zusammenfassenden Berechnungen der Gradmessungen ergeben, dass jene ideale Erdoberfläche nicht genau ein Ellipsoid ist, und man kann durch eine einfache physikalische Betrachtung zeigen, dass die ideale Erdoberfläche, welche wir den geodätischen Messungen und Berechnungen zu Grunde legen, kein Ellipsoid sein kann, weil auch die physische Erdoberfläche mit ihren Bergen und Thälern, Kontinenten und Meeren, selbst nicht ellipsoidisch ist.

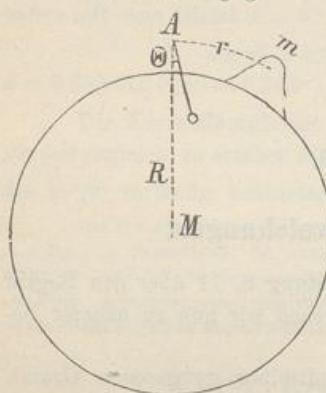
Die Schwerkraft, welche auf einen Punkt (bzw. ein Massen-Element) an der Erdoberfläche einwirkt, ist die Resultante der Anziehungen, welche alle einzelnen Massenteile des Erdkörpers auf den Punkt ausüben, in Verbindung mit der Einwirkung der Centrifugalkraft.

Zwischen zwei Massenteilen  $m_1$  und  $m_2$ , welche sich im Abstand  $r$  von einander befinden, besteht eine Anziehung, welche proportional  $\frac{m_1 m_2}{r^2}$  ist.

In Fig. 1. unten, ist die Erde kugelförmig angenommen, und über die kugelförmige Erdoberfläche soll eine Gebirgsmasse  $m$  hervorragen. Wenn es sich um Bestimmung der Lotrichtung in einem ausserhalb der kugelförmigen Erdoberfläche liegenden Punkte  $A$  handelt, so kann man die ganze Masse der Erde im Erdmittelpunkt konzentriert annehmen. (Der Beweis für die Zulässigkeit dieser Annahme lässt sich in elementarer Weise aus der Definition der Gravitation herleiten.) Es sei nun  $M$  die Masse der Erde und  $m$  die Masse eines Gebirges, dann bekommt man für einen Punkt  $A$ , dessen horizontaler Abstand von dem Schwerpunkt des Gebirges =  $r$  ist, eine durch das Gebirge erzeugte Lotabweichung  $\Theta$ , entsprechend der Gleichung:

$$\tan \Theta = \frac{m}{r^2} : \frac{M}{R^2} = \frac{m R^2}{M r^2} \quad (1)$$

Fig. 1.  
Lotabweichung  $\Theta$ .



Das Volumen der Erde ist  $\frac{4}{3} \pi R^3$ , und wenn  $\gamma$  die mittlere Dichte der Erde ist, so hat man die Masse der Erde:

$$M = \frac{4}{3} \gamma \pi R^3 \quad (2)$$

Das Volumen des Gebirges sei  $V$ , dessen Dichte sei  $\delta$ , dann ist die Gebirgs-Masse:

$$m = V \delta \quad (3)$$

Aus (1), (2) und (3) findet man die Lotabweichung  $\Theta$  als kleinen Winkel:

$$\Theta = \frac{3}{4} \frac{\delta}{\gamma} \frac{V}{R r^2} \frac{\varrho}{\pi} \quad (4)$$

Nach Listing „Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers“, aus den „Nachr. der Königl. Gesellsch. der Wissensch., Göttingen 1878“, S. 61, ist die mittlere Dichte der Erde:  $\gamma = 5,63$ ; der mittlere Erdhalbmesser ist in runder Zahl (nach S. 225):  $R = 6\,370\,000^m$ . Setzt man dieses in (4) ein, so erhält man:

$$\Theta = 0,001373 \frac{V \delta}{r^2} \text{ in Sekunden} \quad (5)$$

Dabei ist  $V$  das Volumen des Gebirges in Kubikmetern und  $r$  die Entfernung in Metern zu nehmen.

Als Beispiel nehmen wir die summarische Schätzung des Einflusses des nördlichen Schwarzwaldes mit dem Zentralpunkt Hornisgrinde auf die meridionale Lotrichtung in Durlach. Das Volumen dieses Gebirgsstocks stellt sich ungefähr dar als Produkt von  $65\,000^m$  Breite,  $43\,000^m$  Länge und  $800^m$  Höhe; die mittlere Entfernung von Durlach mag  $r = 46\,000^m$  angenommen werden und die Dichte  $\delta = 2,3$  (bunter Sandstein und Granit). Mit diesen Zahlen bekommt man aus (5):

$$v = 3,3''$$

Durch eine ähnliche Überschlagsrechnung bekommt man für den südlichen Schwarzwald  $1,0''$  und für die schwäbische Alb  $1,6''$  zusammen  $5,9''$ .

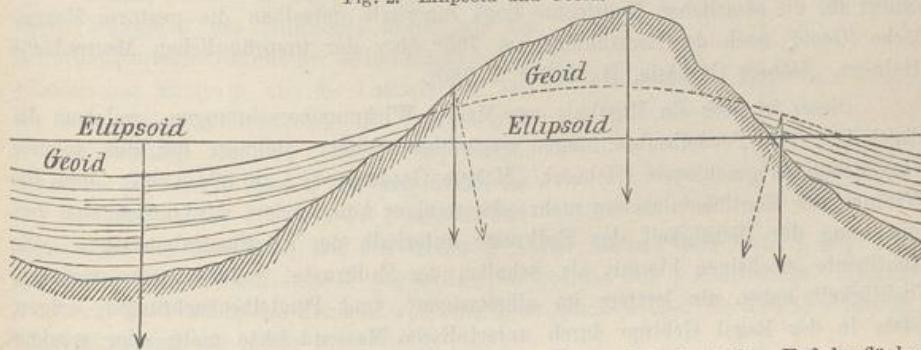
In dieser Weise kann man mit Sicherheit schliessen, dass die sichtbaren Ungleichheiten der Massenverteilung an der Erdoberfläche erhebliche Lotablenkungen im Vergleiche mit den Lotrichtungen eines mittleren Ellipsoids erzeugen müssen, d. h. Lotablenkungen, welche bei den Mittelgebirgen  $5''$ — $10''$  betragen, und bei Hochgebirgen bis  $1'$  steigen müssen.

Ausser den sichtbaren Ungleichheiten der Massenverteilung an der Oberfläche der Erde giebt es aber auch Massen-Ungleichheiten unterhalb der Erdoberfläche, welche nicht durch geometrische Volumen-Berechnung bestimmt werden können.

#### *Das Geoid.*

Nachdem erkannt ist, dass die Schwerkraft-Richtungen im allgemeinen nicht mit den Ellipsoid-Normalen zusammenfallen, kommt man zu der Annahme einer anderen krummen Fläche, welche von allen Schwerkraft-Richtungen rechtwinklig geschnitten wird, und in Hinsicht der Höhenlage sich der physischen Erdoberfläche möglichst anpasst. Diese Fläche nennt man das Geoid (nach Listing, vgl. Einleitung S. 11).

Fig. 2. Ellipsoid und Geoid.



In vorstehender Fig. 2. ist die gegenseitige Lage der physischen Erdoberfläche, eines mittleren Ellipsoide und des Geoids in grob schematischer Weise dargestellt. Die Linie für das Ellipsoid ist gerade gezogen, insofern es sich nur um einen kleinen Teil der Erdoberfläche handeln soll und die Zeichnung nur dazu dient, die realitiven Krümmungen zwischen dem mittleren Ellipsoid und dem Geoid zu veranschaulichen.

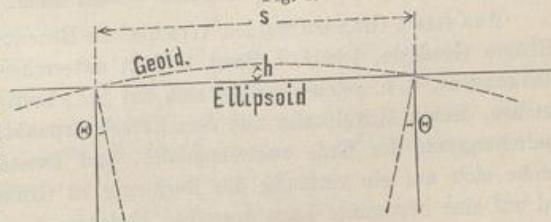
Die ausgezogenen Pfeillinien stellen die geometrischen Normalen des Ellipsoide, und die punktierten Pfeillinien stellen die physikalischen Lotlinien vor, welche rechtwinklig zur Geoidfläche sind. Der kleine Winkel zwischen einer Ellipsoid-Normalen und der Schwerkraft-Richtung ist die Lotablenkung; fällt die Schwerkraft-Richtung mit der Ellipsoid-Normalen zusammen, wie in Fig. 1. über der Wasserfläche und in der Höhe des Berges angenommen ist, so ist die Lotablenkung gleich Null.

#### *Die Geoid-Falten.*

Wenn nur die sichtbaren Massen-Ungleichheiten wirksam sind, so kann man z. B. in dem einfachen Falle von Fig. 2., wo ein Gebirge zwischen zwei Meeren angenommen ist, sofort sagen, dass unter dem Gebirge das Geoid über das mittlere Ellipsoid emporgehoben, und über den Meeren das Geoid unter das Ellipsoid gesenkt sein muss.

Um zu schätzen, wie hoch oder wie tief die Falten zwischen dem Geoid und einem mittleren Ellipsoid etwa sein werden, denken wir nach Andeutung von Fig. 3. eine solche Falte von kreisförmigem Profil mit einer Lotablenkung  $\Theta$  am Anfang und am Ende, auf eine Erstreckung  $s$ , so wird die Höhe  $h$  als Pfeilhöhe eines flachen

Fig. 3.



Kreisbogens vom Centriwinkel  $2\varTheta$  mit der Sehne oder Bogenlänge  $s$  für einen Halbmesser  $r$ , woraus folgt:

$$r = \frac{s}{2\varTheta}, \quad \text{also } h = \frac{1}{2r} \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}s\varTheta \text{ bzw. } = \frac{1}{4}s \frac{\varTheta}{\varrho}.$$

Nehmen wir  $s = 100\,000^m$  und  $\varTheta = 10''$ , so gibt dieses  $h = 1,2^m$ .

Im Mittel-Gebirge handelt es sich bei den Geoid-Falten immer nur um Höhen von einigen Metern. So giebt das Geoid des Harzes nur Höhen von  $1^m$ — $2^m$  gegen das Ellipsoid (s. Helmert, „Höhere Geodäsie, I, 1880“, S. 570).

Viel grössere Erhebungen und Vertiefungen der Geoid-Falten ergeben sich bei der Massenwirkung ganzer Kontinente gegenüber weniger dichten Oceanen. Im Durchschnitt für die sämtlichen Kontinente liegt innerhalb derselben die gestörte Meeresfläche (Geoid) nach der Berechnung um  $700^m$  über der ursprünglichen Meeresfläche (Helmert, „Höhere Geodäsie, II., 1884“, S. 356).

Dieses ist aber ein Ergebnis aus Massen-Wirkungsberechnungen, welchem die Ergebnisse von Pendelbeobachtungen gegenüber stehen. Helmert hat aus solchen Vergleichungen geschlossen (Helmert, „Höhere Geodäsie, II.“, S. 364—365), „dass die Wirkung der Kontinentalmassen mehr oder weniger kompensiert wird durch eine Veränderung der Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinentalmassen“. „Die Kontinente erscheinen hiermit als Schollen der Erdkruste, welche etwas geringere Dichtigkeit haben als letztere im allgemeinen“, und Pendelbeobachtungen zeigen, „dass in der Regel Gebirge durch unterirdische Massendefekte mehr oder weniger kompensiert sind“.

Hieraus folgt, dass die Höhe der Geoid-Falten eine geringere ist, als die Verteilung zwischen Wasser und Land nach der schematischen Darstellung von Fig. 2. S. 583 vermuten lässt.

#### *Lotablenkung und Lotabweichung.*

Durch astronomisch-geodätische Hilfsmittel kann man immer nur *Differenzen* von Lotablenkungen, oder relative Lotablenkungen bestimmen, aus zwei Gründen: Erstens braucht man zu der Berechnung die Annahme eines Vergleich-Ellipsoids (z. B. des Besselschen Ellipsoïdes), und das ist eine innerhalb ziemlich weiter Grenzen willkürliche Annahme, und je nachdem man ein Ellipsoid zur Vergleichung annimmt, bekommt man verschiedene Lotablenkungen.

Ausserdem braucht man zu Lotablenkungs-Berechnungen irgend einen festen Ausgangspunkt, z. B. hat das geodätische Institut hiefür den Punkt Rauenberg bei Berlin. Nun geben alle Berechnungen nur die Vergleichung der Lotablenkungen anderer Punkte mit der Lotablenkung des Ausgangspunktes, welche selbst unbekannt, zuweilen schlechthin gleich Null gesetzt, oder dem negativen Mittel aller anderen Ablenkungen entsprechend angenommen werden kann.

Aus diesen Gründen werden verschiedene Benennungen eingeführt; nach Helmert („Höhere Geodäsie, 1880“, I. Band, S. 514) unterscheiden wir erstens: absolute „Lotablenkungen“, d. h. solche, welche sich auf das günstigste mittlere Vergleichs-Ellipsoid beziehen, dessen Mittelpunkt mit dem Erdschwerpunkt, und dessen kleine Axe mit der Umdrehungsaxe der Erde zusammenfällt, und zweitens relative „Lotabweichungen“, welche sich auf ein vorläufig der Rechnung zu Grunde gelegtes Vergleichs-Ellipsoid und auf eine bestimmte Lage derselben beziehen.

### § 121. Bestimmung der Lotabweichung durch Vergleichung astronomischer und geodätischer Messungen.

Die Lotabweichung ist der Winkel, welchen die physikalische Lotlinie eines Punktes mit der entsprechenden Ellipsoid-Normalen bildet.

Wir wollen zuerst den einfachen Fall der Lotabweichung im Meridian behandeln, d. h. wir wollen annehmen, dass die Lotlinie von der Ellipsoid-Normalen abweicht, aber in der Ebene des Ellipsoid-Meridians sich befindet.

Dieser Fall ist in Fig. 1. dargestellt. In einem Punkte  $J$  des Ellipsoids haben wir die Ellipsoid-Normale  $JZ$  mit der ellipsoidischen oder geodätischen Breite  $\varphi$ , und die Lotlinie  $JZ'$  mit der astronomischen Breite  $\varphi'$ . Die Lotlinie  $JZ'$  ist rechtwinklig auf der Geoidfläche, welche durch die punktierte Linie  $GJG'$  angedeutet ist. Der Winkel  $\xi$  zwischen  $JZ$  und  $JZ'$  ist die Lotabweichung im Meridian, und wir wollen  $\xi$  positiv zählen, wenn, wie in Fig. 1. angenommen ist, die Lotlinie  $JZ'$  gegen den Nordpol hin von  $JZ$  abweicht. Man sagt in diesem Falle auch, die Zenit-Abweichung  $\xi$  ist nördlich oder die Lot-Abweichung  $\xi$  ist südlich, und wir haben hiefür nach Fig. 1.:

$$\xi = \varphi' - \varphi \quad (1)$$

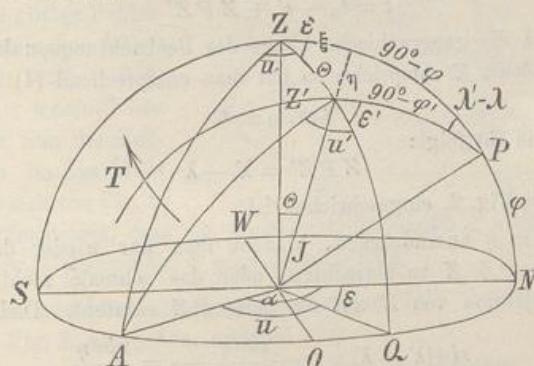
Die Lotabweichung im allgemeinen, d. h. nicht nur im Meridian, kann in zweierlei Weise bestimmt werden: Erstens giebt man die absolute Lotabweichung  $\Theta$  und ihr Azimut  $\epsilon$  an, oder zweitens bestimmt man die beiden Komponenten  $\xi$  und  $\eta$  der Lotabweichung nach Norden und Osten, dieselben sind:

$$\xi = \Theta \cos \epsilon \quad \eta = \Theta \sin \epsilon \quad (2)$$

Diese zwei Gleichungen, welche nach dem Vorhergehenden wohl unmittelbar zu verstehen sind, werden wir auch wieder bestätigt finden durch die nachfolgende Fig. 2., zu welcher wir nun übergehen.

Fig. 2.

$Z$  = Geodätisches Zenit, dem Ellipsoid entsprechend,  $\varphi$  = geodätische (ellipsoidische) Breite.  
 $Z'$  = Astronomisches Zenit, dem Geoid entsprechend,  $\varphi'$  = astronomische Breite (Polhöhe).



In Fig. 2. S. 585 sei  $Z$  das geodätische Zenit und  $Z'$  das astronomische Zenit.  $P$  ist der Pol, welcher zu beiden Zeniten in Beziehung steht.  $J$  ist ein Punkt der Erdoberfläche, auf welchem geodätische und astronomische Beobachtungen gemacht werden. Durch astronomische Beobachtungen soll die Polhöhe  $\varphi'$ , die geographische Länge  $\lambda'$ , und ein Azimut  $\alpha'$  bestimmt werden, und es handelt sich um die Auffindung von Beziehungen zwischen diesen Größen  $\varphi'$ ,  $\lambda'$ ,  $\alpha'$  und den entsprechenden geodätischen Werten  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ , welche man erhalten haben würde, wenn das Zenit nicht in  $Z'$  sondern in  $Z$  befindlich wäre.

### I. Lotabweichung in Breite, $\xi$ .

Die meridionale Komponente  $\xi$  der Lotabweichung ist leicht zu bestimmen.

Das Komplement der Polhöhe ist immer gleich dem Bogen zwischen dem Pol und dem Zenit, also  $ZP = 90^\circ - \varphi$ ,  $Z'P = 90^\circ - \varphi'$ , wie auch bereits in Fig. 2. eingeschrieben ist.

Da nun das Dreieck  $PZZ'$  bei  $Z'$  nur die kleine Ordinate  $\eta$  hat, kann man die Projektion  $\xi$  der Seite  $ZZ' = v$  hinreichend genau als Differenz der beiden Seiten  $PZ$  und  $PZ'$  annehmen, also:

$$\begin{aligned} \xi &= (90^\circ - \varphi) - (90^\circ - \varphi') \\ \text{oder} \quad \xi &= \varphi' - \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

Dieses ist wieder dieselbe Gleichung, die wir schon bei (1) unmittelbar gefunden haben.

### II. Lotabweichung in Länge, $\eta \sec \varphi$ .

Bei Vergleichung der geographischen Längen hat man zu beachten, dass alle astronomischen Längen-Bestimmung auf Ortszeit-Bestimmung beruht. Wenn  $\lambda'$  die astronomisch bestimmte geographische Länge des Punktes  $J$  ist, bezogen auf einen westlich von  $J$  liegenden Anfangspunkt  $J_0$  (z. B. Ferro, Paris, Greenwich), so heisst das so viel als: Ein Gestirn  $T$ , welches in  $J_0$  zur Zeit  $t_0$  kulminiert, kulminiert in  $J$  zur Zeit:

$$t' = t_0 - \lambda' \quad (4)$$

Diese Kulmination findet statt beim Durchgang des Gestirns durch den Deklinationskreis  $PZ'$ ; dagegen der Durchgang durch den Deklinationskreis  $PZ$ , welcher dem geodätischen Zenit angehört, erfolgt später, und zwar um den Winkelbetrag  $ZPZ'$ ; oder die geodätische Kulmination erfolgt zur Zeit:

$$t = t_0 - \lambda' + ZPZ' \quad (4a)$$

Wenn nun  $\lambda$  die geographische Länge des Beobachtungspunktes  $J$  ist, welche dem geodätischen Zenit  $Z$  entspricht, so hat man entsprechend (4):

$$t = t_0 - \lambda \quad (5)$$

Aus (4a) und (5) folgt:  $ZPZ' = \lambda' - \lambda$  (6)

wie auch bereits in Fig. 2. eingeschrieben ist.

Um  $\lambda' - \lambda$  in  $\eta$  auszudrücken, braucht man nur wieder das schmale langgestreckte Dreieck  $PZ'Z$  zu betrachten, oder das schmale rechtwinklige Dreieck, welches durch Projektion von  $Z'$  auf die Seite  $PZ$  entsteht. Dadurch erhält man:

$$\sin(\lambda' - \lambda) = \frac{\sin \eta}{\sin(90^\circ - \varphi')} = \frac{\sin \eta}{\cos \varphi'}$$

Da hier  $\lambda' - \lambda$  und  $\eta$  beide klein sind, und auch  $\varphi'$  sich von  $\varphi$  nur wenig unterscheidet, kann man aus der vorstehenden Gleichung bilden:

$$\lambda' - \lambda = \eta \sec \varphi \quad (7)$$

### III. Lotabweichung im Azimut, $\eta \tan \varphi$ .

Bei astronomischer Azimutmessung handelt es sich um den Horizontalwinkel zwischen der Richtung nach dem Pol  $P$  und der Richtung nach einem geodätischen Zielpunkt, der in Fig. 2. im Horizonte liegend als Punkt  $A$  angenommen sei. Die astronomische Azimutmessung wird daher den Winkel am astronomischen Zenit  $Z'$  geben, welcher in Fig. 2. als eine Summe  $\epsilon' + u'$  bezeichnet ist. Dabei war die vertikale Theodolit-Axe nach dem astronomischen Zenit  $Z'$  oder nach der physikalischen Lotlinie  $JZ'$  gerichtet, und das Messungs-Ergebnis  $\epsilon' + u'$  ist von der Lotabweichung beeinflusst.

Wenn wir andererseits dasjenige Azimut kennen lernen wollen, welches man ohne Lotabweichung erhalten haben würde, d. h. das geodätische Azimut, so muss man die vertikale Theodolit-Axe nach dem geodätischen Zenit  $Z$  gerichtet denken, und damit erhält man das Azimut, welches bei  $Z$  als eine Summe  $s+u$ , und in der Horizontal-Ebene bei  $J$  als ein Winkel  $\alpha = s+u$  dargestellt ist. Zur Vergleichung haben wir also nun:

$$\text{Geodätisches Azimut} \quad g \equiv \xi + u \quad (8)$$

$$\text{Astronomisches Azimut } \alpha' = \xi' + u' \quad (9)$$

$$\text{Differenz } \alpha - \alpha' \equiv (\varepsilon - \varepsilon') + (u - u') \quad (10)$$

Von diesen beiden Teilen  $\varepsilon - \varepsilon'$  und  $u - u'$  ist der zweite Teil  $u - u'$  immer sehr klein und meist zu vernachlässigen, wenn der geodätische Zielpunkt  $A$  im Horizonte selbst liegt, oder wenigstens nur einen kleinen Höhen- oder Tiefenwinkel hat.

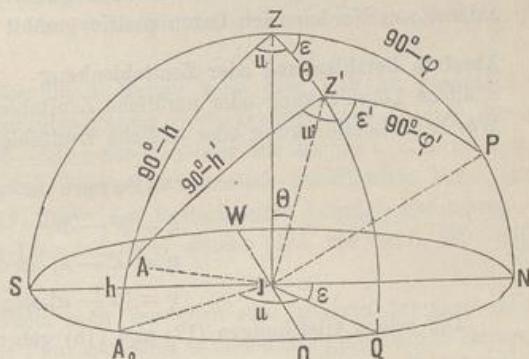
Die Differenz  $u - u'$  ist zu vergleichen dem Fehler einer Horizontal-Winkelmessung, der dadurch entsteht, dass die Theodolitaxe nicht genau vertikal, sondern etwas schief gestellt wird.

Die hiefür geltige Fehler-  
Formel haben wir schon früher  
(Band II, 4. Aufl. 1895, S. 203)  
entwickelt, im wesentlichen  
ebenso, wie wir nun die Ent-  
wicklung machen, im Anschluss  
an Fig. 3., welche sich von Fig. 2.  
nur dadurch unterscheidet, dass der geodätische Zielpunkt  $A$  nicht mehr im Horizont,  
sondern mit einem Höhenwinkel  $h$  angenommen wird.

Indem wir nun eine Cotang-Gleichung von § 27, S. 164 auf das sphärische Dreieck  $Z_1 Z_2 Z_3$  anwenden erhalten wir:

$$\cot \alpha (90^\circ - b) \sin \theta = \cos \theta \cos u + \sin u \cot g (180^\circ - u') \quad (11)$$

Fig. 3.



Indem man  $\Theta$  als klein behandelt, erhält man:

$$\Theta \tan h = \cos u - \sin u \cot g u'$$

$$\Theta \tan h = \frac{\cos u \sin u' - \sin u \cos u'}{\sin u} = \frac{\sin(u' - u)}{\sin u'}$$

also:  $u' - u = \Theta \sin u \tan h$  (12)

Wenn der Höhenwinkel  $h$  klein ist, wie es bei geodätischen Zielpunkten gewöhnlich der Fall ist, so ist  $\Theta \tan h$  eine kleine Grösse zweiter Ordnung, welche wir vernachlässigen, oder besonderer Berücksichtigung vorbehalten.

Es bleibt also noch der erste Teil der Formel (10), d. h.  $\epsilon - \epsilon'$  zu untersuchen, und hiezu machen wir eine ganz ähnliche Entwicklung wie soeben (11) — (12), nochmals in Bezug auf das sphärische Dreieck  $ZZ'P$ .

Wir nehmen also wieder eine Cotang-Gleichung von § 27. S. 164 und finden durch deren Anwendung auf das Dreieck  $ZZ'P$ :

$$\cot(90^\circ - \varphi) \sin \Theta = \cos \Theta \cos \epsilon + \sin \epsilon \cot(180^\circ - \epsilon')$$

$$\Theta \tan \varphi = \cos \epsilon - \sin \epsilon \cot \epsilon'$$

$$\Theta \tan \varphi = \frac{\cos \epsilon \sin \epsilon' - \sin \epsilon \cos \epsilon'}{\sin \epsilon'} = \frac{\sin(\epsilon' - \epsilon)}{\sin \epsilon'}$$

also:  $\epsilon' - \epsilon = \Theta \sin \epsilon \tan \varphi$  (13)

Statt der absoluten Lotabweichung  $\Theta$  kann man hier auch die Quer-Komponente  $\eta = \Theta \sin \epsilon$  einführen, und indem wir mit der bei (12) besprochenen Vernachlässigung wieder die Azimut-Differenz  $\alpha - \alpha'$  selbst betrachten, haben wir:

$$\alpha' - \alpha = \eta \tan \varphi$$
 (14)

#### Zusammenfassung der Grundformeln für Lotabweichung.

##### Bezeichnungen.

|   | Geodät.    | Astron.    |  |
|---|------------|------------|--|
| Geographische Breite oder Polhöhe                         | $\varphi$  | $\varphi'$ |  |
| Geographische Länge von Westen nach Osten positiv gezählt | $\lambda$  | $\lambda'$ |  |
| Azimut von Norden nach Osten positiv gezählt              | $\alpha$   | $\alpha'$  |  |
| Absolute Lotablenkung oder Zenitablenkung                 | $= \Theta$ |            |  |
| Südliche Lotablenkung oder nördliche Zenitablenkung       | $= \xi$    |            |  |
| Westliche Lotablenkung oder östliche Zenitablenkung       | $= \eta$   |            |  |

##### Formeln.

$$\xi = \varphi' - \varphi$$
 (16)

$$\eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi$$
 (17)

$$\eta = (\alpha' - \alpha) \cot \varphi$$
 (18)

Die beiden Gleichungen (17) und (18) geben die Kontroll-Gleichung:

$$\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda) \sin \varphi$$
 (19)

Zur Bestimmung der Lotabweichung  $\xi$  im Meridian giebt es nur ein Mittel, nämlich nach (16) die Vergleichung astronomischer und geodätischer Breiten. Dagegen für die Querabweichung  $\eta$  kann man nach (17) und (18) die Längen-Vergleichung  $\lambda' - \lambda$  oder die Azimut-Vergleichung  $\alpha' - \alpha$  benützen; oder hat man beides, so ergibt sich eine sehr erwünschte Probe, entsprechend der Gleichung (19).

Diese Gleichung (19)  $\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda) \sin \varphi$  heisst Laplace sche Gleichung; dieselbe ist sehr wichtig, weil sie eine Beziehung gibt zwischen den beiden aus Lotablenkung entstandenen Differenzen  $\alpha' - \alpha$  und  $\lambda' - \lambda$ , ohne dass die Lotablenkungsbeträge  $\xi$  und  $\eta$  selbst bekannt zu sein brauchen.

Wir wollen den Sinn dieser Gleichung nochmals mit geodätischer Anwendung zurechtlegen: Von einem Punkte  $O$  ohne Lotablenkung geht eine geodätische Linie nach einem Punkte  $J$  (in Fig. 3. S. 587) und es wird Länge und Azimut von  $A$  nach  $J$  geodätisch übertragen mit den Ergebnissen  $\lambda$  und  $\alpha$ . Diese Übertragung wollen wir als fehlerfrei annehmen, und wenn nun im Punkt  $J$  auch astronomisch fehlerfrei gemessen wird, und keine Lotablenkung stattfindet, so müssten wieder die Werte  $\lambda$  und  $\alpha$  erhalten werden. Wegen der in  $J$  stattfindenden Lotablenkung wird aber astronomisch  $\lambda'$  und  $\alpha'$  gemessen, und dazu besteht die Laplace sche Probe  $\alpha' - \alpha = (\lambda' - \lambda) \sin \varphi$ .

Es besteht also eine Probe für die geodätischen Übertragungen von Azimut und Länge, unabhängig von den Lotablenkungen.

Dieses ist nur eine summarische Erläuterung des Wesens der Laplace schen Gleichung, deren nähere Betrachtung an die zwei letzten Gleichungen der Gruppe (6) im folgenden § 122. S. 592 anzuschliessen wäre.

## § 122. Astronomisch-geodätisches Netz.

Um die Bedeutung eines astronomisch-geodätischen Netzes zunächst im ganzen zu erklären, wollen wir nochmals zurück schauen auf das rein geodätische Netz der Preussischen Landesaufnahme, welches in § 102. mit der Zeichnung auf S. 520—521 vorgeführt worden ist. Dort war nur ein Zentralpunkt, Berlin, astronomisch nach Breite, Länge und Azimut bestimmt, und daran hängt die ganze astronomische Orientierung des Netzes.

Im Gegensatz hiezu betrachten wir in Fig. 1. S. 590 das astronomisch-geodätische Netz, welches dem „Arbeitsplane des geodätischen Institutes für das nächste Dezennium“, Berlin 1886, entnommen ist. (Abgedruckt in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1886, S. 497—506.)

Die geraden Verbindungslinien dieses Netzes kann man sich als geodätische Linien denken, welche als Repräsentanten ganzer Dreiecksketten etwa in dem Sinne von § 72. Fig. 2. und Fig. 3. S. 388—389 auftreten; oder wir können z. B. annehmen, dass die Verbindung Leipzig—Brocken in dem astronomisch-geodätischen Netze aus den Dreiecken von § 102. S. 520—521 längs den Dreiecksseiten Leipzig—Petersberg—Kyffhäuser—Brocken als geodätische Linie berechnet worden sind, wie auf S. 389—390 gezeigt wurde.

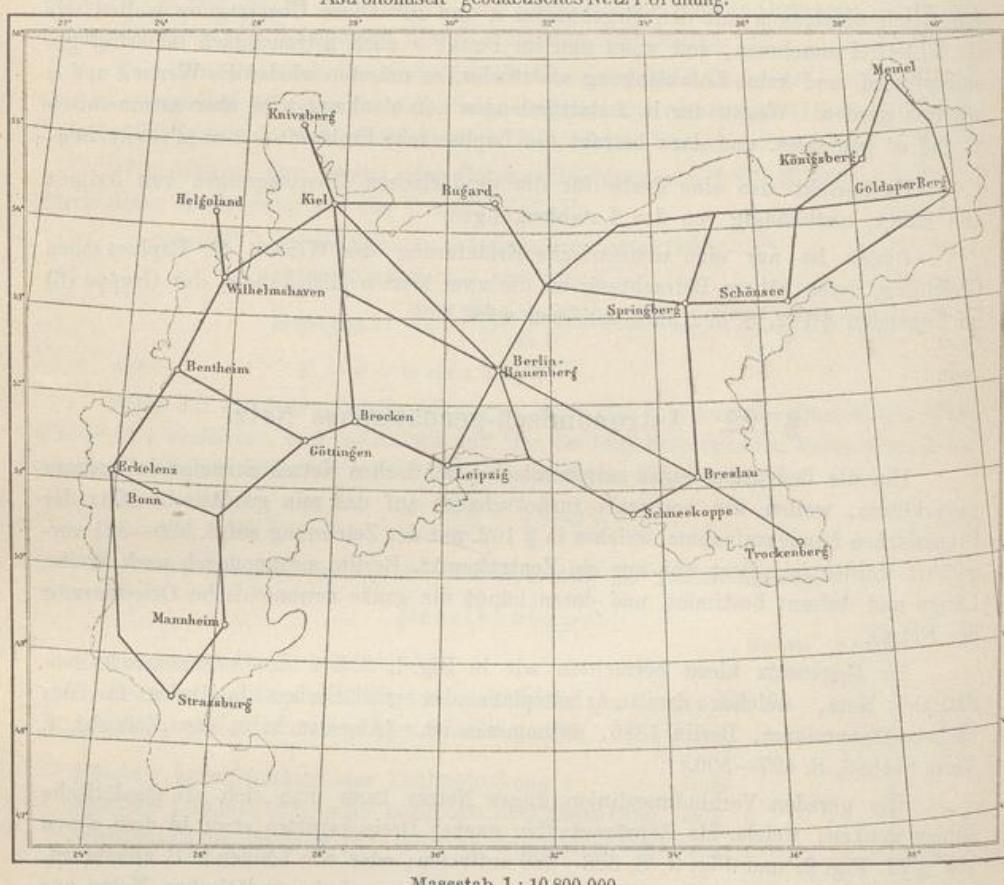
Mag das nun im einzelnen Falle nach der einen oder anderen Art geschehen sein; wir können annehmen, dass alle Punkte unseres astronomisch-geodätischen Netzes, jeder für sich nach geographischer Breite, geographischer Länge und mit Azimuten astronomisch bestimmt, und dass alle diese Punkte unter sich durch geodätische Linien verbunden seien. Nun bestehen ausser den rein geodätischen Bedingungen in unserem Netze die Laplaceschen Gleichungen, welche wir am Schlusse von § 121. oben kennen gelernt haben, und dadurch kann eine Ausgleichung des Netzes viel schärfer gemacht werden, als nach den geodätischen Bedingungen allein möglich wäre.

Denken wir uns ein Netz von der Art der Fig. 1. mit  $p$  Punkten und  $s$  Linien, und nehmen wir an, jede Linie sei geodätisch hin und her nach Richtungen beobachtet, so hat unter Voraussetzung einer gemessenen Seite  $s$  das Netz verschiedene geodätische Bedingungsgleichungen, deren Anzahl nach unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 176 ist:

$$2s = 3p + 4 \quad (1)$$

Fig. 1

## Astronomisch - geodätisches Netz I Ordnung.



Dabei sind aber die geodätischen Linien selbst nicht als gemessene Größen gezählt, sondern nur *eine* davon als Basis, und wenn die übrigen  $s - 1$  Linien als lineare Messungen eingeführt werden, so kommt zu (1) noch die Zahl  $s - 1$  hinzu und wir haben dann:

$$2s - 3p + 4 + s - 1 = 3s - 3(p-1) \text{ geodätische Bedingungen} \quad (2)$$

Dazu kommen für  $s$  Linien noch  $s$  Laplacesche Gleichungen, indem wir annehmen, es sei jede Linie am Anfang und am Ende mit astronomischem Azimut gemessen und der geographische Längenunterschied zwischen den Endpunkten der Linie sei astronomisch-telegraphisch bestimmt. Also noch  $s$  Laplacesche Gleichungen zu (2) hinzugenommen giebt:

### 4 s - 3 (p - 1) astronomisch-geodätische Gleichungen (3)

Z. B. unser astronomisch-geodätisches Netz von Fig. 1. hat  $p = 31$  Punkte und  $s = 42$  Linien, wobei auch alle die Punkte, an welchen Brechung stattfindet, ohne dass ein Name beigesetzt wäre, als Punkte unter der Zahl  $p = 31$  genommen sind. Also  $s = 42$  und  $p = 31$  giebt nach (3):

$$168 - 90 = 78 \text{ Gleichungen zu Fig. 1} \quad (4)$$

Man wird also eine Correlatenausgleichung mit 78 Normalgleichungen zu machen haben, wobei als Beobachtungsgrößen sowohl die linearen geodätischen Linien als auch die astronomischen Breiten-, Längen- und Azimut-Messungen auftreten (und als Azimutdifferenzen zugleich die geodätischen Winkel). Welche Annahmen von mittleren Fehlern a priori für alle diese Messungen zu machen, oder welche Messungsgewichte einzuführen sind, das ist eine Sache, welche für sich auf Grund des vorhandenen Materials zu entscheiden ist (z. B. geodätisch nach den Betrachtungen unseres früheren § 24. S. 154—157).

Obgleich hiemit eine solche astronomisch-geodätische Netzausgleichung nach ihrem Grundgedanken beschrieben ist und obgleich wir hier nicht viel weiter hierin gehen können, mag es doch am Platze sein, die Aufstellung der Gleichungen noch etwas näher zu betrachten, auf Grund des Werkes von Helmert: „Veröffentlichung des königl. Preussischen Geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft I. Berlin 1886“ und Helmert: „Höhere Geodäsie I. S. 279—296“ mit Benützung unserer früheren Behandlung dieser Sache in der 3. Auflage dieses Bandes 1890, S. 539—549.

Fig. 2. Kugel mit reduzierten Breiten.

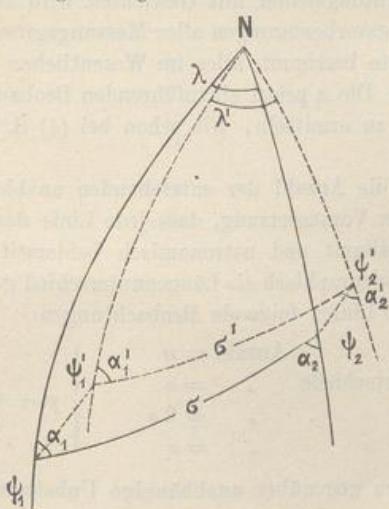
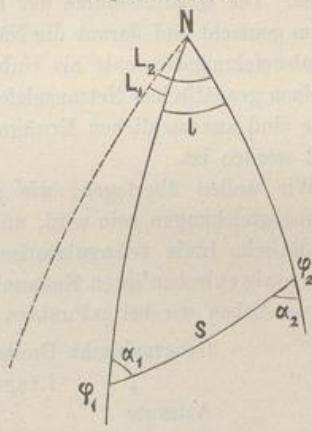


Fig. 3. Ellipsoid.



Hiezu nehmen wir ein geodätisches Polar-Dreieck in Fig. 2. sphärisch mit reduzierten Breiten und in Fig. 3. sphäroidisch; d. h. wir wollen die Theorien von Kap. IX, § 106. benützen.

Das erste ist die Aufstellung von sphärischen Differentialformeln zwischen den Breitenänderungen  $\psi'_1 - \psi_1 = d\psi_1$  und  $\psi'_2 - \psi_2 = d\psi_2$  den Längenänderungen  $\lambda' - \lambda = d\lambda$  und den Azimutänderungen  $\alpha'_1 - \alpha_1 = d\alpha_1$  und  $\alpha'_2 - \alpha_2 = d\alpha_2$ , alles bezogen auf Fig. 2. Diese Differentialformeln erhält man durch Differentieren sphärisch-trigonometrischer Formeln (in ähnlicher Weise wie z. B. bei Mond-Distanzen vorkommt). Die Ergebnisse sind:

$$\left. \begin{aligned} d\psi_2 &= \cos \lambda d\psi_1 + \cos \alpha_2 d\sigma - \sin \alpha_2 \sin \sigma d\alpha_1 \\ d\lambda &= \sin \lambda \tan \psi_2 d\psi_1 + \frac{\sin \alpha_2}{\cos \psi_2} d\sigma + \frac{\cos \alpha_2 \sin \sigma}{\cos \psi_2} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 &= \sin \lambda \sec \psi_2 d\psi_1 + \sin \alpha_2 \tan \psi_2 d\sigma + \cos \lambda \cos \varphi_1 \sec \psi_2 d\alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diese Gleichungen müssen auf das Ellipsoid übertragen werden, was am besten nach unserem § 106. geschieht und in erster Näherung giebt:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi_2 &= \cos l d\varphi_1 + V^3 \cos \alpha_2 \frac{ds}{c} - V^2 \sin \alpha_2 \sin S d\alpha_1 \\ dL_2 - dL_1 = dl &= \frac{\sin l \sin \varphi_2}{V^2 \cos \varphi_2} d\varphi_1 + V \frac{\sin \alpha_2}{\cos \varphi_2} \frac{ds}{c} + \frac{\cos \alpha_2 \sin S}{\cos \varphi_2} d\alpha_1 \\ d\alpha_1 &= \frac{\sin l}{\cos \varphi_2} d\varphi_1 + V \frac{\sin \alpha_2 \sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} \frac{ds}{c} + \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \cos l d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dabei ist  $S = \frac{s}{N} = \frac{s}{c} V$ , und es bezieht sich  $V$  auf die Mittelbreite  $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ .

Weiter wollen wir in der Formelentwicklung nicht gehen; es mag genügen, einzusehen, dass es möglich ist, lineare Gleichungen zwischen den 6 Differentialen  $d\varphi_1, d\varphi_2, d\alpha_1, d\alpha_2, dl, ds$  aufzustellen, auf welche dann eine Ausgleichung gepründet werden kann.

Es wird nämlich nun diesen Differentialen die Bedeutung untergelegt teils von Beobachtungsfehlern und von Näherungsverbesserungen, teils auch von Lotabweichungseinflüssen. Die Quadratsumme der Beobachtungsfehler mit Gewichten wird zu einem Minimum gemacht und daraus die Näherungsverbesserungen aller Messungsgrössen und die Lotabweichungselemente als Unbekannte bestimmt, alles im Wesentlichen wie bei einer reinen geodätischen Netzausgleichung. Die a priori einzuführenden Beobachtungsgewichte sind aus sachlichen Erwägungen zu ermitteln, wie schon bei (4) S. 591 angedeutet worden ist.

Wir wollen überlegen, wie gross die Anzahl der entstehenden unabhängigen Bedingungsgleichungen sein wird, unter der Voraussetzung, dass jede Linie des Netzes als geodätische Linie triangulatorisch bestimmt und astronomisch beiderseits durch Azimute sowie zwischen ihren Endpunkten telegraphisch als Längenunterschied gemessen sei. Dann haben wir bei  $p$  Punkten und  $s$  Linien folgende Beobachtungen:

$$\left. \begin{aligned} \text{Geographische Breiten} &\quad \text{Anzahl} = p \\ " \quad \text{Längenunterschiede} &\quad " = s \\ \text{Azimute} &\quad " = 2s \\ \text{Geodätische Linien} &\quad " = s \end{aligned} \right\} p + 4s \quad (7)$$

Diesen  $p + 4s$  Beobachtungen stehen gegenüber unabhängige Unbekannte:

$$\left. \begin{aligned} \text{Geographische Breiten} &\quad \text{Anzahl} = p \\ " \quad \text{Längenunterschiede} &\quad " = p - 1 \\ \text{Lotabweichungs-Componenten } \xi, \eta &\quad " = 2(p - 1) \end{aligned} \right\} 4p - 3 \quad (8)$$

Die Längenunterschiede sind nur in der Zahl  $p - 1$  vorhanden, weil ein Punkt (Zentralpunkt Berlin) willkürlich ist und es sich nur um die relativen Längen gegen den Zentralpunkt handelt. Ebenso ist es mit den Lotabweichungen  $\xi, \eta$ , welche nur relativ gegen den Zentralpunkt bestimmbar sind.

Aus (7) und (8) hat man die Zahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen:

$$p + 4s - (4p - 3) = 4s - 3(p - 1) \quad (9)$$

Dieses stimmt mit dem früheren (3) S. 590 und giebt für das astronomisch-geodätische Netz von Fig. 1. S. 590 wieder die schon bei (4) gefundene Zahl von 78 unabhängigen Bedingungsgleichungen.

Bei der bisherigen Betrachtung sind die Erddimensionen etwa  $a$  und  $e^2$  oder  $c$  und  $e'^2$  als gegeben vorausgesetzt. Es ist aber auch möglich, diese Dimensionen so zu bestimmen, dass sie sich dem Netz-Material möglichst anpassen; und dann muss man die Gleichungen auch noch nach  $c$  und  $e'^2$  differenzieren und man bekommt noch entsprechende zwei neue Unbekannte in die Ausgleichung.

Dieses sind die Grundgedanken einer astronomisch-geodätischen Netzausgleichung, deren Anfänge in dem auf S. 591 citierten Helmertschen Werk des geodätischen Instituts enthalten sind, deren Ausführung im Grossen der Zukunft vorbehalten ist.

---

