Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 11. Massbestimmungen des Besselschen Apparates

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

struierte Böcke ersetzt worden. Die hölzernen Unterlagsbretter und die eisernen 20^{cm} tief in den Boden einzuschlagenden Nägel, auf welchen diese Bretter ruhen, blieben dieselben wie bei Bessel. („Gradm. i. Ostpr.“ Tafel IV.)

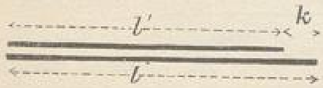
Wegen der Standfestigkeit ist die Auflegung der Stangen so *nieder* als möglich gehalten. Die Böcke sind nur $0{,}63^m$ hoch, so dass mit Zurechnung der Unterlagsbrettdicke und der halben Kastenhöhe die Stangenschneiden nur $0{,}77^m$ über dem Erdboden zu liegen kommen, was gerade noch Handhabung und Ablesung der Keile ohne zu unbequeme Körperlage gestattet.

§ 11. Massbestimmungen des Besselschen Apparates.

I. Das Metall-Thermometer.

Wir betrachten zunächst das Metall-Thermometer in seiner einfachsten Gestalt (Fig. 1.). Eine Eisenstange von der Länge l und eine Zinkstange von der Länge l' werden so aufeinander gelegt, dass die linkseitigen Enden zusammentreffen, dann ist der Abstand k der beiden rechten Enden die Angabe des Metall-Thermometers.

Fig. 1.
Metall-Thermometer.



Bei irgend welcher Temperatur wird $l = l'$ werden, und die gemeinsame Länge beider Stäbe sei in diesem Falle $= L$. Zählt man nun die Temperatur t' von jenem Stand rückwärts, nennt e und z die Ausdehnungs-Coëfficienten von Eisen und Zink, so ist:

$$l = L(1 - e\,t') \qquad l' = L(1 - z\,t') \tag{1}$$

Die Differenz ist:

$$l - l' = L(z - e)\,t' = k \tag{2}$$

Durch Elimination von t' erhält man:

$$l = L - \frac{e}{z - e}\,k \tag{3}$$

Den relativen Ausdehnungs-Coëfficienten, welcher hier Coëfficient von k ist, bezeichnen wir mit m, d. h.:

$$\frac{e}{z - e} = m \tag{4}$$

und damit haben wir:

$$l = L - m\,k \tag{5}$$

Eine Gleichung von der Form (5) gilt für jede der 4 Stangen.

Dürfte man auf die *Gleichheit* der Ausdehnungen bei allen 4 Stangen (die aus einem Stück geschnitten sind) rechnen, so wären die Ausdehnungs-Coëfficienten e und z, für Eisen und Zink als konstant zu betrachten. Bessel nimmt jedoch für jede Stange besondere Werte e und z, also auch einen besonderen Wert m an, und demnach bestehen entsprechend (5) für die 4 Stangen folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= L_1 - k_1\,m_1 \\ l_2 &= L_2 - k_2\,m_2 \\ l_3 &= L_3 - k_3\,m_3 \\ l_4 &= L_4 - k_4\,m_4 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wo k_1, k_2, k_3, k_4 die Keilmasse der Metall-Thermometer der 4 Stangen bedeuten.

Für die Längen L_1, L_2, L_3, L_4 werden andere Formen eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= L + x_1 \\ L_2 &= L + x_2 \\ L_3 &= L + x_3 \\ L_4 &= L + x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

dabei sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Korrektionen, welche an einem gemeinsamen Wert L noch anzubringen sind. Dieser Wert L ist willkürlich; man kann deswegen z. B. L als arithmetisches Mittel der 4 Werte L_1, L_2, L_3, L_4 annehmen, also:

$$L = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{4} \qquad (8)$$

und damit wird für die Korrektionen x die Bedingung erhalten:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad (9)$$

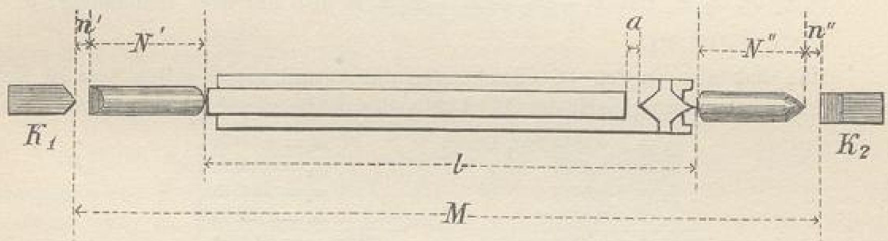
damit gehen die Gleichungen (6) über in die folgenden:

$$\begin{array}{rl} & l_1 = L + x_1 - k_1 m_1 \\ & l_2 = L + x_2 - k_2 m_2 \\ & l_3 = L + x_3 - k_3 m_3 \\ & \underline{l_4 = L + x_4 - k_4 m_4} \\ \text{Mittel:} & l \;= L \qquad\; - k m \end{array} \qquad (10)$$

Hier hat L für das Mittel aus allen 4 Stangen dieselbe Bedeutung, wie L_1, L_2, L_3, L_4 nach (6) für die einzelnen Stangen.

II. Gegenseitige Vergleichung der 4 Stangen. Bestimmung der x und m.

Fig. 2.
Stangen-Vergleichung.



In Fig. 2. bedeuten K_1 und K_2 zwei möglichst unveränderliche, auf gemeinsamer Unterlage befestigte Stahlkeile, welche zum Zweck des scharfen Anstossens in Schneiden endigen. Der Abstand M der Schneiden ist etwas grösser als die Stangenlänge l, so dass zum Ausfüllen ausser der Stange l noch zwei Cylinder N' und N'' und die Keilmasse n' und n'' nötig sind. (Die Ausfüll-Cylinder N' und N'' sind nur aus Gründen der Bequemlichkeit angebracht und für das Prinzip des Apparates unwesentlich.) Denkt man sich nun die Stange Nr. 1 in den Vergleich-Apparat Fig. 2. eingelegt, so erhält man eine Gleichung:

$$M = l_1 + (N' + N'') + (n_1' + n_1'' \qquad (11)$$

Es ist aber nach (10):

$$l_1 = L + x_1 - k_1 m_1 \qquad (12)$$

Nun wird, um alles Gleichartige zusammenzufassen, gesetzt:

$$\left.\begin{array}{r} M-(N'+N'')-L=C \\ n_1'+n_1''=n_1 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Damit erhält man aus den zwei vorhergehenden Gleichungen (11) und (12) die folgende:

$$n_1 = C - x_1 + k_1\, m_1 \qquad (14)$$

Wenn man nach einander die 4 Stangen einlegt, so erhält man entsprechend (14) folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 0=-n_1+C-x_1+k_1\,m_1 \\ 0=-n_2+C-x_2+k_2\,m_2 \\ 0=-n_3+C-x_3+k_3\,m_3 \\ 0=-n_4+C-x_4+k_4\,m_4 \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Z. B. gaben die 4 ersten solchen Vergleichungen folgende erste Gruppe von Gleichungen dieser Art, mit eingesetzten Beobachtungswerten:

$$\text{Gruppe I.}\quad \left.\begin{array}{l} 0=-3{,}9693+C_1-x_1+1{,}8960\,m_1 \\ 0=-3{,}8600+C_1-x_2+1{,}9957\,m_2 \\ 0=-3{,}4875+C_1-x_3+1{,}3387\,m_3 \\ 0=-3{,}4506+C_1-x_4+1{,}3377\,m_4 \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Alle Keilmasse, z. B. 3,9693 und 1,8960, sind hier in Pariser Linien (= $2{,}2558^{mm}$) gezählt.

Ähnlich wie (16) wurden noch 8 andere Gruppen von Vergleichungen unter möglichst verschiedenen Umständen gewonnen, und die 36 Gleichungen nach der M. d. kl. Q. aufgelöst. Dabei sind folgende Unbekannte zu bestimmen:

1) $C_1\ C_2\ \ldots\ C_9$. für jede Gruppe ein *besonderes* C (nach 13), damit den Änderungen des Apparates von Gruppe zu Gruppe Rechnung getragen wird,

2) $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ mit $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, also nur *drei* unabhängige x,

3) $m_1\ m_2\ m_3\ m_4$.

Man hat also in den 36 Gleichungen die Anzahl von $9+3+4=16$ Unbekannten. Die Auflösung nach der M. d. kl. Q. gab die verschiedenen C und ferner:

$$\left.\begin{array}{rlr} x_1=-0{,}3015 & \text{Par. Linien} & m_1=0{,}54033 \\ x_2=+0{,}3986 & \quad " & m_2=0{,}55976 \\ x_3=-0{,}0713 & \quad " & m_3=0{,}57575 \\ x_4=-0{,}0258 & \quad " & m_4=0{,}58103 \\ \hline \text{Summe}=0{,}0000 & & \text{Mittel } m=0{,}56422 \end{array}\right\} \qquad (17)$$

und den mittleren Fehler einer Vergleichung:

$$m = \pm\, 0{,}00353 \text{ Par. Linien} = \pm\, 0{,}0080^{mm} \qquad (18)$$

oder relativ:

$$\frac{m}{l} = \frac{0{,}00353}{1728} = 0{,}000\,002 = 2 \text{ Milliontel} \qquad (18a)$$

Diese mittleren Fehler sind hier zunächst reine Rechnungsgrössen, welche nicht alle Fehlerquellen zum Ausdruck bringen.

III. *Vergleichung der Stangen mit dem Normalmass.*

Da durch die $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ die 4 Stangen bereits unter sich verglichen sind, genügt es, *eine* der 4 Stangen mit dem Normalmass zu vergleichen. Das Normalmass war eine von *Arago* und *Zahrtmann* in Paris mit der Peru-Toise verglichene Toise, deren Gleichung ist:

$$T = 863{,}835\,384\,(1 + 0{,}000\,014\,588\,R) = 863{,}999\,205\,(1 + 0{,}000\,014\,588\,(R - 13)) \qquad (19)$$

wo die Länge in Pariser Linien und die Temperatur R in Réaumur-Graden gemessen ist.

Hiezu nimmt man die Stange Nr. 1, welche nach (10) und (17) die Gleichung hat:

$$l_1 = L - 0{,}3015 - 0{,}54033\,k_1 \qquad (20)$$

Legt man diese Stange Nr. 1. und die Toise T nach einander in den Vergleich-Apparat Fig. 2., so erhält man durch die verschiedenen Keilmasse n eine Vergleichung, und eine Beziehung zwischen den Gleichungen (19) und (20), aus welcher eine Bestimmung von L hervorgeht.

Es wurden 12 solcher Bestimmungen gemacht, und im Mittel erhalten:

$$L = 1729{,}1167 \pm 0{,}000\,984 \text{ Pariser Linien} \qquad (21)$$

und der mittlere Fehler *einer* solchen Vergleichung

$$\mu_1 = \pm\, 0{,}003\,407 \text{ Par. Linien} = \pm\, 0{,}0077^{mm} \qquad (22)$$

oder relativ:

$$\frac{\mu_1}{L} = 0{,}000\,0020 = 2 \text{ Milliontel} \qquad (23)$$

$$\frac{0{,}000984}{L} = 0{,}000\,000\,6 = 0{,}6 \text{ Milliontel} \qquad (23a)$$

Nun kann man für jede der 4 Stangen ihre Gleichung bilden, nämlich nach (10), (17) und (21):

$$\left.\begin{array}{ll} & l_1 = 1728{,}8152 - 0{,}54033\,k_1 \\ & l_2 = 1729{,}5153 - 0{,}55976\,k_2 \\ & l_3 = 1729{,}0454 - 0{,}57575\,k_3 \\ & l_4 = 1729{,}0909 - 0{,}58103\,k_4 \\ \hline \text{Mittel} & l\; = 1729{,}1167 - 0{,}56422\,k \\ \text{Allgemein} & l\; = \quad L \quad - \quad m\,k \end{array}\right\} \qquad (24)$$

IV. Vergleichung der Metall-Thermometer und der Quecksilber-Thermometer.

Obgleich die Kenntnis der Temperatur der Messstangen und der Einzel-Ausdehnungen des Eisens und des Zinks, aus welchen sie zusammengesetzt sind, nicht durchaus nötig ist, da ja jede Stangenlänge l nach einer Gleichung von der Form (24) sich als Funktion des inneren Keilmasses k ergiebt, war es doch erwünscht, auch eine Beziehung zwischen den Metall-Thermometer-Keilmassen k und den gewöhnlichen in die Kästen mit eingelegten Quecksilber-Thermometern zu erhalten. Es wurden hiezu bei möglichster Temperatur-Ruhe 160 Vergleichungen angestellt, welche im Mittel für die 4 Stangen gaben:

$$k = 2{,}1249 - 0{,}045489\,R \qquad (25)$$

$$\text{oder } R = 46{,}712^\circ - 21{,}983\,k \qquad (25a)$$

Dabei ist k das Keilmass, welches für die 4 Stangen einzeln mit k_1, k_2, k_3, k_4 bezeichnet wurde, und R die Angabe des Quecksilber-Thermometers in Réaumur-Graden.

Diesem entspricht folgendes:

$$\left.\begin{array}{lllllllll} R = & 0^\circ & 5^\circ & 10^\circ & 15^\circ & 20^\circ & 25^\circ & 30^\circ & 46{,}71^\circ \\ k = & 2{,}125 & 1{,}897 & 1{,}670 & 1{,}443 & 1{,}215 & 0{,}988 & 0{,}760 & 0{,}000 \text{ Par. L.} \end{array}\right\} \qquad (25b)$$

V. Bestimmung der Einzel-Ausdehnungen von Eisen und Zink.

Wenn man eine Beziehung zwischen dem Keilmass k und der Temperatur t (z. B. in $R°$ oder $C°$) gefunden hat, von der Form (25) oder allgemeiner geschrieben

$$k = k_0 - p\,t \tag{26}$$

so kann man auch den relativen Ausdehnungs-Coëfficienten m in seine Bestandteile e und z zerlegen. Wir haben nämlich nach (4), (5) und (24):

$$m = \frac{e}{z - e} \qquad l = L - m\,k$$

also wegen (26):

$$l = L - m\,k_0 + m\,p\,t = (L - m\,k_0)\left(1 + \frac{m\,p}{L - m\,k_0}\,t\right) \tag{26a}$$

Daraus giebt sich zu erkennen, dass der Ausdehnungs-Coëfficient e der Eisenstange l ist:

$$e = \frac{m\,p}{L - m\,k_0} = \frac{m\,p}{l_0} \tag{27}$$

und da $z - e = e : m$ ist, hat man nun auch:

$$z - e = \frac{p}{L - m\,k_0} = \frac{p}{l_0} \tag{28}$$

Hiebei ist $L - m\,k_0 = l_0$ diejenige Stangenlänge l, welche für $t = 0$ stattfindet.

Für die Mittelwerte der Besselschen Stangen haben wir $k_0 = 2{,}1249$ (für t in $R°$), $m = 0{,}56422$, womit berechnet wird $l_0 = 1727{,}9178$ und insbesondere:

$$e = 0{,}000\,014\,854 \qquad \text{und} \qquad z = 0{,}000\,041\,180$$

Die letzten Stellen dieser Zahlen sind nur genähert richtig, wegen des Einflusses der in Fig. 1. S. 72 vernachlässigten Zwischenstücke D in Fig. 4. S. 69 u. s. w. vgl. unsere 2. Auflage 1878, S. 89—90 Gleichungen (1)—(6).

Nun hat man für die Messstangen *zwei* Arten von Längen-Bestimmungen, erstens mit den Metall-Thermometern nach der Gleichung (24) und zweitens mit den eingelegten Quecksilber-Thermometern nach (26a).

Bessel hat die Königsberger Basis nach *beiden* Arten berechnet, und gefunden, dass die Quecksilber-Thermometer mehr gaben, nämlich:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{für die erste Messung:} & +\,16{,}346^{t} = 20^{mm} \text{ für } 1^{km} \\ \text{für die zweite Messung:} & +\;\;7{,}406^{t} = \;\;9^{mm} \text{ für } 1^{km} \\ \hline \text{Mittel:} & +\,11{,}876^{t} = 15^{mm} \text{ für } 1^{km} \end{array}\right\} \tag{29}$$

Der Grund dieser erheblichen Unterschiede wurde darin gefunden, dass die eingelegten Quecksilber-Thermometer den Temperatur-*Änderungen* Morgens und Abends viel rascher folgen, als die massiven und trägen Eisen- und Zinkstangen. Insofern nun diese Stangen ihr eigenes Thermometer sind, wurde ihren Angaben der Vorzug gegeben und die Quecksilber-Thermometer nicht weiter berücksichtigt.

Die Basis wurde in zwei Abschnitten je zweifach hin und her gemessen, und die Berechnung nach den Metall-Thermometern gab folgendes:

Abschnitt	Messung I.	Messung II.	Differenz $d = \mathrm{I} - \mathrm{II}$
s_1	441,1852^{m}	441,1839^{m}	+ 1,3^{mm}
s_2	1381,1571^{m}	1381,1632^{m}	— 6,1^{mm}
Summe	1822,3423^{m}	1822,3471^{m}	— 4,8^{mm}

(30)

VI. Fortgesetzte Mass-Bestimmungen für den Bessel'schen Apparat.

In ähnlicher Weise, wie wir im Vorstehenden von der Königsberger Messung beschrieben haben, wurden auch später Mass-Bestimmungen zu den in § 10. S. 67 erwähnten Basis-Messungen gemacht, z. B.:

$$\left.\begin{array}{lll} 1834 & \text{Königsberg} & l = 1729{,}1167^{l} - 0{,}56422\,k \\ 1846 & \text{Berlin} & l = 1729{,}0999^{l} - 0{,}55228\,k \end{array}\right\} \quad (31)$$

Die nicht unerheblichen Änderungen in diesen Zahlen haben zu der Anschauung geführt, dass die Stangen im Laufe der Jahre ihre molekulare Struktur geändert hätten. („Publik. d. geod. Inst. Massvergleichungen" I, 1872, S. 38—46, Bericht von General Baeyer). Doch hat sich das bei näherer Untersuchung nicht bestätigt.

Um das Wesentliche der hierauf bezüglichen Fragen anzuführen, reduzieren wir die verschiedenen Formeln (31) auf den *Mittel*wert $k = 1{,}4$, d. h. wir formen so um:

$$\left.\begin{array}{lll} 1834 & \text{Königsberg} & l = 1728{,}3268^{l} - 0{,}56422\,(k - 1{,}4) \\ 1846 & \text{Berlin} & l = 1728{,}3267^{l} - 0{,}55228\,(k - 1{,}4) \end{array}\right\} \quad (32)$$

$$\text{entsprechend der Formel } l = \quad L' \quad - \quad m\,(k - 1{,}4)$$

Nun sind die Absolutglieder fast gleich geworden, während sie vorher bei (31) um 0,0168 Par. Linien $= 0{,}038^{mm}$ verschieden waren.

Die Absolutglieder in (31) gelten für $k = 0$, was einer Temperatur von etwa 47° *R.* entspricht, welche beim Gebrauche nie vorkommt, und deswegen ist die Form (32) mit dem Mittelwert $k = 1{,}4$, entsprechend einer Temperatur von etwa 16° *R.*, zur sachlichen Vergleichung viel mehr geeignet.

Auch die Änderung der Ausdehnungs-Coëfficienten m, e, z, welche sich z. B. zwischen den Jahren 1834 und 1846 als Verkleinerung von e und z zeigt, kann ohne die Annahme molekularer Änderungen erklärt werden.

Eine Eigentümlichkeit des Apparates besteht auch darin, dass die Abnützung der äusseren Schneiden die Stangen verkürzt, wie immer bei Abnützung von Endmassen, dass aber eine Abnützung der *inneren* Schneiden, zwischen welchen der Temperaturkeil k (Fig. 4. S. 69) eingelegt wird, die Stangen scheinbar *verlängert*. Wenn nämlich dieselbe Stangenlänge l nach der Formel (32) zweifach dargestellt ist

$$l = L' - m\,(k - 1{,}4) \quad \text{oder} \quad = L'' - m\,(k' - 1{,}4)$$

und wenn, durch Abnützung der inneren Schneiden, k' grösser als k ist, so muss auch L'' grösser als L' sein. Wenn also z. B. in (32) die beiden Werte $L' = 1728{,}3268$ und 1728,3267 nach Verlauf von 12 Jahren fast gleich sind, so kann doch die wirkliche Länge l bei einer bestimmten Temperatur durch Abnützung der äusseren Schneiden kürzer geworden sein, wenn gleichzeitig eine noch stärkere Abnützung oder Auseinandertreibung der inneren Schneiden stattgefunden hat.

Man vgl. hierüber „Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft" 1877, S. 150—152, und eine Abhandlung von A. Börsch, „astr. Nachr." 99. Band (1881), Nr 2364. Hierauf bezieht sich auch eine Publikation des königl. preuss. geodätischen Instituts, „die Ausdehnungs-Coëfficienten der Küsten-Vermessung" von Dr. Alfred Westphal, Berlin 1881.

§ 12. Die Göttinger Basismessung.

Wie schon früher in § 10. S. 68 berichtet wurde, zeichnet sich die Göttinger Basismessung vom Jahre 1880 vor den früheren mit dem Bessel'schen Apparat ge-