Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 17. Basisnetze

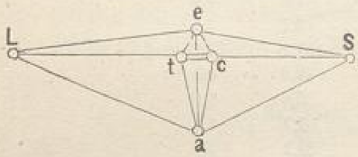
§ 17. Basisnetze.

Die Basis einer Triangulierung ist meist erheblich *kleiner* als die Dreiecksseiten im allgemeinen, und es entsteht daher die Aufgabe, eine grosse Seite aus einer kleinen trigonometrisch abzuleiten. Ungünstige Dreiecks-Verbindungen sind hier nicht zu vermeiden; denn entweder macht man den Übergang von der kleinen Basis zu einer grossen Hauptdreiecksseite durch wenige Dreiecke, und man muss dabei spitze Schnitte anwenden; oder man nimmt eine grosse Zahl von Dreiecken, man hat dann aber eine grosse Zahl von Fehlerquellen.

Wir werden nun zuerst mehrere Basisnetze bekannter Triangulierungen betrachten, und sehen, wie zu verschiedenen Zeiten verschiedene Landmesser sich bemüht haben, teils durch zweckmässige Anordnung der Dreiecke, teils durch lange Grundlinien selbst, die in der Natur der Sache liegenden Schwierigkeiten zu überwinden.

1) Das Basisnetz von Snellius (Fig. 1.)

Fig. 1. Snellius, 1615.
Massstab 1 : 100 000.
$t\,c = 328\,m$, $L\,S = 4114\,m$.



Wie wir schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 478, mitgeteilt haben, verdanken wir dem Niederländer Willebrord Snellius in Leiden 1615 die erste Triangulierung in dem heutigen Sinne; und in überraschender Weise hat das erste Snellius sche Basisnetz (Fig. 1.) diejenige Form, welche heute noch als die beste gilt. Allerdings die Genauigkeit absolut genommen war bei Snellius noch gering, die Basis $t\,c$ wurde mit hölzernen Messlatten, und die Winkel mit einem geteilten Quadranten von 2,2 rhein. Fuss ohne Fernrohr auf etwa $1'$ gemessen.

In Fig. 1. sind L und S die Türme von Leiden und dem südlich von Leiden gelegenen Dorfe Soeterwoute, die wirklich gemessene Grundlinie ist nur $t\,c = 87{,}05$ rheinl. Ruten $= 327{,}85^m$ lang, daran schliessen sich zwei hochgestellte Dreiecke $t\,c\,e$ und $t\,c\,a$, und an die abgeleitete Linie $e\,a = 1229^m$ schliessen sich wieder zwei hochgestellte Dreiecke $e\,a\,L$ und $e\,a\,S$, woraus $L\,S = 4114^m$ berechnet wird.

Für jedes der vier eigentlichen Messungs-Dreiecke teilt Snellius nur je *zwei* Winkel als gemessen mit, und zwar jeweils die Winkel an der Basis, was nach der ganzen Art seiner Darstellung in solchen Fällen, in welchen er die Probestimmungen nicht mitteilen will, nicht ausschliesst, dass auch die dritten Winkel gemessen und ausgeglichen wurden. Ob Snellius das Hauptgesetz, dass die *spitzen* Winkel (z. B. der Winkel a in dem Dreieck $t\,a\,c$) wesentlich die Genauigkeit bestimmen, gekannt hat, ist daraus nicht zu ersehen.

2) Basisnetze von Schwerd, 1820.

Der Vater der neueren Basisnetz-Theorie ist Professor Schwerd in Speyer (vgl. S. 100 und 101). Dieser hat im Jahre 1820 das richtige getroffen; er fand nämlich durch theoretische Betrachtungen und Vergleichungen:

erstens, dass das rhombische *Netz* $A\,B\,N\,D$ Fig. 2a. (S. 105) das günstigste ist (was schon *Snellius* hatte) und

zweitens, dass die *spitzen* Winkel bei N und D, welche der Basis gegenüber liegen, hauptsächlich bestimmend für die Genauigkeit sind, und deswegen mit besonderer Schärfe gemessen werden müssen.

Die eigentlichen kleinen Basisnetze, welche Schwerd gemessen und berechnet hat, sind in den folgenden Figuren dargestellt. Schwerd hat ausser seinem „Hauptnetz" Fig. 2a. noch zwei „Prüfungsnetze" Fig. 2b und Fig. 2c. angewendet. Die eigentliche Basis AB selbst ist nur 860^m lang. Die Entfernung HD leitete Schwerd hieraus dreifach trigonometrisch ab mit den Ergebnissen $4959{,}084^m$, $4959{,}068^m$, $4959{,}098^m$.

Fig. 2.
Basisnetze von Schwerd, 1820.
Massstab 1 : 100 000, $AB = 860\,m$, $HD = 4959\,m$.

Fig. 2a.
Hauptnetz.

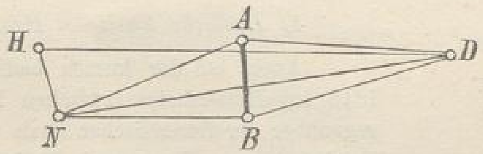


Fig. 2b. Erstes Prüfungsnetz.

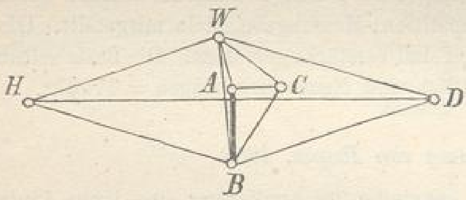
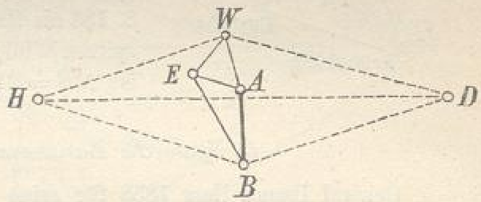


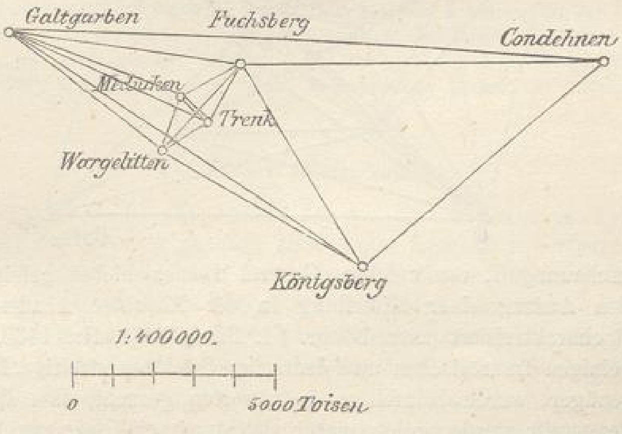
Fig. 2c. Zweites Prüfungsnetz.



Die weitere Verbindung der Linie HD mit der amtlichen bayerischen Basis Speyer-Oggersheim haben wir schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 208 behandelt, wobei mit $D\,Sp$ der Punkt Dom in Speyer bezeichnet ist, welcher abgesehen von einer Excentricität auf dem Turme, dem Punkte D in Fig. 2a., 2b. und 2c. entspricht.

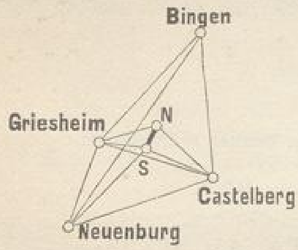
3) Basisnetz der Gradmessung in Ostpreussen, 1834.

Fig. 3. Massstab 1 : 400 000.
Basis Trenk-Mednicken = 1822 m
Galtgarben-Condehnen = 29 563 m



Die vorerwähnten Überlegungen von Schwerd haben auch auf die Anordnung der Besselschen Basismessung bei Königsberg Einfluss gehabt; Bessel erwähnt auf S. 38 der Gradmessung in Ostpreussen das „sehr lesenswerte Buch von Schwerd", und machte seine Königsberger Grundlinie nur 1822^m lang, wie aus vorstehender Zeichnung (Fig. 3. S. 105) zu ersehen ist. Die zwei Rhomben Wargelitten-Fuchsberg und Galtgarben-Königsberg entsprechen dem Schwerdschen Gedanken, allein die Verstärkung der Messungs-Genauigkeit in den spitzen Winkeln hat Bessel, wie es scheint im Vertrauen auf die Gesamt-Ausgleichung, nicht durchgeführt (vgl. hiezu auch unsern I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 499—500).

Fig. 4.
Massstab 1 : 600 000.



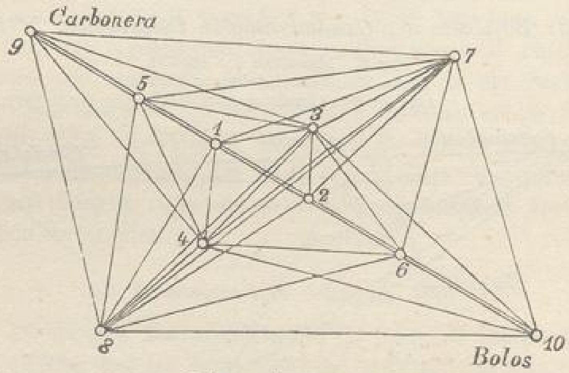
4) Badische Basis bei Heitersheim, 1846.

Auch bei der kurzen badischen Basis, welche 1846 bei Heitersheim (zwischen Freiburg und Basel) gegenüber der französischen Basis von Ensisheim (Oberhergheim) von Klose und Rheiner gemessen wurde, zeigt sich Schwerds Grundgedanke. Die Winkelmessungen hiezu haben wir früher in Band II, 3. Aufl. 1888, S. 183 als Repetitions-Messungsbeispiele mitgeteilt. Die spitzen Winkel sind verstärkt gemessen. Die Basis selbst ist $NS = 2125^m$, und Neuenburg-Bingen $= 17027^m$.

5) Spanische Basismessung von Ibanez, 1858.

General Ibanez liess 1858 für seine spanische Triangulierung eine lange Linie messen, bei Madridejos (etwa 100 Kilometer südlich von Madrid). Die Gesamtlänge von $14\,663^m$ wurde in 5 Teile geteilt, welche alle unter sich trigonometrisch verbunden wurden.

Fig. 5.
Massstab 1 : 200 000, Carbonera—Bolos = 14 663 *m*.



Die Anschauungen, von welchen General Ibanez hiebei geleitet wurde, sind durch folgenden Auszug einer Mitteilung in der Madrider Akademie-Sitzung vom 30. Nov. 1863 charakterisiert (astr. Nachr. 61. Band, 1864, Nr. 1462, S. 339—346): Die zwischen einigen französischen und deutschen Geodäten streitige Frage, ob kleine Grundlinien genügen, wurde dadurch zu beantworten gesucht, dass die lange Grundlinie in 5 Teile geteilt wurde, welche unter sich durch ein Netz von 10 Punkten mit

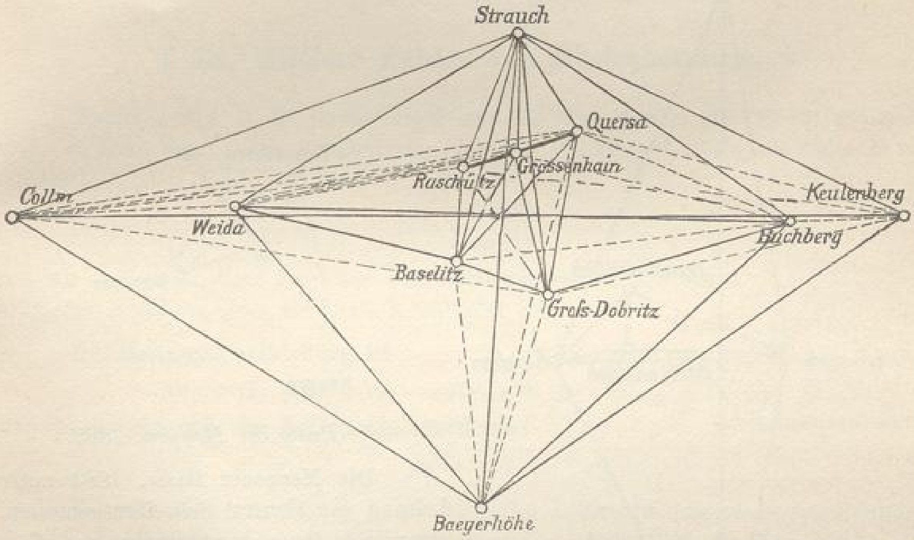
120 Dreiecken und 45 Verbindungs-Linien trigonometrisch verbunden wurden. Die trigonometrische Rechnung, welche sich auf das Mittelstück stützte, gab für die vier äusseren Stücke Werte, welche von den unmittelbar gemessenen Längen nur sehr wenig, d. h. um 2—3^{mm} Abweichung zeigten.

Weiteres über diese spanische Vermessung giebt der General-Bericht der „Europ. Gradmessung für 1869, S. 62—65 und für 1876, S. 125—128", sowie das grosse Werk: „Memorias del instituto geografico y estadistico", ferner (nach einem Citat des Gen.-Ber. für 1869, S. 63): „Base centrale de la triangulation géodésique de l'Espagne par les Colonels Ibanez et Saavedra, 1865."

6) Sächsische Basis bei Grossenhain, 1872.

Fig. 6.

Massstab 1 : 600 000. Basis Raschütz-Quersa = 8909,^{m}m.



Im Königreiche Sachsen wurde im Jahre 1872 eine lange Grundlinie mit dem Besselschen Apparat unter Leitung von Nagel und Bruhns gemessen, deren Basisnetz in Fig. 6. gezeichnet ist.

Näheres hierüber giebt das amtliche Werk: „Astr. geodät. Arbeiten für die Europ. Gradm. im Königreich Sachsen, I. Abteil. die Grossenhainer Grundlinie, von Bruhns und Nagel, Berlin 1882", und Auszug hieraus im „Civilingenieur XXVIII, 1882, Heft 1", und Bericht von Helmert in der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 596—604. Aus diesem Helmertschen Bericht ist auch unsere Fig. 6. entlehnt.

7) Göttinger Basis, 1880.

Die Göttinger Basis ist die zwölfte der mit dem Bessel schen Apparat gemessenen Grundlinien; die Messung geschah 1880 unter Leitung von General Schreiber, welcher den Mess-Apparat und dessen Anwendung zu diesem Zwecke verbessert hatte, und auch in der trigonometrischen Anlage des Basisnetzes von früherem abwich.

Das Göttinger Basisnetz Fig. 7. (S. 108) zeichnet sich durch klassische Einfachheit aus, es entspricht dem von General Schreiber dabei ausgesprochenen Grundsatze, „dass die Güte der Messungen nicht in einer systemlosen Häufung von Kontrollen, sondern in einer scharfen Messung solcher Elemente zu suchen ist, welche die Genauigkeit der Schluss-Ergebnisse in erster Linie bestimmen" („Zeitschr. f. Verm. 1880", S. 397). In diesem Sinne wurde das Göttinger Basisnetz Veranlassung für General Schreiber, die Anordnung der Winkel-Beobachtungen nach dem Grundsatze günstigster Gewichts-Verteilung allgemeiner zu untersuchen (s. Schreiber: Die Anordnung der Winkel-Beobachtungen im Göttinger Basisnetz, „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 129—161). Auch gehört hiezu der Schreibersche Satz über günstigste Gewichtsverteilung, den wir bereits in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 138—144 behandelt haben.

Fig. 7.
Massstab 1 : 670 000.
Basis $NS = m$, Ahlsburg-Meissner $= 57\,507\ m$.

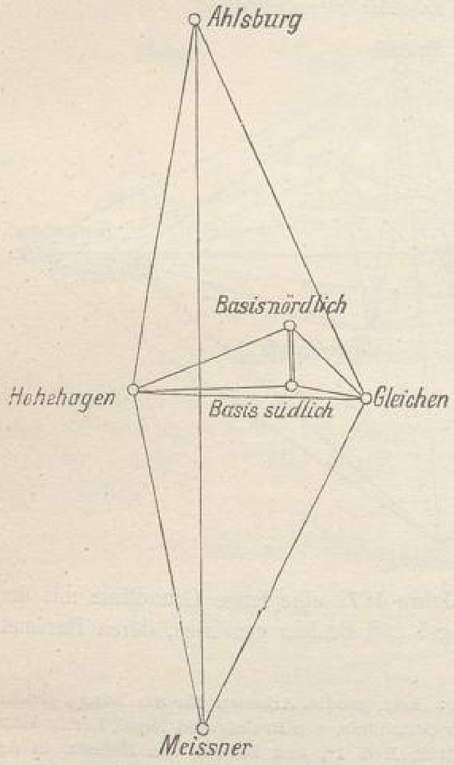
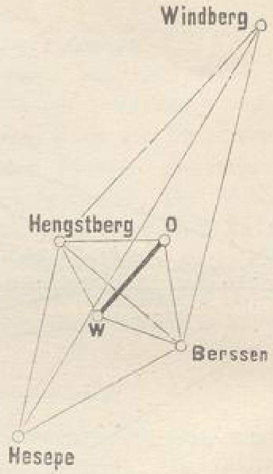


Fig. 8.
Massstab 1 : 600 000.



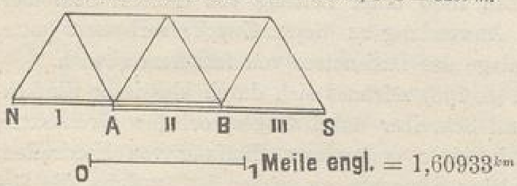
8) Basis bei Meppen, 1883.

Die Meppener Basis, 1883 unter Leitung von General Schreiber gemessen, entspricht ihrer Vorgängerin von Göttingen. Das Basisnetz besteht nur aus 4 Übertragungs-Dreiecken.

Amtliches ist hierüber noch nicht veröffentlicht, eine vorläufige Mitteilung giebt die „Zeitschr. f. Verm." 1883, S. 577 bis 584. In Fig. 8. ist die Basis $WO =$ 7039^m und Hesepe-Windberg $= 34561^m$.

9) Basis am Kap der guten Hoffnung, 1886.

Fig. 9.
Massstab 1 : 86 000. $AB = 1097\,m$, $NS = 3291\,m$.



Das in Fig. 9. dargestellte Basisnetz hat eine von allen unseren vorhergehenden Fig. 1—8. abweichende Form. Die 3 Abschnitte sind für sich gemessen und durch ein Gitternetz von 5 Dreiecken unter sich trigonometrisch verbunden. Denkt man sich das Mittelstück

A B allein gemessen, so lässt sich die Gesamtlänge *N S* trigonometrisch berechnen und zwar stimmte dieses im vorliegenden Falle auf $+ 0{,}0002 - 0{,}0027 = - 0{,}0025$ engl. Fuss $= 0{,}8^{mm}$.

Die Frage der theoretischen Fehler-Fortpflanzung in einem solchen Netze werden wir später besonders behandeln (§ 19); wir werden finden, dass das Gitternetz Fig. 9. theoretisch ungünstiger ist als das Rhombennetz, allein das Gitternetz mit nur *kurzen* Seiten hat praktische Vorzüge. (Unsere Fig. 9. S. 108 ist aus einem Berichte in der „Zeitschr. f. Verm. 1887", S. 59 entnommen.)

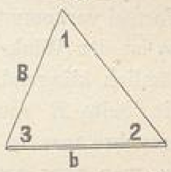
Noch einige weitere Beispiele von Basisnetzen, mit Genauigkeitstheorien, enthält die Veröffentlichung des geodätischen Instituts: „Die Europäische Längengradmessung in 52° Breite, von Greenwich bis Warschau, I. Heft Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von F. R. Helmert, Berlin 1893," S. 231—252, mit Tafel II, 10 Basisnetze in 1 : 50 000.

§ 18. Mittlere Fehler von Dreiecksseiten.

Wenn in Fig. 1. die Grundlinie b und die drei Winkel (1), (2), (3) gemessen sind, so kann man, nach Ausgleichung der drei Winkel auf 180°, die Seite B berechnen:

$$B = b \frac{\sin (2)}{\sin (1)} \tag{1}$$

Fig. 1.



und wir wollen für diese Funktion den mittleren Fehler bestimmen unter der Annahme, dass die Basis b fehlerfrei sei.

Die Bedingungs-Gleichung ist:

$$+ (1) + (2) + (3) - 180° = 0$$

also die Coëfficienten der Bedingungs-Gleichung:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1 \tag{2}$$

Versteht man unter f_1, f_2, f_3 die partiellen Differentialquotienten der Funktion B nach Gleichung (1), so hat man (nach Band I. 4. Aufl. 1895, §. 42.):

$$f_1 = \frac{\partial B}{\partial (1)} = - \frac{b \sin (2)}{\sin^2 (1)} \cos (1) = - \frac{b \sin (2)}{\sin (1)} \operatorname{cotg} (1) = - B \operatorname{cotg} (1)$$

Wir wollen zur Abkürzung schreiben:

$$\operatorname{cotg} (1) = c_1 \qquad \operatorname{cotg} (2) = c_2 \qquad \operatorname{cotg} (3) = c_3 \tag{3}$$

Dann wird:

$$f_1 = - B c_1 \qquad f_2 = + B c_2 \qquad f_3 = 0 \tag{4}$$

Die Gewichte der drei gemessenen Winkel seien:

$$p_1 \qquad p_2 \qquad p_3 \tag{5}$$

Dann ist das Gewicht P der Dreiecksseite B nach der Ausgleichung, indem hier die Basis b als fehlerfrei betrachtet wird, zunächst in allgemeiner Formel gegeben (nach Band I. 4. Aufl. 1895, S. 125):

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} \tag{6}$$