Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 18. Mittlere Fehler von Dreiecksseiten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

A B allein gemessen, so lässt sich die Gesamtlänge *N S* trigonometrisch berechnen und zwar stimmte dieses im vorliegenden Falle auf $+0{,}0002 - 0{,}0027 = -0{,}0025$ engl. Fuss $= 0{,}8^{mm}$.

Die Frage der theoretischen Fehler-Fortpflanzung in einem solchen Netze werden wir später besonders behandeln (§ 19); wir werden finden, dass das Gitternetz Fig. 9. theoretisch ungünstiger ist als das Rhombennetz, allein das Gitternetz mit nur *kurzen* Seiten hat praktische Vorzüge. (Unsere Fig. 9. S. 108 ist aus einem Berichte in der „Zeitschr. f. Verm. 1887“, S. 59 entnommen.)

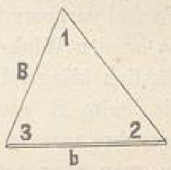
Noch einige weitere Beispiele von Basisnetzen, mit Genauigkeitstheorien, enthält die Veröffentlichung des geodätischen Instituts: „Die Europäische Längengradmessung in 52° Breite, von Greenwich bis Warschau, I. Heft Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von F. R. Helmert, Berlin 1893,“ S. 231—252, mit Tafel II, 10 Basisnetze in 1 : 50 000.

§ 18. Mittlere Fehler von Dreiecksseiten.

Wenn in Fig. 1. die Grundlinie b und die drei Winkel (1), (2), (3) gemessen sind, so kann man, nach Ausgleichung der drei Winkel auf 180°, die Seite B berechnen:

$$B = b\,\frac{\sin(2)}{\sin(1)} \tag{1}$$

Fig. 1.



und wir wollen für diese Funktion den mittleren Fehler bestimmen unter der Annahme, dass die Basis b fehlerfrei sei.

Die Bedingungs-Gleichung ist:

$$+(1)+(2)+(3)-180^\circ = 0$$

also die Coëfficienten der Bedingungs-Gleichung:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1 \tag{2}$$

Versteht man unter f_1, f_2, f_3 die partiellen Differentialquotienten der Funktion B nach Gleichung (1), so hat man (nach Band I. 4. Aufl. 1895, §. 42.):

$$f_1 = \frac{\partial B}{\partial\,(1)} = -\frac{b \sin(2)}{\sin^2(1)}\cos(1) = -\frac{b\sin(2)}{\sin(1)}\,\mathrm{cotg}\,(1) = -B\,\mathrm{cotg}\,(1)$$

Wir wollen zur Abkürzung schreiben:

$$\mathrm{cotg}\,(1) = c_1 \qquad \mathrm{cotg}\,(2) = c_2 \qquad \mathrm{cotg}\,(3) = c_3 \tag{3}$$

Dann wird:

$$f_1 = -B\,c_1 \qquad f_2 = +B\,c_2 \qquad f_3 = 0 \tag{4}$$

Die Gewichte der drei gemessenen Winkel seien:

$$p_1 \qquad p_2 \qquad p_3 \tag{5}$$

Dann ist das Gewicht P der Dreiecksseite B nach der Ausgleichung, indem hier die Basis b als fehlerfrei betrachtet wird, zunächst in allgemeiner Formel gegeben (nach Band I. 4. Aufl. 1895, S. 125):

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} \tag{6}$$

Die Einsetzung der einzelnen Teile aus (2), (4) und (5) giebt:

$$\frac{1}{P} = B^2\left(\frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2}\right) - \frac{B^2}{\left[\frac{1}{p}\right]}\left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2}\right)^2 \tag{7}$$

Dieses kann auch auf folgende Form gebracht werden:

$$\frac{1}{P} = B^2 \frac{p_1\,c_2^2 + p_2\,c_1^2 + p_3\,(c_1 + c_2)^2}{p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3} \tag{8}$$

Setzt man den mittleren Gewichtseinheits-Fehler $= \pm\,\mu$, so hat man auch den mittleren Fehler der Seite B, den wir mit $m\,(B)$ bezeichnen wollen:

$$m\,(B) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{1}{P}} = \frac{\mu}{\varrho}\,B\sqrt{\frac{p_1\,c_2^2 + p_2\,c_1^2 + p_3\,(c_1 + c_2)^2}{p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3}} \tag{9 *)}$$

Wir wollen auch noch den mittleren Fehler der Längen-Einheit von B einführen, und hiefür das Zeichen $\mu\,(B)$ setzen, also:

$$\frac{m\,(B)}{B} = \mu\,(B) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{p_1\,c_2^2 + p_2\,c_1^2 + p_3\,(c_1 + c_2)^2}{p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3}} \tag{10 *)}$$

Nach diesen verschiedenen Formen kann die Genauigkeit der trigonometrischen Übertragung von b auf B beurteilt werden.

Aus der Formel (7) ist zu ersehen, dass mit $c_1 = c_2$, oder mit Winkel (1) = Winkel (2), der zweite Teil ganz fortfällt, und dass dann p_3 gar nicht mehr in der Formel vorkommt; wenn also das Dreieck mit (1) = (2) gleichschenklig ist, also $B = b$, so ist der Winkel (3) bei der Messung *gleichgiltig*. Dieses Ergebnis ist zuerst eigentümlich klingend, aber bei näherer Betrachtung ganz sachgemäss, denn wenn man *nur* die Seite B von Fig. 1. (S. 109) bestimmen wollte und B nahezu $= b$ ist, dann brauchte man in der That den Winkel (3) gar nicht oder nur oberflächlich zu messen; da man aber gewöhnlich auch die *andere* Seite, welche (3) gegenüber liegt, haben will, so darf auch der Winkel (3) nicht vernachlässigt werden.

Wenn das Dreieck bei (3) rechtwinklig ist, so wird $c_3 = 0$, B ist dann Kathete, deren mittlerer Fehler nach (10) zu berechnen ist, wobei nun $c_2 = 1 : c_1$ ist.

Gleiche Gewichte.

Aus (8) oder (10) wollen wir auch noch den besonderen Fall herleiten, dass alle Gewichte einander *gleich*, also $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ gesetzt werden; dann wird:

$$\mu\,(B) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\,(c_1^2 + c_2^2 + c_1\,c_2)} \tag{11}$$

und für das gleichseitige Dreieck mit $c_1 = c_2 = c_3 = cotg\,60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ giebt dieses:

$$\mu\,(B) = \sqrt{2}\,\frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,60^\circ \text{ oder } = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}000\,003\,96\,\mu \tag{12}$$

---

*) Es soll für diese und die folgenden Betrachtungen das Zeichen m wie ein Funktionszeichen gebraucht werden, allgemein $m\,(x)$ = mittlerer Fehler von x, und $\mu\,(x)$ soll einen mittleren sogenannten *relativen* Fehler bedeuten, nämlich $\mu\,(x) = \frac{m\,(x)}{x}$, während μ an und für sich den mittleren Gewichtseinheits-Fehler, d. h. den mittleren Winkelfehler in Sekunden bezeichnet.

Nimmt man $\mu = 1''$, so hat man rund $\mu\,(B) = 0{,}000\,004$, oder der Übertragungs-Fehler beträgt in diesem Falle 4 Milliontel der Länge, oder 4 Millimeter auf 1 Kilometer.

Sehr ungleiche Gewichte.

Wir betrachten den Fall, dass man die Gewichte p_1 oder p_2 verstärkt oder vermindert, je nachdem die zugehörigen Winkel (1) und (2) mehr oder weniger *spitz* werden. Namentlich ein spitzer Winkel (1) gegenüber der Basis b in Fig. 1. (S. 109) wirkt bekanntlich sehr schädlich, und das zeigt sich in den Formeln dadurch, dass $cotg\,(1) = c_1$ sehr gross wird, wenn (1) klein ist. Nun zeigt aber die Formel (7), dass man dem grossen Werte c_1 dadurch entgegen wirken kann, dass man auch das Gewicht p_1 gross macht, d. h. den Winkel (1) verstärkt misst. Ebenso ist es mit c_2 und p_2.

Wir haben damit bereits den Hauptsatz über Gewichts-Verteilung, dass man einen spitzen Winkel, der einer Basis gegenüber liegt, besonders genau messen soll.

Wir wollen auch noch den Fall vornehmen, dass abwechselnd je einer der drei Winkel des Dreiecks gar nicht gemessen sei, d. h. das Gewicht = Null habe, während die beiden anderen Winkel mit dem Gewichte = 1 gemessen sind. Dann hat man aus (10):

$$\Big(\mu\,(B_{12})\Big)^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 (c_2^2 + c_1^2) \text{ mit } p_3 = 0$$

$$\Big(\mu\,(B_{13})\Big)^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \Big(c_2^2 + (c_1 + c_2)^2\Big) \text{ mit } p_2 = 0$$

$$\Big(\mu\,(B_{23})\Big)^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \Big(c_1^2 + (c_1 + c_2)^2\Big) \text{ mit } p_1 = 0$$

Dazu wenn alle drei Winkel gleich gemessen sind:

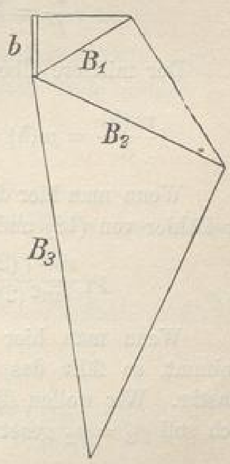
$$\Big(\mu(B_{123})\Big)^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \left(\frac{c_2^2 + c_1^2 + (c_1 + c_2)^2}{3}\right)$$

Diese 4 Formeln geben die Beziehung:

$$\Big(\mu(B_{123})\Big)^2 = \frac{1}{6}\left[\Big(\mu\,(B_{12})\Big)^2 + \Big(\mu\,(B_{13})\Big)^2 + \Big(\mu\,(B_{23})\Big)^2\right]$$

Ähnliche Beziehungen gelten auch für die mittleren Coordinatenfehler und für die mittleren Punktfehler, wie in unserem I. Band, 3. Aufl. 1888, § 110—113 gezeigt wurde.

Fig. 2.



Kette von Dreiecken.

In der Dreieckskette Fig. 2. ist b die Basis; daraus wird zuerst durch das erste Dreieck B_1 abgeleitet, dann B_2 durch das zweite Dreieck u. s. w., wir wollen annehmen bis B_n durch ein n^{tes} Dreieck. Jedenfalls entsteht jede Seite B aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Sinusfunktion, welche immer die Form hat wie in der Gleichung (11). Wenn die letzte Seite B_n ist, so bekommt man durch wiederholte Anwendung der Gleichung (11):

$$\mu\,(B_n) = \frac{m\,(B_n)}{B_n} = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}\Big([c_1^2] + [c_2]^2 + [c_1\,c_2]\Big)} \quad (13)$$

wobei

$$[c_1^2] = cotg^2\,(1)_1 + cotg^2\,(1)_2 + \ldots.\; cotg^2\,(1)_n \text{ u. s. w.}$$

Die Messungsgewichte der Dreieckswinkel sind dabei alle = 1 angenommen.

Wenn alle Dreiecke, um die es sich handelt, einander ähnlich sind, so wird (13):

$$\mu(B_n) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2n}{3}\left(c_1^2 + c_2^2 + c_1 c_2\right)} \tag{14}$$

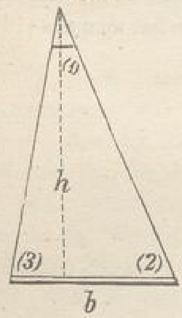
und nimmt man alle Dreiecke gleichseitig, also $c_1 = c_2 = c_3 = cotg\, 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so wird (14):

$$\frac{m(B_n)}{B_n} = \mu(B_n) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n} = 0{,}000\,004\,\mu\sqrt{n} \tag{15}$$

Dieses ist der relative mittlere Seitenfehler der letzten Seite einer Kette von n gleichseitigen Dreiecken; μ ist der mittlere Winkelfehler.

Höhe eines Dreiecks.

Fig. 3.



Wir bestimmen den mittleren Fehler der Höhe h eines Dreiecks nach Fig. 3. mit der Funktion:

$$h = \frac{b}{sin\,(1)}\,sin\,(2)\,sin\,(3) \tag{16}$$

Diese Funktion wird ebenso behandelt wie früher (1) S. 109. Die verschiedenen Coëfficienten sind, mit der Abkürzung $cotg\,(1) = c_1$ u. s. w.:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1$$
$$f_1 = -c_1 h \qquad f_2 = +c_2 h \qquad f_3 = +c_3 h$$

Die Formel (6) § 18. S. 109 giebt damit:

$$\frac{1}{P} = h^2\left(\frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2} + \frac{c_3^2}{p_3}\right) - \frac{h^2}{\left[\frac{1}{p}\right]}\left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} - \frac{c_3}{p_3}\right)^2 \tag{17}$$

Dieses kann man auch auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{P} = h^2\,\frac{p_1(c_2 - c_3)^2 + p_2(c_1 + c_3)^2 + p_3(c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \tag{18}$$

Der mittlere Übertragungs-Fehler ist hiernach:

$$\frac{m(h)}{h} = \mu(h) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{p_1(c_2 - c_3)^2 + p_2(c_1 + c_3)^2 + p_3(c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}} \tag{19}$$

Wenn man hier die Bedeutungen $c_1 = cotg\,(1)$ u. s. w. wieder einführt, so nimmt der Zähler von (18) und (19) folgende Form an:

$$p_1\,\frac{sin^2\,((2) - (3))}{sin^2\,(2)\,sin^2\,(3)} + p_2\,\frac{sin^2\,(2)}{sin^2\,(1)\,sin^2\,(3)} + p_3\,\frac{sin^2\,(3)}{sin^2\,(1)\,sin^2\,(2)} \tag{20}$$

Wenn man hier den Winkel (2) = (3) setzt, also das Dreieck gleichschenklig annimmt, so fällt das erste Glied in (20) fort, die Gleichschenkligkeit wirkt also günstig. Wir wollen diese Annahme in (19) einführen, also $c_3 = c_2$ setzen, zugleich auch soll $p_3 = p_2$ gesetzt werden, dieses giebt aus (19) und (20):

$$\mu(h) = \frac{\mu}{\varrho}\sqrt{\frac{2}{(2p_1 + p_2)\,sin^2\,(1)}} \text{ oder } = \frac{2\mu}{\varrho\,sin\,(1)}\sqrt{\frac{1}{4p_1 + p_2 + p_3}} \tag{21}$$

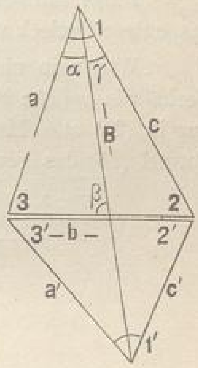
Setzt man noch die Gewichte p_1 und $p_2 = p_3 = 1$, so giebt dieses (zu Fig. 3. gehörig):

$$\frac{m(h)}{h} = \mu(h) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (22)$$

Von der Formel (21) kann man auch unmittelbar auf den Rhombus Fig. 5. S. 114 übergehen, doch wollen wir vorher noch eine allgemeinere Aufgabe einschalten.

Diagonale eines Vierecks.

Fig. 4.



In ähnlicher Weise wie für eine Dreiecksseite kann man auch das Gewicht für eine Diagonale B in Fig. 4. bestimmen, wenn auf einer Basis b nach zwei Seiten hin Dreiecke (1) (2) (3) und (1′) (2′) (3′) aufgebaut sind.

In jedem dieser beiden Dreiecke hat man eine Bedingungs-Gleichung, also zusammen:

a) $+(1)+(2)+(3)-180° = 0$

b) $+(1')+(2')+(3')-180° = 0$

Die Diagonale B wird als Funktion gemessener Winkel dargestellt durch die Gleichung:

$$B^2 = a^2 + a'^2 - 2\,a\,a' \cos(3+3') \qquad (23)$$

wobei $a = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2)$, $a' = \frac{b}{\sin(1')} \sin(2')$

Wenn man die Funktion B nach (1), (2) und (3) differentiiert, und wenn man die geometrischen Beziehungen beachtet:

$$a - a' \cos(3+3') = B \cos\alpha, \text{ und } a' \sin(3+3') = B \sin\alpha$$

so findet man:

$$f_1 = -a\cos\alpha\, cotg(1), \quad f_2 = +a\cos\alpha\, cotg(2), \quad f_3 = +a\sin\alpha$$
$$f_1' = -a'\cos\alpha'\, cotg(1'), \quad f_2' = +a'\cos\alpha'\, cotg(2'), \quad f_3' = +a'\sin\alpha$$

Wenn man damit ebenso verfährt, wie bei der vorigen Aufgabe (18) — (20), so findet man zuerst, dass sich die Gewichtsreciproke von P in zwei Teile zerlegt, entsprechend den zwei Dreiecken, nämlich:

$$\frac{1}{P} = \mathrm{I} + \mathrm{II} \qquad (24)$$

Wir beschäftigen uns zunächst nur mit dem ersten Teil I, die Ausrechnung ist nicht schwierig, jedoch etwas langwierig, das Ergebnis ist:

$$\mathrm{I} = a^2 \frac{p_1(\sin\alpha - \cos\alpha\, cotg(2))^2 + p_2(\sin\alpha + \cos\alpha\, cotg(1))^2 + p_3 \cos^2\alpha\,(cotg(1) + cotg(2))^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3}$$

Den Zähler hievon kann man auf diese Form bringen:

$$p_1 \left(\frac{a\cos(\alpha+(2))}{\sin(2)}\right)^2 + p_2 \left(\frac{a\cos((1)-\alpha)}{\sin(1)}\right)^2 + p_3 \frac{(a\cos\alpha \sin((1)+(2)))^2}{\sin(1)\sin(2)}$$

oder $p_1 \left(\frac{b}{\sin(1)} \cos((3)-(2)+\beta)\right)^2 + p_2 \left(\frac{a}{\sin(1)} \cos\gamma\right)^2 + p_3 \left(\frac{c}{\sin(1)} \cos\alpha\right)^2$

Dieses geht in den entsprechenden Teil von (21) und (22) über, wenn man $\beta = 90^\circ$ setzt, denn dann wird $\cos((3) - (2) + \beta) = \sin((3) - (2))$ und $h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3)$ oder $h = a \sin(3) = c \sin(2)$. Dieser Übergang, der in sich richtig sein muss, dient als Entwicklungs-Probe.

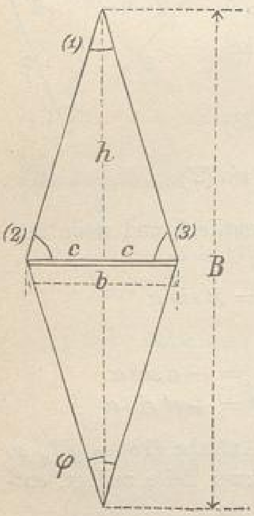
Um nun zusammen zu fassen, bilden wir das mittlere Fehlerquadrat der Diagonale B von Fig. 4. S. 123:

$$(m(B))^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \left\{ \frac{p_1 b^2 \cos^2((3) - (2) + \beta) + p_2 a^2 \cos^2 \gamma + p_3 c^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2(1)(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)} + \frac{p_1' b'^2 \ldots}{\sin^2(1')(p_1' p_2' \ldots)} \right\} \quad (25)$$

Dabei soll der zweite teilweise nur angedeutete Teil in der Klammer dasselbe für das untere Dreieck von Fig. 4. S. 113 bedeuten, was der erste Teil für das obere Dreieck.

Will man nicht den mittleren Fehler $m(B)$ selbst haben, sondern das Fehler-Verhältnis $m(B) : B$, welches wir sonst mit $\mu(B)$ bezeichnet haben, so braucht man nur in (25) alle Masse b, a u. s. w. in Teilen von B auszudrücken, dann liefert die Formel (25) das gewünschte $\mu(B)$.

Fig. 5.



Man kann nach der Formel (25) für jedes Basis-Rhomboid die Fehler-Übertragung von der kurzen Diagonale zur langen Diagonale beurteilen, wenn man ausser der Form des Vierecks auch den mittleren Winkelfehler μ und die sämtlichen Gewichte p kennt.

Man bemerkt sofort, dass diese Gewichte sehr ungleiche Einflüsse auf das Schluss-Ergebnis ausüben, am wichtigsten ist das Gewicht p_1 bzw. p_1', denn in der Formel (25) trägt eine Verstärkung des Gewichtes p_1 wesentlich zur Vergrösserung des Nenners bei und im Zähler kommt p_1 nur in Verbindung mit $\cos((3) - (2) + \beta)$ vor, was mit $\beta = 90^\circ$ und $(2) = (3)$, also in dem wichtigsten Falle, verschwindet.

Wir wollen diesen Fall, $\beta = 90^\circ$ und $p_3 = p_2$, nun behandeln und zugleich annehmen, dass das untere Dreieck in Fig. 4. S. 113 dem oberen Dreieck symmetrisch sei, dass man also den Rhombus Fig. 5. habe. Damit giebt (25):

$$(m(B))^2 = \left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^2 \left\{ 2 \frac{2h^2}{\sin^2(1)(2p_1 + p_2)} \right\}$$

$$\frac{m(B)}{2h} = \frac{m(B)}{B} = \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{\sin(1)} \sqrt{\frac{1}{(2p_1 + p_2)}} \quad (26)$$

Diese Formel kann man auch einfacher aus (22) S. 113 herleiten, denn es ist $m(B) = m(h)\sqrt{2}$ und $\mu(B) = \frac{\mu(h)}{\sqrt{2}}$.

Günstigste Gewichts-Verteilung.

Nun wollen wir die frühere Frage wieder aufnehmen, welche *Verteilung* der Gewichte p_1 und p_2 am günstigsten ist? Es handelt sich dabei darum, den Ausdruck (26) möglichst klein zu machen bei konstanter Summe $p_1 + p_2 + p_3 = p_1 + 2p_2 = [p]$, (indem die Messungs-Arbeit für jeden Winkel dem Gewicht proportional gesetzt wird).

Da die Gewichte in (26) nur im Nenner vorkommen, muss man darnach trachten, die Funktion $f = 2p_1 + p_2$ möglichst gross zu machen, bei konstantem $p_1 + 2p_2 = [p]$. Eliminiert man zu diesem Zwecke p_1, indem man $p_1 = [p] - 2p_2$ in f einsetzt so wird:

$$f = 2[p] - 4p_2 + p_2 = 2[p] - 3p_2$$

und dieses wird am grössten, wenn $p_2 = 0$ gesetzt wird, dadurch muss aber $p_1 = [p]$ werden, und man hat aus (26):

$$\mu(B)\,min = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{1}{2[p]}} \qquad (27)$$

Dieses Ergebnis, dass nur der *eine* Winkel (1) an der Spitze, die beiden Basiswinkel (2) und (3) aber gar nicht zu messen sind, mag zuerst sonderbar erscheinen; man muss es aber richtig auffassen: dasselbe gilt, *wenn* das Dreieck gleichschenklig ist; man muss also doch mindestens so viel von den Basiswinkeln messen, dass man weiss, ob die Gleichschenkligkeit vorhanden ist. Man kann also sagen: Wenn man durch vorläufige Messungen gefunden hat, dass ein Dreieck von der Form Fig. 3. S. 112 sehr nahe gleichschenklig ist, dann kann man, wenn man nur auf die Höhe ausgeht, alle weitere Winkelmess-Arbeit auf den spitzen Winkel (1) konzentrieren.

Wir wollen nun in (26) statt des Winkels (1) das Vergrösserungs-Verhältnis $B : b = v$ einführen, oder auch, indem wir nach Fig. 5. die Hälften nehmen, $h : c = v$ setzen, wobei $sin\,(1) = 2\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi$, und:

$$sin\,\varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + h^2}} \qquad cos\,\varphi = \frac{h}{\sqrt{c^2 + h^2}}$$

Wenn man damit $sin\,(1)$ in v ausdrückt und in (26) einsetzt, so bekommt man für den Rhombus Fig. 5. S. 114:

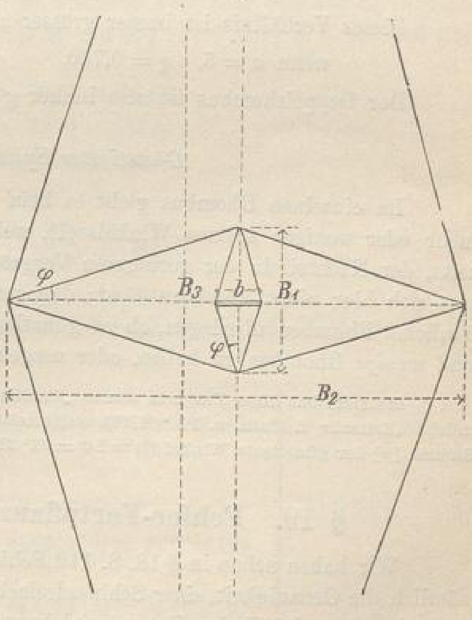
$$\frac{1}{sin\,(1)} = \frac{1 + v^2}{2v} \qquad (28)$$

$$\mu(B) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{1 + v^2}{2v}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \qquad (29)$$

und das Minimum, wie bei (27):

$$\mu(B)\,min = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{1 + v^2}{2v}\sqrt{\frac{1}{2[p]}} \qquad (30)$$

Fig. 6.



Das rhombische Multiplikations-Netz.

Nach Andeutung von Fig. 6. kann man die rhombische Vergrösserung wiederholt anwenden. Wenn die Rhomben alle ähnlich und ähnlich gemessen sind, so hat man nach (26):

$$\mu(B_1) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{1}{sin\,(1)}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}}$$

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{1}{sin\,(1)}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \quad \text{u. s. w.}$$

Dieses giebt eine ähnliche Fehler-Fortpflanzung, wie wir schon bei Fig. 2. S. 111 untersucht haben, und man hat daher für $r$malige Rhomben-Wiederholung:

$$\frac{m(B_r)}{B_r} = \mu(B_r) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{1}{2p_1+p_2}}\sqrt{r} \tag{31}$$

Bleiben wir zunächst bei *zwei*maliger Wiederholung stehen, so haben wir mit $r = 2$:

$$\mu(B_r) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1}{sin(1)}\sqrt{\frac{2}{2p_1+p_2}}$$

Wenn nun wieder $B_2 : b = v$ werden soll, so muss $B_2 : B_1 = B_1 : b = \sqrt{v}$ sein, und eine ähnliche Rechnung wie bei (28) giebt: $\dfrac{1}{sin(1)} = \dfrac{1+v}{2\sqrt{v}}$,

folglich

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1+v}{2\sqrt{v}}\sqrt{\frac{2}{2p_1+p_2}} \tag{32}$$

Dieses gilt für beliebige p_1 und $p_3 = p_2$; dagegen im günstigsten Falle mit $p_1 = p_1 + p_2 + p_3 = [p]$ hat man:

$$\mu(B)\, min = \frac{\mu}{\varrho}\frac{1+v}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{[p]}} \tag{33}$$

Nun kann man die Ausdrücke (30) und (32) zweckmässig vergleichen, es sei kurz $(\mu)'$ der Fehler-Ausdruck nach (30) für *einen* Rhombus, und $(\mu)''$ für *zwei* Rhomben, und das Vergrösserungs-Verhältnis v sei in beiden Fällen dasselbe. Dann hat man das Verhältnis $(\mu'') : (\mu')$ oder $\mu(B_2) : \mu(B) = q$ wie folgt:

$$q = \frac{1+v}{\sqrt{2v}} : \frac{1+v^2}{2v} \quad , \quad q = \frac{1+v}{1+v^2}\sqrt{2v}$$

Dieses Verhältnis ist immer grösser als 1 und giebt z. B.

wenn $v = 5$, $q = 0{,}730$, wenn $v = 10$, $q = 0{,}487$.

Der Doppelrhombus ist also immer günstiger als der einfache Rhombus.

Günstigster Spitzen-Winkel (1).

Im einzelnen Rhombus giebt es kein Mass für den Vorteil oder Nachteil eines mehr oder weniger spitzen Winkels (1), weil dem Vorteil in der Genauigkeit einerseits, der Nachteil in der geringeren Vergrösserung $B : b$ andererseits gegenübersteht, was sich hier nicht abwägen lässt; dagegen kann man bei *mehr*facher Anwendung ähnlicher Rhomben überlegen, ob es günstiger ist, den Winkel (1) *sehr* spitz zu machen und *wenige* Rhomben zu haben, oder umgekehrt.

Helmert hat diese Frage in seinen „Studien über rationelle Vermessungen", III, 45. (Schlömilchs „Zeitschr. f. Math. u. Ph." 1868) aufgestellt, und dahin beantwortet, dass bei konstanter Summe $[p]$ der günstigste Winkel $(1) = 2\varphi = 33° 32'$ ist.

§ 19. Fehler-Fortpflanzung in Dreiecksketten.

Wir haben schon in § 18. S. 112 Fehlerverhältnisse in Dreiecksketten behandelt, nämlich die Genauigkeit *einer* Schlussdreiecksseite. Wir gehen nun über zu der Frage nach der Genauigkeit der Gesamtausdehnung einer Kette.