UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 19. Fehlerfortpflanzung in Dreiecksketten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Visual Library

Dieses giebt eine ähnliche Fehler-Fortpflanzung, wie wir schon bei Fig. 2. S. 111 untersucht haben, und man hat daher für $r$malige Rhomben-Wiederholung:

$$\frac{m(B_r)}{B_r} = \mu(B_r) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{sin(1)} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p_2}} \sqrt{r} \tag{31}$$

Bleiben wir zunächst bei *zwei*maliger Wiederholung stehen, so haben wir mit $r = 2$:

$$\mu(B_r) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{sin(1)} \sqrt{\frac{2}{2p_1 + p_2}}$$

Wenn nun wieder $B_2 : b = v$ werden soll, so muss $B_2 : B_1 = B_1 : b = \sqrt{v}$ sein, und eine ähnliche Rechnung wie bei (28) giebt: $\dfrac{1}{sin(1)} = \dfrac{1+v}{2\sqrt{v}}$,

folglich

$$\mu(B_2) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v}{2\sqrt{v}} \sqrt{\frac{2}{2p_1 + p_2}} \tag{32}$$

Dieses gilt für beliebige p_1 und $p_3 = p_2$; dagegen im günstigsten Falle mit $p_1 = p_1 + p_2 + p_3 = [p]$ hat man:

$$\mu(B)\, min = \frac{\mu}{\varrho} \frac{1+v}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{[p]}} \tag{33}$$

Nun kann man die Ausdrücke (30) und (32) zweckmässig vergleichen, es sei kurz $(\mu)'$ der Fehler-Ausdruck nach (30) für *einen* Rhombus, und $(\mu)''$ für *zwei* Rhomben, und das Vergrösserungs-Verhältnis v sei in beiden Fällen dasselbe. Dann hat man das Verhältnis $(\mu''):(\mu')$ oder $\mu(B_2):\mu(B) = q$ wie folgt:

$$q = \frac{1+v}{\sqrt{2v}} : \frac{1+v^2}{2v} \quad , \quad q = \frac{1+v}{1+v^2}\sqrt{2v}$$

Dieses Verhältnis ist immer grösser als 1 und giebt z. B.

wenn $v = 5$, $q = 0{,}730$, wenn $v = 10$, $q = 0{,}487$.

Der Doppelrhombus ist also immer günstiger als der einfache Rhombus.

Günstigster Spitzen-Winkel (1).

Im einzelnen Rhombus giebt es kein Mass für den Vorteil oder Nachteil eines mehr oder weniger spitzen Winkels (1), weil dem Vorteil in der Genauigkeit einerseits, der Nachteil in der geringeren Vergrösserung $B : b$ andererseits gegenübersteht, was sich hier nicht abwägen lässt; dagegen kann man bei *mehr*facher Anwendung ähnlicher Rhomben überlegen, ob es günstiger ist, den Winkel (1) *sehr* spitz zu machen und *wenige* Rhomben zu haben, oder umgekehrt.

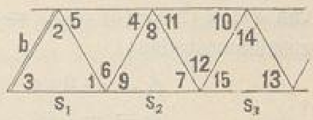
Helmert hat diese Frage in seinen „Studien über rationelle Vermessungen", III, 45. (Schlömilchs „Zeitschr. f. Math. u. Ph." 1868) aufgestellt, und dahin beantwortet, dass bei konstanter Summe $[p]$ der günstigste Winkel $(1) = 2\varphi = 33° 32'$ ist.

§ 19. Fehler-Fortpflanzung in Dreiecksketten.

Wir haben schon in § 18. S. 112 Fehlerverhältnisse in Dreiecksketten behandelt, nämlich die Genauigkeit *einer* Schlussdreiecksseite. Wir gehen nun über zu der Frage nach der Genauigkeit der Gesamtausdehnung einer Kette.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 1.



In der gitterförmigen Kette gleichseitiger Dreiecke, welche in Fig. 1. angedeutet ist, soll es sich um die *Summe* mehrerer Dreiecksseiten, z. B. $s_1 + s_2 + s_3$ handeln, wobei die einzelnen Seiten s_1, s_2, s_3 aus derselben Basis b, teilweise durch dieselben Winkel abgeleitet sind.

In jedem einzelnen Dreiecke seien alle drei Winkel gleich genau gemessen, und ausgeglichen, also z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll}
a) & (1)+(2)+(3)-180^\circ = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b) & \ldots\ldots\ldots\; (4)+(5)+(6)-180^\circ = 0 \;\ldots\ldots\ldots \\
c) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (7)+(8)+(9)-180^\circ = 0 \\
d) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Alle diese Bedingungs-Gleichungen stehen ganz unabhängig von einander; wenn man sie aber trotzdem als *ein* System zur Ausgleichung der Dreieckskette als Ganzes auffassen will, so geben sie sehr einfache Normalgleichungs-Coëfficienten, nämlich: $[a\,a] + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ und im ganzen:

$$\left.\begin{array}{llll}
[a\,a] = 3 & [a\,b] = 0 & [a\,c] = 0 & [a\,d] = 0 \\
 & [b\,b] = 3 & [b\,c] = 0 & [b\,d] = 0 \\
 & & [c\,c] = 3 & [c\,d] = 0 \\
 & & & \ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Wenn man nach der Ausgleichung den mittleren Fehler oder das Gewicht der Summe $s_1 + s_2 + s_3$ berechnen will, so hat man die Gewichtsformel für bedingte Beobachtungen anzuwenden (vgl. Band I, 4. Aufl. 1895, S. 124, Gleichung (12)), nämlich:

$$\frac{1}{P} = [f\,f] - \frac{[a\,f]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,f\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,f\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} - \ldots \quad (3)$$

Diese Formel vereinfacht sich aber in unserem Fall sehr bedeutend; zunächst wird wegen $[a\,b] = 0$, der Wert $[b\,b\,.\,1] = [b\,b]$ und $[b\,f\,.\,1] = [b\,f]$ u. s. w., und deswegen wird (3) zuerst so:

$$\frac{1}{P} = [f\,f] - \frac{[a\,f]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,f]^2}{[b\,b]} - \frac{[c\,f]^2}{[c\,c]} - \ldots \quad (4)$$

Nun muss man die Funktion F näher betrachten:

$$F = s_1 + s_2 + s_3$$

$$F = \frac{b}{\sin(1)}\sin(2) + \frac{b}{\sin(1)}\frac{\sin(3)\sin(5)}{\sin(4)\sin(7)}\sin(8)$$
$$+ \frac{b}{\sin(1)}\frac{\sin(3)}{\sin(4)}\frac{\sin(5)}{\sin(7)}\frac{\sin(9)}{\sin(10)}\frac{\sin(11)}{\sin(13)}\sin(14) \quad (5)$$

Die Differential-Quotienten sind:

$$\left.\begin{array}{l}
f_1 = \dfrac{\partial F}{\partial(1)} = -s_1 \operatorname{cotg}(1) - s_2 \operatorname{cotg}(1) - s_3 \operatorname{cotg}(1) \\
f_2 = \dfrac{\partial F}{\partial(2)} = +s_1 \operatorname{cotg}(2) \\
f_3 = \dfrac{\partial F}{\partial(3)} = \qquad\qquad + s_2 \operatorname{cotg}(3) + s_3 \operatorname{cotg}(3) \\
f_4 = \dfrac{\partial F}{\partial(4)} = \qquad\qquad - s_2 \operatorname{cotg}(4) - s_3 \operatorname{cotg}(4) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (6)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

In dieser Weise bekommt man 15 Werte f, welche wir nun, mit Einführung von $(1) = (2) = (3) = \ldots = 60°$ und $cotg\, 60° = c$, sowie $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s$ so zusammenstellen:

$$\left.\begin{array}{lll} f_1 = -3\,s\,c & f_7 = -2\,s\,c & f_{13} = -1\,s\,c \\ f_2 = +1\,s\,c & f_8 = +1\,s\,c & f_{14} = +1\,s\,c \\ f_3 = +2\,s\,c & f_9 = +1\,s\,c & f_{15} = \quad 0 \\ & & \\ f_4 = -2\,s\,c & f_{10} = -1\,s\,c & \\ f_5 = +2\,s\,c & f_{11} = +1\,s\,c & \\ f_6 = \quad 0 & f_{12} = \quad 0 & \end{array}\right\} \tag{7}$$

Nun sieht man zuerst aus der Verbindung mit (1), dass

$$[a\,f] = f_1 + f_2 + f_3 = 0, \qquad [b\,f] = f_4 + f_5 + f_6 = 0, \qquad [c\,f] = 0 \text{ u. s. w.}$$

Damit wird die Gewichts-Formel (3) sehr einfach, nämlich:

$$\frac{1}{P} = [f\,f] = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + \cdots \tag{8}$$

Setzt man hier die Werte f nach (7) ein, so findet man:

$$\frac{1}{P} = (9 + 1 + 4 + 4 + 4 + 4 + 0 \ldots)\, s^2\, c^2 = 32\, s^2\, c^2 = 32\, s^2\, cotg^2\, 60° \tag{9}$$

Indessen gilt das zunächst nur für den Fall *dreier* Seiten $s_1 + s_2 + s_3$.

Wichtiger wird es sein, das allgemeine Gesetz der Gewichts-Formel (9) für irgend welche Seitenzahl zu bestimmen, etwa für n Seiten nach der Formel:

$$F_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \ldots s_n \tag{10}$$

Denkt man sich hiezu die Reihe (5) fortgesetzt, so sieht man leicht, dass die Winkel (2), (8) und (14) nur in jedem Gliede *ein*mal vorkommen, der Winkel (1) kommt in allen n Gliedern vor, und ähnliche Gesetze zeigen sich auch im übrigen, so dass man folgendes findet:

Winkel (1) giebt $(-s\,c - s\,c - s\,c \ldots)^2$ . . . . . $= (n\,s\,c)^2 = n^2\,(s\,c)^2$

" (2), (8), (14) ... geben $(s\,c)^2 + (s\,c)^2 + (s\,c)^2 + \ldots$ . . . . $= n\,(s\,c)^2$

Die Gruppe $\dfrac{(3)\,(5)}{(4)\,(7)}$ giebt . . . . . + ... $= 4\,(n-1)^2\,(s\,c)^2$

Die Gruppe $\dfrac{(9)\,(11)}{(10)\,(13)}$ giebt . . . . . + ... $= 4\,(n-2)^2\,(s\,c)^2$

Die nächste Gruppe giebt . . . . $= 4\,(n-3)^2\,(s\,c)^2$

. . . .

Die letzte derartige Gruppe giebt . . . . $4\,(1^2)\,(s\,c)^2$

Im ganzen hat man:

$$\frac{1}{P_n} = \left(n^2 + n + 4\left((n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots 2^2 + 1^2\right)\right)(s\,c)^2$$
$$= -3\,n^2 + n + 4\,(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots 2^2 + 1^2))\,(s\,c)^2$$

Nun ist aber die Summe der n ersten Quadrate bekanntlich:

$$n^2 + (n-1)^2 + \ldots 2^2 + 1^2 = \frac{2\,n^3 + 3\,n^2 + n}{6}$$

und damit wird:

$$\frac{1}{P_n} = \left(-3\,n^2 + n + 4\,\frac{2\,n^3 + 3\,n^2 + n}{6}\right) s^2\,c^2 = \frac{4\,n^3 - 3\,n^2 + 5\,n}{3}\,s^2\,c^2$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dabei ist $c = cotg\,60° = 0{,}577$, $c^2 = \frac{1}{3}$, und wenn man nun den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels mit μ einführt, so ist der mittlere Fehler der Seitensumme $s_1 + s_2 + s_3 \ldots s_n$, mit Anwendung der Bezeichnungsart der Anmerkung S. 110:

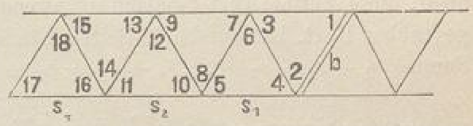
$$m\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\;cotg\,60° \sqrt{\frac{4\,n^2 - 3\,n + 5\,n}{3}} \tag{11}$$

Meist will man nicht den Fehler selbst haben, sondern das Verhältnis des Fehlers zu $s_1 + s_2 + \ldots s_n$ oder den sogenannten relativen Fehler, dieser ist:

$$\frac{m\,(n\,s)}{n\,s} = \mu\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,60° \sqrt{\frac{4\,n^2 - 3\,n + 5}{3\,n}} \tag{12}$$

Nachdem wir so den Fall der Dreieckskette Fig. 1. S. 117 in aller Ausführlichkeit behandelt haben, wollen wir noch einige andere ähnliche Fälle betrachten, jedoch nur die Schluss-Ergebnisse hier mitteilen, da die Entwicklung nach dem vorstehenden keine Schwierigkeit bieten kann.

Fig. 2.



In Fig. 2. soll es sich um die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n$ handeln; der mittlere Fehler dieser Summe wird gefunden:

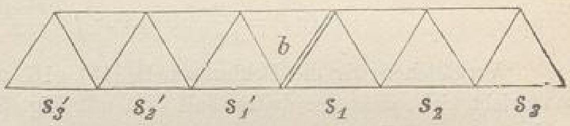
$$m\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\;cotg\,60° \sqrt{\frac{4\,n^3 + 3\,n^2 + 5\,n}{3}} \tag{13}$$

Nun kann man die zwei Fälle von Fig. 1. S. 117 und Fig. 2. zusammen nehmen.

Wenn man hiernach in Fig. 3. die Summe der auf beiden Seiten der Kette liegenden Seiten betrachtet:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n$$
$$+ s_1' + s_2' + s_3' + \ldots s_n',$$

Fig. 3.



so findet man dafür den mittleren Fehler durch Zusammensetzung von (11) und (13), nämlich:

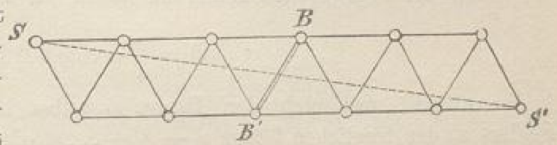
$$m\,(n\,s + n'\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\;cotg\,60° \sqrt{\frac{(4\,n^3 - 3\,n^2 + 5\,n) + (4\,n'^3 + 3\,n'^2 + 5\,n')}{3}} \quad (14$$

Nimmt man hier $n' = n$ und $n + n' = v$, so wird:

$$m\,(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\;cotg\,60° \sqrt{\frac{8\,n^3 + 10\,n}{3}} \text{ oder } = \frac{\mu}{\varrho}\,s\;cotg\,60° \sqrt{\frac{v^3 + 5\,v}{3}} \tag{15}$$

Eine andere Zusammenfassung von Fig. 1. und Fig. 2. zeigt Fig. 4., wobei es sich um die Diagonale $S\,S'$ handelt, welche näherungsweise etwa $= S\,B + B'\,S'$ gesetzt werden kann. Hiefür ist mit zweifacher Anwendung von (11), mit $2\,n = v$:

Fig. 4.

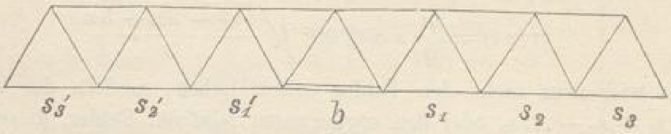


$$m\,(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,s\,cotg\,60° \sqrt{\frac{8\,n^3 - 6\,n^2 + 10\,n}{3}} = \frac{\mu}{\varrho}\,s\,cotg\,60° \sqrt{\frac{2\,v^3 - 3\,v^2 + 10\,v}{6}} \tag{16}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Einen weiteren Fall nehmen wir mit Fig. 5. vor. Die Basis b liegt in der Kettenrichtung selbst. Für die Summe nach der einen Seite $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n$ findet man:

Fig. 5.



$$m\,(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\; cotg\; 60^\circ \sqrt{\frac{4\,n^3 + 9\,n^2 + 5\,n}{3}} \tag{17}$$

Für die Gesamtsumme $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots \;\; + s_1' + s_2' + s_3' + \ldots$ genügt es nicht, diese Formel (17) zweifach anzuwenden, denn der Winkel, welcher der Basis b gegenüber liegt, hat auf beide Seiten Einfluss. Die selbständige Entwicklung für die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n + s_1' + s_2' + s_3' + \ldots s_n'$ giebt:

$$m\,(b + n\,s + n'\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\; cotg\, 60^\circ \sqrt{(n + n')^2 + \frac{4n^3 + 6n^2 + 5n}{3} + \frac{4n'^3 + 6n'^2 + 5n'}{3}} \tag{18}$$

Setzt man hier $n' = n$, so wird:

$$m\,(\,(2\,n + 1)\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\; s\; cotg\, 60^\circ \sqrt{\frac{8\,n^3 + 24\,n^2 + 10\,n}{3}} \tag{19}$$

Die ganze abgeleitete Länge ist hier $= (2\,n + 1)\,s$, weil das Mittelstück s als fehlerfreie Basis mitgerechnet wird; wir wollen deswegen nun setzen $2\,n + 1 = v$, und damit kann man das Vorstehende auf folgende Form bringen:

$$m\,(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\; s\; cotg\; 60^\circ \sqrt{\frac{v^3 + 3\,v^2 - 4\,v}{3}} \tag{20}$$

Vergleichen wir die Fehlerformeln (15), (16) und (20) für die drei Hauptfälle, so ergiebt sich, dass der dritte Fall (20) mit Fig. 5. etwas ungünstiger ist, als die beiden ersten Fälle, und daraus folgt, dass es besser ist, die Basis b *quer* zur Kette zu legen, wie in Fig. 3. und 4., als nach der Längsrichtung, Fig. 5.

Wenn aber die Kette sehr lang ist, d. h. n oder v sehr gross, so kann man alle Formeln näherungsweise als *gleich* betrachten, indem man n und n^2 gegen n^3 vernachlässigt. Man sieht dann auch, dass die Formeln mit v allgemein die Hälfte der entsprechenden Formeln für n geben, dass es also jedenfalls günstiger ist, die Basis in die Mitte als an das Ende der Kette zu legen, indem z. B. die Verdoppelung der Kettenlänge von der Mitte aus nur das $\sqrt{2}$fache des Fehlers, dagegen von einem Ende aus das $\sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$fache giebt.

Mit der angegebenen Näherung haben wir aus (11):

$$m\;(n\;s) = \frac{\mu}{\varrho}\; s\; cotg\, 60^\circ \sqrt{\frac{4\,n^3}{3}} \tag{21}$$

Oft will man nicht den Fehler m selbst haben, sondern das Verhältnis des Fehlers zu der fraglichen Länge $s_1 + s_2 + \ldots s_n$ oder den sogenannten relativen Fehler. Derselbe ist für (21):

$$\mu\,(n\,s) = \frac{m\,(n\,s)}{n\,s} = \frac{\mu}{\varrho}\; cotg\; 60^\circ \sqrt{\frac{4\,n}{3}} \tag{22}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Oder da $cotg\,60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, haben wir:

$$\mu(n\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{2}{3}\sqrt{n}$$

Setzt man rund $\mu = \pm 1''$, so giebt dieses:

$$\mu(n\,s) = 0{,}000\,003\,23\sqrt{n}$$

Dieses ist der relative Fehler für n fache Ketten-Ausdehnung von der Basis an einem Ende der Kette. Ist dagegen die Basis in der Mitte, und dehnt sich die Kette nach beiden Seiten je um das $\frac{v}{2}$fache der Basis, also im ganzen wieder um das v fache aus, so bekommt man:

$$\mu(v\,s) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{1}{3}\sqrt{v} \text{ oder } = 0{,}000\,001\,62\sqrt{v}$$

Vergleichung der Rhomben-Diagonale mit der Gitterlinie.

Von allen Vergleichungen, welche zwischen den Formeln dieses § unter sich und mit denen des vorhergehenden § 18. angestellt werden können, wollen wir hier nur die wichtigste herausheben, entsprechend Fig. 6., wo eine Rhomben-Diagonale B und eine Gitterlinie B, beide $= 5\,b$, dargestellt sind.

Für die mittleren Fehler haben wir nach (29) § 18., S. 115, und nach (20) § 19., S. 120:

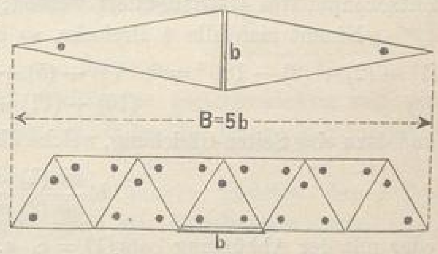
$$\text{Rhombus:}\quad \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho}\,\frac{1+v^2}{2v}\sqrt{\frac{1}{2p_1+p_2}}$$

$$\text{Gitter:}\quad \mu(B) = \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,60°\sqrt{\frac{v^2+3v-4}{3v}}$$

Nimmt man im ersten Falle $p_1 = p_2 = 1$, also $2p_1 + p_2 = 3$ und in beiden Fällen $\mu =$ rund $\pm 1''$ und $v = 5$, so erhält man:

Rhombus $\mu(B) = 0{,}000\,007\,27$ rund $= 7$ Milliontel
Gitter $\mu(B) = 0{,}000\,004\,34$ „ $= 4$ Milliontel

Fig. 6.



Die Gitterlinie hat also einen kleineren Fehler als die Rhomben-Diagonale; dieses Verhältnis gestaltet sich aber ungünstiger, wenn man die Zahl der Winkel-Messungen überlegt. Der Rhombus hat nur 6 Winkel, und von diesen brauchen sogar die 4 Basiswinkel nur genähert bekannt zu sein, man kann im Rhombus fast die ganze Arbeit auf die *zwei* spitzen Winkel konzentrieren, dagegen hat das Gitter 9 Dreiecke mit 27 Winkeln, oder wenn man die unwichtigen Winkel ausscheidet, immer noch 21 Winkel.

Trotz dieses starken theoretischen Missverhältnisses könnte doch auch das Gitternetz, wegen der *kurzen* Seiten, unter Umständen praktische Verwendung als Basisnetz finden. (Vgl. S. 108.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Azimut-Übertragung.

Die Azimut-Übertragung längs einer Dreieckskette besteht einfach in der *Summierung* aller längs eines Polygons auftretender Dreieckswinkel, z. B. in Fig. 1. (S. 117) besteht die Azimut-Übertragung längs $s_1 + s_2 + s_3$ in der Summierung $(3) + (1) + (6) + (9) + (7) + \ldots$

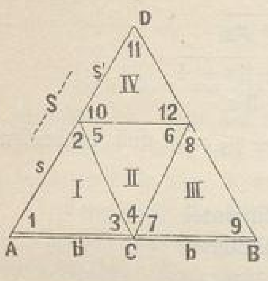
Wenn jedoch die Azimut-Übertragung längs der Haupterstreckung einer Dreieckskette besonders wichtig ist, so soll man schon die Anordnung der Messungen darnach einrichten, also nicht bloss die einzelnen je $60°$ betragenden Winkel in den Ketten von Fig. 1. bis 5. S. 117—120 messen, sondern die je nahezu $180°$ betragenden Winkel der in der Haupterstreckung liegenden Seiten.

Besser noch ist es, für die Zwecke der Azimut-Übertragung die Dreiecksseiten besonders anzuordnen, wie z. B. Bessel bei der Gradmessung in Ostpreussen gethan hat. Dieses ist aus dem Netzbilde der Gradmessung in Ostpreussen in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 499 zu ersehen, indem auf der nordwestlichen Gesamterstreckung Tunz-Galtgarben-Nidden-Memel nur zwei Zwischenpunkte Galtgarben und Nidden sind, während auf der südöstlichen Grenze 7 Zwischenpunkte zur Azimut-Übertragung nötig wären.

§ 20. Verschiedene Fehler-Betrachtungen zur Anlage von Dreiecks-Netzen.

I. Grösse der Dreiecke.

Fig. 1.



Eine erste wichtige Frage betrifft die *Grösse* der Dreiecksseiten. Soll man, wenn man die Wahl hat, grosse oder kleine Dreiecke nehmen?

Diese Frage ist sehr unbestimmt, wir wollen ihr mit Fig. 1. folgende bestimmtere Fassung geben:

Auf einer Geraden sind drei feste Punkte A, C, B gegeben, und zwar, wie wir meist bei Grundlinien annehmen, fehlerfrei gegeben, ein Punkt D kann entweder durch 4 Dreiecke I, II, III, IV mit Benützung des Zwischenpunktes C, oder durch *ein* Dreieck ABD ohne Benützung des Zwischenpunktes C trianguliert werden; welches ist das günstigere?

Nimmt man alle 4 Dreiecke, so hat man zunächst 4 Summen-Gleichungen:

$$(1) + (2) + (3) - 180° = 0, \quad (4) + (5) + (6) - (180) = 0, \quad (7) + (8) + (9) - 180° = 0,$$
$$(10) + (11) + (12) - 180° = 0 \qquad (1)$$

und dazu eine Seiten-Gleichung, welche die Beziehung zwischen b' und b ausdrückt, d. h.:

$$b' \frac{\sin(1)}{\sin(2)} \frac{\sin(5)}{\sin(6)} \frac{\sin(8)}{\sin(9)} = b$$

oder mit der Abkürzung $\cot g\,(1) = c_1$ u. s. w. giebt dieses:

$$c_1 v_1 - c_2 v_2 + c_5 v_5 - c_6 v_6 + c_8 v_8 - c_9 v_9 + \ldots = 0 \qquad (2)$$

Die Seite $AD = S$ wird in b' ausgedrückt durch die Funktion:

$$S = s + s' = b' \frac{\sin(3)}{\sin(2)} + b' \frac{\sin(1)\sin(4)\sin(12)}{\sin(2)\sin(6)\sin(11)}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN