

## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 21. Triangulierungs-Ketten und Netze der preussischen  
Landes-Aufnahme

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

## § 21. Triangulierungs-Ketten und Netze der preussischen Landes-Aufnahme.

Nachdem wir schon früher in § 2. S. 15 u. ff. die Aufsuchung und Auswahl der Triangulierungs-Punkte in dem Sinne behandelt haben, welche Punkte man vermöge der gegenseitigen Sichten u. s. w. benützen *kann*, wollen wir nun die mehr theoretische Frage aufwerfen, welche Punkte und welche Verbindungs-Sichten man nehmen *will*.

Nach der ersten Einführung der Methode der kleinsten Quadrate in die Triangulierungen ist bald die Anschauung entstanden, dass man nun darauf ausgehen müsse, äusserst viele Messungen und Kontrollen in eine Ausgleichung zusammen zu bringen, und es gab eine Zeit, in welcher es als höchste Triangulierungs-Leistung gepriesen wurde, 100 und mehr Bedingungs-Gleichungen zusammen zu fassen und ebenso viele Normalgleichungen numerisch aufzulösen. In dieser Beziehung haben sich die Anschauungen wieder teilweise geändert.

Folgendes sind die Grundsätze, welche bei den neuesten Triangulierungen der preussischen Landes-Aufnahme unter General *Schreiber* zur Anwendung kommen; wir benützen dazu das sehr anschauliche und charakteristische Beispiel der Ketten und des Netzes in der Provinz Hannover, welche in unserer Fig. 1. S. 129. dargestellt sind.

Wir haben auf dem hier dargestellten Gebiete *drei* Grundlinien:

- |    |                                  |               |           |                   |      |
|----|----------------------------------|---------------|-----------|-------------------|------|
| 1) | Grundlinie bei Braak in Holstein | im Jahre 1871 | gemessen, | 5875 <sup>m</sup> | lang |
| 2) | " " Göttingen                    | " 1880        | "         | 5193 <sup>m</sup> | "    |
| 3) | " " Meppen                       | " 1883        | "         | 7039 <sup>m</sup> | "    |

Die geradlinigen Entfernungen dieser Grundlinien von einander sind rund im Mittel 230<sup>km</sup> und zu der trigonometrischen Verbindung sind drei zusammenschliessende *Ketten* angeordnet, nämlich die „Hannoversche Kette“ im Westen, sowie Teile der „Elbkette“ und der „Hannoverisch-Sächsischen Kette“ im Osten.

Diese *Ketten* wurden zuerst in sich ausgeglichen, und liefern dann den festen Rahmen für das dazwischenliegende „Netz“, welches den Namen „Weser-Netz“ führt.

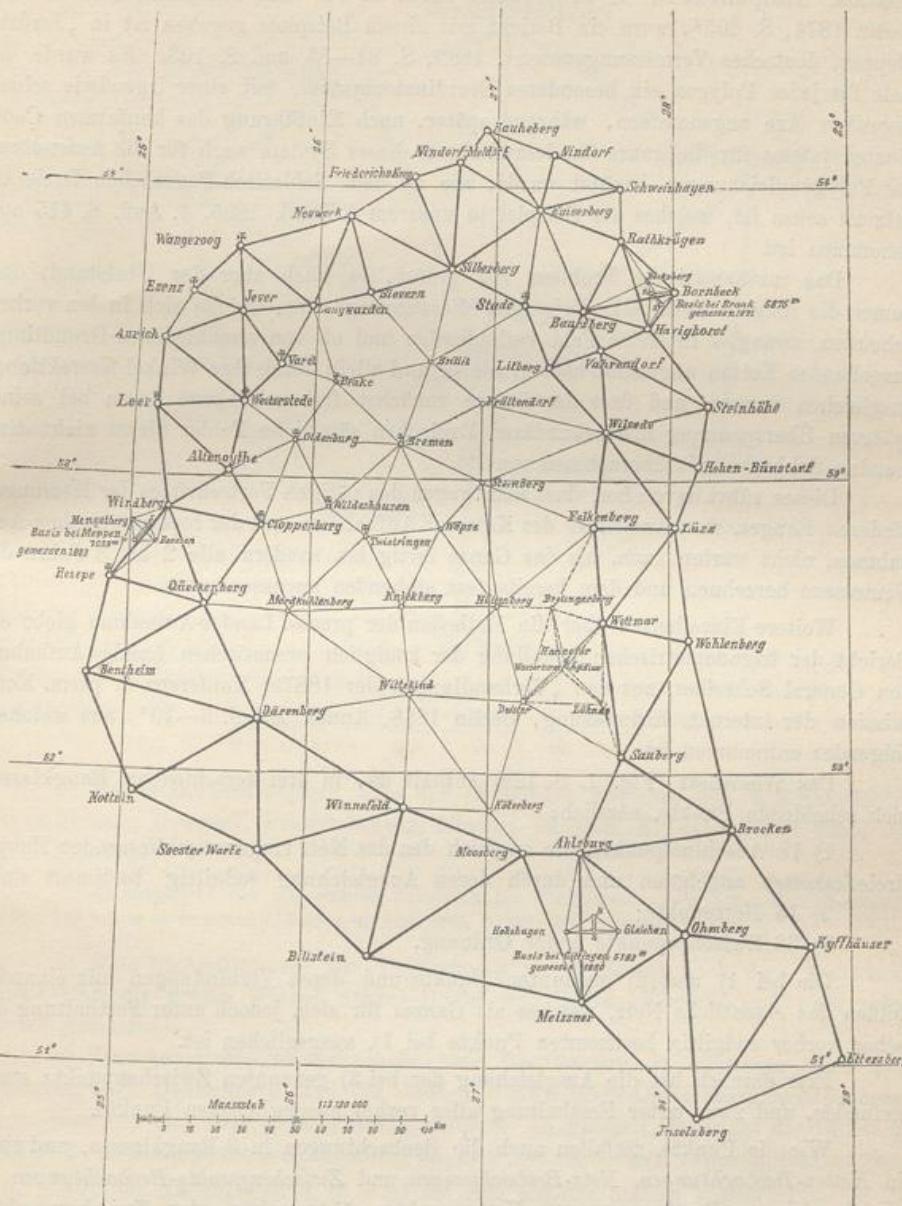
Ehe wir mit der Beschreibung dieser besonderen Verhältnisse fortfahren, müssen wir hier über die Anlage der preussischen Ketten und Netze im allgemeinen das Nötige berichten.

Es geschieht dieses am besten durch Vorführung der geschichtlichen Entwicklung, welche diese Anlage und die zugehörigen Ausgleichungen genommen haben, nach einer Mitteilung von Major *Haupt* in den „Astronom. Nachrichten“ 107. Band, Nr. 2549—2550, (Sept. 1883).

Als in den 60er Jahren dieses Jahrhunderts bei der preussischen Landes-Triangulierung Ketten, welche einen von Dreiecken freien Landesteil umspannten, wieder in sich zusammen schlossen, stellte sich der Übelstand heraus, dass trotz der Aufstellung aller vorhandenen und notwendigen Winkel- und Seiten-Gleichungen identische Punkte, von verschiedenen Seiten her berechnet, *nicht* dieselbe Länge und Breite erhielten, und dass der von Dreiecken freie innere Raum, das Polygon, *nicht* die seinem Inhalt entsprechende Winkelsumme erhielt, denn es fehlten die drei nötigen Polygon-Gleichungen. (Was diese Gleichungen betrifft, so haben wir bereits in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, S. 177 darüber gehandelt.)

Fig. 1.

Triangulierung der trigonometrischen Abteilung der Landes-Aufnahme in der Provinz Hannover.  
(Massstab 1 : 3 130 000.)



Die Methode, welche hiefür von der preussischen Landes-Triangulation eingeführt wurde, ist von dem früheren Hauptmann *Schreiber* (späteren Chef der Landes-Aufnahme) angegeben, dasselbe liefert zwei Gleichungen durch die Projektion der inneren Polygonkranz-Begrenzung auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges, sphäroidisches Coordinaten-System.

Diese *Schreibersche* Methode des Polygonkranz-Anschlusses durch rechtwinklige Coordinaten ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. I. Teil, Berlin 1870, S. 421 und Hauptdreiecke II. Teil, Berlin 1874, S. 605“, wozu ein Bericht mit einem Beispiele gegeben ist in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen“, 1885, S. 81—85 und S. 103. Es wurde damals für jedes Polygon ein besonderes Coordinatensystem, mit einer irgendwie schief-liegenden Axe angenommen, während später, nach Einführung des konformen Coordinatensystems für die ganze Landesaufnahme, dieses System auch für die Aufstellung der Polygongleichungen benutzt wurde, wie an dem Schlesisch-Posen-schen Dreiecksnetz zu sehen ist, welches als Beispiel in unserem I. Band, 1895, 4. Aufl. S. 415 aufgenommen ist.

Das mathematische Problem war gelöst, es blieb aber der Übelstand, dass immer die jüngste Kette alle diejenigen Missstimmigkeiten, welche sich in den vorhergehenden, zwanglos in freies Feld verlaufenden und oft von verschiedenen Grundlinien ausgehenden Ketten angehäuft hatten, einzig und allein durch *ihre* Winkel-Korrektionen ausgleichen musste, und dass der innere zunächst frei gebliebene Raum bei seiner späteren Überspannung mit sekundären Dreiecken sämtliche Fehler dieses nicht stimmenden Schlusses mit übernehmen musste.

Dieses röhrt davon her, dass man wegen des nötigen Fortschrittes der Messungen niederen Ranges, zum Anschluss der Kataster-Aufnahmen und der topographischen Aufnahmen, nicht warten kann, bis das Ganze fertig ist, sondern alle 2 bis 3 Jahre das Gemessene berechnen und dem bereits fest stehenden anpassen muss.

Weitere Einzelheiten über die Methoden der preuss. Landes-Aufnahme giebt ein Bericht der trigonometrischen Abteilung der königlich preussischen Landes-Aufnahme von General Schreiber, aus den „Verhandlungen der 1887er Konferenz d. perm. Kommission der internat. Erdmessung, Berlin 1888, Annex X“, S. 6—10, aus welchem folgendes entnommen ist.

Das Wesernetz (Fig. 1. S. 129) enthält 66, in drei verschiedene Rangklassen sich scheidende Punkte, nämlich:

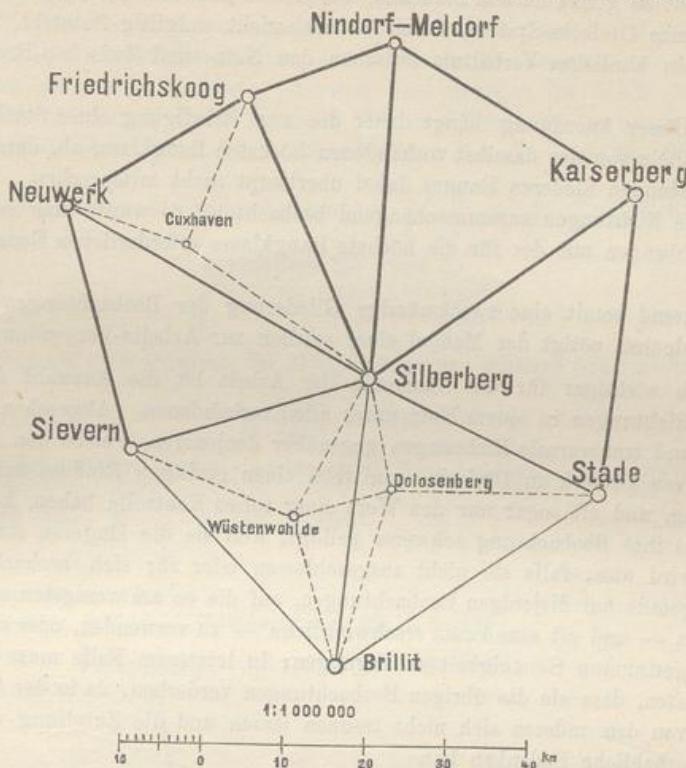
- 1) 18 Anschlusspunkte, die zugleich den das Netz rings umschliessenden Hauptdreiecksketten angehören und durch deren Ausgleichung endgültig bestimmt sind;
- 2) 15 Netzpunkte;
- 3) 33 Zwischenpunkte erster Ordnung.

Die bei 1) und 2) genannten Punkte und deren Verbindungen mit einander bilden das eigentliche Netz, welches als Ganzes für sich, jedoch unter Festhaltung der schon vorher endgültig bestimmten Punkte bei 1), ausgeglichen ist.

Erst darnach hat die Ausgleichung der bei 3) genannten Zwischenpunkte stattgefunden, und zwar unter Festhaltung aller vorher ausgeglichenen Punkte.

Wie die Punkte, zerfallen auch die Beobachtungen in 3 Rangklassen, und zwar in *Ketten-Beobachtungen*, *Netz-Beobachtungen* und *Zwischenpunkts-Beobachtungen*, je nachdem sie zur Bestimmung von *Kettenpunkten*, *Netzpunkten* oder *Zwischenpunkten* dienen. Auf jeder Station werden diese drei Rangklassen, selbst bei gleichzeitiger Ausführung, dergestalt getrennt von einander gehalten, dass jede für sich auf der Station ausgeglichen werden kann. Demgemäß sind z. B. die Beobachtungen auf der sowohl der Kette als auch dem Netz angehörigen Station Silberberg wie folgt angeordnet und ausgeführt worden (vgl. Fig. 2. S. 131).

Fig. 2.  
Station Silberberg. Von Fig. 1, S. 129 in grösserem Massstab, mit Zwischenpunkten.



a) *Ketten-Beobachtungen*: jeder der 15 Winkel zwischen den 6 Ketten-Richtungen Sievern, Neuwerk, Friedrichskoog, Nindorf—Meldorf, Kaiserberg und Stade ist 8 mal gemessen;

Dieses entspricht der allgemeinen Vorschrift für Winkelmessung in allen Kombinationen, welche wir schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 259—272 mitgeteilt haben.

b) *Netz-Beobachtungen*: zur Bestimmung der Richtung nach dem Netzpunkt Brillit sind die beiden Winkel Stade—Brillit und Brillit—Sievern, und zwar jeder 12mal, gemessen;

c) *Zwischenpunkts-Beobachtungen*: zur Bestimmung der Richtung nach dem Zwischenpunkt Dolosenberg sind die beiden Winkel Stade-Dolosenberg und Dolosenberg—Sievern, und zwar jeder 6 mal, gemessen. In gleicher Weise ist die Richtung nach dem Zwischenpunkt Wüstenwohlde an zwei Netzrichtungen angeschlossen worden.

Jede der Rangklassen a, b, c ist für sich auf der Station ausgeglichen.

Eine derartige Anordnung gewährt gegenüber dem Streben, alle auf einer Station vorhandenen Richtungen möglichst zusammenhängend zu beobachten, den Vorteil, dass die Beobachtungen niederen Ranges in den Zwischenzeiten, wo die Luft-Beschaffenheit Beobachtungen höheren Ranges zu machen ohnehin verbietet, ausgeführt werden können, indem sie wegen der kleineren Entfernungen nicht nur leichter gelingen, sondern auch bei etwas weniger günstigen Umständen angestellt werden dürfen; denn es liegt auf

der Hand, dass Netz-Beobachtungen, deren Fehler auf das Gebiet des Netzes beschränkt bleiben, nicht so genau zu sein brauchen, wie Ketten-Beobachtungen, deren Fehler sich über das ganze Dreiecks-System, soweit es noch nicht endgültig feststeht, fortpflanzen, und dass ein ähnliches Verhältnis zwischen den Netz- und Zwischen-Beobachtungen besteht.

Bei dieser Anordnung hängt daher die zur Erledigung einer Station erforderliche Zeit allein von der daselbst vorhandenen höchsten Rangklasse ab, dergestalt, dass die Beobachtungen niederen Ranges dabei überhaupt nicht mitsprechen. Wollte man dagegen alle Richtungen zusammenhängend beobachten, so würde man genötigt sein, alle Beobachtungen mit der für die höchste Rangklasse erforderlichen Genauigkeit auszuführen.

Während somit eine zweckmässige Gliederung der Beobachtungen Arbeits-Ersparung bedeutet, nötigt der Mangel einer solchen zur Arbeits-Vergeudung.

Noch wichtiger für die Ökonomie der Arbeit ist die Auswahl der zu beobachtenden Richtungen in einem Netz unter allen vorhandenen. Abgesehen davon, dass diagonale und transversale Richtungen gegenüber denjenigen, welche den besten Rechnungsweg von Dreieck zu Dreieck vermitteln, einen geringen Einfluss auf die Punkt-Bestimmung, und oft sogar nur den Wert einer rohen Kontrolle haben, kommt in Betracht, dass ihre Beobachtung schwerer gelingt, weil sie die längeren sind. Der Beobachter wird also, falls sie nicht ausgeschlossen oder für sich beobachtet werden, genötigt, gerade auf diejenigen Beobachtungen, auf die es am wenigsten ankommt, die meiste Zeit — und oft eine kaum erschwingliche — zu verwenden, oder sich bei ihnen mit einer geringeren Genauigkeit zu begnügen; in letzterem Falle muss er sich aber gefallen lassen, dass sie die übrigen Beobachtungen verderben, da in der Ausgleichung die einen von den anderen sich nicht trennen lassen und die Zuteilung verschiedener Gewichte erhebliche Bedenken hat.

Über Zeitaufwand, Genauigkeit sind zu dem Wesernetz (vgl. S. 129) Angaben gemacht:

Zur Bestimmung der 15 Netzpunkte des Wesernetzes sind 4760 Einstellungen (sämtlich nach Heliotropen), und zur Bestimmung der 33 Zwischenpunkte, 3536 Einstellungen (davon 3247 nach Heliotropen) gemacht worden.

Hiermit sind beschäftigt gewesen:

im Jahre 1886: eine Sektion 162 Tage,

“ “ 1887: drei Sektionen bezw. 141, 136 und 74 Tage.

Jede Sektion bestand aus 1 Beobachter, 1 bis 2 Assistenten und 10 bis 15 kommandierten Soldaten.

Gleichzeitig sind von diesem Personal alle einstellbaren Türme je 6 mal angeschnitten und alle Centrier- und Festlegungs-Arbeiten ausgeführt worden.

Wie aus der Karte (S. 129) zu ersehen, enthält das eigentliche Netz 60 Bedingungs-Gleichungen, abgesehen von 16 örtlichen Winkel-Gleichungen auf den Anschluss-Stationen. Es kommen somit durchschnittlich 4 Netz-Bedingungen auf den Punkt. Die Ausgleichung ist übrigens nicht nach Bedingungs-Gleichungen (Correlaten), sondern nach Elementen, und zwar nach ebenen rechtwinkligen Coordinaten, ausgeführt worden, so dass anstatt eines Systems von 60 nur ein solches von 30 Normal-Gleichungen (da 15 Punkte zu bestimmen waren) gebildet und aufgelöst zu werden brauchte.

Von den 121 durch die Netz-Ausgleichung bestimmten Richtungs-Verbesserungen sind 6 grösser als  $1''$ , die grösste hat die Richtung Hüttenberg—Deister mit  $1,43''$  erhalten. Die Richtungs-Verbesserungen liefern übrigens kein zutreffendes Genauigkeitsmass für die Winkel-Bestimmung im Wesernetz, da der ganze Anschluss-Zwang in ihnen enthalten ist. Frei von letzterem sind dagegen die Schlussfehler der 38 Dreiecke und nicht in Dreiecke zerlegten Vier- und Fünfecke, in denen alle Winkel gemessen worden sind. Von diesen Schlussfehlern (die der Vier- und Fünfecke, den

Gewichts-Verhältnissen entsprechend, bzw. mit  $\sqrt{\frac{3}{4}}$  und  $\sqrt{\frac{3}{5}}$  multipliziert) liegen:

2 zwischen  $2,5''$  und  $2,0''$

6 "  $2,0''$  "  $1,0''$

30 "  $1,0''$  "  $0,0''$

Die Summe ihrer Quadrate ist 27,22, mithin der mittlere Dreiecks-Schlussfehler:

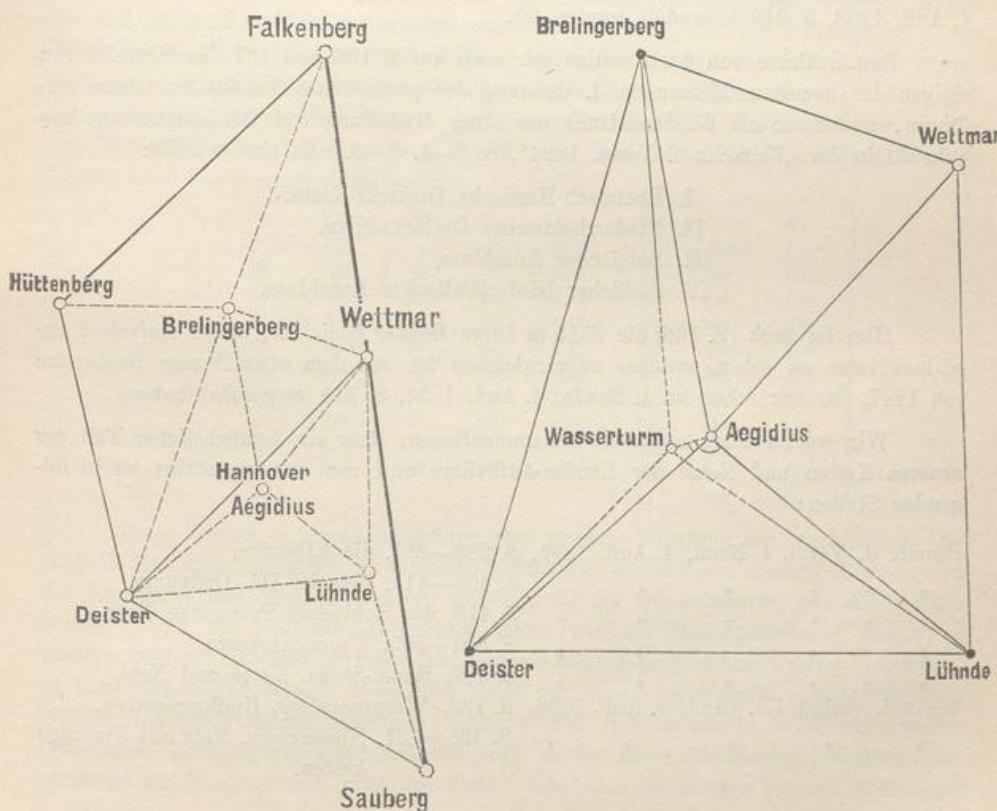
$$\sqrt{\frac{27,22}{38}} = 0,85'',$$

woraus sich der mittlere Fehler eines durch Stations-Ausgleichung bestimmten Winkelwertes gleich  $0,85'' \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,49''$  ergiebt.

Fig. 3.  
Massstab 1:1 1000 000.

Fig. 4.  
Massstab 1:500 000.

(Ergänzungen zu Fig. 1. S. 129.)



Die Berechnung der Messungen geschieht durchweg, bis zur niedrigsten Ordnung herab, nach der Methode der kleinsten Quadrate, und zwar unter völligem Anschluss der neu hinzukommenden an die bereits feststehenden Teile, so dass schliesslich ein über das ganze Land ausgedehntes widerspruchsfreies Netz von durchschnittlich 20 Punkten auf 100 Quadrat-Kilometer entsteht.

Die beste Übersicht der Ketten und Netze der preussischen Landes-Aufnahme erhält man aus den 2 Kartenbeilagen in 1:2 000 000 zu dem neuesten Band: „Die königlich preussische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke VII Teil, Berlin 1895“. Auch ist dazu nochmals an all das zu erinnern, was dazu bereits in unserem I. Bande, 4. Auflage 1895, in § 107—108, § 131. u. a. mitgeteilt ist.

Im Anschluss hieran geben wir mit Fig. 3. und Fig. 4. S. 133 noch zwei weitere Vervollständigungen des Gesamt-Netzes von Fig. 1. S. 129 und zwar in der Gegend der Stadt Hannover. Fig. 3. zeigt die Einschaltung des Aegidenturmes in Hannover in das Wesernetz, zusammen mit Brelingerberg und Lühnde.

Nachdem so für die Stadt-Vermessung von Hannover *ein* Punkt Aegidius festgelegt war, wurde noch ein zweiter Punkt Wasserturm dazu bestimmt, wie Fig. 4. in doppeltem Massstab von Fig. 3. andeutet.

Dabei ist Wasserturm als „Folgepunkt“ im Anschluss an *Aegidius* als „Leitpunkt“ gemessen und ausgeglichen, wie wir des näheren in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1889, S. 1—14 mitgeteilt haben (vgl. auch Band I, 4. Aufl. 1895, § 104.).

Dieses ist zugleich der Nachweis für die Basis der Hannoverschen Stadt-Triangulierung, welche in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 185. und in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 249 behandelt worden ist.

Zum Schlusse von § 21. wollen wir noch auf S. 136 und 137 das Netzbild von einigen der neuesten Messungen I. Ordnung der preussischen Landes-Aufnahme vorführen, und zwar als Wiederabdruck aus einer Mitteilung von Oberstleutnant *von Schmidt* in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 1—4, 8—9. Es sind 4 Teile:

- I. Rheinisch-Hessische Dreiecks-Kette,
- II. Niederrheinisches Dreiecks-Netz,
- III. Belgischer Anschluss,
- IV. Südlicher Niederländischer Anschluss.

Hier ist auch (S. 136) die 2513 m lange Bonner Basis mit ihrem einfachen Anschluss-Netze zu sehen, welches zu vergleichen ist mit dem *alten* Bonner Basisnetze von 1847, das wir schon im I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 514 vorgeführt haben.

Wir wollen auch nochmals zusammenfassen, dass ein beträchtlicher Teil der neueren Ketten und Netze der Landes-Aufnahme nun von uns vorgeführt ist in folgenden Stellen:

- Handb. d. Verm. I. Band, 4. Aufl. 1895, S. 280—281, die Elbkette,
- ” ” ” ” ” ” S. 400—411, Beispiel III. Ordnung,
- ” ” ” ” ” ” S. 415, das Schlesisch-Posensche Netz,
- ” ” ” ” ” ” S. 504—505, Übersichtskarte,
- ” ” ” ” ” ” S. 509, Hann.-Sächs. Kette und Netz,
- Hiezu i. vorl. III. Band, 4. Aufl. 1896, S. 129, Wesernetz mit Umfangsketten,
- ” ” ” ” ” ” S. 136—137, Niederrhein. Netz mit Umfangsketten.

Mit diesen Netzbildern kann man auch die Übersichtskarte der Haupttriangulationen des Deutschen Reiches in 1:2 000 000, welche wir früher in dem Werke „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882“ herausgegeben haben, ziemlich auf den heutigen Stand ergänzen.

## § 22. Seiten-Refraktion.

Bei den Unregelmässigkeiten der Wärme-Verteilung in der Atmosphäre, entsprechend der ungleichen Wärme-Ausstrahlung der Erdoberfläche (Wasser und Land, Wälder und Sand u. s. w.), ist es an sich wahrscheinlich, dass die Lichtstrahlen in der Atmosphäre nicht nur nach der Höhe abgelenkt werden, sondern auch *seitlich* kleine Refraktionen erleiden.

Wenn z. B. ein Heliotropenlicht im Fernrohr nicht als ein Punkt, sondern als ein Lichtfleck von  $60''$  Durchmesser erscheint, so haben jedenfalls die seitlichen Lichtteile seitliche Brechungen von  $\pm 30''$  erfahren, und ob das Intensitäts-Zentrum des Lichtflecks, auf welches die Fadenmitte eingestellt wird, allein sich in einer vertikalen Ebene fortgepflanzt hat, kann man nicht sicher wissen.

Wichtiger als solche Überlegungen sind *Beobachtungen*, zu denen wir nun übergehen.

### I. Struves Beobachtungen, 1829.

Struve hat schon im Jahre 1829 im 7. Bande der „astronom. Nachr.“ S. 391 bis 395, Seiten-Refraktionen vermutet aus dem Umstand, dass der Widerspruch  $w$  der Winkelsummen  $\alpha + \beta + \gamma$  gegen  $180^\circ + \text{sphär. Excess}$ , bei Dreiecken mit kurzen Seiten im allgemeinen günstiger ausfiel, als bei langen Seiten. Struve ordnete die 31 Dreiecke seiner Gradmessung in den Ostsee-Provinzen Russlands nach der Grösse des Umfangs  $S = a + b + c$ , wo  $a$ ,  $b$  und  $c$  die drei Seiten sind, und fand folgende Werte  $w = \alpha + \beta + \gamma - (180^\circ + \epsilon)$ :

Nr.	$S$	$w$	Nr.	$S$	$w$	Nr.	$S$	$w$
1.	20 $\text{km}$	+ 0,50''	11.	63 $\text{km}$	+ 1,09''	21.	98 $\text{km}$	- 0,16''
2.	22	- 1,36	12.	66	- 0,55	22.	98	- 1,15
3.	33	- 0,50	13.	80	- 0,55	23.	100	+ 1,82
4.	43	+ 0,46	14.	80	+ 0,18	24.	100	- 0,13
5.	43	+ 0,45	15.	84	- 0,19	25.	102	+ 0,03
6.	49	+ 0,22	16.	88	- 0,26	26.	111	- 0,28
7.	51	- 0,33	17.	89	+ 2,18	27.	113	- 1,43
8.	57	- 0,46	18.	94	- 0,51	28.	115	+ 1,40
9.	58	- 0,15	19.	95	- 1,03	29.	122	- 0,14
10.	59	- 0,61	20.	97	- 1,15	30.	129	+ 1,03
						31.	129	+ 2,81

(1)

Diese Zahlen  $w$  zeigen allerdings eine gewisse Zunahme bei wachsendem Umfang  $S$ . Um diese Zunahme durch Seiten-Refraktion zu erklären, machte Struve zuerst die Annahme, dass diese Refraktion proportional der Quadratwurzel der Sichtweite  $s$  wirke. Wenn die seitliche Ablenkung stetig wie die Höhenablenkung wirkte, so müsste man wie bei letzterer einen Ablenkungs-Winkel proportional  $s$  selbst annehmen; da aber eine solche stetige Ablenkung längs der ganzen Sichtweite  $s$  jedenfalls nicht besteht, sondern vielmehr zahlreiche kleinere sich teils häufende, teils auch wieder aufhebende Ablenkungen wahrscheinlich sind, so ist diese Struvesche Annahme, proportional mit  $\sqrt{s}$ , an sich ganz am Platz. Aber ein Rechnungs-Versuch mit dieser