Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 23. Genauigkeit und Geschwindigkeit der Basismessung gesprochen: Bei allen Theodoliten steht die Grösse des Fernrohrs mit der Grösse des Kreises in einem gewissen Verhältnisse. Wenn nun ein gutes Fernrohr für Triangulierungen von Netzen I. und II. Ordnung durchaus am Platze ist, so wird die ganze Konstruktion des Theodolits hierdurch schon wesentlich bedingt, dann wird man aber dieses Instrument nicht mit einem ganz kleinen Kreise ausrüsten lassen; denn im allgemeinen wird ja auch der grössere Kreis der besser geteilte sein und eine grössere Ablesungsgenauigkeit gestatten.

Soweit der Mecklenburgische Bericht über die Bonner Verhandlungen, den wir im wesentlichen abgedruckt haben. Im übrigen kann noch aus unseren eigenen Messungen mit 13^{cm}-Theodoliten aus „Zeitschr. f. Verm." 1892, S. 26 ein mittlerer Richtungsmessungsfehler von $\pm 2{,}31''$ berichtet werden (Messung in zwei Fernrohrlagen mit zusammen vier Ablesungen, wie auch im Vorstehenden stets angenommen ist).

Es mag auch aus Reinhertz „Verbindungs-Triangulation" S. 33 noch citiert werden, dass abgesehen von Teilungsfehlern das zehnzöllige Instrument der Landes-Aufnahme ein etwa zehnmal so grosses Gewicht liefert, wie das zur Verbindungs-Triangulation benützte fünfzöllige.

Aus der „Zeitschr. f. Instrumentenkunde" 1892, S. 104—105 entnehmen wir „über die Leistung eines kleinen Instrumentes", dass bereits Struve darauf hingewiesen hat, dass kleine Instrumente *verhältnismässig* genauere Resultate liefern als grosse, und dass astronomische Messungen mit $17{,}5^{cm}$-Kreisen unerwartet günstige Ergebnisse lieferten.

Fassen wir alles dieses zusammen, so kann man wohl sagen, dass manche Praktiker mit teuren und *grossen* Instrumenten unnötig vorgehen, z. B. Stadtpolygonzüge mit 25^{cm}-Mikroskop-Theodolit („Zeitschr. f. Verm." 1888, S. 78), dass aber die auf der Bonner Versammlung aufgestellte Behauptung, für Triangulierung I. Ordnung seien fünfzöllige Theodolite ($13{,}5^{cm}$) ausreichend und zweckmässig, mit den dafür vorgebrachten Messungsergebnissen noch nicht begründet ist.

§ 23. Genauigkeit und Geschwindigkeit der Basismessung.

Über die Leistungsfähigkeit der in den früheren § 9—15. behandelten Basismess-Einrichtungen haben wir verschiedene Angaben gesammelt, welche im Folgenden zusammengestellt sind.

Die Fehler der Basismessungen sind wesentlich zweierlei Art, erstens unregelmässige von der Handhabung der Apparate u. s. w. herrührende Fehler, von denen man gewöhnlich annimmt, dass sie proportional der Quadratwurzel der Länge wachsen, und zweitens regelmässige mit der gemessenen Länge selbst anwachsende Fehler, zu welchen vor allem die Mass-Unsicherheiten der gebrauchten Massstäbe selbst gehören.

Man wird im allgemeinen annehmen können, dass die regelmässigen Fehler im Gesamtergebnis überwiegen, indessen sind sie schwer zu bestimmen (und wahrscheinlich sind dieselben oft unterschätzt worden).

Leichter und sicherer zu bestimmen sind die unregelmässigen Fehler, mit welchen wir uns nun zuerst beschäftigen wollen. Man findet diese Fehler durch Messungs-Wiederholungen.

Besonders wichtig ist hiebei die Doppelmessung einer Linie in verschiedenen Teilstrecken.

Man habe hiefür folgendes:

Strecke s_1 gebe die Differenz hin und her d_1
„ s_2 „ „ „ „ d_2
. . . .
„ s_n „ „ „ „ d_n

Daraus bildet man die mittlere Differenz nach Band I, 4. Aufl. 1895, § 11.

$$D = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{d_1{}^2}{s_1} + \frac{d_2{}^2}{s_2} + \ldots \frac{d_n{}^2}{s_n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]}$$

oder den mittleren Fehler *einer* Messung der Längen-Einheit (1^{km}):

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2\,n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]} \tag{1}$$

Damit hat man auch den mittleren Fehler des Mittels aus zwei Messungen der Längen-Einheit:

$$m' = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]} \tag{2}$$

oder den mittleren Fehler des Mittels aus zwei Messungen einer Länge L:

$$M = m'\sqrt{L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{n}\frac{[d\,d]}{s}} \tag{3}$$

Die Doppelmessungs-Ergebnisse der Basis der Gradmessung in Ostpreussen von 1834 haben wir bereits in (30) unten auf S. 76 mitgeteilt und die Anwendung der vorstehenden Formeln (1)—(3) auf dieses schon mehrfach von uns benützte klassische Beispiel der Gradmessung in Ostpreussen haben wir bereits in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 38 gezeigt.

Wenn alle Teilstrecken s_1 $s_2 \ldots$ nahezu gleich sind, so braucht man die Quotienten d : $\sqrt{s}$ bzw. $d^2 : s$ nicht einzeln auszurechnen.

Als Beispiel für gleiche Strecken, jedoch für dreifache Messung aller Teilstrecken, nehmen wir die schweizerische Basismessung von Aarberg mit dem spanischen Apparat (vgl. § 13. S. 89):

Strecke	Messung I	Messung II	Messung III	Mittel
s_1	400,0370^m	400,0364^m	400,0370^m	400,0368^m
s_2	400,0390	400,0383	400,0379	400,0384
s_3	400,0383	400,0382	400,0388	400,0384
s_4	400,0570	400,0580	400,0584	400,0578
s_5	400,0352	400,0356	400,0353	400,0354
s_6	399,9045	399,9044	399,9043	399,9044
Summe	2400,1110	2400,1109	2400,1117	2400,1112

Nun bildet man die sämtlichen 18 Differenzen v zwischen den Streckenmitteln und den Einzelmessungen, mit Quersummen $[v] = 0$ zur Probe, worauf die Quadrate v^2 sich ergeben:

	v	v^2	v	v^2	v	v^2	$[v]$
1.	$-0{,}2^{mm}$	0,04	$+0{,}4^{mm}$	0,16	$-0{,}2^{mm}$	0,04	$0{,}0^{mm}$
2.	$-0{,}6$	0,36	$+0{,}1$	0,01	$+0{,}5$	0,25	0,0
3.	$+0{,}1$	0,01	$+0{,}2$	0,04	$-0{,}4$	0,16	$-0{,}1$
4.	$+0{,}8$	0,64	$-0{,}2$	0,04	$-0{,}6$	0,36	0,0
5.	$+0{,}2$	0,04	$-0{,}2$	0,04	$+0{,}1$	0,01	$+0{,}1$
6.	$-0{,}1$	0,01	0,0	0,00	$+0{,}1$	0,01	0,0
		1,10		0,29		0,83	$2{,}22 = [v^2]$

Der mittlere Fehler einer Messung einer Strecke von rund $0{,}4^{km}$ wird hiernach:

$$m_1 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n\,(\sigma-1)}} = \sqrt{\frac{2{,}22}{12}} = \pm\,0{,}430^{mm} \qquad (4)$$

Hiebei ist mit σ die Wiederholungszahl der Strecken-Messung bezeichnet, also in diesem Falle $\sigma = 3$. Weiter berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km}, da $s = 0{,}4^{km}$ ist:

$$m = m_1 \sqrt{\frac{1}{0{,}4}} = \pm\,0{,}68^{mm} \qquad (5)$$

Auch hat man den mittleren Fehler der 3fach wiederholten Messung der Gesamtlänge von $2{,}4^{km}$:

$$M = \sqrt{\frac{2{,}4}{3}}\,m = \pm\,0{,}61^{mm} \qquad (6)$$

Man wird hiernach das Gesamtergebnis schreiben:

$$L = 2400{,}1112^{m} \pm 0{,}0061^{m}$$

Wenn hier die Strecken s nicht alle gleich wären, so müsste man nicht bloss v und v^2, sondern auch alle Werte $v:\sqrt{s}$ bzw. $v^2:s$ bilden, und dann rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n\,(\sigma-1)}\left[\frac{v\,v}{s}\right]} \qquad (7)$$

Sind alle s gleich, so stimmt das mit (5) und (6) überein.

Nach diesen Formeln, welche zur Berechnung des mittleren unregelmässigen Basismessungs-Fehlers aus Messungs-Wiederholungen dienen, geben wir im Folgenden eine Reihe von Beispielen hiefür, wobei immer m den mittleren unregelmässigen (aus Wiederholungen berechneten) Fehler *einer* Messung von 1 Kilometer Länge, bedeutet.

1736. *Basis von Yarouqui in Peru*, 2 Messungen mit hölzernen 15 oder 20 Fuss langen Latten (La Condamine Mesure des trois premiers degrés dans l'hemisphère australe, Paris 1751, S. 5) „nous nous accordâmes à moins de trois pouces près sur une longueur de 6273 toises.“ Dieses giebt $81{,}21^{mm}$ auf $12{,}226^{km}$ doppelt gemessen oder den mittleren Fehler für eine Messung von 1^{km}: . . . . . $m = \pm\,16{,}42^{mm}$.

1736. *Basis von Tornea in Lappland*, 2 Messungen mit hölzernen Latten, 7407 Toisen, Differenz 4 Zoll. (Astr. Nachr. 6. Band, 1828, S. 20.) Dieses giebt $20{,}152^{mm}$ auf $14{,}436^{km}$ oder . . . . $m = \pm\,20{,}15^{mm}$.

1739. *Nachmessung der Picardschen Basis von Juvisy*, durch *Cassini* (Base du système métrique, III, S. 505), Basis von 5747 Toisen mit Eisenstangen gemessen, welche längs einer 50 Toisen langen Schnur unmittelbar aneinander gelegt wurden. Die Basis ist 5 mal gemessen:

	Toisen	Fuss	Zoll	Linien	Meter
1.	5747	2′	8″	6‴	= 11201,991
2.	„	4′	0″	9‴	= 11202,431
3.	„	3′	4″	10‴	= 11202,217
4.	„	4′	5″	10‴	= 11202,569
5.	„	4′	0″	0‴	= 11202,411
				Mittel	$11202{,}324^{m} \pm 0{,}100^{m}$.

Betrachtet man alle Abweichungen als unregelmässige Fehler, so erhält man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km}: . . . . $m = \pm 67{,}0^{mm}$.

1805. *Benzenbergs* Basismessung mit hölzernen Latten für das Rheinische Kataster (vgl. § 9. S. 62) . . . . $m = \pm 8{,}2^{mm}$.

1819. *Schwerds kleine Basis.* Zwei Messungen auf 20° R reduziert: $859{,}442734^m$ und $859{,}440943^m$ Differenz $= 1{,}791^{mm}$. (*Schwerd*, „Die kleine Speyrer Basis", S. 33.) Dieses giebt . . . . $m = \pm 1{,}37^{mm}$.

1834—1872. *Basismessungen mit dem Besselschen Apparate.*

Die Längen- und die Strecken-Verteilung der zahlreichen seit 1834 mit dem Besselschen Apparate gemachten Basismessungen haben wir schon in § 16. S. 101—102 mitgeteilt, und da auch die Messungs-Differenzen bereits anderwärts, nämlich in dem Werke: „Deutsches Vermessungswesen von Jordan-Steppes 1882", I, S. 133 von uns zusammengestellt wurden, bilden wir hier die Tabelle der mittleren unregelmässigen Fehler m für je *eine* Messung von 1 Kil.:

Jahr	Länge	Basismessung	mittlerer Fehler m
1834	$1{,}822^{km}$	Königsberg (Gradm. in Ostpreussen) . .	$\pm 2{,}77^{mm}$
1838	2,701	Kopenhagen	0,86
1846	2,336	Berlin (Küstenvermessung)	1,55
1847	2,134	Bonn	0,73
1852	2,301	Lommel (Belgien)	0,66
1853	2,489	Ostende	0,54
1854	2,763	Strehlen (Schlesien)	1,75
1871	5,875	Braak (Holstein)	1,59
1872	8,909	Grossenhain (Sachsen)	1,46

(Die Angaben für Grossenhain sind von Nagel veröffentlicht im „Civilingenieur", 28. Band, 1882, 1. Heft, vgl. auch Helmert, „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 596.)

Besonders zu erwähnen ist hier noch die Göttinger Basismessung, weil dieselbe in metronomischer Beziehung neu behandelt wurde, wie wir bereits in § 14. S. 95—97 beschrieben haben. Die Genauigkeits-Berechnung, entsprechend 4 verschiedenen metronomischen Formeln, ist von General Schreiber in der „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 1—17 mitgeteilt worden. Aus den 33 Strecken-Differenzen der 5193^m langen Linie (eine Strecke $= 157^m$) ergab sich der mittlere Fehler m einer Messung von 1^{km}, unter der Annahme unregelmässiger $\pm$ gleichwahrscheinlicher Fehler so:

	Formel (vgl. § 14. S. 96—97)	mittl. Fehler m
I.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m$	$\pm 0{,}80^{mm}$
II.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho$	0,70
III.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho + \alpha\,h$ . . .	0,55
IV.	$l = L - (k - 1{,}4)\,m - (k - 1{,}4)^2\,\varrho + \alpha\,h + \alpha^2\,\mathrm{k}$.	0,57

Die Differenzen für die ganze Länge 5193^m (hin und her) der Göttinger Basis wurden nach diesen 4 Formeln:

I	II	III	IV
$-14{,}10^{mm}$	$-13{,}04^{mm}$	$-8{,}17^{mm}$	$-7{,}62^{mm}$

1879—1880. *Basismessung des geodätischen Instituts.*

Im Jahre 1879 wurde die alte schlesische Basis bei Strehlen, 2763^m lang, welche erstmals 1854 mit dem Besselschen Apparat gemessen worden war, von dem geodätischen Institute mit einem Brunnerschen Apparate (S. 85) nachgemessen. Die Linie wurde in 10 gleichen Teilen von je 276^m hin und her gemessen. Die Messungs-Differenzen sind in dem „Generalbericht f. d. Europ. Gradm. für 1879“, S. 104 veröffentlicht; man berechnet hieraus den mittleren unregelmässigen Fehler einer Messung von 1^{km}: . . . . $m = \pm 0{,}76^{mm}$.

Einiges weitere hierüber giebt auch der „Generalbericht über den Fortschritt der Arbeiten für d. Europ. Gradm. im Jahre 1880“, S. 33—35.

Über die Bonner Basismessung 1892 haben wir bereits einiges citiert in Band I, 1895, 4. Aufl. S. 514. (Brunner $= 2512{,}995^m$, Bessel $= 2512{,}984^m$, Differenz $= 11^{mm}$).

1858. *Spanische Basismessungen.*

Spanische Basis von Madridejos, mit dem älteren Brunnerschen Apparate (S. 84) gemessen. Das Mittelstück, 2767^m der 5teiligen Basis (s. o. S. 106,) wurde in 12 Absätzen je zweimal gemessen (Astr. Nachr. 61. Band, 1864, S. 340). Die 11 ersten Abschnitte haben je 234^m Länge und die Differenzen der 11 Doppelmessungen sind: $+0{,}23$ $-0{,}20$ $+0{,}49$ $+0{,}00$ $-0{,}02$ $-0{,}23$ $-0{,}32$ $+0{,}39$ $-0{,}09$ $-0{,}28$ $+0{,}36^{mm}$, das letzte Stück hat nur 194^m Länge und gab bei der Doppelmessung die Differenz $-0{,}14$. Aus diesen 12 Doppelmessungen berechnet man . $m = \pm 0{,}40^{mm}$.

Über zwei kleinere, im Jahre 1860 ebenfalls mit dem älteren Brunnerschen Apparate gemessene Grundlinien giebt der „Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1869“, S. 65 die Einzelheiten der Doppelmessungen, woraus man berechnet:

Basis von Mahon, 2359^m in 6 Absätzen, $m = \pm 0{,}43^{mm}$
„ „ Ivice, 1665^m „ 4 „ $m = \pm 0{,}32^{mm}$

Ausser diesen drei Linien sind bis 1879 noch 6 Grundlinien in Spanien gemessen worden, worüber Einzelheiten mitgeteilt sind in dem amtlichen Werke: „Memorias del instituto geográfico y estadistico. Tomo III. Madrid 1881, und Tomo IV, Madrid 1883. (Arcos de la Frontera III, S. 259, Lugo III, S. 337, Vich III, S. 419, Olite IV, S. 99.)

Schweizerische Basismessungen.

In den Jahren 1880—1881 wurden mit dem neuen spanischen Apparate (vgl. S. 87—89) drei Grundlinien in der Schweiz gemessen, bei Aarberg 2400^m, bei Weinfelden 2540^m und bei Bellinzona 3200^m. Die erste Linie 3 mal (s. o. S. 144) die beiden anderen je 2 mal.

Aus den Messungs-Differenzen berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km}: . . . . Aarberg $m = \pm 0{,}68^{mm}$
Weinfelden $m = \pm 1{,}27^{mm}$
Bellinzona $m = \pm 0{,}89^{mm}$

Weiteres hierüber giebt das amtliche Werk: „Le réseau de triangulation suisse, publié par la commission géodésique suisse, troisième volume, la mensuration des bases par A. Hirsch et J. Dumur. Lausanne 1888.

Nordamerikanische Basismessungen mit dem Repsold-Comstockschen Apparat (§ 13. S. 89—93).

Nach dem Werke: „Report upon the primary triangulation of the United States Lake Survey, by Comstock etc. Washington 1882, S. 262, S. 290, S. 303 berechnet man aus den Messungs-Differenzen die mittleren unregelmässigen Fehler einer Messung von 1^{km}:

1877 Chicago-Base 7509^{m} in 8 Strecken . . . . . . $m = \pm 1{,}12^{mm}$
1878 Sandusky-Base 6227^{m} in 6 „ 1,19
1879 Olney-Base 6589^{m} in 6 „ 0,79

Dabei sind die auf S. 97—98 erwähnten Korrektionen für die Ungleichheit der Temperaturen beider Massstabteile berücksichtigt.

1881. *Californien. Yolo-Country.*

United States coast and geodetic survey, methods and results on the length of the Yolo-Base-Line. Appendix Nr. 11. Report for 1883. Washington 1884, berechnet von Charles A. Schott, Assistent. (Vgl. auch „Generalbericht d. Europ. Gradm. für 1883“, Annexe III, S. 2—3.)

Die 17,5^{km} lange Linie wurde teils zweifach, teils dreifach gemessen. Aus den 18 Differenzen-Vergleichungen zwischen der ersten und zweiten Messung berechnet man den mittleren Fehler einer Messung von 1^{km} . . . . $m = \pm 2{,}03^{mm}$

Österreichische Basismessungen.

1862. Grundlinie bei Josephsstadt, zwei Messungen, 2772,174 020 und 2772,180 159 Wiener Klafter, Differenz = 0,006 139 W. Kl. („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1863“, S. 15). Dieses giebt 11,64^{mm} Differenz auf 5,257^{km}, oder . . . . $m = \pm 3{,}59^{mm}$

1868. Basis in Dalmatien, zwei Messungen 1305,33270 und 1305,33186 Wiener Klafter, Differenz = 0,00084 W. Kl. („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1870“, S. 28), oder 1,6^{mm} auf 2,475^{km} . . . . $m = \pm 0{,}72^{mm}$

1863. *Schwedische Grundlinie* auf Axevella, zwei Messungen 1357,03274 Toisen und 1357,03360 Toisen, Differenz = 0,00086 Toisen („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1863“, S. 28) oder 1,68^{mm} auf 2,645^{km} . . . . $m = \pm 0{,}73^{mm}$

1865. *Italienische Basis von Catania.* Eine Basis 3692^{m} wurde 6mal gemessen („Generalbericht d. Europ. Gradm. 1865“, S. 64 und 65).

Wenn man die 6 Messungen als gleichartig behandelt, so findet man
$m = \pm 1{,}96^{mm}$

Die Messungen 1. 2. und 3. sind in der einen, 4. 5. 6. in der andern Richtung gemacht. Die beiden Arten zeigen eine regelmässige Differenz. Behandelt man daher die 3 ersten Messungen und die 3 letzten Messungen je für sich, so findet man die mittleren unregelmässigen Fehler für 1^{km} bzw. für 1. 2. 3. $m = \pm 0{,}85^{mm}$ und für 4. 5. 6. $m = \pm 0{,}47^{mm}$

1873. *Basis von Simlak,* gemessen von Oudemans bei der Triangulierung von Java (s. o. §. 14. S. 94).

Eine Länge von 3909^{m} wurde in 20 Strecken von je rund 200^{m} doppelt gemessen, woraus sich ergiebt . . . . $m = \pm 1{,}69^{mm}$

1890. *Französische Basismessung* bei Juvisy, in der Nähe von Paris. Ein Bericht in Comptes rendes etc. 112. Band, 1891 S. 770—773 und Auszug in „Zeitschr. f. Verm.“ 1891, S. 26—29 giebt hierüber: Die neue Grundlinie liegt an Stelle der schon von Picard 1669 mit 4 hölzernen Stangen und 1739 von Cassini mit 4 eisernen Stäben gemessenen Linie von 7,2^{km} (s. o. § 9. S. 63). Die Neumessung 1890 geschah mit einer 4^{m} langen Platin-Kupfer-Stange von Brunner (vgl. S. 84), wobei eine Umwicklung mit dickem Wollenstoff stattfand, innerhalb dessen Wasser zirkulierte zum

Zweck der Temperatur-Ausgleichung. Die Messung erfolgte in 24 Abschnitten von ungleichen, im Mittel 300ᵐ betragenden Längen. Der mittlere unregelmässige Fehler einer Messung von 1^{km} ergab sich nach der Formel (1) S. 144 für den südlichen Teil $m = 1{,}02^{mm}$, für den nördlichen Teil $m = 1{,}90^{mm}$, im Ganzen . . $m = \pm 1{,}52^{mm}$.

Geschwindigkeit der Basismessung.

Bei der Beurteilung der Leistungs-Fähigkeit eines Basis-Apparates kommt ausser der Genauigkeit auch die Geschwindigkeit in Betracht, weshalb wir hiefür eine Anzahl von Angaben gesammelt haben, die im Folgenden zusammengestellt sind. Dabei bedeutet immer v die gemessene Länge für 1 Stunde.

Schwerd mass im Jahre 1820 in 3 Tagen mit 30 Stunden eine 859^m lange Grundlinie zweimal (Schwerd: „Die kleine Speyrer Basis“, S. 23—32). Dieses giebt für 1 Stunde . . . . $v = 57^m$

Die Württembergische Grundlinie Solitude—Ludwigsburg von $13\,032^m$ Länge wurde in 19 Tagen einmal gemessen (Kohler: „Die Landes-Vermessung des Königreichs Württemberg“, S. 57). Rechnet man 1 Tag durchschnittlich zu 6 Stunden, so ist . . . . $v = 114^m$

Struve fand 1840 das mittlere Fortschreiten in 1 Stunde 42 Toisen für den Tennerschen Apparat und 36 Toisen für seinen Apparat („Vierteljahrsschrift der astr. Gesellschaft 1870“, S. 69), dieses giebt

für den Apparat von Tenner . . . . $v = 82^m$
„ „ „ „ Struve . . . . $v = 70^m$

Basismessungen der preussischen Landes-Aufnahme mit dem Besselschen Apparat.

Nach einer bereits früher in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1880, S. 387 und 1883, S. 583 gemachten Zusammenstellung haben wir folgende Maximal-Leistungen in 1 Tag, wobei 1 Lage = 4 Stangen = $15{,}6^m$ ursprünglich als Einheit zu grunde gelegt ist:

1834	Königsberg	68,6 Lagen	$= 1070^m$
1871	Braak	67 „	$= 1045$
1877	Oberhergheim	113 „	$= 1763$
1880	Göttingen	131 „	$= 2044$
1883	Meppen	150 „	$= 2340$

Dieses sind *Maximal*-Leistungen für je 1 Tag; was die *mittlere* Geschwindigkeit für 1 Stunde betrifft, so war dieselbe in Königsberg nach S. 47 „der Gradm. in Ostpreussen“ 8 Lagen = 125^m in 1 Stunde. Teils durch die Vervollkommnungen des Apparates, teils durch die Übung steigerte sich die Geschwindigkeit so sehr, dass bei Göttingen auf 1 Lage etwa 5 Minuten, bei Meppen nur noch etwa 3 Minuten auf 1 Lage kamen. Hiernach haben wir folgende Geschwindigkeiten in 1 Stunde:

Königsberg . . . . $v = 125^m$
Göttingen . . . . $v = 187^m$
Meppen . . . . $v = 300^m$

Sächsische Basismessung bei Grossenhain.

Diese Basis ist ebenfalls mit dem Besselschen Apparat gemacht. Nach der Mitteilung „Zeitschr. f. Verm.“ 1883, S. 600 erforderte die $8\,909^m$ lange Linie folgende Zeiten:

Hinmessung 13 Tage = 118,5 Stunden, also 75 Meter in 1 Stunde
Rückmessung 12 „ = 88,0 „ „ 101 „ „ 1 „

Im Mittel hat man 206,5 Stunden für $17\,818^m$ oder die mittlere Geschwindigkeit in 1 Stunde: . . . . $v = 86^m$

Basismessungen des geodätischen Instituts.

Mit einem Brunnerschen Apparat, ähnlich dem ersten spanischen Apparate, wurden die zwei Grundlinien bei Strehlen (2763^m) und bei Berlin (2336^m) in den Jahren 1879—1880 gemessen. Nach Mitteilung von Fischer wurden zu Anfang stündlich 5 Stangenlagen (= 20^m) gemacht; nachdem aber das Personal eingeübt war, kamen bei der Strehlener Basis auf 1 Stunde durchschnittlich 7—8 Lagen, und bei der Rückmessung 10 Lagen. Bei der Berliner Basis wurden bei etwa dreistündiger Arbeitszeit Vormittags und dreistündiger Nachmittags zusammen 60 Lagen = 240^m gemessen.

Hiernach ist die Geschwindigkeit für 1 Stunde anzunehmen: . . . $v = 40^m$

Spanische Basismessungen mit dem Brunnerschen Apparat.

Der erste Brunnersche Apparat, mit welchem die Basis von Madridejos gemessen wurde, hatte eine sehr geringe Geschwindigkeit. Koppe schreibt hierüber in der Abhandlung „der Basisapparat des Generals Ibanez und die Aarberger Basismessung" S. 2:

Die erste spanische Basismessung, 14663^m, dauerte vom 22. Mai bis zum 7. September 1858. Sie erforderte 78 Arbeitstage, also 5,3 Tage für 1 Kilometer. Rechnet man 1 Tag = 6 Stunden, so erhält man für 1 Stunde . . . . $v = 31^m$

In dem Werke: „Expériences faites avec l'appareil à mesurer les bases u. s. w. traduit par Laussedat, Paris 1860". S. 210 ist angegeben, dass die Geschwindigkeit 2 Minuten für 1 Meter war, oder für 1 Stunde . . . . $v = 30^m$

Bei den zwei kleinen spanischen Grundlinien von Mahon und Ivice auf den balearischen Inseln war nach dem „Generalbericht der Europ. Gradm. für 1869", S. 65 die Messungs-Geschwindigkeit in 1 Stunde: . . . . $v = 120^m$

Schweizerische Basismessungen.

1880—1881 die Grundlinien bei Aarberg, Weinfelden und Bellinzona (vgl. § 13. S. 85 bis 89). Die Zeitverhältnisse sind sehr genau angegeben, man findet die Geschwindigkeit in 1 Stunde:

Aarberg . . . . $v = 142^m$
Weinfelden . . . . $v = 114^m$
Bellinzona . . . . $v = 144^m$

Ausserdem sind auch die *Kosten* angegeben (S. 86 der amtl. Veröffentlichung), nämlich für alle drei Linien 37600 Fr. oder 4600 Fr. für 1 Kilometer.

Nordamerikanische Basismessungen mit dem Repsold-Comstockschen Apparat (vgl. § 13. S. 90—93).

„Report upon the primary triangulation" etc. S. 262, S. 290, S 300 giebt:

1877 Chicago-Base. Die mittlere Messung in 1 Tag war 292^m, die grösste Leistung in 1 Tag 500^m,

1878 Sandusky Base. Der Durchschnitt für 1 Tag bei der Hinmessung war 88 Röhren = 352^m, bei der Rückmessung 100 Röhren = 400^m,

1879 Olney-Base. Die mittlere Röhrenzahl in 1 Tag war 105 = 420^m, die grösste Zahl an 1 Tag war 168 Röhren = 672^m. Gemessen wurde an 32 Tagen.

Die Tagesleistung wächst mit den Übungsjahren. Nehmen wir zum Schlusse 1 Tag = 6 Stunden = 420^m, so wird für 1 Stunde: . . . . $v = 70^m$

Neue französische Messung mit einer Brunnerschen 4^m langen Platin-Kupfer-Stange (s. o. S. 148—149).

Nach dem Bericht in Comptes rendus etc. 112. Band 1891 S. 772 erforderte die 7,226^{km} lange Linie zur Hinmessung 25 Tage, zur Rückmessung 18 Tage, also 43 Tage mit 14,5^{km}. Rechnet man 1 Tag = 6 Stunden, so giebt dieses 14500 : 258 = 56^m auf 1 Stunde . . . . $v = 56^m$

Schluss-Betrachtungen über Basismessung.

Die neueren Basismessungen sind technisch so fein behandelt, dass der mittlere unregelmässige Messungs-Fehler nicht mehr als etwa 1 Millimeter für 1 Kilometer beträgt. Dieses geht aus den auf S. 146—148 gesammelten mittleren Fehlern deutlich hervor, denn wir haben für den mittleren Fehler einer Messung von 1 Kilometer, in runden Durchschnittszahlen:

S. 146	für Bessels Apparat	$m = \pm 1{,}3^{mm}$
S. 147	„ den neuen spanischen Apparat	$0{,}9^{mm}$
S. 148	„ „ nordamerikanischen „	$1{,}0^{mm}$
	Durchschnitt	$m = \pm 1{,}1^{mm}$

Für Doppelmessung vermindert sich dieses noch auf $1{,}1 : \sqrt{2} = 0{,}8^{mm}$ für 1^{km}, indessen wollen wir den runden Wert $m = \pm 1^{mm}$ für 1^{km} als unregelmässigen von der Messung selbst herrührenden Fehler einer neueren Basis nun annehmen.

Ganz anders, nämlich ungünstiger, steht es mit den regelmässigen, namentlich den metronomischen Fehlern der Basismessungen.

Wir haben in §. 11. S. 75 berichtet, dass bei der Besselschen Basismessung bei Königsberg, 1834, der Hauptfehler, nämlich die Vergleichung mit einem von anderwärts gegebenen Normalmass, nur = 0,6 Milliontel der Länge gefunden wurde, und ähnliche kleine Werte wurden auch später mit dem Besselschen Apparate gefunden; indessen sind wahrscheinlich jene älteren Vergleichungen in Bezug auf Genauigkeit überschätzt, indem später mit dem Besselschen Apparate Unsicherheiten bis zu $0{,}02^{mm}$ auf eine Stange von 4^m, d. h. 5 Milliontel der Länge, gefunden wurden. (Vgl. dazu oben S. 147 auch die Differenz Brunner-Bessel = 11^{mm} auf $2{,}5^{km}$.)

Die beiden betrachteten Fehlerteile, nämlich m = mittlerer unregelmässiger Fehler und m' = mittlerer regelmässiger Fehler, setzen sich in bekannter Weise zum Gesamtfehler M für die Länge L zusammen, nach der Gleichung:

$$M = \sqrt{(m\sqrt{L})^2 + (m'\,L)^2} = \sqrt{m^2\,L + m'^2\,L^2} \tag{1}$$

Nehmen wir nach dem bisherigen $m = 1^{mm}$ für $L = 1^{km}$ und als Minimum m' ebenfalls = 1^{mm} für $L = 1^{km}$, so wird:

$$M = \sqrt{L + L^2}$$

Zur Übersicht ist hernach folgendes berechnet:

Gemessene Basis-Länge L	Mittlerer unregelm. Fehler $m\sqrt{L}$	Mittlerer regelmäss. Fehler $m'\,L$	Mittlerer Gesammt-Fehler M	Verhältnis $\frac{M}{L}$
				Milliontel
1^{km}	$\pm 1{,}00^{mm}$	$\pm 1{,}00^{mm}$	$\pm 1{,}41^{mm}$	1,41
2^{km}	$1{,}41^{mm}$	$2{,}00^{mm}$	$2{,}24^{mm}$	1,12
5^{km}	$2{,}24^{mm}$	$5{,}00^{mm}$	$5{,}10^{mm}$	1,02
10^{km}	$3{,}16^{mm}$	$10{,}00^{mm}$	$10{,}05^{mm}$	1,005

Hieraus ist zu sehen, dass bei grösseren Längen neben den systematischen Fehlern m', die unregelmässigen Messungs-Fehler m fast verschwindend sind; dieses ist noch viel mehr der Fall, als die vorstehende Tabelle zeigt, weil wir hier nur m' = 1 Milliontel angenommen haben, während es in Wirklichkeit das 5—10 fache hievon betragen kann.

Durch solche Überlegungen wird der Fingerzeig gegeben, dass die Technik auf einem falschen Wege war, als sie Apparate, wie den älteren Brunnerschen und ähnliche schuf. (Vgl. § 13. S. 84.)

Die Messungs-Geschwindigkeiten sind nach der Zusammenstellung S. 149—150 sehr verschieden; die äussersten Werte scheinen zu sein:

Älterer Brunnerscher Apparat . . . . . . $v =$ 30 Meter in 1 Stunde
Bessels Apparat, Landes-Aufnahme bei Meppen $v = 300$ „ „ „ „

Die Hauptsache der Basismessung, nämlich der metronomische Teil, liegt nun in den Händen des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus (vgl. § 8. S. 56 und in dieser Beziehung werden ohne Zweifel die nächsten Basismessungen sich wesentlich von den früheren unterscheiden.

§ 24. Basis-Anschlüsse.

Wenn man die mittleren Fehler zweier Grundlinien und den mittleren Winkelfehler einer verbindenden Triangulierung kennt, so kann man auf theoretischem Wege den Fehler berechnen, welcher beim Durchrechnen der Triangulierung von einer Grundlinie zur anderen sich wohl einstellen wird, oder man kann auch berechnen, um wie viel eine Triangulierungskette in der Messung und Berechnung ihren wahren Endpunkt verfehlen wird, im Sinne der Entfernung und im Sinne der Richtung.

Theoretische Betrachtungen hiezu haben wir in den vorhergehenden §§ 17—20 gegeben, und es ist hiezu an alles zu erinnern, was bereits in unserem I. Bande, 1895, 4. Aufl., in Kap. V über Triangulierungs-Genauigkeit verhandelt worden ist. Auch erfahrungsmässige Genauigkeitsangaben sind daselbst in grosser Zahl gesammelt und wir wollen auch nochmals an die wertvollen auf mühsame Berechnungen gegründeten Angaben der preussischen Landes-Aufnahme über Entfernungs- und Azimutalfehler langer Ketten erinnern, welche im I. Bande der Landestriangulation enthalten und von uns (in „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen I" S. 138—139) dahin zusammengefasst worden sind, dass eine Dreiecksseite in 100^{km} Entfernung an der Basis, mit 7 Milliontel ihrer Länge erhalten wird, oder dass eine Kette von 130^{km} einen Entfernungsfehler von nur 3 Milliontel der Entfernung und einen Richtungsfehler von kaum 1″ bietet.

Wichtiger als die so zu berechnenden theoretischen Anschlussfehler sind die thatsächlich in der Praxis aufgetretenen Anschlussfehler und wir haben daher schon frühzeitig solche Anschlüsse aus der vorhandenen Litteratur gesammelt, wie aus unseren früheren Auflagen und zugehörigen Veröffentlichungen zu ersehen ist; es ist aber schwer auf diesem Gebiete rein objektive Nachrichten zu erlangen, weil sehr oft die Vermutung nicht zu unterdrücken ist, dass die Berechner früherer Zeiten die Anschlüsse in der Triangulierungsausgleichung mehr oder weniger haben miteinspielen lassen. —

Das Wichtigste auf diesem Gebiete sind die neueren Untersuchungen des geodätischen Institutes, von welchen wir im Folgenden einige Auszüge vorführen: