



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 24. Basis-Anschlüsse

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](#)

ist noch viel mehr der Fall, als die vorstehende Tabelle zeigt, weil wir hier nur $m' = 1$ Milliontel angenommen haben, während es in Wirklichkeit das 5—10 fache liegen kann.

Durch solche Überlegungen wird der Fingerzeig gegeben, dass die Technik auf einem falschen Wege war, als sie Apparate, wie den älteren Brunnerschen und ähnliche schuf. (Vgl. § 13. S. 84.)

Die Messungs-Geschwindigkeiten sind nach der Zusammenstellung S. 149—150 sehr verschieden; die äussersten Werte scheinen zu sein:

Älterer Brunnerscher Apparat $v = 30$ Meter in 1 Stunde
Bessels Apparat, Landes-Aufnahme bei Meppen $v = 300$ " " "

Die Hauptsache der Basismessung, nämlich der metronomische Teil, liegt nun in den Händen des internationalen Mass- und Gewichts-Bureaus (vgl. § 8. S. 56 und in dieser Beziehung werden ohne Zweifel die nächsten Basismessungen sich wesentlich von den früheren unterscheiden.

§ 24. Basis-Anschlüsse.

Wenn man die mittleren Fehler zweier Grundlinien und den mittleren Winkel-fehler einer verbindenden Triangulierung kennt, so kann man auf theoretischem Wege den Fehler berechnen, welcher beim Durchrechnen der Triangulierung von einer Grundlinie zur anderen sich wohl einstellen wird, oder man kann auch berechnen, um wie viel eine Triangulierungskette in der Messung und Berechnung ihren wahren Endpunkt verfehlten wird, im Sinne der Entfernung und im Sinne der Richtung.

Theoretische Betrachtungen hiezu haben wir in den vorhergehenden §§ 17—20 gegeben, und es ist hiezu an alles zu erinnern, was bereits in unserem I. Bande, 1895, 4. Aufl., in Kap. V über Triangulierungs-Genauigkeit verhandelt worden ist. Auch erfahrungsmässige Genauigkeitsangaben sind daselbst in grosser Zahl gesammelt und wir wollen auch nochmals an die wertvollen auf mühsame Berechnungen gegründeten Angaben der preussischen Landes-Aufnahme über Entfernungs- und Azimutal-fehler langer Ketten erinnern, welche im I. Bande der Landestriangulation enthalten und von uns (in „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen I“ S. 138—139) dahin zusammengefasst worden sind, dass eine Dreiecksseite in 100^{km} Entfernung an der Basis, mit 7 Milliontel ihrer Länge erhalten wird, oder dass eine Kette von 180^{km} einen Entfernungsfehler von nur 3 Milliontel der Entfernung und einen Richtungs-fehler von kaum 1" bietet.

Wichtiger als die so zu berechnenden theoretischen Anschlussfehler sind die thatsächlich in der Praxis aufgetretenen Anschlussfehler und wir haben daher schon frühzeitig solche Anschlüsse aus der vorhandenen Literatur gesammelt, wie aus unseren früheren Auflagen und zugehörigen Veröffentlichungen zu ersehen ist; es ist aber schwer auf diesem Gebiete rein objektive Nachrichten zu erlangen, weil sehr oft die Vermutung nicht zu unterdrücken ist, dass die Berechner früherer Zeiten die Anschlüsse in der Triangulierungsausgleichung mehr oder weniger haben miteingespielen lassen. —

Das Wichtigste auf diesem Gebiete sind die neueren Untersuchungen des geodätischen Institutes, von welchen wir im Folgenden einige Auszüge vorführen:

Wir betrachten zuerst ein Werk von *Helmert*:

Veröffentlichung des Königlich preussischen Geodätischen Instituts und Centralbureau der internationalen Erdmessung. Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft, Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von England bis Polen, herausgegeben von F. R. Helmert mit zwei lithographischen Tafeln. Berlin, Druck und Verlag von Staniewicz, Buchdruckerei, 1893.

Wir haben von diesem Werke schon in unserem I. Bande, 4. Aufl. 1895, S. 283—299 die neue Theorie der Triangulierungsausgleichung mit Richtungsgewichten mitgeteilt und können nun weiter aus dem 4. Kapitel über die Grundlinien und ihre Anschlüsse folgendes berichten, wobei mit (H. S. . .) die Citate aus dem Originalwerk beigegeben sind.

Alle mit dem Basisapparat von Bessel gemessenen Grundlinien beruhen auf der Toise von Bessel, welche Bessel selbst 1823 setzte (H. S. 225):

$$P = 863,9992 \text{ Par. Linien bei } 16,25^\circ \text{ oder bei } 13^\circ \text{ R.}$$

Wir haben diese Toise bereits in § 7. S. 53—54 und in § 11. S. 75, Gleichung (19) erwähnt, dieselbe kommt in Bessels „Gradmessung in Ostpreussen“ S. 22 vor mit der Angabe, dass ihre wahre Länge = 863,9992 Par. Linien sei, mit der Gleichung:

$$P = 863,835384 + 0,0126014 R^\circ$$

was man auch so schreiben kann

$$\begin{aligned} P &= 863,99920 (1 + 0,0000145877 [R^\circ - 13^\circ]) \\ &= 863,99920 (1 + 0,00001167016 [C^\circ - 16,25^\circ]) \end{aligned}$$

d. h. Bessel hat in der Gradmessung in Ostpreussen den Ausdehnungs-Coefficienten 0,00001167 für $1^\circ C$, und bei den Pendelversuchen nahm Bessel den von Borda für Eisen bestimmten Wert $\alpha = 0,0000114$ als Ausdehnungs-Coefficient (H. S. 226).

Die in neuester Zeit gemachte Vergleichung der Besselschen Toise im internationalen Massbureau zu Breteuil gab (H. S. 226):

$$P = 1949,061^{mm} \text{ bei } 16,25^\circ$$

und den Ausdehnungs-Coefficienten $\alpha = 0,00001160$. Durch diese Neubestimmung konnten die mit Bessels Apparat gemessenen Grundlinien auf internationales Metermass reduziert werden. Das Endergebnis ist nach H. S. 230—231, dass alle auf Bessels Bestimmungen beruhenden geodätischen Linien bzw. Dreiecksseiten, nachdem sie inzwischen formell mit 443,296 : 864 auf Metermass reduziert sind, nun noch mit einer Korrektion von + 57,7 Einheiten der 7. Logarithmenstelle versehen werden müssen, um sie auf internationales Metermass zu reduzieren.

Diese Zahl ist für die Zukunft wichtig und wir wollen dazu sogleich auch aus der Veröffentlichung der Landes-Aufnahme, Landes-Triangulation, Hauptdreieck V. Teil, Berlin 1893 Seite V citieren:

Allen in Metern ausgedrückten Ergebnissen der Landes-Aufnahme hat man, um sie auf internationales Metermass zu bringen, eine Reduktion zuzufügen, welche beträgt:

logarithmisch + 0,0000058 oder + 58 Einheiten der 7. Stelle

oder in Teilen der Längen selbst:

$$+ \frac{58}{4,3429\dots} = 13,4 \text{ Milliontel}$$

oder + 13,4^{mm} auf 1^{km}.

So wurden behandelt die Grundlinien von Königsberg, Berlin, Bonn, Ostende und Lommel, Strehlen, Grossenhain, Göttingen, woraus mit Rücksicht auf Nebenumstände eine Reduktionstabelle (H. S. 241) entsteht. Nachdem hierbei auch die mitt-

leren Fehler der Grundlinien geschätzt waren, nämlich $\pm 10 \cdot 0$ (d. h. 10 Einheiten des 7stell. Logar.) und entsprechend auch $\pm 18 \cdot 0$ für englische und $\pm 10 \cdot 0$ für russische Linien, kommen die Vergrößerungsnetze in Betracht, durch welche der trigonometrische Weg von der Basis selbst bis zur ersten Hauptdreiecksseite hergestellt wird, mit Fehlerschätzung nach Näherungsformeln (H. S. 245) und endlich dazu die trigonometrische Verbindung längs der Hauptketten von Basis zu Basis, wozu Fehlerschätzungen nach H. S. 83 möglich sind. Das sind nun alles Genauigkeitsbestimmungen a priori, und es entsteht die brennende Frage, wie die trigonometrische Zusammenrechnung zwischen den Grundlinien tatsächlich stimmen wird, ob die faktischen Anschlussfehler den theoretisch berechneten Fehlern entsprechen werden?

Die 9 Grundlinien mit ihren 8 Verbindungs-Triangulierungsnetzen wurden einer Ausgleichung unterworfen (H. S. 243—244), wobei die Verbesserungen $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_9$ der Grundlinien selbst als unabhängige Unbekannte und die Verbesserungen $v_1 v_2 \dots v_8$ der 8 Verbindungs-Triangulierungen als Beobachtungen auftreten, mit Gewichten, welche der Form und Ausdehnung der Netze a priori angepasst sind. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler ergab sich nach der Ausgleichung = ± 33 und für das Durchschnittsgewicht 4—5 der mittlere Fehler = ± 16 Einheiten der 7. logar. Dezimale oder = $16 : 4.34 = 3,8 \text{ mm}$ auf 1 km , ein ungemein *kleiner* Betrag (gültig für ein v oder σ).

Die Hauptergebnisse der Basisgenauigkeiten und der Verbindungs-Triangulierungs- genauigkeiten sind in einer Tabelle auf H. S. 251 enthalten, welche wir hier in zwei Teilen vorführen:

Mittlere Fehler a priori (H. S. 251.)

(1)

Nr.	Grundlinie		Basis, direkte Messung	Vergrößerungs-Netz	Verbindungs-Netz
1	Englische	Basis	± 18	± 40	± 100
2	Ostender	"	± 10	± 35	± 50
3	Lommeler	"	± 10	± 30	± 32
4	Bonner	"	± 10	± 30	± 37
5	Göttinger	"	± 10	± 9	± 28
6	Grossenhainer	"	± 10	± 7	± 38
7	Strehlener	"	± 10	± 23	± 22 zu (6,8)
8	Berliner	"	± 10	± 21	± 83
9	Königsberger	"	± 10	± 23	

Durchschnitt ± 28 ± 55 7. Log.-Stelle
 $\pm 6,4$ $\pm 12,7 \text{ mm}$ auf 1 km

Der vorstehenden Tabelle für Fehler a priori entspricht nun folgende zweite Tabelle der Fehler a posteriori:

Mittlere Fehler a posteriori (H. S. 251.).

(2)

Nr.	Grundlinie	Verbindungsausgleichung		Länge des Verbindungs-Netzes
		Verbesserung ξ	Verbesserung v	
1	Englische	Basis	$- 4'6$	
2	Ostender	"	$- 21'1$	200
3	Lommeler	"	$- 2^{\circ}0$	170
4	Bonner	"	$+ 22'2$	140
5	Göttinger	"	$+ 7'4$	220
6	Grossenhainer	"	$- 1^{\circ}0$	250
7	Strehlener	"	$+ 14'7$	260
8	Berliner	"	$- 7'2$	180
9	Königsberger	"	$+ 12'0$	540

Durchschnitt $\pm 16 \cdot 0$ $\pm 16 \cdot 0$ 7. Log.-Stelle
 $= \pm 3,71$ $3,7 \text{ mm}$ auf 1 km

210 km

Die mittleren Fehler sind in dieser Tabelle in Einheiten der 7. Log.-Dezimale angesetzt, d. h. da $d \log x = \frac{0,434}{x}$ ist, muss man die 7. Log.-Stelle mit 4,34 dividieren, um sie in Milliontel der Längen (oder in Millimeter für 1 Kilometer) zu verwandeln.

Die unmittelbaren Basisfehler, im Durchschnitt $\pm 2,5^{\text{mm}}$ auf 1^{km} , sind Schätzungen, nach Anbringung der Reduktionen auf das internationale Meter.

Was weiter die mittleren Fehler der Verbindungs-Triangulierungen zwischen zwei Grundlinien betrifft, so hat man für Ketten erster Ordnung unsere früheren Formeln von § 18, insbesondere die Formel (13) S. 111, welche mit anderen Bezeichnungen, und logarithmisch ausgedrückt in H. S. 83, Anmerkung, angegeben ist.

Da aber die Ketten erster Ordnung mit ihren $20-50^{\text{km}}$ langen Seiten nicht unmittelbar an die nur $5-7^{\text{km}}$ langen Grundlinien anschliessen können, sondern besondere Basisnetze, gewöhnlich rhombisch (vgl. S. 104-108) zur Vermittlung haben, so mussten dafür die mittleren Übertragungsfehler besonders bestimmt werden. Den mittleren Fehler der Höhe h eines einzelnen gleichschenkligen Dreiecks haben wir bereits in § 18. bestimmt, nämlich nach der Formel (22) auf S. 113 oben, welche mit gleichen Gewichten $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, und Weglassung von ϱ giebt:

$$\mu(h) = \frac{m(h)}{h} = \frac{\mu}{\sin(1)} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Hat man zwei solche gleichschenklige Dreiecke auf beiden Seiten einer Grundlinie angesetzt, etwa wie in Fig. 4. S. 114, jedoch mit ungleichen Höhen h und h' , so erhält man daraus

$$\begin{aligned} m(h+h') &= \frac{\mu h}{\sin(1)} \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\mu h'}{\sin(1')} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ m(h+h') &= \mu \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{h^2}{\sin^2(1)} + \frac{h'^2}{\sin^2(1')}} \end{aligned}$$

Dieses ist in anderer Form dasselbe wie die erste Formel in H. S. 245, und, um auch die zweite dort angegebene Formel für zwei rechtwinklige Dreiecke nachzuweisen, nehmen wir unsere allgemeine zu Fig. 4. S. 113 gehörige Formel (25) S. 114 und setzen darin, um a und a' in eine zu b rechtwinklige Gerade zu verwandeln:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \quad (1) = \gamma \quad (3) = 90^\circ \quad (2) = 90^\circ - \gamma \quad \beta = 90^\circ \\ \alpha' &= 0 \quad (1') = \gamma' \quad (3') = 90^\circ \quad (2') = 90^\circ - \gamma' \end{aligned}$$

und dazu $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, dann wird (ohne ϱ):

$$\begin{aligned} (m(B))^2 &= \mu^2 \left(\frac{b^2 \sin^2 \gamma + a^2 \cos^2 \gamma + c^2}{\sin^2 \gamma \cdot 3} + \frac{b^2 \sin^2 \gamma' + a'^2 \cos^2 \gamma' + c'^2}{\sin^2 \gamma' \cdot 3} \right) \\ &= \frac{\mu^2}{3} \left(b^2 + \frac{a^4}{b^2} + \frac{c^4}{b^2} + b^2 + \frac{a'^4}{b^2} + \frac{c'^4}{b^2} \right) \\ &= \frac{\mu^2}{3} \left(2b^2 + \frac{a^4 + a'^4}{b^2} + \frac{(a^2 + b^2)^2 + (a'^2 + b^2)^2}{b^2} \right) \\ (m(B))^2 &= \frac{2\mu^2}{3} \left(b^2 + \frac{a^4 + a'^4}{b^2} + (a^2 + a'^2) \right) \end{aligned}$$

Dieses ist die zweite Formel von H. S. 245. Durch solche Formeln wurden die Wirkungen der Basis-Netze geschätzt und in Verbindung mit der Kettenformel (13)

S. 111 sind dann die mittleren Fehler *a priori* bestimmt worden, welche in den zwei letzten Spalten der oben S. 154 gegebenen Tabelle (1) auftreten.

Betrachten wir nun diese Tabelle (1) S. 154 und die darauffolgende Tabelle (2) S. 154, so fällt uns zuerst auf, wie klein die meisten auftretenden Beträge sind, mehr aber noch, wie sehr klein die *a posteriori* erhaltenen Fehler sind im Vergleich mit den *a priori* geschätzten, z. B. $12,7 : 3,7$ bei den Verbindungsnetzen. Es wird gesagt (H. S. 252), dass zu diesem befriedigenden Ergebnis der Zufall wohl viel beigetragen habe. Unter allen Umständen bieten diese Fehlertabellen ein vortreffliches und in mancher Hinsicht erstes aus weiten Gebieten genügend kritisch gesammeltes Urteil über die Genauigkeit moderner Triangulierungen.

Eine zweite wichtige Untersuchung über Basis-Anschlüsse ist mitgeteilt in den „Verhandlungen der X. allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung zu Brüssel 1892“, Seite 518—456. „Verbindung und Vergleichung geodätischer Grundlinien“, zusammengestellt im Zentral-Bureau der Internationalen Erdmessung von Dr. Kühnen, wovon ein Auszug auch in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 75—79 gegeben ist.

Es war verfügbar je *ein* Anschluss zwischen den Ländern: Algerien, Spanien, Frankreich, England, Belgien, Deutschland, Russland; — Deutschland, Schweiz, Italien, Österreich; — Deutschland, Dänemark. Zwar gibt es zwischen Deutschland und Russland 4 und zwischen Deutschland und Dänemark 2 Anschlüsse, doch lagen die Verhältnisse für nur *je einen* von diesen so einfach, dass sie für den Bericht 1892 berücksichtigt werden konnten. Waren nun die Anschlüsse der verschiedenen Länder allein zusammengestellt, so wäre die Arbeit wenig lehrreich gewesen. Dagegen gewinnt sie ein grosses Interesse dadurch, dass eine Vergleichung fast aller europäischen Grundlinien (nebst den algerischen) ausgeführt worden ist. Im Ganzen erstreckt sich die Vergleichung von $7\frac{1}{2}^{\circ}$ westl. Länge (Lugo) bis $58\frac{1}{2}^{\circ}$ östl. Länge (Orsk), und von $35\frac{1}{2}^{\circ}$ nördl. Breite (Oran) bis $55\frac{1}{2}^{\circ}$ nördl. Breite (Amager).

Die Hauptschwierigkeiten der Arbeit bestanden darin, eine sichere Reduktion der einzelnen Basislängen auf das internationale Meter festzustellen. Für die Hälfte der Grundlinien war diese Schwierigkeit bereits durch die Europäische Längengradmessung von Prof. Helmert gehoben, über welche im Vorstehenden S. 154 berichtet ist.

Als allgemeine Bezugsbasis ist nach dem Vorgange der Helmertschen Längengradmessung die Basis von Lommel gewählt. Die Ergebnisse sind in einer Tabelle zusammengestellt, welche ausser 9 deutschen Grundlinien weiter 2 belgische, 2 neue und 3 alte französische, 6 spanische, 3 algerische, 2 englische, 3 schweizerische, 2 italienische, 2 österreichische, 1 dänische und 13 russische — zusammen 48 Grundlinien enthält, die durch rund 1000 Dreiecke mit einander verbunden sind.

Diese grosse und wichtige Tabelle findet sich in den „Verhandlungen der Konferenz in Brüssel 1892“ auf S. 540—545 mit 46 Grundlinien und ein Auszug daraus in der „Zeitschr. f. Verm.“ 1894, S. 78—79. Hier genügt es, daraus folgendes mitzuteilen:

Die Anschlüsse stimmen im allgemeinen über Erwarten günstig, es ergibt sich für je 2 Grundlinien eine mittlere Anschluss-Differenz von $15,6^{\text{mm}}$ für 1^{km} .

Ein Polygon, welches fast ganz Zentral-Europa umfasst, nämlich von der Grundlinie Berlin ausgehend, über Göttingen, Bonn, Oberhergheim, Aarberg, Weinfelden, Bellinzona, Somma, Udine, Grossenhain bis zurück nach Berlin, schliesst mit einem Widerspruch von nur $15,5^{\text{mm}}$ für 1^{km} . —

Solcher Polygone, aber in viel geringerer Ausdehnung, konnten mehrere in Spanien geschlossen werden; auch dort sind die Resultate, bis auf eines, günstig. — Die Anschlussdifferenzen gegen Lommel addieren sich nur bei der russischen Längengradmessung systematisch und erreichen bei Orsk den bedeutenden Betrag von 570^{mm} für 1^{km}. Im übrigen sind die drei grössten Abweichungen gegen Lommel: Lugo (Spanien) mit 81^{mm}, Taschbunar (russ. Breitengradmessung von Struve) mit 54^{mm} und Oran (Algerien) mit 36^{mm} für 1^{km}.

Die Anschlüsse zwischen Grundlinien benachbarter Länder, die mit *verschiedenen* Apparaten gemessen worden sind, sind in der folgenden Tabelle enthalten. (In Belgien und Dänemark diente der preussische Besselsche Basisapparat.)

Anschluss	Entfernung in km	Anzahl der verbinden- den Dreiecke	Anschlussdifferenz in 7. Stelle des Log.	in mm für 1 ^{km}
1) Algerien — Spanien (Oran — Cartagena)	450	18	— 105	— 24,2
2) Spanien — Frankreich (Vich — Perpignan)	100	10	— 9	— 2,1
3) Frankreich — England (Paris — engl. Basen)	300	27	+ 14	+ 3,2
4) Frankreich — Belgien (Paris — Ostende)	275	26	+ 46	+ 10,6
5) England — Belgien (engl. Basen — Ostende)	150	9	— 10	— 2,3
6) Deutschland — Schweiz (Oberhergheim — Aarberg)	100	15	— 40	— 9,2
7) Schweiz — Italien (Bellinzona — Somma)	75	3	— 29	— 6,7
8) Preussen — Russland (Strehlen — Czenstochau) .	150	11	+ 2	+ 0,5
Summe	1600	119	± 255	± 58,8
Durchschnitt	200	13	± 32	± 7,4

Der rohe Durchschnitt giebt also zwischen je zwei Grundlinien mit 13 Verbindungsdreiecken auf 200^{km} Entfernung eine Anschluss-Differenz = 0.000 0032 im Logarithmus oder $\frac{32}{4,34} = 7,4^{\text{mm}}$ für 1^{km}.

Im Ganzen kommt der Verfasser zu folgenden Schlüssen:

I. Nach Reduktion auf internationale Meter zeigen die Grundlinien, welche in benachbarten Ländern mit *verschiedenen* Apparaten gemessen sind, keinen Unterschied gegen die Grundlinien, die mit *demselben* Apparat gemessen worden sind.

II. Die Vergleichung der Grundlinien vermittelst Dreiecksketten lässt deshalb weitere Schlüsse über die Massvergleichung, über die Reduktionsfaktoren, oder über die angewandte Messungsmethode nicht mehr zu (d. h. diese Feinheiten verschwinden neben den Triangulierungsfehlern).

III. Um alle Grundlinien wirklich einheitlich auf einander beziehen zu können, ist es erforderlich, entweder sämtliche Grundlinien mit demselben Apparat zu messen, oder eine einzige Grundlinie mit allen Apparaten zu messen, und hiernach die einzelnen Apparate gegen einander zu bestimmen.

§ 25. Änderung der geographischen Breite.

Die seit etwa 10 Jahren konstatierte und nun in gründlicher Erforschung befindliche Änderung der geographischen Breite eines Ortes; allgemeiner die Schwankungen der Erdaxe, bis zu 0,3" Ausweichung von der Mittellage, bildet eine Haupt-