UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 27. Sphärische Trigonometrie

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Visual Library

Allerdings astronomische Längen und Azimute *zusammen* spielen hier noch eine andere Rolle, wovon aber hier auch noch nicht gehandelt werden kann.

Vielmehr ist es hier, vor Beginn der mathematisch-geodätischen Rechnungen auf dem Ellipsoid, nur nötig zu erklären, dass die Breiten und Längen, welche bis auf Tausendel und Zehntausendel-Sekunden (0,001″ bis 0,0001″ und teilweise noch weiter) angegeben werden, in der Geodäsie zunächst gar keinen anderen Zweck haben als die geometrische Punktbestimmung auf einer krummen Fläche, welche, als Umdrehungs-Ellipsoid angenommen, selbst nur hypothetischer Natur ist.

Dieser Entwicklungsgang ist unerlässlich, und *nach* Erledigung der geodätischen Theorieen für Ellipsoid und Kugel wird auch das Verständnis für die von jenen Voraussetzungen freie Geodäsie sich eröffnen.

Kapitel II.

Mathematische Hilfsmittel der geodätischen Entwicklungen.

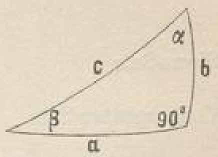
Wir schalten dieses kleine Kapitel hier ein, um die gebräuchlichsten Formeln und Zahlenwerte für geodätische Entwicklungen zur Hand zu haben und nach Bedarf citieren zu können.

§ 27. Sphärische Trigonometrie.

I. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

Wir nehmen nach Andeutung von Fig. 1. die Bezeichnungen an:

Fig. 1. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.



Hypotenuse	$= c$	Gegenwinkel	$= 90°$
Kathete	$= a$	Gegenwinkel	$= \alpha$
Kathete	$= b$	Gegenwinkel	$= \beta$

Hiemit hat man folgende Gleichungen:

$$\cos c = \cos a \cos b$$
$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$$
$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \text{ und } \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$
$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c} \text{ und } \cos \beta = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c}$$
$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b} \text{ und } \operatorname{tang} \beta = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin a}$$
$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \text{ und } \cos \beta = \sin \alpha \cos b$$

In dieser Gestalt prägen sich diese Gleichungen leicht dem Gedächtnis ein, wenn man die Analogieen mit den Formeln der *ebenen* Trigonometrie im Auge behält.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Z. B. würde man für ein *ebenes* rechtwinkliges Dreieck, entsprechend Fig. 1., schreiben:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{a}{b}$$

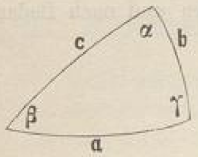
und nun braucht man nur noch auswendig zu wissen, dass *sinus* im Zähler sinus und im Nenner *sinus*, sowie *tangens* entsprechend *tangens* und *sinus* hat, endlich dass *cos* im Zähler und im Nenner beidemal *tang* hat, um diese Formeln immer aus dem Gedächtnis anschreiben zu können.

Ferner merke man sich, dass die erste Formel $\cos c$ dem pythagoräischen Satze der Ebene, d. h. $c^2 = a^2 + b^2$ entspricht, und dass die 2te und 6te Formel der Beziehung in der Ebene $\alpha + \beta = 90°$ entsprechen.

Ausserdem hat man die Nepersche Regel: Wenn man die Stücke α, c, β, $90° - a$, $90° - b$, $\alpha \ldots$ in cyklischer Aufeinanderfolge betrachtet, so ist der Cosinus irgend eines Stückes gleich dem Sinus-Produkt der getrennten und gleich dem Cotangenten-Produkt der anliegenden Stücke.

II. Allgemeines sphärisches Dreieck.

Fig. 2.
Sphärisches Dreieck.



Nach Fig. 2. bezeichnen wir:

Seite a mit dem Gegenwinkel α
„ b „ „ „ β
„ c „ „ „ γ

Man hat zuerst folgende 4 Gleichungs-Gruppen, welche je *vier* Stücke enthalten, und zur Bestimmung eines Dreiecks aus drei gegebenen Stücken genügen:

Cosinus-Satz

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma \end{aligned}$$

Sinus-Satz

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

Contangenten-Satz

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} a \sin b &= \cos b \cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{cotg}\alpha \\ \operatorname{cotg} b \sin c &= \cos c \cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{cotg}\beta \\ \operatorname{cotg} c \sin a &= \cos a \cos\beta + \sin\beta \operatorname{cotg}\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} a \sin c &= \cos c \cos\beta + \sin\beta \operatorname{cotg}\alpha \\ \operatorname{cotg} b \sin a &= \cos a \cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{cotg}\beta \\ \operatorname{cotg} c \sin b &= \cos b \cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{cotg}\gamma \end{aligned}$$

Polar-Cosinus-Satz

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= -\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos a \\ \cos\beta &= -\cos\gamma \cos\alpha + \sin\gamma \sin\alpha \cos b \\ \cos\gamma &= -\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos c \end{aligned}$$

Nicht unmittelbar zur Auflösung eines Dreiecks dienend, aber anderweitig oft brauchbar, ist eine Beziehung zwischen *fünf* Stücken des Dreiecks, welche in sechsfacher Anwendung folgende Gruppe giebt:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\begin{aligned}
\sin a \cos\beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha \\
\sin b \cos\gamma &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos\beta \\
\sin c \cos\alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin a \cos\gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos\alpha \\
\sin b \cos\alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos\beta \\
\sin c \cos\beta &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos\gamma
\end{aligned}$$

Weiter haben wir die wichtigen Gauss schen Gleichungen:

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} = \sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

Diese Gleichungen lassen verschiedene Anwendungen zu; wenn z. B. b, c und α gegeben und β, γ, a zu berechnen sind, so bestimmt man zuerst $\frac{\beta+\gamma}{2}$ und $\frac{\beta-\gamma}{2}$, womit man auch β und γ hat, und dann $\frac{a}{2}$ auf mehr als einem Wege.

Wenn wir hiebei zur vorübergehenden Abkürzung die Zähler und Nenner der entstehenden Brüche mit Z, N, sowie Z', N' bezeichnen, so haben wir:

$$\tang\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{Z}{N}$$

$$\tang\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{Z'}{N'}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{Z}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{N}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} \qquad \sin\frac{a}{2} = \frac{Z'}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{N'}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Wenn hier $\frac{a}{2} < 45°$ ist, so ist die Bestimmung aus $\sin\frac{a}{2}$ vorzuziehen, und wenn $\frac{a}{2} > 45°$, so ist $\cos\frac{a}{2}$ günstiger.

Bei der Doppelbestimmung, die man auch für $\cos\frac{a}{2}$ selbst oder für $\sin\frac{a}{2}$ hat, gelten zu günstigster Auswahl dieselben Regeln, wie bei der Berechnung der Hypotenuse eines ebenen Dreiecks, wie bereits in unserem Band II. 4. Aufl. 1893, S. 230 angegeben ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der sphärische Exzess eines sphärischen Dreiecks ist der Überschuss der Winkelsumme über 180°, d. h.:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$$

Wenn r der Kugelhalbmesser und F die krumme Oberfläche des sphärischen Dreiecks ist, so findet man daraus den Exzess ε nach der Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \varrho$$

dabei ist $\varrho = \frac{180°}{\pi}$ oder für Sekunden $\varrho = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = 206\,265''$. (Vgl. S. 170.)

Aus den Seiten a, b, c erhält man den sphärischen Exzess durch die Formel:

$$tang \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{tang \frac{s}{2}\, tang \frac{s-a}{2}\, tang \frac{s-b}{2}\, tang \frac{s-c}{2}}$$

wobei $a + b + c = s$.

§ 28. Reihen-Entwicklungen.

In der höheren Geodäsie spielen konvergierende Reihen eine wichtige Rolle.

Als Grundlage der konvergierenden Potenz-Reihen betrachten wir zuerst die Taylorsche Reihe mit der Veränderlichen x und mit der Änderung h derselben:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots$$

Dabei bedeutet $f'(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$ nach x, $f''(x)$ die zweite Ableitung u. s. w., ferner ist:

$1! = 1$	$5! = 120$	$9! = 362880$
$2! = 1 . 2 = 2$	$6! = 720$	$10! = 3628800$
$3! = 1 . 2 . 3 = 6$	$7! = 5040$	$11! = 39916800$
$4! = 1 . 2 . 3 . 4 = 24$	$8! = 40320$	$12! = 479001600$

In anderer Form sind diese Fakultäten:

$1! = 1$	$5! = 2^3 . 3 . 5$	$9! = 2^7 . 3^4 . 5 . 7$
$2! = 2$	$6! = 2^4 . 3^2 . 5$	$10! = 2^8 . 3^4 . 5^2 . 7$
$3! = 2 . 3$	$7! = 2^4 . 3^2 . 5 . 7$	$11! = 2^8 . 3^4 . 5^2 . 7 . 11$
$4! = 2^3 . 3$	$8! = 2^7 . 3^2 . 5 . 7$	$12! = 2^{10} . 3^5 . 5^2 . 7 . 11$

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2^n =$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096.

Die sehr oft gebrauchten trigonometrischen Anwendungen der Taylorschen Reihe sind:

$$sin\,(x+h) = sin\,x + h\,cos\,x - \frac{h^2}{2} sin\,x - \frac{h^3}{6} cos\,x + \frac{h^4}{24} sin\,x + \ldots$$

$$sin\,(x-h) = sin\,x - h\,cos\,x - \frac{h^2}{2} sin\,x + \frac{h^3}{6} cos\,x + \frac{h^4}{24} sin\,x - \ldots$$

$$cos\,(x+h) = cos\,x - h\,sin\,x - \frac{h^2}{2} cos\,x + \frac{h^3}{6} sin\,x + \frac{h^4}{24} cos\,x - \ldots$$

$$cos\,(x-h) = cos\,x + h\,sin\,x - \frac{h^2}{2} cos\,x - \frac{h^3}{6} sin\,x + \frac{h^4}{24} sin\,x + \ldots$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN