Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 28. Reihen-Entwicklungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Der sphärische Exzess eines sphärischen Dreiecks ist der Überschuss der Winkelsumme über 180°, d. h.:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$$

Wenn r der Kugelhalbmesser und F die krumme Oberfläche des sphärischen Dreiecks ist, so findet man daraus den Exzess ε nach der Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2}\,\varrho$$

dabei ist $\varrho = \frac{180^\circ}{\pi}$ oder für Sekunden $\varrho = \frac{180 \,.\, 60 \,.\, 60}{\pi} = 206\,265''$. (Vgl. S. 170.)

Aus den Seiten a, b, c erhält man den sphärischen Exzess durch die Formel:

$$tang\,\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{tang\,\frac{s}{2}\,tang\,\frac{s-a}{2}\,tang\,\frac{s-b}{2}\,tang\,\frac{s-c}{2}}$$

wobei $a + b + c = s$.

§ 28. Reihen-Entwicklungen.

In der höheren Geodäsie spielen konvergierende Reihen eine wichtige Rolle.

Als Grundlage der konvergierenden Potenz-Reihen betrachten wir zuerst die Taylorsche Reihe mit der Veränderlichen x und mit der Änderung h derselben:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots$$

Dabei bedeutet $f'(x)$ die erste Ableitung von $f(x)$ nach x, $f''(x)$ die zweite Ableitung u. s. w., ferner ist:

$1! = 1$	$5! = 120$	$9! = 362880$
$2! = 1.2 = 2$	$6! = 720$	$10! = 3628800$
$3! = 1.2.3 = 6$	$7! = 5040$	$11! = 39916800$
$4! = 1.2.3.4 = 24$	$8! = 40320$	$12! = 479001600$

In anderer Form sind diese Fakultäten:

$1! = 1$	$5! = 2^3.3.5$	$9! = 2^7.3^4.5.7$
$2! = 2$	$6! = 2^4.3^2.5$	$10! = 2^8.3^4.5^2.7$
$3! = 2.3$	$7! = 2^4.3^2.5.7$	$11! = 2^8.3^4.5^2.7.11$
$4! = 2^3.3$	$8! = 2^7.3^2.5.7$	$12! = 2^{10}.3^5.5^2.7.11$

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2^n =$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096.

Die sehr oft gebrauchten trigonometrischen Anwendungen der Taylorschen Reihe sind:

$$sin\,(x+h) = sin\,x + h\,cos\,x - \frac{h^2}{2}\,sin\,x - \frac{h^3}{6}\,cos\,x + \frac{h^4}{24}\,sin\,x + \ldots$$

$$sin\,(x-h) = sin\,x - h\,cos\,x - \frac{h^2}{2}\,sin\,x + \frac{h^3}{6}\,cos\,x + \frac{h^4}{24}\,sin\,x - \ldots$$

$$cos\,(x+h) = cos\,x - h\,sin\,x - \frac{h^2}{2}\,cos\,x + \frac{h^3}{6}\,sin\,x + \frac{h^4}{24}\,cos\,x - \ldots$$

$$cos\,(x-h) = cos\,x + h\,sin\,x - \frac{h^2}{2}\,cos\,x - \frac{h^3}{6}\,sin\,x + \frac{h^4}{24}\,sin\,x + \ldots$$

$$tang\,(x+h) = tang\,x + h\frac{1}{\cos^2 x} + h^2\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{h^3}{3}\,\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} + \ldots$$

$$cotg\,(x+h) = cotg\,x - h\frac{1}{\sin^2 x} + h^2\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{h^3}{3}\,\frac{\sin^2 x + 3\cos^2 x}{\cos^4 x} + \ldots$$

Manchmal ist es bequem, alles in $tang\,x = t$ auszudrücken, wie folgende Beispiele zeigen:

$$\cos(x+h) = \cos x\left(1 - h\,t - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\,t + \frac{h^4}{24}\cdots\right)$$

$$\frac{1}{\cos(x+h)} = \frac{1}{\cos x}\left(1 + h\,t + \frac{h^2}{2}\,(1+2\,t^2) + \frac{h^3}{6}\,t\,(5+6\,t^2) + \frac{h^4}{24}\,(5+28\,t^2+24\,t^4)\ldots\right)$$

$$tang\,(x+h) = tang\,x + h\,(1+t^2) + h^2\,t\,(1+t^2) + \frac{h^3}{3}\,(1+4\,t^2+3\,t^4)$$

Folgendes sind die weitergehenden Ableitungen von $tang\,x$:

$$tang\,x = t$$

$$\frac{d\,t}{d\,x} = 1 + t^2$$

$$\frac{d^2\,t}{d\,x^2} = 2\,t\,(1+t^2)$$

$$\frac{d^3\,t}{d\,x^3} = 2\,(1+t^2)\,(1+3\,t^2)$$

$$\frac{d^4\,t}{d\,x^4} = 8\,t\,(1+t^2)\,(2+3\,t^2)$$

$$\frac{d^5\,t}{d\,x^5} = 8\,(1+t^2)\,(2+15\,t^2+15\,t^4)$$

$$\frac{d^6\,t}{d\,x^6} = 16\,t\,(1+t^2)\,(17+60\,t^2+45\,t^4)$$

$$\frac{d^7\,t}{d\,x^7} = 16\,(1+t^2)\,(17+231\,t^2+525\,t^4+315\,t^6)$$

$$\frac{d^8\,t}{d\,x^8} = 128\,t\,(1+t^2)\,(62+378\,t^2+630\,t^4+315\,t^6)$$

$$\frac{d^9\,t}{d\,x^9} = 128\,(1+t^2)\,(62+1320\,t^2+5040\,t^4+6615\,t^6+2835\,t^8)$$

$$\frac{d^{10}\,t}{d\,x^{10}} = 256\,t\,(1+t^2)\,(1382+12720\,t^2+34965\,t^4+37800\,t^6+14175\,t^8)$$

$$\frac{d^{11}\,t}{d\,x^{11}} = 256\,(1+t^2)\,(1382+42306\,t^2+238425\,t^4+509355\,t^6+467775\,t^8+155925\,t^{10})$$

Ebenso auch die Ableitungen von $cotg\,x$:

$$cotg\,x = c$$

$$\frac{d\,c}{d\,x} = -(1+c^2)$$

$$\frac{d^2\,c}{d\,x^2} = +2\,c\,(1+c^2)$$

$$\frac{d^3 c}{d x^3} = -2(1+c^2)(1+3c^2)$$

$$\frac{d^4 c}{d x^4} = +8c(1+c^2)(2+3c^2) \text{ u. s. w.}$$

die Coëfficienten sind hier dieselben wie bei den Ableitungen von t, jedoch findet bei den ungeraden Ableitungen Zeichenänderung statt.

Mit dem Vorstehenden hat man zugleich die Ableitungen von *log cos x* und *log sin x*, denn es ist:

$$\frac{d\, l \cos x}{d x} = -\operatorname{tang} x \qquad \frac{d\, l \sin x}{d x} = \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{d^2 l \cos x}{d x^2} = -\frac{d t}{d x} = -(1+t^2) \qquad \frac{d^2 l \sin x}{d x^2} = \frac{d c}{d x} = -(1+c^2)$$

u. s. w.

Auf die zuerst angegebene Taylorsche Reihe gründet sich auch die Maclaurinsche Reihe:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3} f'''(0)$$

wobei $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ u. s. w. diejenigen Werte sind, welche entstehen, wenn in $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. w. die Veränderliche x gleich Null gesetzt wird.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Binomial-Reihe:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots$$

Die Coëfficienten dieser Reihe heissen Binomial-Coëfficienten, und haben folgende Bedeutungen:

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3} \text{ u. s. w.}$$

Z. B.

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

$$(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

7te Potenz giebt	1	7	21	35	35	21	7	1			
8 „ „	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9 „ „	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10 „ „	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

die Wiederkehr ist ausgedrückt durch $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2 b + 3a^2 c + 3b^2 c + 6abc + 3ab^2 + 3ac^2 + 3bc^2.$$

Die Binomial-Reihe gilt allgemein für ganze oder gebrochene positive oder negative Exponenten n und konvergiert immer, wenn $x < 1$ ist. Einige häufig gebrauchte Anwendungen dieser Reihe sind folgende:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \frac{33}{2048}x^7 + \ldots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \frac{231}{1024}x^6 - \frac{429}{2048}x^7 + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \ldots$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \frac{7}{256}x^{10} - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \frac{63}{256}x^{10} + \ldots$$

Logarithmische Reihe.

$$\left.\begin{aligned} l(1+x) &= +x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \\ l(1-x) &= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) \end{aligned}\right\}$$

Hiebei ist l das Zeichen für natürliche Logarithmen mit der Basis $e = 2{,}1828\ldots$ oder es ist $l\,z$ der natürliche Logarithmus von z. Dagegen bedeutet $\log z$ den dekadischen oder Briggschen Logarithmus mit der Basis 10, und es besteht die Beziehung:

$$\log z = \mu\,(l\,z)$$

Der Faktor μ heisst der Modulus des Briggschen Logarithmen-Systems.

Auf 20 Stellen genau hat man hiezu:

$$\mu = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765 \qquad \frac{1}{\mu} = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68402$$

$$\log \mu = 9.63778\ 43113\ 00536\ 78912 \qquad \log \frac{1}{\mu} = 0.36221\ 56886\ 99463\ 21088$$

Wenn man grössere Multiplikationen oder Divisionen mit dem Faktor $\mu = 0{,}43429\ldots$ auszuführen hat, so kann man eine Tafel der Vielfachen von μ oder $1 : \mu$ benützen, wie sie in manchen älteren Logarithmen-Tafeln sich finden z. B. Thesaurus S. 641 und Steinhauser 20stell. Logar., Wien 1880 S. XII bis $100\,\mu$ und S. XI umgekehrt.

Exponential-Reihe.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$a^x = 1 + \frac{x\,l\,a}{1} + \frac{(x\,l\,a)^2}{2!} + \frac{(x\,l\,a)^3}{3!} + \frac{(x\,l\,a)^4}{4!} + \dots$$

$$10^x = 1 + \frac{x}{\mu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{\mu}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{\mu}\right)^4 + \dots$$

$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045 \quad log\,e = \mu = 0{,}43429\dots \quad l\,10 = \frac{1}{\mu} = 2{,}3026\dots$ (S. 169).

Goniometrische Reihen.

In den Potenzreihen für *sin* x, *cos* x, u. s. w. ist x in analytischem Masse zu nehmen, zu dessen Erklärung an die Berechnung eines Kreisbogens zu einem Centriwinkel erinnert wird. In einem Kreise mit dem Halbmesser r sei ein Centriwinkel α in Graden (also z. B. $\alpha = 30°$, $\alpha = 40°$ u. s. w.) gegeben und es soll der zugehörige Bogen b berechnet werden, wozu die Proportion dient:

$$b : 2\,r\,\pi = \alpha : 360°$$

also
$$b = \frac{2\,r\,\pi\,\alpha°}{360°} = \frac{r\,\alpha°}{\varrho°} \text{ wenn } \varrho° = \frac{180°}{\pi}$$

Setzt man
$$\frac{\alpha°}{\varrho°} = \alpha, \text{ so wird } b = r\,\alpha$$

Dieses führt allgemein zu der Erklärung: Wenn $x°$, x', x'' ein Winkelwert in geometrischem Mass, d. h. in Graden, Minuten oder Sekunden ist, und x der entsprechende Wert in analytischem Masse, so bestehen die Gleichungen:

$$x = \frac{x°}{\varrho°} \text{ wobei } \varrho° = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3{,}14159\dots}$$

$$x = \frac{x'}{\varrho'} \quad " \quad \varrho' = \frac{180\,.\,60}{\pi} = \frac{4800}{3{,}14159\dots}$$

$$x = \frac{x''}{\varrho''} \quad " \quad \varrho'' = \frac{180\,.\,60\,.\,60}{\pi} = \frac{288000}{3{,}14159\dots}$$

oder für neue Teilung:

$$x = \frac{x^g}{\varrho^g} \text{ wobei } \varrho^g = \frac{200}{\pi} = \frac{200}{3{,}14159\dots}$$

Die genaueren Zahlenwerte hiezu sind:

$\pi =$ 3,14159 26535 89793	$log\ \pi = 0.49714\ 98726\ 94134$
$\frac{1}{\pi} =$ 0,31830 98861 83791	$log\ \frac{1}{\pi} = 9.50285\ 01273\ 05866$
$\varrho° =$ 57,29577 95130 82321	$log\ \varrho° = 1.75812\ 26324\ 09172$
$\frac{1}{\varrho°} =$ 0,01745 32925 19943	$log\ \frac{1}{\varrho°} = 8.24187\ 73675\ 90828$
$\varrho' =$ 3437,74677 07849 39253	$log\ \varrho' = 3.53627\ 38827\ 92816$
$\frac{1}{\varrho'} =$ 0,00029 08882 08666	$log\ \frac{1}{\varrho'} = 6.46372\ 61172\ 07184$

$\varrho'' = 206264{,}80624\ 70963\ 55156$	$\log \varrho'' = 5.31442\ 51331\ 76459$
$\dfrac{1}{\varrho''} = 0{,}00000\ 48481\ 36811$	$\log \dfrac{1}{\varrho''} = 4.68557\ 48668\ 23541$
$\varrho^g = 63{,}66197\ 72367\ 58134$	$\log \varrho^g = 1.80388\ 01229\ 69847$
$\dfrac{1}{\varrho^g} = 0{,}01570\ 79632\ 67949$	$\log \dfrac{1}{\varrho^g} = 8.19611\ 98870\ 30153$

Zu weit getriebenen Reihenentwicklungen braucht man auch π^2, $\pi^3 \ldots$ $\left(\text{für die Potenzen von } \dfrac{1}{\varrho}\right)$:

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846$	$\log \pi = 0.49714\ 98726\ 94133\ 85435$
$\pi^2 = 9{,}86960\ 44010\ 89358\ 61883$	$\log \pi^2 = 0.99429\ 97453\ 88267\ 70870$
$\pi^3 = 31{,}00627\ 66802\ 99820\ 1754$	$\log \pi^3 = 1.49144\ 96180\ 82401\ 56305$
$\pi^4 = 97{,}40909\ 10340\ 02437\ 24$	$\log \pi^4 = 1.98859\ 94907\ 76535\ 41741$
$\pi^5 = 306{,}01968\ 47852\ 81453$	$\log \pi^5 = 2.48574\ 93634\ 70669$
$\pi^6 = 961{,}38919\ 35753\ 044$	$\log \pi^6 = 2.98289\ 92361\ 64803$
$\pi^7 = 3020{,}29322\ 77768$	$\log \pi^7 = 3.48004\ 91089$
$\pi^8 = 9488{,}53101\ 60757$	$\log \pi^8 = 3.97719\ 89816$
Diese Werte sind unmittelbar durch Multiplikationen von π erhalten.	$\log \pi^9 = 4.47434\ 88542$
	$\log \pi^{10} = 4.97149\ 87269$

Am häufigsten braucht man ϱ in Sekunden, weshalb wir die Logarithmen der Potenzen dieses ϱ, nebst dem oft dazu gebrauchten Faktor μ im Folgenden zusammenstellen.

n	$\log \varrho^n$	$\log \dfrac{1}{\varrho^n}$	$\log \dfrac{\mu}{\varrho^n}$	n
			9.637 7843·113	0
1	5.314 4251·332	4.685 5748·668	4.323 3591·781	1
2	0.628 8502·664	9.371 1497·336	9.008 9340·449	2
3	5.943 2753·995	4.056 7246·005	3.694 5089·118	3
4	1.257 7005·327	8.742 2994·673	8.380 0837·786	4
5	6.572 1256·659	3.427 8743·341	3.065 6586·454	5
6	1.886 5507·991	8.113 4492·009	7.751 2335·122	6
7	7.200 9759·322	2.799 0240·678	2.436 8083·791	7
8	2.515 4010·654	7.484 5989·346	7.122 3832·459	8
9	7.829 8261·986	2.170 1738·014	1.807 9581·127	9
10	3.144 2513·318	6.855 7486·682	6.493 5329·795	10
12	3.773 1016	6.226 8984	5.864 6827	12

In der Charakteristik der Logarithmen sind hier nur die Werte zwischen 0 und 9 geschrieben z. B. für $\log \varrho^2 = 10.628\ldots$ ist nur geschrieben $0.628\ldots$ u. s. w. und ebenso sind auch die -10 u. s. w. am Schlusse einfach weggelassen; der Punkt oben z. B. 1·332 steht nach der 7ten Stelle. Diese Bemerkungen gelten auch für alle übrigen Logarithmenrechnungen dieses Buches.

Obige Tabelle gilt für alte Teilung und ϱ in Sekunden. Für neue Teilung stehen die entsprechenden Potenzlogarithmen in des Verfassers logar.-trig. Tafeln für neue Teilung, Stuttgart 1894, S. 417, und die wichtigsten Konstanten mit μ und ϱ für neue Teilung sind:

$$\frac{\mu}{\varrho} = \frac{\mu\,\pi}{200} = 0{,}00682\ 18817\ 69209\ 06737 \qquad log = 7.83390\ 41883\ 30689$$

$$\frac{\mu}{6\,\varrho^2} = 178596{,}44708\ 17149 \qquad log = 5.25187\ 28149\ 77198$$

$$\frac{\mu}{2\,\varrho^2} = 535789{,}34124\ 51446 \qquad log = 5.72899\ 40696\ 96861$$

$$\frac{\mu}{180\,\varrho^4} = 1{,}46889\ 69001 \qquad log = 0.16699\ 13143$$

$$\frac{\mu}{12\,\varrho^4} = 22{,}03345\ 35017 \qquad log = 1.34308\ 25734$$

Die folgenden Reihen gelten für x in analytischem Masse:

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \ldots$$

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800} + \ldots$$

$$tang\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17\,x^7}{315} + \frac{62\,x^9}{2835} + \frac{1382\,x^{11}}{155925}\,,\ tang\,\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{240} + \ldots$$

$$cotang\,x = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2\,x_6}{945} - \ldots\right)$$

$$sec\,x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61\,x^6}{720} + \frac{251\,x^8}{40320} + \ldots$$

$$cosec\,x = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7\,x^4}{360} + \frac{31\,x^6}{15120} + \ldots\right)$$

$$x = arc\,sin\,y = y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5\,y^7}{112} + \frac{35\,y^9}{1152} + \frac{63\,y^{11}}{2816} + \frac{231\,y^{13}}{13312} + \ldots (y = sin\,x)$$

$$x = arc\,tang\,y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{11}}{11} + \frac{y^{13}}{13} - \ldots (y = tang\,x)$$

$$l\,sin\,x = l\,x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \frac{x^8}{37800} - \frac{x^{10}}{467775} - \frac{691\,x^{12}}{3831077250}$$

$$l\,cos\,x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17\,x^8}{2520} - \frac{31\,x^{10}}{14175} - \frac{691\,x^{12}}{935550}$$

$$l\,tang\,x = l\,x + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \frac{127\,x^8}{18900} + \frac{146\,x^{10}}{66825} + \frac{2828954\,x^{12}}{3831077250}$$

Die Coëfficienten dieser drei letzten Reihen erfüllen die Bedingungen:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ ,\quad \frac{1}{180} + \frac{7}{90} = \frac{1}{12}\ ,\quad \text{allgemein } S_n + T_n = C_n$$

und $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 2^2 \frac{1}{6}$, $\frac{1}{180} + \frac{1}{12} = 2^4 \frac{1}{180}$, allgemein $S_n + C_n = 2^n S_n$ (weil $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$).

Diese Reihen gelten, wie schon oben bemerkt, für x in analytischem Masse; wird x in Graden, Minuten oder Sekunden gezählt, so muss mit dem betreffenden ϱ dividiert werden, und für gewöhnliche Logarithmen ist mit dem Modulus μ im Ganzen zu multiplizieren, wodurch man für Gradmass und gewöhnliche Logarithmen hat:

$$\log \sin x = \log \frac{x}{\varrho} - \left\{ \frac{\mu}{6\varrho^2} x^2 + \frac{\mu x^4}{180 \varrho^4} + \frac{\mu x^6}{2835 \varrho^6} + \frac{\mu x^8}{37800 \varrho^8} + \frac{\mu x^{10}}{467775 \varrho^{10}} \right\}$$

$$\log \cos x = \qquad - \left\{ \frac{\mu}{2\varrho^2} x^2 + \frac{\mu x^4}{12 \varrho^4} + \frac{\mu x^6}{45 \varrho^6} + \frac{\mu\, 17\, x^8}{2520 \varrho^8} + \frac{\mu\, 31\, x^{10}}{14175 \varrho^{10}} \right\}$$

$$\log \operatorname{tang} x = \log \frac{x}{\varrho} + \left\{ \frac{\mu}{3\varrho^2} x^2 + \frac{\mu\, 7\, x^4}{90 \varrho^4} + \frac{\mu\, 62\, x^6}{2835 \varrho^6} + \frac{\mu\, 127\, x^8}{18900 \varrho^8} + \frac{\mu\, 146\, x^{10}}{66825 \varrho^{10}} \right\}$$

Hiebei ist für Sekunden $\log \frac{1}{\varrho} = 4.685\,5748{\cdot}668$ und die übrigen Coëfficienten-Logarithmen sind die folgenden:

	x^2	x^4	x^6	x^8	x^{10}	x^{12}
log sin	8.230 7827·945	6.124 8112·7	4.298 6804	2.544 891	0.82350	9.1208
log cos	8.707 9040·492	7.300 9025·3	6.098 0210	4.951 432	3.83337	2.7331
log tang	8.531 8127·902	7.270 9393·1	6.091 0721	4.949 725	3.83295	2.7330

Die entsprechenden Werte für neue Teilung sind mitgeteilt in des Verfassers logar.-trig. Tafeln für neue Teilung, 1894, S. 417.

Mit diesen Reihen kann man die *log sin* u. s. w. bis auf 15 Stellen berechnen etwa für Winkel von 0° bis zu 10°, und wenn man zu einem *kleinen* Winkel x einen scharfen Wert *log sin* x oder *log tang* x braucht, so erhält man ihn mit wenigen Reihengliedern besser unmittelbar als durch Interpolation aus der 10stelligen Tafel.

Für x etwa zwischen 10° und 35° hat man die Eulerschen Reihen, welche in des Verfassers 6stell. Tafeln für neue Teilung auf S. VII angegeben sind mit neu ausgerechneten Coëfficienten für neue Teilung.

Für x in der Nähe von 45°, etwa zwischen 35° und 55° haben wir *neue* Formeln aufgestellt in der genannten 6stelligen Tafel S. VIII, und es mag hier kurz deren Entwicklung angedeutet werden. Nach dem Taylorschen Satze ist zunächst allgemein

$$l \cos (X + x) = l \cos X - \frac{x}{1} \operatorname{tang} X - \frac{x^2}{2} \frac{d \operatorname{tang} X}{d X} - \frac{x^3}{6} \frac{d^2 \operatorname{tang} X}{d X^2} - \ldots$$

Die Ableitungen von *tang* X sind bereits auf S. 167 angegeben, und deren Werte für $X = 45°$ oder $= 50^g$, lassen sich daraus mit $t = 1$ leicht ermitteln, woraus folgt:

$$l \cos (50^g + x) = l \cos 50^g - \frac{x}{1} - \frac{2x^2}{2} - \frac{4x^3}{6} - \frac{16x^4}{24} +$$

und auf gleichem Wege wird gefunden:

$$l \sin (50^g + x) = l \sin 50^g + \frac{x}{1} - \frac{2x^2}{2} + \frac{4x^3}{6} - \frac{16x^4}{24} + \ldots$$

Wenn x in Einheiten von 1^g gezählt wird, so muss man x mit ϱ_g und x^2 mit ϱ_g^2 dividieren u. s. w., wobei $\log \varrho_g = 1.80\,388\ldots$ ist, und zum Übergang auf briggische Logarithmen ist der Faktor μ im Ganzen zuzusetzen ($\log \mu = 9.63778\ldots$). Wenn dieses geschehen ist, soll erhalten werden:

$$\log \cos (50^g + x) = \log \cos 50^g - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 + \ldots$$
$$\log \sin (50^g + x) = \log \sin 50^g + \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 - \ldots$$

Nun empfiehlt es sich, Näherungswerte abzusondern, nämlich:

$$log\left(1-\frac{2\,x}{100}\right)=-\frac{2}{100}\,\mu\,x-\left(\frac{2}{100}\right)^2\frac{\mu\,x^2}{2}-\left(\frac{2}{100}\right)^3\frac{\mu\,x^3}{3}-\ldots$$

$$log\left(1+\frac{2\,x}{100}\right)=+\frac{2}{100}\,\mu\,x-\left(\frac{2}{100}\right)^2\frac{\mu\,x^2}{2}+\left(\frac{2}{100}\right)^3\frac{\mu\,x^3}{3}-\ldots$$

Dieses ist so bemessen, dass α_1 sehr nahe $=\frac{2\,\mu}{100}$ und α_2 sehr nahe $=\left(\frac{2}{100}\right)^2\frac{\mu}{2}$ wird, dass also bei der Zusammenfassung die Coëfficienten von x und von x^2 klein werden. Die weitere Ausführung, auf welche hier nicht eingegangen werden kann, giebt die Gebrauchsformel auf S. VIII unserer logar-trig. Tafeln für neue Teilung. In der „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 600—602 wird mitgeteilt, dass jene „neuen Formeln" für $log\,sin\,(50^g-x)$ und $log\,cos\,(50^g-x)$, welche vom Verfasser 1893 zuerst veröffentlicht wurden, auch von Herrn Prof. Schols in Delft aufgestellt (aber nicht veröffentlicht) wurden und es ist Herr Schols in der Ausrechnung erheblich weiter, nämlich bis zur 20ten Potenz mit 27 Stellen gegangen, wie die von ihm in der „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 601 mitgeteilten Zahlenwerte zeigen. Die im Vorstehenden mitgeteilten Formeln und Zahlenwerte gehen zum Teil über die Bedürfnisse des praktischen Geodäten hinaus, wir sind dazu geführt worden durch die Berechnungen zu den „logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für neue Teilung mit 6 Stellen von W. Jordan, Stuttgart Wittwer 1894", aus deren Veranlassung vielstellige Fundamentalzahlen mitgeteilt worden sind von Schols und Nell in der „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 600—602, 1894, S. 74—75 und S. 160. Nell giebt dort die Zahlen e, μ, π, ϱ u. s. w. auf 30 Stellen und ihre Logarithmen auf 20 Stellen.

Als Quelle ist hier hauptsächlich zu nennen der „Thesaurus logarithmorum completus" von Georg Vega, Leipzig 1794, im allgemeinen mit 10stelligen Logarithmen. Derselbe giebt auf S. 308 und 309 die Zahlen π 140stellig, $l\,10=\frac{1}{\mu}$, μ und e 48stellig und auf S. 633 die wirkliche Reihenausrechnung von π auf 140 Stellen. Manches hiezu bieten auch die ersten (ältesten) Ausgaben von Vegas 7stelligen logar.-trig. Tafeln, und Vega-Hülsse, Leipzig 1840, ferner Steinhauser Hilfstafeln zur präzisen Berechnung 20stelliger Logarithmen, Wien 1880 (mit Berichtigungen von Nell, „Zeitschr. f. Verm." 1893 S. 603).

All dieses vielstellige Zahlenmaterial braucht fast nur, wer sich mit feinen Berechnungen von Zahlentafeln mathematischer oder geodätischer Art beschäftigt. Wir werden auch am Schluss von § 30. hierauf nochmals zurückkommen.

§ 29. Weitere Reihen.

Bei geodätischen Entwicklungen hat man oft das Bedürfnis, die Potenzen $sin^n x$ und $cos^n x$ in den $sin\,n\,x$ und $cos\,n\,x$ u. s. w. auszudrücken, z. B. um jene Potenzen zu integrieren und dergl.; auch die umgekehrten Verwandlungen werden gebraucht.

Man kann alles dieses schrittweise aus den einfachsten goniometrischen Formeln herleiten:

$$sin\,2\,x=2\,sin\,x\,cos\,x \qquad cos\,2\,x=cos^2\,x-sin^2\,x$$

$$\begin{aligned} sin\,3\,x &= sin\,(2\,x+x)=sin\,2\,x\,cos\,x+cos\,2\,x\,sin\,x\\ &= 2\,sin\,x\,cos^2\,x+cos^2\,x\,sin\,x-sin^3\,x \end{aligned}$$

$$sin\,3\,x=2\,sin\,x\,cos^2\,x-sin^3\,x$$

In dieser und ähnlicher Weise könnte man alle von S. 176—177 Formeln Schritt für Schritt entwickeln, doch kommt man besser zum Ziel mit Hilfe der imaginären Ausdrücke für $sin\,x$ und $cos\,x$, zu welchen wir nun übergehen.