Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 29. Weitere Reihen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Nun empfiehlt es sich, Näherungswerte abzusondern, nämlich:

$$log\left(1-\frac{2\,x}{100}\right)=-\frac{2}{100}\,\mu\,x-\left(\frac{2}{100}\right)^2\frac{\mu\,x^2}{2}-\left(\frac{2}{100}\right)^3\frac{\mu\,x^3}{3}-\ldots$$

$$log\left(1+\frac{2\,x}{100}\right)=+\frac{2}{100}\,\mu\,x-\left(\frac{2}{100}\right)^2\frac{\mu\,x^2}{2}+\left(\frac{2}{100}\right)^3\frac{\mu\,x^3}{3}-\ldots$$

Dieses ist so bemessen, dass α_1 sehr nahe $=\frac{2\,\mu}{100}$ und α_2 sehr nahe $=\left(\frac{2}{100}\right)^2\frac{\mu}{2}$ wird, dass also bei der Zusammenfassung die Coëfficienten von x und von x^2 klein werden. Die weitere Ausführung, auf welche hier nicht eingegangen werden kann, giebt die Gebrauchsformel auf S. VIII unserer logar-trig. Tafeln für neue Teilung. In der „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 600—602 wird mitgeteilt, dass jene „neuen Formeln" für $log\,sin\,(50^g-x)$ und $log\,cos\,(50^g-x)$, welche vom Verfasser 1893 zuerst veröffentlicht wurden, auch von Herrn Prof. Schols in Delft aufgestellt (aber nicht veröffentlicht) wurden und es ist Herr Schols in der Ausrechnung erheblich weiter, nämlich bis zur 20ten Potenz mit 27 Stellen gegangen, wie die von ihm in der „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 601 mitgeteilten Zahlenwerte zeigen. Die im Vorstehenden mitgeteilten Formeln und Zahlenwerte gehen zum Teil über die Bedürfnisse des praktischen Geodäten hinaus, wir sind dazu geführt worden durch die Berechnungen zu den „logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für neue Teilung mit 6 Stellen von W. Jordan, Stuttgart Wittwer 1894", aus deren Veranlassung vielstellige Fundamentalzahlen mitgeteilt worden sind von Schols und Nell in der „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 600—602, 1894, S. 74—75 und S. 160. Nell giebt dort die Zahlen e, μ, π, ϱ u. s. w. auf 30 Stellen und ihre Logarithmen auf 20 Stellen.

Als Quelle ist hier hauptsächlich zu nennen der „Thesaurus logarithmorum completus" von Georg Vega, Leipzig 1794, im allgemeinen mit 10stelligen Logarithmen. Derselbe giebt auf S. 308 und 309 die Zahlen π 140stellig, $l\,10=\frac{1}{\mu}$, μ und e 48stellig und auf S. 633 die wirkliche Reihenausrechnung von π auf 140 Stellen. Manches hiezu bieten auch die ersten (ältesten) Ausgaben von Vegas 7stelligen logar.-trig. Tafeln, und Vega-Hülsse, Leipzig 1840, ferner Steinhauser Hilfstafeln zur präzisen Berechnung 20stelliger Logarithmen, Wien 1880 (mit Berichtigungen von Nell, „Zeitschr. f. Verm." 1893 S. 603).

All dieses vielstellige Zahlenmaterial braucht fast nur, wer sich mit feinen Berechnungen von Zahlentafeln mathematischer oder geodätischer Art beschäftigt. Wir werden auch am Schluss von § 30. hierauf nochmals zurückkommen.

§ 29. Weitere Reihen.

Bei geodätischen Entwicklungen hat man oft das Bedürfnis, die Potenzen $sin^n\,x$ und $cos^n\,x$ in den $sin\,n\,x$ und $cos\,n\,x$ u. s. w. auszudrücken, z. B. um jene Potenzen zu integrieren und dergl.; auch die umgekehrten Verwandlungen werden gebraucht.

Man kann alles dieses schrittweise aus den einfachsten goniometrischen Formeln herleiten:

$$sin\,2\,x=2\,sin\,x\,cos\,x \qquad cos\,2\,x=cos^2\,x-sin^2\,x$$

$$sin\,3\,x=sin\,(2\,x+x)=sin\,2\,x\,cos\,x+cos\,2\,x\,sin\,x$$
$$=2\,sin\,x\,cos^2\,x+cos^2\,x\,sin\,x-sin^3\,x$$

$$sin\,3\,x=2\,sin\,x\,cos^2\,x-sin^3\,x$$

In dieser und ähnlicher Weise könnte man alle von S. 176—177 Formeln Schritt für Schritt entwickeln, doch kommt man besser zum Ziel mit Hilfe der imaginären Ausdrücke für $sin\,x$ und $cos\,x$, zu welchen wir nun übergehen.

Die Reihen für $\sin x$ und für $\cos x$ stehen in Beziehung zur Exponentialreihe e^x:

$$\sin x = \quad \frac{x}{1!} \quad . \quad - \frac{x^3}{3!} \quad . \quad + \frac{x^5}{5!} \quad . \quad - \dots$$

$$\cos x = 1 \quad . \quad - \frac{x^2}{2!} \quad . \quad + \frac{x^4}{4!} \quad . \quad - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Wenn man hier $x = i\,x$ setzt (wobei $i = \sqrt{-1}$), so wird $x^2 = -x^2, x^3 = -i\,x^3$, $x^4 = +x^4$, $x^5 = i\,x^5$ u. s. w. und damit bekommt man aus den obigen drei Reihen:

$$e^{+ix} = \cos x + i \sin x \text{ und } e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

oder
$$\cos x = \frac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2} \text{ und } \sin x = \frac{e^{+ix} - e^{-ix}}{2i}$$

und wenn man noch $x = n\,x$ setzt, so bekommt man den Satz von Moivre:

$$\cos n x \pm i \sin n x = e^{\pm i n x} = (e^{\pm i x})^n = (\cos x \pm i \sin x)^n$$

Wenn man hier nach dem binomischen Satz entwickelt, so erhält man:

$$\cos n x + i \sin n x = \cos^n x + \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \, i \sin x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x - \dots$$

$$\cos n x - i \sin x = \cos^n x - \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \, i \sin x - \binom{n}{1} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \dots$$

Durch Subtraktion und Addition findet man hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \sin n x &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x \dots \\ \cos n x &= \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wenn man umgekehrt $\sin^n x$ und $\cos^n x$ als Funktion der $\sin n x$ und $\cos n x$ haben will, so setzt man:

$$e^{+ix} = p = \cos x + i \sin x \quad \text{also} \quad p^m = \cos m x + i \sin m x$$

$$e^{-ix} = q = \cos x - i \sin x \quad \text{„} \quad q^m = \cos m x - i \sin m x$$

dann ist $p\,q = 1$
$$p + q = 2 \cos x \qquad p^m + q^m = 2 \cos m x$$
$$p - q = 2 i \sin x \qquad p^m - q^m = 2 i \sin m x$$

wir machen davon folgende Anwendungen durch Potenzen von $(p + q)$ und von $(p - q)$:

$$\begin{aligned} (2 \cos x)^2 &= (p + q)^2 & (2 i \sin x)^2 &= (p - q)^2 \\ &= (p^2 + q^2) + 2 p q & &= (p^2 + q^2) - 2 p q \\ 4 \cos^2 x &= 2 \cos 2 x + 2 & -4 \sin^2 x &= 2 \cos 2 x - 2 \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 x & \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 x \end{aligned}$$

Dieses sind die bekannten goniometrischen Formeln. Wir fahren fort:

$$\begin{aligned} (2 \cos x)^4 &= p^4 + 4 p^3 q + 6 p^2 q^2 + 4 p q^3 + q^4 \\ &= (p^4 + q^4) + 4 (p^2 + q^2) p q + 6 p^2 q^2 \end{aligned}$$

$$16 \cos^4 x = 2 \cos 4 x + 8 \cos 2 x + 6 \text{ oder } \cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4 x + \frac{1}{2} \cos 2 x + \frac{3}{8}$$

Auf gleichem Wege bekommt man auch $\sin^4 x$, und durch Weiterverfolgung dieses Weges kann man jede derartige Formel finden, z. B.

$$\begin{aligned}
(2\,i\sin x)^5 &= (p-q)^5 \\
32\,i^5 \sin^5 x &= p^5 - 5\,p^4 q + 10\,p^3 q^2 - 10\,p^2 q^3 + 5\,p\,q^4 - q^5 \\
&= (p^5 - q^5) - 5\,(p^3 - q^3)\,p\,q + 10\,(p^2 - q^2)\,p\,q \\
32\,i\sin^5 x &= 2\,i\sin 5\,x - 10\,i\sin 3\,x + 20\,i\sin 2\,x \\
\sin^5 x &= \frac{1}{16}\sin x - \frac{5}{16}\sin 3\,x + \frac{5}{8}\sin 2\,x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2\cos x)^5 &= (p+q)^5 = p^5 + 5\,p^4 q + 10\,p^3 q^2 + 10\,p^2 q^3 + 5\,p\,q^4 + q^5 \\
32\cos^5 x &= (p^5 + q^5) + 5\,(p^3 + q^3)\,p\,q + 10\,(p^2 + q^2)\,p\,q \\
&= 2\cos 5\,x + 10\cos 3\,x + 20\cos 2\,x \\
\cos^5 x &= \frac{1}{16}\cos 5\,x + \frac{5}{16}\cos 3\,x + \frac{5}{8}\cos 2\,x
\end{aligned}$$

Die Coëfficienten für $\sin^n x$ und $\cos^n x$ sind dieselben, nur findet bei $\sin^n x$ Zeichenwechsel statt.

In solcher Weise kann man rasch die Gebrauchsformeln einzeln entwickeln, etwa bis $\sin^{10} x$ und $\cos^{10} x$, welche wir nachher zusammenstellen werden. Es ist auch möglich, allgemeine Formeln für $\sin^n x$ und $\cos^n x$ aufzustellen, die Entwicklung ist aber etwas umständlich, weil man gerades und ungerades n unterscheiden muss. Die allgemeinen Formeln sind diese:

1) für gerade Exponenten:

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{1}{2}\binom{2\,n}{n} - \binom{2\,n}{n-1}\cos 2\,x + \binom{2\,n}{n-2}\cos 4\,x - \dots\right)$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-2}}\left(\frac{1}{2}\binom{2\,n}{n} + \binom{2\,n}{n-1}\cos 2\,x + \binom{2\,n}{n-2}\cos 4\,x - \dots\right)$$

2) für ungerade Exponenten: (2)

$$\sin^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2\,n+1}{n}\sin x - \binom{2\,n+1}{n-1}\sin 3\,x + \dots\right)$$

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2\,n+1}{n}\cos x + \binom{2\,n+1}{n-1}\cos 3\,x + \dots\right)$$

In diesen Reihen ist so lange fortzufahren, bis ein Coëfficient $= 0$ wird.

Entsprechend den Formelgruppen (2) und (1) sind die nachfolgenden einzelnen Gebrauchsformeln bis zur 10ten Ordnung angeschrieben:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\,x$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3\,x$$

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\,x + \frac{1}{8}\cos 4\,x$$

$$\sin^5 x = \frac{5}{8}\sin x - \frac{5}{16}\sin 3\,x + \frac{1}{16}\sin 5\,x$$

$$\sin^6 x = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2\,x + \frac{3}{16}\cos 4\,x - \frac{1}{32}\cos 6\,x$$

$$\sin^7 x = \frac{35}{64}\sin x - \frac{21}{64}\sin 3x + \frac{7}{64}\sin 5x - \frac{1}{64}\sin 7x$$

$$\sin^8 x = \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos 2x + \frac{7}{32}\cos 4x - \frac{1}{16}\cos 6x + \frac{1}{128}\cos 8x$$

$$\sin^9 x = \frac{63}{128} - \frac{21}{64}\sin 3x + \frac{9}{64}\sin 5x - \frac{9}{256}\sin 7x + \frac{1}{256}\sin 9x$$

$$\sin^{10} x = \frac{63}{256} - \frac{105}{256}\cos 2x + \frac{15}{64}\cos 4x - \frac{45}{512}\cos 6x + \frac{5}{256}\cos 8x - \frac{1}{512}\cos 10x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\cos^5 x = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x$$

$$\cos^6 x = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x$$

$$\cos^7 x = \frac{35}{64}\cos x + \frac{21}{64}\cos 3x + \frac{7}{64}\cos 5x + \frac{1}{64}\cos 7x$$

$$\cos^8 x = \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\cos 2x + \frac{7}{32}\cos 4x + \frac{1}{16}\cos 6x + \frac{1}{128}\cos 8x$$

$$\cos^9 x = \frac{63}{128}\cos x + \frac{21}{64}\cos 3x + \frac{9}{64}\cos 5x + \frac{9}{256}\cos 7x + \frac{1}{256}\cos 9x$$

$$\cos^{10} x = \frac{63}{256} + \frac{105}{256}\cos 2x + \frac{15}{64}\cos 4x + \frac{45}{512}\cos 6x + \frac{5}{256}\cos 8x + \frac{1}{512}\cos 10x$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\sin 3x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$$
$$\sin 4x = 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x$$
$$\sin 5x = 5\sin x\cos^4 x - 10\sin^3 x\cos^2 x + \sin^5 x$$
$$\sin 6x = 6\sin x\cos^5 x - 20\sin^3 x\cos^3 x + 6\sin^5 x\cos x$$
$$\sin 7x = 7\sin x\cos^6 x - 35\sin^3 x\cos^4 x + 21\sin^5 x\cos^2 x - \sin^7 x$$
$$\sin 8x = 8\sin x\cos^7 x - 56\sin^3 x\cos^5 x + 56\sin^5 x\cos^3 x - 8\sin^7 x\cos x$$
$$\sin 9x = 9\sin x\cos^8 x - 84\sin^3 x\cos^6 x + 126\sin^5 x\cos^4 x - 36\sin^7 x\cos^2 x + \sin^9 x$$
$$\sin 10x = 10\sin x\cos^9 x - 120\sin^3 x\cos^7 x + 252\sin^5 x\cos^5 x - 120\sin^7 x\cos^3 x + 10\sin^9 x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$$
$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$$
$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$$
$$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x\sin^2 x + 15\cos^2 x\sin^4 x - \sin^6 x$$
$$\cos 7x = \cos^7 x - 21\cos^5 x\sin^2 x + 35\cos^3 x\sin^4 x - 7\cos x\sin^7 x$$

$$\cos 8x = \cos^8 x - 28\cos^6 x \sin^2 x + 70\cos^4 x \sin^4 x - 28\cos^2 x \sin^6 x + \sin^8 x$$
$$\cos 9x = \cos^9 x - 36\cos^7 x \sin^3 x + 126\cos^5 x \sin^4 x - 84\cos^3 x \sin^6 x + 9\cos x \sin^8 x$$
$$\cos 10x = \cos^{10} x - 45\cos^8 x \sin^2 x + 210\cos^6 x \sin^4 x - 210\cos^4 x \sin^6 x + 45\cos^2 x \sin^8 x - \sin^{10} x$$

Abgekürzte Potenz-Reihen mit mittlerem Argument.

Man kann in einer Potenzreihen-Entwicklung nach dem Taylorschen Satz immer die Hälfte der Glieder sparen durch Einführung eines *mittleren* Arguments, wie sich so zeigen lässt:

Man setzt zuerst: $x + h = \left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}$

und dann: $x = \left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}$

Dann hat man nach dem Taylorschen Satze:

$$f(x+h) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8} f''\left(x + \frac{h}{2}\right) + \ldots$$
$$f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{8} f''\left(x + \frac{h}{2}\right) - \ldots$$

Daraus findet man durch Subtraktion und Addition:

$$f(x+h) - fx = h f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + h^3 \ldots \tag{3}$$
$$\frac{f(x+h) + f(x)}{2} = f\left(x + \frac{h}{2}\right) + h^2 \ldots \tag{4}$$

In (3) kommt kein Glied mit h^2 vor und in (4) ist kein Glied mit h; diese Glieder wurden durch Einführung von $x + \frac{h}{2}$ als Argument von f und von f' erspart.

Als einfache Anwendung der Gleichung (3) nehmen wir z. B.:

$$\sin u - \sin v = (u - v) \cos \frac{u + v}{2} + (u - v)^3 \ldots$$

Will man hier nur bis auf $(u - v)^2$ einschl. genau rechnen, so kann man in dem Glied mit $(u - v)$ nach Belieben u oder v schreiben, z. B.:

$$\sin u = \sin v + (u - v) \cos u + (u - v)^3 \ldots \tag{5}$$

oder

$$\sin u = \sin v + (u - v) \cos v + (u - v)^3 \ldots \tag{6}$$

Diese zwei letzten Formeln sind *gleich* genau, insofern Glieder von gleichem Potenzrang in beiden vernachlässigt sind.

Eine andere Anwendung dieses Prinzips ist folgende:

Wenn $f(x, x')$ eine Funktion von x und x' ist, welche nach Potenzen von $(x' - x)$ entwickelt werden kann, so ist:

$$f(x, x') = f(x, x) + (x' - x) f'(x) + (x' - x)^2 + \ldots$$

oder

$$f(x, x') = f(x', x') + (x - x') f'(x') + (x' - x)^2 + \ldots$$

Aus diesen beiden Gleichungen zusammen folgt:

$$f(x, x') = \frac{f(x, x) + f(x', x')}{2} + (x' - x) \frac{f'(x) - f'(x')}{2}$$

Es unterscheiden sich aber $f'(x)$ und $f'(x')$ selbst nur um Glieder von der Ordnung $(x'-x)$, also ist:

$$f(x,x') = \frac{f(x,x)+f(x',x')}{2} + (x'-x)^2 \ldots$$

Dabei sind $f(x,x)$ und $f(x',x')$ diejenigen 2 Werte von $f(x,x')$, welche entstehen, wenn bzw. $x'=x$ und $x=x'$ gesetzt wird.

Folgendes sind zwei einfache Beispiele hiefür:

$$\sqrt{x\,x'} = \frac{x+x'}{2} + (x'-x)^2 \ldots$$

$$\sqrt{\frac{x^2+x'^2}{2}} = \frac{x+x'}{2} + (x'-x)^2 \ldots$$

oder in Worten: das geometrische Mittel, das Mittel der Methode der kleinsten Quadrate und viele andere Mittel zweier Zahlen x und x' sind dem arithmetischen Mittel gleich, auf Glieder von der Ordnung $(x'-x)$ einschliesslich genau.

Zum Schluss dieser Betrachtungen erinnern wir daran, dass Näherungsformeln, welche nur auf *ein* Glied genau sein sollen, am einfachsten in der Gestalt von Differentialformeln angeschrieben werden. Wenn man z. B. $\sin u - \sin v$ nur auf Glieder von der Ordnung $u-v$ genau haben will, so setzt man:

$$\sin u - \sin v = d \sin v \quad \text{oder} \quad = -d \sin u$$

und:

$$u - v = d\,v \quad \text{oder} \quad = -d\,u$$

und man hat damit:

$$d \sin u = \cos u \, d\,u \quad \text{oder} \quad d \sin v = \cos v \, d\,v$$

woraus entsteht:

$$\sin u - \sin v = (u-v)\cos u \quad \text{oder} \quad = (u-v)\cos v$$

in Übereinstimmung mit den obigen (5) und (6).

Reihen-Umkehrung.

Wenn eine konvergierende Potenzreihe vorliegt von dieser Form:

$$y = A\,x + B\,x^2 + C\,x^3 + D\,x^4 + \ldots \tag{7}$$

so kann man die Aufgabe stellen, umgekehrt x durch eine konvergierende Reihe nach Potenzen von y darzustellen.

In erster Näherung giebt die Reihe (7) jedenfalls, nach x aufgelöst:

$$x = \frac{y}{A} + y^2 \ldots$$

also $$y = A\,x + B\left(\frac{y}{A} + y^2 \ldots\right)^2 + \ldots$$

und dieses giebt nach x aufgelöst:

$$x = \frac{y}{A} - \frac{B}{A^3}y^2 + \ldots$$

In dieser Weise kann man fortfahren, und Schritt für Schritt höhere Glieder $y^3 \ldots y^4 \ldots$ u. s. w. hinzufügen, was in besonderen Fällen oft nützlich ist. Man kann das Verfahren auch allgemeiner darstellen, indem die Auflösung der Reihe (7) diese Form annehmen soll:

$$x = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \ldots$$

Hier haben die Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{A} \quad , \quad \beta = -\frac{B}{A^3} \\ \gamma &= \frac{2B^2}{A^5} - \frac{C}{A^4} \quad , \quad \delta = -\frac{5B^3}{A^7} + \frac{5BC}{A^6} - \frac{D}{A^5} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Obgleich solche Entwicklungen wohl am besten am einzelnen Fall durchgeführt werden, wollen wir doch beispielshalber eine solche Reihenumkehrung mit 4 Elementen hersetzen (aus „Zeitschr. f. Verm.“ 1894 S. 38 und S. 149), welche vielleicht wieder gebraucht werden kann, oder auch umgekehrt das am Schlusse S. 181 Gesagte begründet.

$$\left.\begin{aligned} \varDelta &= Ax - By^2 - Cx^2 - Dxy^2 + Ex^3 - Fx^2y^2 + Gy^4 \\ \lambda &= ay + byx + cyx^2 - dy^3 + eyx^3 - fy^3x \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die schrittweise vollführte Auflösung dieser zwei Gleichungen von x und y gab

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{1}{A}\varDelta + \frac{B}{Aa^2}\lambda^2 + \frac{C}{A^3}\varDelta^2 \\ & + \left(\frac{2BC}{A^3a^2} + \frac{D}{A^2a^2} - \frac{2Bb}{A^2a^3}\right)\varDelta\lambda^2 + \left(\frac{2C^2}{A^5} - \frac{E}{A^4}\right)\varDelta^3 \\ & + \left(\frac{3Bb^2}{A^3a^4} - \frac{6BbC}{A^4a^3} - \frac{2Bc}{A^3a^3} + \frac{4CD}{A^4a^2} + \frac{6BC^2}{A^5a^2} - \frac{2bD}{A^3a^3} - \frac{3BE}{A^4a^2} + \frac{F}{A^3a^2}\right)\varDelta^2\lambda^2 \\ & + \left(\frac{5C^3}{A^7} - \frac{2CE}{A^6}\right)\varDelta^4 \\ & + \left(\frac{2Bd}{Aa^5} - \frac{2B^2b}{A^2a^5} + \frac{B^2C}{A^3a^4} + \frac{BD}{A^2a^4} - \frac{G}{Aa^4}\right)\lambda^4 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} y = {} & \frac{1}{a}\lambda - \frac{b}{Aa^2}\varDelta\lambda + \left(\frac{b^2}{A^2a^3} - \frac{bC}{A^3a^2} - \frac{c}{A^2a^2}\right)\varDelta^2\lambda + \left(\frac{d}{a^4} - \frac{Bb}{Aa^4}\right)\lambda^3 \\ & + \left(\frac{4Bb^2}{A^2a^5} - \frac{bD}{A^2a^4} - \frac{2BbC}{A^3a^4} - \frac{2Bc}{A^2a^4} - \frac{4bd}{Aa^5} + \frac{f}{Aa^4}\right)\varDelta\lambda^3 \\ & + \left(\frac{2b^2C}{A^4a^3} - \frac{b^3}{A^3a^4} + \frac{2bc}{A^3a^3} - \frac{2bC^2}{A^5a^2} + \frac{bE}{A^4a^2} - \frac{2Cc}{A^4a^2} - \frac{e}{A^4a^2}\right)\varDelta^3\lambda \end{aligned} \tag{11}$$

Hierin ist auch der frühere Fall (7) teilweise inbegriffen, man braucht nur in (9) zu setzen:

$$A = A \quad , \quad -C = B \quad , \quad E = C$$

und dazu $\quad B = 0 \quad , \quad D = 0 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 0$

dann geht (10) über in:

$$x = \frac{1}{A}\varDelta - \frac{B}{A^3}\varDelta^2 + \left(\frac{2B^2}{A^5} - \frac{C}{A^4}\right)\varDelta^3 + \left(-\frac{5B^3}{A^7} + \frac{5BC}{A^6}\right)$$

also innerhalb der vergleichbaren Teile übereinstimmend mit (8).

Oder man setze in (9) $a = A$, $b = 0$, $c = 0$, $d = -C$, $e = 0$, $f = 0$, dann wird

$$y = \frac{1}{A}\lambda - \frac{C}{A^4}\lambda^3$$

was ebenfalls innerhalb des Vergleichbaren mit (8) stimmt.

In ähnlicher Weise kann man auch *zwei* Reihen mit einander vergleichen; es sei gegeben:

$$A\,x + B\,x^2 + C\,x^3 + \ldots \quad = A'\,y + B'\,y^2 + C'\,y^3 + \ldots$$

Dann kann man x so darstellen:

$$x = \alpha\,y + \beta\,y^2 + \gamma\,y^3 + \ldots$$

wo die Coëfficienten α, β, γ ... folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{A'}{A} \quad , \quad \beta = \frac{B'}{A} - \frac{B\,A'^2}{A^3} \\ \gamma &= \frac{C'}{A} - \frac{2\,B\,A'\,B'}{A^3} - \frac{C\,A'^3}{A^4} + \frac{2\,B^2\,A'^3}{A^5} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

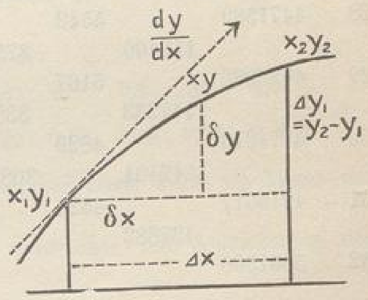
Solche Reihenumkehrungen kommen oft vor, es ist aber selten nützlich, solche allgemein vorbereitete Formeln mit Coëfficienten A, B, C ... anzuwenden, weil in den praktischen Fällen die Coëfficienten meist auch *unter sich* einfache Beziehungen haben (z. B. goniometrische), welche dann bei der stufenweisen Auflösung sogleich mitbenützt werden.

§ 30. Interpolation.

Wir betrachten verschiedene Werte einer Funktion y, welche gewissen in arithmetischer Progression stehenden Werten des Arguments x entsprechen und nehmen die Bezeichnungen nach folgender Anordnung:

Argument	Funktion	Differenzen		
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$	
		Δy_3		
x_4	y_4			

Fig. 1.



Es handelt sich um einen Zwischenwert von x, welcher z. B. zwischen x_1 und x_2 liegt und $= x_1 + \delta x$ sei, wobei δx kleiner als das allgemeine Intervall Δx ist, weshalb wir setzen:

$$\frac{\delta x}{\Delta x} = z \qquad \text{also } z < 1 \qquad (1)$$

der zu diesem $x_1 + \delta x$ gehörige Funktionswert y wird berechnet nach der Interpolationsformel:

$$y = y_1 + z\,\Delta y_1 - \frac{z}{1}\,\frac{1-z}{2}\,\Delta^2 y_1 + \frac{z}{1}\,\frac{1-z}{2}\,\frac{2-z}{3}\,\Delta^3 y_1 - \frac{z}{1}\,\frac{1-z}{2}\,\frac{2-z}{3}\,\frac{3-z}{4}\,\Delta^4 y_1 \qquad (2)$$

oder $y = y_1 + z_1\,\Delta y_1 + z_2\,\Delta^2 y_1 + z_3\,\Delta^3 y_1 + z_4\,\Delta^4 y_1 + \ldots$