Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 30. Interpolation

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Oder man setze in (9) $a = A$, $b = 0$, $c = 0$, $d = -C$, $e = 0$, $f = 0$, dann wird

$$y = \frac{1}{A}\lambda - \frac{C}{A^4}\lambda^3$$

was ebenfalls innerhalb des Vergleichbaren mit (8) stimmt.

In ähnlicher Weise kann man auch *zwei* Reihen mit einander vergleichen; es sei gegeben:

$$A\,x + B\,x^2 + C\,x^3 + \ldots \quad = A'\,y + B'\,y^2 + C'\,y^3 + \ldots$$

Dann kann man x so darstellen:

$$x = \alpha\,y + \beta\,y^2 + \gamma\,y^3 + \ldots$$

wo die Coëfficienten α, β, γ ... folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{A'}{A} \quad , \quad \beta = \frac{B'}{A} - \frac{B\,A'^2}{A^3} \\ \gamma &= \frac{C'}{A} - \frac{2\,B\,A'\,B'}{A^3} - \frac{C\,A'^3}{A^4} + \frac{2\,B^2\,A'^3}{A^5} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

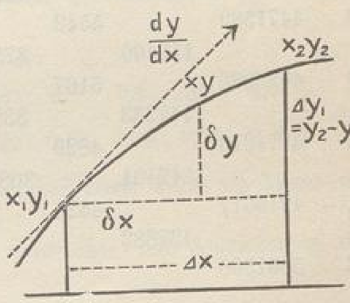
Solche Reihenumkehrungen kommen oft vor, es ist aber selten nützlich, solche allgemein vorbereitete Formeln mit Coëfficienten A, B, C... anzuwenden, weil in den praktischen Fällen die Coëfficienten meist auch *unter sich* einfache Beziehungen haben (z. B. goniometrische), welche dann bei der stufenweisen Auflösung sogleich mitbenützt werden.

§ 30. Interpolation.

Wir betrachten verschiedene Werte einer Funktion y, welche gewissen in arithmetischer Progression stehenden Werten des Arguments x entsprechen und nehmen die Bezeichnungen nach folgender Anordnung:

Argument	Funktion	Differenzen		
x_0	y_0			
		$\Delta\,y_0$		
x_1	y_1		$\Delta^2\,y_0$	
		$\Delta\,y_1$		$\Delta^3\,y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2\,y_1$	
		$\Delta\,y_2$		$\Delta^3\,y_1$
x_3	y_3		$\Delta^2\,y_2$	
		$\Delta\,y_3$		
x_4	y_4			

Fig. 1.



Es handelt sich um einen Zwischenwert von x, welcher z. B. zwischen x_1 und x_2 liegt und $= x_1 + \delta\,x$ sei, wobei $\delta\,x$ kleiner als das allgemeine Intervall $\Delta\,x$ ist, weshalb wir setzen:

$$\frac{\delta\,x}{\Delta\,x} = z \qquad \text{also } z < 1 \qquad (1)$$

der zu diesem $x_1 + \delta\,x$ gehörige Funktionswert y wird berechnet nach der Interpolationsformel:

$$y = y_1 + z\,\Delta y_1 - \frac{z}{1}\,\frac{1-z}{2}\,\Delta^2 y_1 + \frac{z}{1}\,\frac{1-z}{2}\,\frac{2-z}{3}\,\Delta^3 y_1 - \frac{z}{1}\,\frac{1-z}{2}\,\frac{2-z}{3}\,\frac{3-z}{4}\,\Delta^4 y_1 \qquad (2)$$

oder $y = y_1 + z_1\,\Delta\,y_1 + z_2\,\Delta^2\,y_1 + z_3\,\Delta^3\,y_1 + z_4\,\Delta^4\,y_1 + \ldots$

Da z kleiner als 1 angenommen ist, werden die Coëfficienten dieser Reihe abwechselnd positiv und negativ, wie hier geschrieben, indem gesetzt ist:

$$z_1 = z\ ,\ z_2 = -\frac{z}{1}\frac{1-z}{2}\ ,\ z_3 = +\frac{z}{1}\frac{1-z}{2}\frac{2-z}{3}\ ,\ z_4 = -\frac{z}{1}\frac{1-z}{2}\frac{2-z}{3}\frac{3-z}{4} \tag{3}$$

u. s. w.

Man hat auch Tafeln für diese Coëfficienten berechnet, welche bei häufiger Interpolations-Arbeit mit höheren als zweiten Differenzen nützlich sind. Wir geben hier nur ein kleines Täfelchen für 10 teiliges Intervall. bis zur 5ten Ordnung z_5.

z	z_2	z_3	z_4	z_5
	—	+	—	+
0,1	0,045	0,0285	0,0207	0,016
0,2	0,080	0,0480	0,0336	0,026
0,3	0,105	0,0595	0,0402	0,030
0,4	0,120	0,0640	0,0416	0,030
0,5	0,125	0,0625	0,0391	0,027
0,6	0,120	0,0560	0,0336	0,023
0,7	0,105	0,0455	0,0262	0,017
0,8	0,080	0,0320	0,0176	0,011
0,9	0,045	0,0165	0,0087	0,005

Ein einfaches Zahlenbeispiel hiezu möge die Anwendung erläutern:

x	$y = log\, x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
26	1.4149733	+	—	+	—	+
		163905				
27	4313638		5963			
		157942		421		
28	4471580		5542		46	
		152400		375		9
29	4623980		5167		37	
		147233		338		7
30	4771213		4829		30	
		142404		308		
31	4913617		4521			
		137883				
32	5051500					

$y = log\, 26{,}4$

	1.4149733
0,4 . 163905 =	65562·0
0,120 . 5963 =	715·56
0,064 . 421 =	26·94
0,042 . 46 =	1·93
0,03 . 8 =	0·24
$log\, 26{,}4$ =	1.4216039·67

Die Abweichung von dem richtigen Werte 4216039 rührt von den Abrundungen her.

Da die Differenzen abwechselnd positiv und negativ sind, in demselben Sinn wie die z, so sind hier alle Produktglieder positiv geworden.

Sehen wir von ausgedehnten Tabellenberechnungen ab (für welche die Interpolation häufig in anderer Form ausgeführt wird), so haben wir es in der Geodäsie selten mit höheren als zweiten Differenzen zu thun, mit solchen aber sehr häufig bei fundamentalen trigonometrischen Berechnungen in 10stelligen Logarithmen des Thesaurus logarithmorum, wie an einem Beispiele gezeigt werden soll:

Es liege vor $x = 15^\circ\ 30'\ 34{,}67492''$ und man soll den zugehörigen Wert $y = log\, sin\, x$ aus der 10 stelligen Tafel bestimmen.

Indem wir voraussetzen, dass der Leser die fragliche 10 stellige Tafel zur Hand habe, setzen wir die Rechnung ausführlichst hiernach an:

$$\begin{array}{llll}
x = 15^\circ\,30'\,30'' & \log\sin x = 9\,.\,4271265{\cdot}273 & + & - \\
 & & 758{\cdot}727 & \\
30\;\;40'' & 4272024{\cdot}000 & & 145 \\
 & & 758{\cdot}582 & \\
30\;\;50'' & 4272782{\cdot}582 & & 141 \\
 & & 758{\cdot}441 & \\
31\;\;60'' & 4273541{\cdot}023 & &
\end{array}$$

Für $15^\circ\,30'\,34{,}67492''$ ist $\delta x = 4{,}67492''$ und $z = 0{,}467492$, also:

$$\begin{array}{rr}
 & 9.4271265{\cdot}273 \\
0{,}467492\;.\;758{\cdot}727 = & 354{\cdot}6988 \\
0{,}467\;.\;\dfrac{0{,}533}{2}\;.\;0{\cdot}143 \quad = & 0{\cdot}0178 \\
\hline
 & 9.4271619{\cdot}9896 \\
\log\sin 15^\circ\,30'\,34{,}67492'' = & 9.4271619{\cdot}990
\end{array}$$

Zu dieser Berechnungsart giebt der Thesaurus logarithmorum auf S. 2 eine Hilfstafel für $z\dfrac{1-z}{2}\delta$ mit 100 teiligem z, aber δ nur $= 4,\ 6,\ 8 \ldots 44$, was im trigonometrischen Teile bei weitem nicht ausreicht. Eine solche Hilfstafel ist nicht nötig, wenn man die zweiten Differenzen mit dem Rechenschieber erledigen kann.

Es ist oft nützlich, die Interpolations-Formel auf eine *andere* Form als die ursprüngliche Form (1) zu bringen, nämlich auf diese Form:

$$y = y_1 + z\left(\varDelta y_1 - \frac{1-z}{2}\varDelta^2 y\right) \tag{4}$$

Hier wird eine Verbesserung $-\dfrac{1-z}{2}\varDelta^2 y$ der ersten Differenz $\varDelta y_1$ berechnet, und dann mit der verbesserten ersten Differenz weiter gerechnet, wie bei einfacher Proportional-Interpolation.

Hiernach ist folgendes zur Übersicht berechnet:

$$\left.\begin{array}{rlllllllllll}
z = & 0{,}0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 & 1{,}0 \\
\dfrac{(1-z)}{2} = & 0{,}50 & 0{,}45 & 0{,}40 & 0{,}35 & 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}00
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Die wirkliche Ausrechnung macht man auch bei dieser Form am besten mit dem Rechenschieber.

Wir wollen das vorige Beispiel nochmals vornehmen mit Ausrechnung des Proportionalteils mit 6 stelligen Logarithmen:

Gesucht $\log\sin\ 15^\circ\,30'\,34{,}67492''$, $z = 0{,}467492$, $1 - z = 0{,}533$

$$\begin{array}{rll}
 & +\,758{\cdot}868 & \\
\log\sin 15^\circ\,30'\,30'' = 9.4271265{\cdot}273 & & -\,0{\cdot}141 \\
\cdot & +\,758{\cdot}727 & \\
\cdot & \underline{+\quad 0{\cdot}038} & (\text{Korrekt. } \dfrac{0{,}533}{2}\,0{\cdot}141) \\
\cdot & 758{\cdot}765 & \\
\cdot & 2.880107 = \log 758{\cdot}765 & \\
\cdot & \underline{9.669774 = \log 0{,}467492} & \\
\underline{354{\cdot}717} & 2.549881 & \\
\log\sin 15^\circ\,30'\,34{,}67492'' = 9.4271619{\cdot}990 & \text{wie oben.} &
\end{array}$$

Dieses Verfahren ist auch anwendbar für die umgekehrte Aufgabe, den Winkel x zu gegebenem $\log \sin x$ zu finden; man rechnet dann zuerst einen Näherungswert von z, mit dem Rechenschieber in dem obigen Falle $z = 0.46$ (den man etwa mit Blei in seine Stelle schreibt d. h. $15^\circ\, 30'\, 34{,}6\ldots$) und damit sofort weiter, teils im Kopf teils mit dem Rechenschieber $\frac{0{,}54}{2} \cdot 0{\cdot}141 = 0\,038$ u. s. w.

Um die Korrektion $\frac{1-z}{2}\,\Delta^2 y$ immer mit dem richtigen Vorzeichen anzubringen, merke man sich die mechanische Regel: Es muss durch diese Korrektion eine Annäherung an die *vorhergehende* Differenz erzielt werden.

Man kann sich für solche Zwecke eines autographierten Schemas bedienen (dem vorstehenden Beispiele entsprechend), welches ein Hilfstäfelchen nach (5), und alles Konstante vorgedruckt enthält. Für grössere Rechnungen mit 10 stelligen Logarithmen können die einzelnen Logarithmen in dem Schema behandelt werden, welches dann eine Beilage zu der Haupt-Rechnung bildet.

Indessen, wie immer, kommt es auf die Übung an; wer längere Zeit mit solchen Rechnungen zu thun hat, gewöhnt sich bald, die zweiten Differenzen mit dem Rechenschieber nebenher zu berücksichtigen, und hat dann kaum noch mehr Arbeit als das Ausrechnen der eigentlichen Proportionalteile verursacht.

Interpolation mit Differentialquotienten.

In der Erläuterungsfigur auf S. 181 ist ausser den Δx, Δy und δx, δy auch noch der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ an die Tangente des Punktes $x_1\, y_1$ beigeschrieben, und wir wollen überlegen, wie die Interpolation ausgeführt werden kann, wenn nicht die endlichen Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, sondern die theoretischen Differentialquotienten für die einzelnen x und y selbst angegeben sind, also für Δx als Einheit etwa so:

$$\left.\begin{array}{llll} x_0 & y_0 & \Delta x \left.\frac{dy}{dx}\right)_0 = d_0 & \\ & & & d_1 - d_0 = \delta_0 \\ x_1 & y_1 & \Delta x \left.\frac{dy}{dx}\right)_1 = d_1 & \\ & & & d_2 - d_1 = \delta_1 \\ x_2 & y_2 & \Delta x \left.\frac{dy}{dx}\right)_2 = d_2 & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Z. B. in einer gewöhnlichen Logarithmentafel hätte man:

$$y = \log x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

Man kann diese Differentialquotienten schärfer ausrechnen, als die mit den Abrundungsfehlern je zweier benachbarter y behafteten Δy sind. Mit δ_0 und δ_1 bezeichnen wir in obigem Schema die Differenzen je zweier aufeinander folgender d, wir wollen jedoch annehmen, jene δ_0 und δ_1 seien gleich, d. h. es handle sich nur um Interpolation zweiter Ordnung. Dann hat man nach (4):

$$y = y_1 + 2\left(\Delta y_1 - \frac{\Delta^2 y}{2} + \frac{z}{2}\,\Delta^2 y\right) \qquad (7)$$

dabei ist $\quad \varDelta y_1 - \frac{\varDelta^2 y}{2} = \varDelta y_1 - \frac{\varDelta y_1 - \varDelta y_0}{2} = \frac{\varDelta y_1 + \varDelta y_0}{2}$

dieses ist aber nach geometrischer Anschauung $= \varDelta x \left.\frac{d y}{d x}\right)_1$, weil nämlich die Sehne von $x_0 y_0$ nach $x_2 y_2$ der Tangente in $x_1 y_1$ parallel zu achten ist. In ähnlicher Weise hat man auch:

$$\varDelta y_2 + \varDelta y_1 = y_2 - y_0 = 2 \varDelta x \left.\frac{d y}{d x}\right)_1 \text{ und } \varDelta y_3 + \varDelta y_2 = y_3 - y_1 = 2 \varDelta x \left.\frac{d y}{d x}\right)_2$$

$$\varDelta y_3 - \varDelta y_1 = 2 \varDelta^2 y = 2 \varDelta x \, \delta$$

dabei ist δ nach dem Schema (6) angenommen mit $\delta_1 = \delta_0 = \delta$ und wenn man auch das dort eingeführte Zeichen d benützt, so hat man nun aus (7):

$$y = y_1 + z \left(d_1 + \frac{z}{2} \delta \right) = y_1 + z \, d \tag{8}$$

Hiernach würde man also zuerst $d = d^1 + \frac{z}{2} \delta$ in der Reihe der d proportional interpolieren, aber mit $\frac{z}{2}$ statt mit z, und dann $y = y_1 + z \, d$ proportional weiter rechnen.

Diese Interpolationsart hätte manche Vorteile vor der gewöhnlichen, wenn die Differentialquotienten $\frac{d y}{d x}$ bzw. d scharf angegeben werden können, die Tafeln sind aber im allgemeinen nicht darauf eingerichtet. (Einiges Weitere hiezu giebt „Zeitschr. f. Verm.“ 1896).

Vielstellige Logarithmen.

Bei dieser Gelegenheit möge an die Hilfsmittel erinnert werden, welche man hat, wenn die gewöhnlichen 7stelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln nicht ausreichen. Obgleich nicht geleugnet werden kann, dass schon vieles mit dem schwerfälligen Thesaurus behandelt worden ist, was unbeschadet seines inneren Wertes auch mit dem 7stelligen Bremiker oder Schrön hätte gerechnet werden können, giebt es doch in der höheren Geodäsie viele Fälle, in welchen aus praktischen oder auch nur unabweisbaren formellen Gründen 8—10 Stellen nötig sind. Z. B. die Berechner von fundamentalen Tabellenwerken oder von Kontrollbeispielen zu langen Reihenentwicklungen können sich der 10stelligen und manchmal der noch mehrstelligen Zahlen und Logarithmen nicht entschlagen.

Das wichtigste hier zu nennende Werk ist der „Thesaurus logarithmorum completus“ von Georg Vega, Leipzig 1794, mit 10stelligen Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen von 10″ zu 10″. Dieses Werk ist nur noch antiquarisch zu sehr hohem Preis zu erlangen, weshalb der italienische Generalstab unter Leitung von General Ferrero eine ganz genaue Neuausgabe desselben auf zinkographischem Wege hergestellt hat, von welcher Verfasser ein Exemplar von General Ferrero erhielt, für welches auch auf diesem Wege der Dank ausgedrückt wird, indem alle höheren Rechnungen dieses Buches damit ausgeführt sind.

Nach diesem ist die neue französische 8stellige Tafel für neue Teilung hier zu berichten, deren Titel ist: „Service géographique de l'armée. Tables des logarithmes à huit décimales des nombres entiers de 1 à 120000 et des sinus et tangentes de dix secondes en dix secondes d'arc dans le systéme de la division centésimale du quadrant, publiées par ordre du ministre de la guerre, Paris imprimerie nationale 1891." (40 Francs).

Will man eine Triangulierung in alter Teilung mit dieser 8stelligen Tafel ausführen, so muss man zuvor die Winkel aus alter in neue Teilung umrechnen, was, wenn es nicht auch für andere Zwecke gebraucht wird, eine starke Nebenarbeit vorstellt. Es giebt Rechner, welche es vorziehen so zu verfahren, statt den 10stelligen Thesaurus anzuwenden. —

Endlich ist noch ein Wort zu sagen über die ganz seltenen Fälle, in welchen auch 10stellige Logarithmen noch nicht ausreichen. Dann hat man zunächst im Thesaurus auf S. 642—684 die natürlichen 48stelligen Logarithmen aller 4stelligen Zahlen ohne einfache Faktoren. Dann aber „Hilfstafeln zur präzisen Berechnung 20stelliger Logarithmen von Anton Steinhauser, mit Subvention der K. K. Akademie der Wissenschaften, Wien, Gerold's Sohn 1880" (mit Berichtigungen von Nell, „Zeitschr. f. Verm." 1893, S. 603). Dieses Werk giebt die 20stelligen Logarithmen aller 4stelligen Zahlen von 1000 bis 9999 (Tafel A) und dazu die Logarithmen der Zahlen 1,0000001 bis 1,000999 (Tafel B) und noch einer folgenden ähnlichen Gruppe, so dass jede Zahl in Faktoren zerlegt werden kann, deren Logarithmen sich finden lassen.

Auf ungefähr 15 Stellen kommt man mit dem ersten Teil A von Steinhauser einfach mit Hilfe der logarithmischen Reihe:

$$log\,(a+b) = log\,a + log\left(1+\frac{b}{a}\right) = log\,a + \varDelta\,log\,a \quad , \quad \frac{b}{a} = x$$

$$\varDelta\,log\,a = \mu\,x - \frac{\mu\,x^2}{2} + \frac{\mu\,x^3}{3} - \frac{\mu\,x^4}{4}$$

$$log\,\mu = 9.6377843{\cdot}113$$

$$log\,\frac{\mu}{2} = 9.3367543 \quad , \quad log\,\frac{\mu}{3} = 9.160603 \quad , \quad log\,\frac{\mu}{4} = 9.03572$$

Wir wollen hiernach beispielshalber $log\,\pi$ berechnen:

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 24$$

die erste sich darbietende 4stellige Näherung wäre 3,141 oder 3,142, allein wir kommen sofort um zwei Stellen weiter mit der Näherung 3,14160, welche = 4 . 0,7854 darstellbar sich so giebt:

$$\begin{array}{r} log\,4 = 0.60205\ 99913\ 27962\ 39 \\ log\,0{,}7854 = 9.89509\ 08969\ 34399\ 43 \\ \hline log\,3{,}1416 = 0.49715\ 08882\ 62361\ 82 \end{array}$$

Mit dieser Näherung hat man:

$$\begin{array}{rrl} & \pi = & 3{,}14159\ \ 26535\ \ 89793\ \ 24 \\ \text{Näherung} & a = & 3{,}14160 \\ \hline & b = & -\,0{,}00000\ \ 73464\ \ 10206\ \ 76 \end{array}$$

		x^2	x^3
$log\ b =$	4.866 0751·747		
$log\ a =$	0.497 1508·883		
$log\ x =$	4.368 9242·864	8.7378486	3.10677
$log\ \mu =$	9.637 7843·113	9.3367543	9.16066
	4.006 7085·977	8.0746029	2.26743
	10155,670 405 +	0,011874 +	0,000 000 = 10155,682279

Also Näherung	0.49715	08882	62361	82
	—	10155	68227	9
$log\ \pi =$	0.49714	98726	94133	9
soll	0.49714	98726	94133	854 (s. o. S. 171.)

Wir haben also auf diesem Wege $log\ \pi$ auf 16 Stellen erhalten.

Zur umgekehrten Aufgabe, nämlich zu einem vielstelligen Logarithmus die Zahl zu suchen, setzen wir wieder eine Näherung a voraus, und es sei $log\,(a+b)$ der gegebene Logarithmus, folglich b die Unbekannte, und es ist also möglich auszurechnen

$$\frac{log\,(a+b) - log\ a}{\mu} = y$$

dabei ist
$$log \frac{a+b}{a} = log\left(1 + \frac{b}{a}\right) = \mu\, y$$

also nach der Exponentialreihe (S. 170):

$$1 + \frac{b}{a} = 10^{\mu y} = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24}$$

$$b = a\,y + \frac{a\,y^2}{2} + \frac{a\,y^3}{6} + \frac{a\,y^4}{24}$$

Wenn man das vorige Beispiel hiernach rückwärts behandelt, so hat man gegeben $log\ \pi = log\,(a+b) = 0.49714\ 98726\ 9413385$ mit der Näherung $a = 3{,}14160$ und $log\ a$ wie oben, dann wird $log\ y = 4.3689247{\cdot}942\,n$ und nach der Formel für b:

$$b = -\,73464{,}18797 + 0{,}08590 = -\,73464{,}10207$$

also
$$\pi = 3{,}14160 - 0{,}00000\ 73464{,}10207 = 3{,}14159\ 26535\ 89793$$

oder es ist π auf 15 Stellen richtig aus $log\ \pi$ erhalten.

Da man eine gute Näherung für b leicht zur Verfügung hat, kann man auch nach dem Prinzip des Mittelargumentes kurzer Hand so rechnen:

$$b = \left(a + \frac{b}{2}\right) y = a_0\, y$$

Wir wollen dieses an einem zweiten Beispiele zeigen:

Man habe
$$log\ e^2 = 7.824\ 4104{\cdot}237$$
$$log\ \mu = 9.637\ 7843{\cdot}113\ 00537$$
$$log\,(a+b) = log\ \mu\, e^2 = 7.462\ 1947{\cdot}350\ 00537$$

dazu nach dem Thesaurus $\mu\, e^2 = 0{,}00289\ 86430\ 302$.

Wir möchten aber die letzten Stellen noch verschärfen, und finden dazu aus der Faktorentafel von Vega-Hülsse S. 378, dass $28987 = 101 \times 287$ ist, und wir erhalten daraus durch Zusammensetzung mit Hilfe von Steinhausers 20stelligen Logarithmen:

$$\log a = \quad 7{,}462\,2032\,705\,16635$$

also $$\log(a+b) - \log a = d \quad = -\,0{,}000\,0085\,355\,16098$$

Das Mittel aus dem obigen 11stelligen $\mu\, e^2$ und aus der Näherung a ist $a_0 = 0{,}00289\ 86715\ 151$, womit $y = a_0 \dfrac{d}{\mu} = -\,569{,}697\ 7144$, also das gesuchte

$$\mu\, e^2 = a + b = 0{,}00289\ \ 86430\ \ 30229$$

Es kommt bei solchen Rechnungen vor allem auf gute, möglichst grosse Näherungswerte an, die man mit Überlegung und manchem Kunstgriff durch Produktenzerlegung gewinnen kann, wobei eine Faktoren- und Primzahlen-Tafel, z. B. in Vega-Hülsse, Leipzig 1840, S. 360—454, von Nutzen ist.

Wir sind mit dieser Sache fast zu weit von der Geodäsie abgeschweift, doch war es nötig, für die in der höheren Geodäsie ausnahmsweise vorkommenden vielstelligen Fundamentalzahlen die Hilfsmittel hier zu behandeln.

Kapitel III.

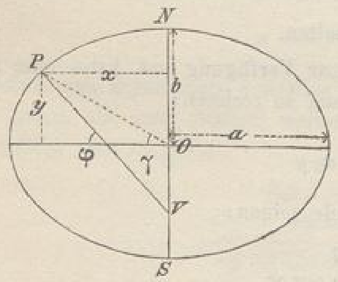
Das Erd-Ellipsoid (Sphäroid).

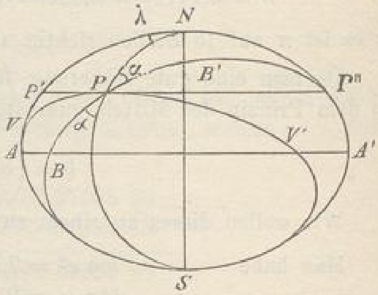
§ 31. Erklärungen und Grund-Masse.

Die ideale Erdoberfläche, welche unseren Berechnungen zu Grunde gelegt wird, ist ein Umdrehungs-Ellipsoid, d. h. diejenige Fläche, welche durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe erzeugt wird.

Fig. 1. Fig. 2.

Umdrehungs-Ellipsoid.





Zuerst kommen folgende Grössen und Gleichungen in Betracht, welche zu den vorstehenden Fig. 1. und Fig. 2. in Beziehung stehen.

Die grosse Halbaxe a, die kleine Halbaxe b (1)

die Abplattung $\alpha = \dfrac{a-b}{a}$ (2)