



## **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1896**

§. 33. Krümmungs-Halbmesser für beliebiges Azimut

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83087](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83087)

Aus (c) hat man weiter:

$$1 - e^2 = \frac{\tan^2 \gamma}{\tan^2 \varphi}, \quad e^2 = \frac{\sin(\varphi - \gamma)}{\sin \varphi \cos \gamma}$$

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi = 1 - \sin(\varphi - \gamma) \frac{\sin \varphi}{\cos \gamma} = \frac{\cos \varphi}{\cos \gamma} \cos(\varphi - \gamma)$$

also nach (d):

$$C^2 = \frac{a^2 \cos \varphi}{\cos \gamma \cos(\varphi - \gamma)} \quad (e)$$

Mit diesen Formeln (c)–(e) hat man genügende Mittel zur scharfen Ausrechnung von  $C$  und  $\gamma$ , indessen häufiger braucht man Näherungsformeln, welche mit Beschränkung auf  $e^2$ , d. h. Vernachlässigung von  $e^4$  u. s. w. sich rasch geben. Aus (c) hat man:

$$\tan \varphi - \tan \gamma = e^2 \tan \varphi$$

$$\frac{\varphi - \psi}{\cos^2 \varphi} = e^2 \tan \varphi, \quad \varphi - \psi = e^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

oder mit Zusetzung von  $\varrho$ :

$$\varphi - \psi = \frac{1}{2} e^2 \varrho \sin 2 \varphi = [2.8378056] \sin 2 \varphi \quad (f)$$

Mit gleicher Näherung hat man aus (c):

$$C^2 = \frac{a^2}{W^2} (\cos^2 \varphi + (1 - 2 e^2) \sin^2 \varphi) = \frac{a^2}{W^2} (1 - 2 e^2 \sin^2 \varphi)$$

Da  $W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$  oder  $1: W^2 = 1 + e^2 \sin^2 \varphi$ , hat man:

$$\begin{aligned} C^2 &= a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi) = a^2 W^2 \\ C &= a (1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (g)$$

Die Formeln (f) und (g) braucht man z. B. zur Reduktion von Monddistanzen.

Genaue Tafeln für  $\log \frac{C}{a}$  und für  $\varphi - \psi$  sind von Encke in dem „Berliner astronomischen Jahrbuche für 1882“, S. 344–373 gegeben worden. In der Geodäsie werden diese Werte fast nie gebraucht.

*Reduzierte Breite.* In der Geodäsie spielt noch ein anderer Winkel eine wichtige Rolle, der „reduzierte Breite“ genannt wird und bestimmt wird durch die Gleichung:

$$\tan \psi = \sqrt{1 - e^2} \tan \varphi$$

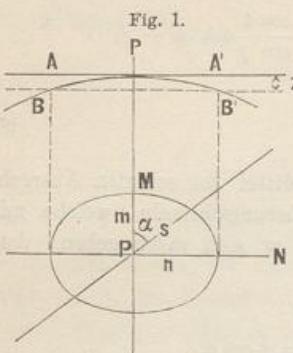
Damit werden wir uns aber erst später zu beschäftigen haben.

### § 33. Krümmungs-Halbmesser für beliebiges Azimut.

Nachdem der Meridian-Krümmungs-Halbmesser  $M$  und der Querkrümmungs-Halbmesser  $N$  bestimmt sind, kann man auch den Krümmungs-Halbmesser  $R$  für irgend welches Azimut  $\alpha$  leicht angeben, wenn man den Euler'schen Satz als bekannt voraussetzt, nämlich:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \quad (1)$$

Dieser Satz wird in der analytischen Geometrie bewiesen, und wir wollen hier eine geometrisch anschauliche Begründung des Satzes geben, welche durch einige Nebenbetrachtungen auch zum strengen Beweise entwickelt werden kann.



In Fig. 1. sei  $P$  ein Punkt des Ellipsoids mit einer Be-

rührungs-Ebene  $A A'$  und einer Schnitt-Ebene  $B B'$  parallel  $A A'$ .

Die Ebene  $B B'$  giebt eine Schnitt-Ellipse, welche im unteren Teile von Fig. 1. dargestellt ist mit ihren Hauptachsen  $P M, P N$  und einer dritten Richtung  $s$  im Azimut  $\alpha$ . Wenn nun der Abstand der beiden Ebenen  $A A'$  und  $B B'$  sehr klein ist,  $= z$ , so lässt sich die Ordinate  $z$  durch die Krümmungs-Halbmesser  $M, R, N$ , welche für die drei betrachteten Richtungen gelten, dreifach ausdrücken, in bekannter Näherung (welche z. B. auch für die Erdkrümmung bei trigonometrischer Höhenmessung angewendet wird), nämlich:

$$z = \frac{m^2}{2M} = \frac{s^2}{2R} = \frac{n^2}{2N} \quad (2)$$

Dabei besteht für die Schnitt-Ellipse mit den Halbachsen  $m$  und  $n$  die Gleichung:

$$\frac{(s \cos \alpha)^2}{m^2} + \frac{(s \sin \alpha)^2}{n^2} = 1 \quad (3)$$

Durch Verbindung von (2) und (3) erhält man den bereits oben (1) geschriebenen Euler-schen Satz.

Um diesen für jede beliebige Fläche gültigen Euler-schen Satz der Gleichung (1) auf unser Ellipsoid anzuwenden, müssen wir die Ausdrücke für  $M$  und  $N$  nach (21) und (22) § 32. S. 197 einsetzen, nämlich:

$$M = \frac{c}{V^3} \quad \text{und} \quad N = \frac{c}{V}, \quad \text{wobei} \quad V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi$$

Damit ergibt (1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{\cos^2 \alpha}{c} V^3 + \frac{\sin^2 \alpha}{c} V = \frac{V}{c} (\cos^2 \alpha (1 + e'^2 \cos^2 \varphi) + \sin^2 \alpha) \\ R &= \frac{c}{V} \frac{1}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha} \end{aligned} \quad (4)$$

Wir wollen den besonderen Fall mit  $\alpha = 45^\circ$  betrachten, also  $\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$  setzen, wodurch die Gleichung (1) ergibt:

$$\frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) = \frac{M + N}{2MN} \quad (5)$$

Hier hat  $MN$  die Bedeutung  $= r^2$  nach (24) § 32. S. 197 mit  $r$  als geometrischem Mittel aus  $M$  und  $N$ , und  $\frac{M + N}{2} = d$  ist das arithmetische Mittel aus  $M$  und  $N$  also

$$R_{45} = \frac{r^2}{d} \quad (6)$$

woraus zu ersehen ist, dass in erster Näherung der Krümmungs-Halbmesser für  $45^\circ$  Azimut, dem mittleren Krümmungs-Halbmesser  $r$ , oder dem Durchschnittswert  $d$  gleich ist.

Die zweite bei (4) angewendete Form für  $R$  führt zu einer bequemen logarithmischen Näherungs-Formel; in erster Näherung hat man:

$$\log(1 + e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha) = \mu e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \dots$$

also:

$$\log R - \log N = -\mu e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \dots \quad (7)$$

Setzt man hier  $\alpha = 0$ , so geht  $R$  in den Meridian-Krümmungs-Halbmesser  $M$  über, also:

$$\log M - \log N = -\mu e'^2 \cos^2 \varphi + \dots \quad (8)$$

oder genau  $\log M - \log N = -\log V^2$  (nach (25) § 32 S. 197)

Damit geben (7) und (8):

$$\log R - \log N = -(\log V^2) \cos^2 \alpha \quad (9)$$

und in gleicher Weise findet man auch:

$$\log R - \log M = +(\log V^2) \sin^2 \alpha \quad (10)$$

Die Näherungsformel (9) oder (10) giebt den Wert  $\log R$  nahezu auf 7 Stellen richtig. Um dieses besser beurteilen zu können, entwickeln wir die Formel (4) bis  $e'^4$  und finden:

$$\log R = \log N - \mu e'^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \mu \frac{e'^4}{2} \cos^4 \varphi \cos^4 \alpha \quad \left. \right\} \quad (11)$$

$$= \log N - [4.4651031] \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + [1.99139] \cos^4 \varphi \cos^4 \alpha$$

wo die Zahlen in eckigen Klammern Coefficienten-Logarithmen bedeuten.

Man kann dieses auch auf folgende Form bringen:

$$\log R = \log N - \cos^2 \alpha (\log V^2) - \frac{\mu e'^4}{2} \cos^4 \varphi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (12)$$

$$\text{oder } \log R = \log M + \sin^2 \alpha (\log V^2) - \frac{\mu e'^4}{2} \cos^4 \varphi \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (13)$$

Nach diesen Formeln (11)–(13) ist die folgende Tafel berechnet worden, welche  $\log R$  für verschiedene Breiten  $\varphi$  und verschiedene Azimute  $\alpha$  giebt.

Breite $\varphi$	Azimut $\alpha$						
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$0^\circ$	$\log R$ 6.80 1735	$\log R$ 6.80 1929	$\log R$ 6.80 2460	$\log R$ 6.80 3187	$\log R$ 6.80 3915	$\log R$ 6.80 4448	$\log R$ 6.80 4643
$10^\circ$	1866	2055	2570	3274	3980	4498	4687
$20^\circ$	2244	2416	2885	3527	4169	4641	4813
$30^\circ$	2823	2969	3368	3913	4459	4860	5006
$35^\circ$	6.80 3167	6.80 3298	6.80 3655	6.80 4143	6.80 4632	6.80 4990	6.80 5121
$40^\circ$	3534	3648	3961	4388	4815	5128	5243
$45^\circ$	3913	4010	4276	4641	5005	5272	5369
$50^\circ$	4292	4372	4592	4893	5194	5415	5496
$55^\circ$	4659	4723	4899	5138	5378	5554	5618
$60^\circ$	5004	5053	5186	5369	5551	5684	5733
$65^\circ$	5316	5353	5446	5577	5707	5803	5837
$70^\circ$	6.80 5586	6.80 5609	6.80 5671	6.80 5756	6.80 5842	6.80 5904	6.80 5927
$80^\circ$	5966	5972	5988	6010	6032	6048	6054
$90^\circ$	6098	6098	6098	6098	6098	6098	6098

Eine ausführlichere Tafel dieser Art ist nicht nötig, denn die azimutalen Krümmungs-Halbmesser  $R$  spielen in der Geodäsie der Triangulierungen u. dergl. in dieser Form keine Rolle.

Für scharfe Rechnung trigonometrischer Höhen braucht man diese Krümmungs-

Halbmesser. Wir wollen annehmen, zu einer trigonometrischen Höhenmessung zwischen dem Polytechnikum in Karlsruhe und dem trigonometrischen Punkte Hornisgrinde im Schwarzwald solle der Erdkrümmungs-Halbmesser in der fraglichen Sicht berechnet werden. Die Mittelbreite beider Punkte ist  $\varphi = 48^\circ 48' 26,6''$  und das mittlere Azimut  $\alpha = 18^\circ 55' 3,0''$ . Mit diesen Werten findet man nach der strengen Formel (4):

$$\log R = 6.804\ 3345$$

und nach der Näherungsformel (9) oder (10):

$$\log R = 6.804\ 3347$$

Dieser Wert wäre einer weiteren Berechnung nach § 149. unseres II. Bandes, 4. Aufl. 1893, zu Grunde zu legen, entsprechend  $\log R$  in (6) S. 510 jenes Bandes.

#### Änderung der Erdkrümmung nach Breite und Azimut.

Wenn man das vorstehende Übersichtstafelchen in Bezug auf die Änderungen betrachtet, welche der Krümmungs-Halbmesser  $R$  in der Breite und im Azimut erfährt, so bemerkt man, dass für gleiche Änderungen  $\Delta\varphi$  oder  $\Delta\alpha$  die Änderungen  $\Delta\log R$  von nahe gleicher Größenordnung sind, und das zeigt auch die Differentiierung von  $\log R$  oder von  $R$  nach  $\varphi$  und nach  $\alpha$ , die beiden Differentiierungen von  $R$  nach  $\varphi$  und nach  $\alpha$  geben Größen von der Ordnung  $e^2$ .

Allein wenn man überlegt, welche Änderungen von  $R$  überhaupt vorkommen auf einem räumlich begrenzten Vermessungsgebiete der Erde, so wird die Vergleichung der Einflüsse von  $\varphi$  und  $\alpha$  ganz anders, denn auf beschränktem Gebiete der Erde ist die Breite  $\varphi$  nahezu konstant, dagegen trotzdem das Azimut  $\alpha$  innerhalb seiner äussersten Grenzen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  veränderlich.

Auf beschränktem Vermessungsgebiete sind daher die Änderungen im Azimut viel einflussreicher als die Änderungen der Breite, und man kann in solchem Falle sagen, dass die Erdkrümmungsänderungen, welche von Breitenänderung  $\Delta\varphi$  herrühren, nur Größen zweiter Ordnung sind im Vergleich mit den vom Azimut  $\alpha$  abhängigen Krümmungs-Änderungen.

#### Zwischen-Bemerkung.

Mit den Entwicklungen von § 31.–33. sind wir so weit gekommen, dass alsbald zu § 40. u. ff. sphärische Triangulierung übergegangen werden kann, und von allem bisherigen wird dort zunächst nur der mittlere Krümmungs-Halbmesser gebraucht werden. Es ist für erstes Studium zu raten, von § 33. auf § 40. überzugehen.

Wenn hier anders verfahren und noch § 34.–39. eingeschaltet werden, so hat das den Sinn, dass vieles für weitergehende Zwecke Nötige hier ein für allemal erledigt werden soll; auf Einzelnes, z. B. Meridianbögen § 35, welche später zu Coordinaten gebraucht werden, kann nach Bedarf zurückgegriffen werden, ähnlich ist es mit den Parallelbögen und Oberflächen.

Bei den geodätischen Messungen und Berechnungen im engeren Sinne hat man kein Bedürfnis, die Oberflächen einzelner Zonen oder Gradabteilungen des Ellipsoids zu kennen; jedoch besteht für Kartographie und Geographie im allgemeinen ein solches Bedürfnis, weshalb auch die Flächenberechnung der Gradabteilungs-Trapeze in § 37. angeschlossen wurde. Auch auf die sehr wichtigen Hilfstafeln des Anhangs, deren Berechnung in den nachfolgenden Paragraphen gelehrt wird, wird später nach Bedarf zurückverwiesen.

#### § 34. Die Funktionen $W$ und $V$ .

Bei der Entwicklung der Krümmungs-Halbmesser in § 32. sind die zwei Funktionen aufgetreten:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad V = \sqrt{1 + e^2 \cos^2 \varphi} \quad (1)$$