Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 34. Die Funktionen W und V

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Halbmesser. Wir wollen annehmen, zu einer trigonometrischen Höhenmessung zwischen dem Polytechnikum in Karlsruhe und dem trigonometrischen Punkte Hornisgrinde im Schwarzwald solle der Erdkrümmungs-Halbmesser in der fraglichen Sicht berechnet werden. Die Mittelbreite beider Punkte ist $\varphi = 48° 48' 26{,}6''$ und das mittlere Azimut $\alpha = 18° 55' 3{,}0''$. Mit diesen Werten findet man nach der strengen Formel (4):

$$log\ R = 6{\cdot}804\,3345$$

und nach der Näherungsformel (9) oder (10):

$$log\ R = 6{\cdot}804\,3347$$

Dieser Wert wäre einer weiteren Berechnung nach § 149. unseres II. Bandes, 4. Aufl. 1893, zu Grunde zu legen, entsprechend $log\ R$ in (6) S. 510 jenes Bandes.

Änderung der Erdkrümmung nach Breite und Azimut.

Wenn man das vorstehende Übersichtstäfelchen in Bezug auf die Änderungen betrachtet, welche der Krümmungs-Halbmesser R in der Breite und im Azimut erfährt, so bemerkt man, dass für gleiche Änderungen $\Delta\varphi$ oder $\Delta\alpha$ die Änderungen $\Delta\, log\, R$ von nahe gleicher Grössenordnung sind, und das zeigt auch die Differentiierung von $log\, R$ oder von R nach φ und nach α, die beiden Differentiierungen von R nach φ und nach α geben Grössen von der Ordnung e'^2.

Allein wenn man überlegt, welche Änderungen von R überhaupt vorkommen auf einem räumlich begrenzten Vermessungsgebiete der Erde, so wird die Vergleichung der Einflüsse von φ und α ganz anders, denn auf beschränktem Gebiete der Erde ist die Breite φ nahezu konstant, dagegen trotzdem das Azimut α innerhalb seiner äussersten Grenzen 0° und 90° veränderlich.

Auf beschränktem Vermessungsgebiete sind daher die Änderungen im Azimut viel einflussreicher als die Änderungen der Breite, und man kann in solchem Falle sagen, dass die Erdkrümmungsänderungen, welche von Breitenänderung $\Delta\varphi$ herrühren, nur Grössen zweiter Ordnung sind im Vergleich mit den vom Azimut α abhängigen Krümmungs-Änderungen.

Zwischen-Bemerkung.

Mit den Entwicklungen von § 31.—33. sind wir so weit gekommen, dass alsbald zu § 40. u. ff. sphärische Triangulierung übergegangen werden kann, und von allem bisherigen wird dort zunächst nur der mittlere Krümmungs-Halbmesser gebraucht werden. Es ist für erstes Studium zu raten, von § 33. auf § 40. überzugehen.

Wenn hier anders verfahren und noch § 34.—39. eingeschaltet werden, so hat das den Sinn, dass vieles für weitergehende Zwecke Nötige hier ein für allemal erledigt werden soll; auf Einzelnes, z. B. Meridianbögen § 35., welche später zu Coordinaten gebraucht werden, kann nach Bedarf zurückgegriffen werden, ähnlich ist es mit den Parallelbögen und Oberflächen.

Bei den geodätischen Messungen und Berechnungen im engeren Sinne hat man kein Bedürfnis, die Oberflächen einzelner Zonen oder Gradabteilungen des Ellipsoids zu kennen; jedoch besteht für Kartographie und Geographie im allgemeinen ein solches Bedürfnis, weshalb auch die Flächenberechnung der Gradabteilungs-Trapeze in § 37. angeschlossen wurde. Auch auf die sehr wichtigen Hilfstafeln des Anhangs, deren Berechnung in den nachfolgenden Paragraphen gelehrt wird, wird später nach Bedarf zurückverwiesen.

§ 34. Die Funktionen W und V.

Bei der Entwicklung der Krümmungs-Halbmesser in § 32. sind die zwei Funktionen aufgetreten:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \qquad V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \tag{1}$$

welche unter sich in der Beziehung stehen:

$$\frac{W^2}{1-e^2} = V^2 \qquad \text{oder} \qquad W^2 = \frac{V^2}{1+e'^2} \tag{2}$$

wobei
$$-\log(1-e^2) = \log(1+e'^2) = 0.002\,9083{\cdot}596004$$
$$-\log\sqrt{1-e^2} = \log\sqrt{1+e'^2} = 0.001\,4541{\cdot}798002$$

Diese Funktionen werden so oft in der Geodäsie gebraucht, dass wir sie näher betrachten und namentlich in Reihen entwickeln müssen.

Zur Reihenentwicklung haben wir von (1):

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2\varphi$$

also nach der logarithmischen Reihe (S. 169):

$$\log\frac{1}{W^2} = \mu\, e^2 \sin^2\varphi + \frac{\mu e^4}{2}\sin^4\varphi + \frac{\mu e^6}{3}\sin^6\varphi + \frac{\mu e^8}{4}\sin^8\varphi + \frac{\mu e^{10}}{5}\sin^{10}\varphi + \ldots \tag{3}$$

Die Ausrechnung der Coëfficienten mit dem Besselschen $\log e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$ giebt für Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

$$\log\frac{1}{W^2} = \left.\begin{matrix} 28986{\cdot}430302\sin^2\varphi + 96{\cdot}733122\sin^4\varphi + 0{\cdot}430422\sin^6\varphi \\ +\ 0{\cdot}002155\sin^8\varphi + 0{\cdot}000012\sin^{10}\varphi \end{matrix}\right\} \tag{4}$$

oder mit halben Coëfficienten:

$$\log\frac{1}{W} = \left.\begin{matrix} 14493{\cdot}215151\sin^2\varphi + 48{\cdot}366556\sin^4\varphi + 0{\cdot}215211\sin^6\varphi \\ +\ 0{\cdot}001077\sin^8\varphi + 0{\cdot}000006\sin^{10}\varphi \end{matrix}\right\} \tag{5}$$

Dieselben Reihen mit den Logarithmen der Coëfficienten sind:

$$\log\frac{1}{W^2} = \left.\begin{matrix} [4.462\,1947{\cdot}350]\sin^2\varphi + [1.985\,5751{\cdot}590]\sin^4\varphi + [9.633\,8943{\cdot}3]\sin^6\varphi \\ +\ [7.333\,3660]\sin^8\varphi + [5.06087]\sin^{10}\varphi \end{matrix}\right\} \tag{6}$$

Durch Halbierung der Coëfficienten hat man auch:

$$\log\frac{1}{W} = \left.\begin{matrix} [4.161\,1647{\cdot}393]\sin^2\varphi + [1.684\,5451{\cdot}633]\sin^4\varphi + [9.332\,8643{\cdot}3]\sin^6\varphi \\ +\ [7.032\,3360]\sin^8\varphi + [4.75984]\sin^{10}\varphi \end{matrix}\right\} \tag{7}$$

In gleicher Weise hat man auch die andere Funktion:

$$V^2 = 1 + e'^2\cos^2\varphi$$

$$\log V^2 = \mu\, e'^2\cos^2\varphi - \frac{\mu\, e'^4}{2}\cos^4\varphi + \frac{\mu\, e'^6}{3}\cos^6\varphi + \frac{\mu\, e'^8}{4}\cos^8\varphi + \frac{\mu\, e'^{10}}{5}\cos^{10}\varphi - \ldots \tag{8}$$

Wenn man hier $\log e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833$ einsetzt, so erhält man:

$$\log V^2 = \left.\begin{matrix} 29\,181{\cdot}196469\cos^2\varphi - 98{\cdot}0374220\cos^4\varphi + 0{\cdot}4391567\cos^6\varphi \\ -\ 0{\cdot}0022131\cos^8\varphi + 0{\cdot}0000119\cos^{10}\varphi \end{matrix}\right\} \tag{9}$$

$$\log V = \left.\begin{matrix} 14\,590{\cdot}098235\cos^2\varphi - 49{\cdot}0187110\cos^4\varphi + 0{\cdot}2195783\cos^6\varphi \\ -\ 0{\cdot}001\,1065\cos^8\varphi + 0{\cdot}0000059\cos^8\varphi \end{matrix}\right\} \tag{10}$$

Ferner wieder mit den Logarithmen der Coëfficienten:

$$\log V^2 = \left.\begin{matrix} [4.465\,1030{\cdot}946]\cos^2\varphi - [1.991\,3918{\cdot}822]\cos^4\varphi + [9.642\,6194{\cdot}1]\cos^6\varphi \\ -\ [7.344\,9995]\cos^6\varphi - [5.07541]\cos^{10}\varphi \end{matrix}\right\} \tag{11}$$

$$\log V = \left.\begin{matrix} [4.164\,0730{\cdot}989]\cos^2\varphi - [1.690\,3618{\cdot}865]\cos^4\varphi + [9.341\,5894{\cdot}2]\cos^6\varphi \\ -\ [7.043\,9695]\cos^8\varphi + [4.77438]\cos^{10}\varphi \end{matrix}\right\} \tag{12}$$

Wenn man bei $\log W^2$ den Grenzwert $\varphi = 90°$ und bei $\log V^2$ den Grenzwert $\varphi = 0$ setzt, so bekommt man $\log(1 - e^2)$ und $\log(1 + e'^2)$ welche, schon bei anderer Gelegenheit in § 31. S. 192 angegeben sind.

Für $\varphi = 45°$ geben die Reihen (5) und (10):

$$\left.\begin{aligned} -\log W &= 7246{\cdot}607576 + 12{\cdot}091639 + 0{\cdot}026901 + 0.000067 = 7258{\cdot}726183 \\ \log V &= 7295{\cdot}299117 - 12{\cdot}254678 + 0{\cdot}027447 - 0.000069 = 7283{\cdot}071817 \\ &\log V : W = 14541{\cdot}798000 \\ &\text{Nach § 31. S. 193 soll dieses sein} = 14541{\cdot}798002 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die Probe stimmt auf 0·000002, d. h. auf 2 Einheiten der 13ten Logarithmenstelle, was hier befriedigend ist.

Da die V und W unter sich in der einfachen Beziehung stehen $V^2 = W^2(1 + e'^2)$, hat man die Wahl V oder W zu rechnen und das andere daraus abzuleiten. Diese Wahl stellt sich bei den vorstehenden Reihen so, dass für kleine Werte φ man bequemer $\log W$ rechnet, zu welchem man am Anfang des Quadranten nur sehr wenige Glieder braucht, während in der Gegend von $\varphi = 90°$ die Rechnung mit $\log V$ die bequemere ist; bei $\varphi = 45°$ sind beide Rechnungen gleich gut.

Man kann die Reihen für $\log W$ und $\log V$ auch noch auf eine andere Form bringen, indem man die $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$ u. s. w. in $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w. ausdrückt, wozu die Formeln von § 29. S. 176—177 dienen, nämlich:

$$\log W^2 = -\mu e^2 \sin^2\varphi - \frac{\mu e^4}{2}\sin^4\varphi - \frac{\mu e^6}{3}\sin^6\varphi - \frac{\mu e^8}{4}\sin^8\varphi - \frac{\mu e^{10}}{5}\sin^{10}\varphi$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

$$\sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$$

$$\sin^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi - \frac{1}{32}\cos 6\varphi$$

$$\sin^8\varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos 2\varphi + \frac{7}{32}\cos 4\varphi - \frac{1}{16}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi$$

$$\sin^{10}\varphi = \frac{63}{256} - \frac{105}{256}\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi - \frac{45}{512}\cos 6\varphi + \frac{5}{256}\cos 8\varphi - \frac{1}{512}\cos 10\varphi$$

Diese $\sin^2\varphi$, $\sin^4\varphi$ u. s. w. in die Reihe $\log W^2$ eingesetzt geben:

$$\begin{aligned} \log W^2 = &-\left(\frac{1}{2}\mu e^2 + \frac{3}{16}\mu e^4 + \frac{5}{48}\mu e^6 + \frac{35}{512}\mu e^8 + \frac{63}{1280}\mu e^{10}\right) \\ &+\left(\frac{1}{2}\mu e^2 + \frac{1}{4}\mu e^4 + \frac{5}{32}\mu e^6 + \frac{7}{64}\mu e^8 + \frac{21}{256}\mu e^{10}\right)\cos 2\varphi \\ &-\left(\frac{1}{16}\mu e^4 + \frac{1}{16}\mu e^6 + \frac{7}{128}\mu e^8 + \frac{3}{64}\mu e^{10}\right)\cos^4\varphi \\ &+\left(\frac{1}{96}\mu e^6 + \frac{1}{64}\mu e^8 + \frac{9}{512}\mu e^{10}\right)\cos 6\varphi \\ &-\left(\frac{1}{512}\mu e^8 + \frac{1}{256}\mu e^{10} + \right)\cos 8\varphi \\ &+\left(\frac{1}{2560}\mu e^{10}\right)\cos 10\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

Wenn man dieses mit dem Besselschen $\log e^2 = 7.8244104{\cdot}237$ ausrechnet (Benützung der $\log \mu\, e^n$ auf S. 193), so bekommt man in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

$$\left.\begin{aligned} \log W^2 = -14529{\cdot}6251671 + 14541{\cdot}7844150 \cos 2\varphi - 12{\cdot}1728172 \cos 4\varphi \\ + 0{\cdot}0135864 \cos 6\varphi - 0{\cdot}0000170 \cos 8\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Dieselbe Entwicklung für $\log V^2$ gemacht giebt aus (8) und § 29. S. 177 das folgende:

$$\log V^2 = e'^2 \cos^2\varphi - \frac{e'^4}{2}\cos^4\varphi + \frac{e'^6}{3}\cos^6\varphi - \frac{e'^8}{4}\cos^8\varphi + \frac{e'^{10}}{5}\cos^{10}\varphi$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$$

$$\cos^4\varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi$$

$$\cos^6\varphi = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2\varphi + \frac{3}{16}\cos 4\varphi + \frac{1}{32}\cos 6\varphi$$

$$\cos^8\varphi = \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\cos 2\varphi + \frac{7}{32}\cos 4\varphi + \frac{1}{16}\cos 6\varphi + \frac{1}{128}\cos 8\varphi$$

$$\cos^{10}\varphi = \frac{63}{256} + \frac{105}{256}\cos 2\varphi + \frac{15}{64}\cos 4\varphi + \frac{45}{512}\cos 6\varphi + \frac{5}{256}\cos 8\varphi + \frac{1}{512}\cos 10\varphi$$

$$\begin{aligned} \log V^2 = &\left(\frac{1}{2}\mu e'^2 - \frac{3}{16}\mu e'^4 + \frac{5}{48}\mu e'^6 - \frac{35}{512}\mu e'^8 + \frac{63}{1280}\mu e'^{10}\right) \\ &+\left(\frac{1}{2}\mu e'^2 - \frac{1}{4}\mu e'^4 + \frac{5}{32}\mu e'^6 - \frac{7}{64}\mu e'^8 + \frac{21}{256}\mu e'^{10}\right)\cos 2\varphi \\ &-\left(\frac{1}{16}\mu e'^4 - \frac{1}{16}\mu e'^6 + \frac{7}{128}\mu e'^8 - \frac{3}{64}\mu e'^{10}\right)\cos 4\varphi \\ &+\left(\frac{1}{96}\mu e'^6 - \frac{1}{64}\mu e'^8 + \frac{9}{512}\mu e'^{10}\right)\cos 6\varphi \\ &-\left(\frac{1}{512}\mu e'^8 - \frac{1}{256}\mu e'^{10}\right)\cos 8\varphi \\ &+\left(\frac{1}{2560}\mu e'^{10}\right)\cos 10\varphi \end{aligned} \quad (16)$$

Wenn man dieses mit dem Besselschen $\log e'^2 = 7.8273187{\cdot}833$ ausrechnet (Benützung der $\log \mu\, e'^n$ auf S. 193), so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} \log V^2 = 14553{\cdot}9708333 + 14541{\cdot}7844155 \cos 2\varphi - 12{\cdot}1728170 \cos 4\varphi \\ + 0{\cdot}0135863 \cos 6\varphi - 0{\cdot}0000171 \cos 8\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die Reihen (17) und (15) stimmen in den Coëfficienten hinreichend überein und die Absolutglieder geben $\log V^2 - \log W^2 = 29083{\cdot}5960004$ was mit $\log (1 + e'^2)$ nach S. 193 stimmt wie es sein muss.

Durch Halbierung der Coëfficienten hat man auch $\log W$ und $\log V$, nämlich zugleich ein wenig vermittelnd zwischen den Endziffern in (15) und (17):

$$\left.\begin{aligned} \log V = 7276{\cdot}9854166 + 7270{\cdot}8922076 \cos 2\varphi - 6{\cdot}0864086 \cos 4\varphi \\ + 0{\cdot}0067932 \cos 6\varphi - 0{\cdot}0000085 \cos 8\varphi \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

und da man gewöhnlich logarithmisch rechnet, wollen wir auch noch die Coëfficienten-Logarithmen angeben:

$$\left.\begin{aligned} \log V^2 = 14553{\cdot}9708333 + [4{\cdot}1626177{\cdot}018] \cos 2\varphi - [1{\cdot}0853911{\cdot}0] \cos 4\varphi \\ + [8{\cdot}1331028] \cos 6\varphi - [5.23172] \cos 8\varphi \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} log\, V = 7276{\cdot}9854166 + [3{\cdot}8615877{\cdot}062]\, cos\, 2\,\varphi - [0.7843611{\cdot}0]\, cos\, 4\,\varphi \\ + [7.8320728]\, cos\, 6\,\varphi - [4.93069]\, cos\, 8\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Um von der Mitte zu zählen, wollen wir noch setzen $\varphi = 45^\circ + (\varphi - 45^\circ)$ also:

$$\left.\begin{aligned} log\, V = 7276{\cdot}9854166 - [3.8615877{\cdot}062]\, sin\, 2\,(\varphi - 45^\circ) + [0.7843611{\cdot}0] \\ cos\, 4\,(\varphi - 45^\circ) + [7.8320728]\, sin\, 6\,(\varphi - 45^\circ) - [4.93069]\, cos\, 8\,(\varphi - 45^\circ) \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Diese Form bietet den Vorteil, dass man damit in *einer* Rechnung stets die Bestandteile für zwei Werte φ erhält, welche gegen 45° symmetrisch liegen; z. B. $\varphi - 45^\circ = +15^\circ$ und -15° geben $log\, V$ für $\varphi = 30^\circ$ und für $\varphi = 60^\circ$ das folgende:

$$\text{für } \varphi = 30^\circ \quad log\, V = 7276{\cdot}9854166 + 3635{\cdot}4461038 + 3{\cdot}0432043 - 0{\cdot}0067932 + 0{\cdot}0000042$$

$$\text{für } \varphi = 60^\circ \quad log\, V = 7276{\cdot}9854166 - 3635{\cdot}4461038 + 3{\cdot}0432043 + 0{\cdot}0067932 + 0{\cdot}0000042$$

zusammengefasst:

$$\text{für } \varphi = 30^\circ \quad log\, V = 0.0010915{\cdot}4679357$$

$$\text{für } \varphi = 60^\circ \quad log\, V = 0.0003644{\cdot}5893145$$

Diese Werte stimmen innerhalb 0·000001 mit den aus (7) oder (12) berechneten.

Interpolation für log V.

Wenn man eine Tafel der $log\, V$ aufstellen will, so wird man gewisse Hauptwerte, etwa für φ von 1° zu 1° unmittelbar nach den vorstehenden Formeln (7), (12) oder (20) berechnen, und im Übrigen weitere Werte einschalten. Wenn man nun bereits Näherungswerte der einzuschaltenden $log\, V$ kennt, was oft der Fall ist, so kann man zur schärferen Einschaltung eine gute Formel nach dem Prinzip des Mittelargumentes aufstellen in folgender Weise:

Ein Wert V gehöre zur Breite φ, ferner V'' zur Breite $\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}$ und V' zur Breite $\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}$; dann werden nach der Maclaurin schen Reihe folgende zwei Gleichungen bestehen:

$$log\, V'' = log\, V + \frac{\Delta\varphi}{2}\frac{d\, log\, V}{d\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 \frac{d^2\, log\, V}{d\varphi^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^3 \frac{d^3\, log\, V}{d\varphi^3}$$

$$log\, V' = log\, V - \frac{\Delta\varphi}{2}\frac{d\, log\, V}{d\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 \frac{d^2\, log\, V}{d\varphi^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^3 \frac{d^3\, log\, V}{d\varphi^3}$$

Die Differenz giebt: $log\, V'' - log\, V' = \Delta\, log\, V$:

$$\Delta\, log\, V = \Delta\varphi\, \frac{d\, log\, V}{d\varphi} + \frac{\Delta\varphi^3}{24}\frac{d^3 log\, V}{d\varphi^3} \quad (22)$$

Zur Anwendung haben wir $log\, V$ dreimal abzuleiten, wobei nun künftig immer zur Abkürzung geschrieben werden soll $tang\, \varphi = t$ und

$$V^2 = 1 + e'^2 cos^2\varphi = 1 + \eta^2 \quad , \quad \text{also } \eta^2 = e'^2 cos^2\varphi \quad , \quad \frac{d\eta^2}{d\varphi} = -2\,\eta^2 t \quad (23)$$

$$V = \sqrt{1 + \eta^2} \;,\; \frac{dV}{d\varphi} = \frac{1}{2\,V}(-2\,\eta^2 t) = -\frac{\eta^2 t}{V}$$

$$\frac{d\, log\, V}{d\varphi} = \frac{1}{V}\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2 t}{V^2} \quad (24)$$

In dieser Behandlung werden die beiden nächsten Ableitungen:

$$\frac{d^2 \log V}{d\varphi^2} = \frac{\eta^2}{V^4}(-1 + t^2 - \eta^2 - \eta^2 t^2)$$

$$\frac{d^3 \log V}{d\varphi^3} = \frac{2\eta^2 t}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2 - \eta^4 - \eta^4 t^2) \qquad (25)$$

Die Ableitungen (24) und (25) hat man in (22) einzusetzen und zugleich wollen wir $\Delta\varphi = 10'$ nehmen, wofür mit $\varrho = 3437{,}7\ldots$ zu dividieren ist, und da auch noch mit $\mu = 0.43429\ldots$ zu multiplizieren ist, haben wir:

$$\Delta \log V = -\frac{\mu}{\varrho}\, 10\, \frac{\eta^2 t}{V} + \frac{\mu\, 1000}{12\,\varrho^3}\frac{\eta^2 t}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t - \eta^4 - \eta^4 t^2)$$

Da $\eta^2 = e'^2 \cos^2\varphi$, also $\eta^2 t = e'^2 \sin\varphi \cos\varphi$, so hat man, um alles Konstante zusammenzufassen, zugleich η^4 vernachlässigend:

$$\Delta \log V = -5\,\frac{\mu}{\varrho}\, e'^2 \frac{\sin 2\varphi}{V^2} + \frac{1000\,\mu\, e'^2}{24\,\varrho^3}\frac{\sin 2\varphi}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \qquad (26)$$

Die Ausrechnung giebt für Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

$$\Delta \log V = -[1.6277992{\cdot}161]\frac{\sin 2\varphi}{V^2} + [5.4760703]\frac{\sin 2\varphi}{V^6}(2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \qquad (27)$$

Das zweite Glied macht sehr wenig aus, nämlich:

$\varphi = 10°$	2. Glied = 0·0000 2015	$\varphi = 50°$	2. Glied = 0·0000 5888
20°	3795	60°	5201
30°	5133	70°	3874
40°	5862	80°	2063

Dieses Glied geht also erst in die 12te Logarithmenstelle ein und ergiebt sich von selbst als eine kleine innerhalb weiter Grenzen nahezu konstante Differenz zwischen den Summen von je 6 Zwischenwerten $\Delta \log V$ und dem Intervall zwischen zwei festen $\log V$, das sie ausfüllen sollen. Die V^2, welche man im ersten Gliede von (27) braucht, müssen dem Mittelargument φ entsprechen; in unserem Falle verfuhren wir dabei so, dass diejenigen $\log V^2$, welche schon in der vorhergehenden Auflage des Bandes 8 stellig für alle Werte φ von 10′ zu 10′ ausgerechnet vorlagen, von 5′ zu 5′ eingeschaltet, die nötigen Näherungswerte zur Gleichung (27) lieferten, um Interpolation auf 12—13 Stellen genau zu geben; folgendes ist ein Beispiel hiefür:

		$\log V$	φ
$\varphi = 48°$		6522·92572	48° 0′
	42·07059 — 6 = 42·07053	6480·85519	48° 10′
	42·04425 — 6 = 42·04419	6438·81100	48° 20′
	42·01646 — 6 = 42·01640	6396·79460	48° 30′
	41·98728 — 6 = 41·98722	6354·80738	48° 40′
	41·95667 — 6 = 41·95661	6312·85077	48° 50′
$\varphi = 49°$	41·92464 — 6 = 41·92458	6270·92619	49° 0′
	251·99989 — 36 = 251·99953	251·99953	

Die Differenzen 42·07059 — 6 u. s. w. sind nach der Formel (27) berechnet, 6 ist das zweite Glied, im vorstehenden Beispiel abgerundet, (in Wirklichkeit wurde mit einer Stelle mehr gerechnet).

In dieser Weise wurde unsere Tafel der Werte *log V*, welche im Anhang auf Seite [2]—[7] gegeben ist, berechnet mit 12—13 Stellen und nachher auf 10 Stellen abgerundet.

Die Ableitungen von V nach φ.

Auch die Ableitungen der Funktion V werden später noch oft gebraucht werden, weshalb wir sie zum Vorrat hier hersetzen, auch mit Einführung fester Zeichen:

$$tang\,\varphi = t \qquad \frac{d\,t}{d\,\varphi} = 1 + t^2 \tag{a}$$

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = 1 + \eta^2 \quad \text{also} \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi \tag{b}$$

$$\frac{d\,\eta^2}{d\,\varphi} = -2\,e'^2 \cos\varphi \sin\varphi = -2\,\eta^2\,t \tag{c}$$

und allgemeiner $$\frac{d\,\eta^n}{d\,\varphi} = -n\,\eta^n\,t \tag{d}$$

$$\frac{d\,V}{d\,\varphi} = \frac{1}{2\,V}\frac{d\,\eta^2}{d\,\varphi} = -\frac{\eta^2\,t}{V} \tag{e}$$

$$\frac{d^2\,V}{d\,\varphi^2} = -\left(\frac{d\,\eta^2}{d\,\varphi}\frac{t}{V} + \frac{\eta^2}{V}\frac{d\,t}{d\,\varphi} - \frac{\eta^2\,t}{2\,V}\frac{d\,V}{d\,\varphi}\right)$$

$$\frac{d^2\,V}{d\,\varphi^2} = +\frac{2\,\eta^2\,t^2}{V} - \frac{\eta^2}{V}(1+t^2) - \frac{\eta^4\,t^2}{V^3}$$

Wenn man hier alles auf den Nenner V^3 bringt, und berücksichtigt, dass $V^2 = 1 + \eta^2$ ist, so bekommt man:

$$\frac{d^2\,V}{d\,\varphi^2} = -\frac{\eta^2}{V^3}(1 - t^2 + \eta^2) \tag{f}$$

Wenn man in diesen Formen weiter differentiiert, so bekommt man:

$$\frac{d^3\,V}{d\,\varphi^3} = \frac{\eta^2\,t}{V^5}(4 + 5\,\eta^2 + 3\,\eta^2\,t^2 + \eta^4) \tag{g}$$

$$\frac{d^4\,V}{d\,\varphi^3} = \frac{\eta^2}{V^7}(4 - 4\,t^2 + 9\,\eta^2 + 10\,\eta^2\,t^2 - 3\,\eta^2\,t^4 + 6\,\eta^4 + 14\,\eta^4\,t^2 + 12\,\eta^4\,t^4 + \eta^6) \tag{h}$$

Mit Hilfe dieser Ableitungen kann man auch V von einer Breite φ auf eine benachbarte Breite reduzieren, denn man hat nach dem Taylor schen Satze für eine Breite φ' einen Werth V' entsprechend folgender Reihe:

$$V' = V - \frac{(\varphi' - \varphi)\,\eta^2\,t}{V} - \frac{(\varphi' - \varphi)^2}{2}\frac{\eta^2}{V^3}(1 - t^2 + \eta^2) + \ldots \tag{i}$$

oder $$V' = V\left(1 - \frac{(\varphi' - \varphi)\,\eta^2\,t}{V^2} + (\varphi' - \varphi)^2 \ldots\right) \tag{k}$$

Damit hat man auch die Reduktion der Krümmungs-Halbmesser von einer auf die andere Breite, z. B.:

$$N = \frac{c}{V} \qquad N' = \frac{c}{V'}$$

$$\frac{N}{N'} = \frac{V'}{V} = 1 - \frac{(\varphi' - \varphi)}{V^2}\,\eta^2\,t + (\varphi' - \varphi)^2 \ldots \tag{l}$$

Später wird davon mehrfach Gebrauch gemacht werden.