Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 35. Meridianbogen-Längen

§ 35. Meridianbogenlängen.

Der Meridian-Krümmungs-Halbmesser in der Breite φ ist nach (17) und (21) § 32.:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \quad \text{oder} \quad M = \frac{c}{V^3} \tag{1}$$

Ein unendlich kleiner Meridianbogen für die Breitendifferenz $d\varphi$ ist daher $= M\,d\varphi$ und der ganze Meridianbogen vom Äquator mit $\varphi = 0$ bis zur Breite φ ist

$$B = \int_0^\varphi M\,d\varphi = a(1-e^2)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \quad \text{oder} = c\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1+e'^2\cos^2\varphi)^3}} \tag{2}$$

Dieses ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung; davon ist jedoch bei der Rektifikation für geodätische Zwecke nicht die Rede, indem hier Reihenentwicklungen angewendet werden, die nach Umständen bei weniger oder mehr Gliedern abgebrochen werden.

I. Integration nur bis e^2 einschliesslich, mit a und e^2.

Wenn man nur bis e^2 einschliesslich entwickeln will, so schreibt man die zu integrierende Funktion (2) kurz so:

$$\frac{1}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = (1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi + e^4\ldots \tag{3}$$

Hier ist nach bekannter goniometrischer Formel:

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \tag{4}$$

und das Integral:

$$\int \cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \tag{5}$$

Damit wird das allgemeine Integral in (2):

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\varphi - \frac{3}{8}e^2\sin 2\varphi + \ldots \tag{6}$$

Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 ist daher:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ldots d\varphi = \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{8}e^2(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)$$

oder im zweiten Gliede goniometrisch umgewandelt:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ldots d\varphi = \left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{4}e^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cos(\varphi_2+\varphi_1) \tag{7}$$

folglich der Meridianbogen m selbst zwischen den Grenzen φ_1 und φ_2 nach (2) und (7):

$$m = a(1-e^2)\left(\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)(\varphi_2-\varphi_1) - \frac{3}{4}e^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)\cos(\varphi_2+\varphi_1)\right) \tag{8}$$

Wenn man hier die Sinus-Reihe anwendet, nämlich nur deren zwei erste Glieder:

$$sin\,(\varphi_2 - \varphi_1) = (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^3}{6} + \ldots$$

so erhält man durch Einsetzen dieser Glieder in die vorhergehende (8):

$$m = a(\varphi_2 - \varphi_1)(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^2 cos\,(\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{1}{8}e^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 cos\,(\varphi_2 + \varphi_1)\right) \quad (9)$$

Obgleich in diesem Ausdrucke alle Glieder von der Ordnung e^4 und darüber vernachlässigt sind, kann man doch zu vielen Zwecken davon Gebrauch machen; ja man kann noch mit einem kleinen weiteren Opfer an Genauigkeit einen sehr praktischen Satz ableiten, der sich auf den Meridian-Krümmungs-Halbmesser der *Mittelbreite* $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ bezieht. Dieser Meridian-Krümmungs-Halbmesser ist nach (1):

$$M' = \frac{a\,(1 - e^2)}{\left(1 - e^2\,sin^2\,\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dieses ebenfalls bis auf e^2 einschliesslich entwickelt, giebt:

$$M' = a\,(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\,sin^2\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

und mit Anwendung der goniometrischen Formel (4) für $sin^2\,\varphi$:

$$M' = a\,(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^2\,cos\,(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

Nimmt man nun diesen Krümmungs-Halbmesser M' als *Kreisbogen*-Halbmesser zu einem Centriwinkel $\varphi_2 - \varphi_1$, so erhält man einen entsprechenden Meridianbogen:

$$m' = M'\,(\varphi_2 - \varphi_1) = a\,(\varphi_2 - \varphi_1)\,(1 - e^2)\left(\left(1 + \frac{3}{4}e^2\right) - \frac{3}{4}e^2\,cos\,(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \quad (10)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem früheren (9), so findet man in den ersten Gliedern völlige Übereinstimmung, man hat also auch sofort im zweiten Teil die Differenz:

$$m' - m = -\,a\,(\varphi_2 - \varphi_1)\,(1 - e^2)\,\frac{e^2}{8}\,(\varphi_2 - \varphi_1)^2\,cos\,(\varphi_1 + \varphi_2)$$

oder genähert, zugleich mit Zufügung des nötigen ϱ:

$$m' - m = -\,a\,\frac{e^2}{8}\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varrho}\right)^3 cos\,(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (11)$$

Dieses ist der Fehler, der begangen wird, wenn man, nach (10), einen Ellipsen-Meridian-Bogen als Kreisbogen behandelt, dessen Halbmesser der Meridian-Krümmungs-Halbmesser für die Mittelbreite $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ ist.

Zunächst sieht man aus (11), dass der Fehler $m' - m$ verschwindet, wenn $\varphi_1 + \varphi_2 = 90°$, d. h. wenn die Mittelbreite $= 45°$ ist (vorbehältlich der vernachlässigten Glieder von der Ordnung e^4) u. s. w.

Im übrigen berechnet man nach (11) zur Übersicht, dass für $\varphi_2 - \varphi_1 = 1°$ und für $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 30°$ oder $60°$ der Fehler $= -\,0{,}014^{m}$ oder $= +\,0{,}014^{m}$ wird und äussersten Falls mit $\varphi = 0°$ oder $\varphi = 90°$ bringt der Fehler für $\varphi_2 - \varphi_1 = 1°$ nur $-0{,}028^m$ oder $+0{,}028^m$. Man kann daher kurz sagen, dass in den Breiten von Mitteleuropa ein Meridianbogen von 1° Ausdehnung nach dem Näherungsverfahren von M für die Mittelbreite, innerhalb 1^{cm} genügend ist. Wir werden am Schlusse dieses Paragraphen nochmals darauf zurückkommen.

Integration bis e^{10}.

Man kann das im vorstehenden angewendete Verfahren beliebig weit fortsetzen; es besteht im allgemeinen darin, dass man die zu integrierende Funktion $(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}$ nach Potenzen von $e^2 \sin^2 \varphi$ entwickelt und dann die Potenzen $\sin^2 \varphi$, $\sin^4 \varphi$, $\sin^6 \varphi$ u. s. w. in $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 6\varphi$ u. s. w. ausdrückt und dadurch integrierbar macht.

Hiernach haben wir:

$$\frac{1}{W^3} = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\, e^4 \sin^4 \varphi + \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\, e^6 \sin^6 \varphi$$

$$+ \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,\frac{9}{8}\, e^8 \sin^8 \varphi + \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{7}{6}\,\frac{9}{8}\,\frac{11}{10}\, e^{10} \sin^{10} \varphi + \ldots$$

$$\frac{1}{W^3} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 \varphi + \frac{35}{16} e^6 \sin^6 \varphi + \frac{315}{128} e^8 \sin^8 \varphi + \frac{693}{256} e^{10} \sin^{10} \varphi \quad (12)$$

Nach § 29. S. 176—177 ist hier zu setzen:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$

$$\sin^4 \varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi$$

$$\sin^6 \varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2\varphi + \frac{3}{16} \cos 4\varphi - \frac{1}{32} \cos 6\varphi$$

$$\sin^8 \varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16} \cos 2\varphi + \frac{7}{32} \cos 4\varphi - \frac{1}{16} \cos 6\varphi + \frac{1}{128} \cos 8\varphi$$

$$\sin^{10} \varphi = \frac{63}{256} - \frac{105}{256} \cos 2\varphi + \frac{15}{64} \cos 4\varphi - \frac{45}{512} \cos 6\varphi + \frac{5}{256} \cos 8\varphi - \frac{1}{512} \cos 10\varphi$$

Setzt man diese Ausdrücke in (12) ein und ordnet nach $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w., so bekommt man:

$$\frac{1}{W^3} = A - B \cos 2\varphi + C \cos 4\varphi - D \cos 6\varphi + E \cos 8\varphi - F \cos 10\varphi \quad (13)$$

wobei die Coëfficienten A, B u. s. w. folgende Bedeutungen haben:

$$A = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \frac{43659}{65536} e^{10} + \ldots$$

$$B = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2205}{2048} e^8 + \frac{72765}{65536} e^{10} + \ldots$$

$$C = \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \frac{10395}{16384} e^{10} + \ldots$$

$$D = \frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8 + \frac{31185}{131072} e^{10} + \ldots$$

$$E = \frac{315}{16384} e^8 + \frac{3465}{65536} e^{10} + \ldots$$

$$F = \frac{693}{131072} e^{10} + \ldots$$

Wenn man mit der Besselschen Excentricität nach § 31. S. 193 ($log\ e^2 = 7.824\,4104{\cdot}237$) diese Werte ausrechnet, so findet man:

$$\left.\begin{array}{ll} A = 1{,}00503\,73060{,}48555 & log\,A = 0.002\,1821{\cdot}827 \\ B = 0{,}00504\,78492{,}40300 & log\,B = 4.504\,8414{\cdot}798 \\ C = 0{,}00001\,05637{,}86831 & log\,C = 5.023\,8196{\cdot}289 \\ D = \qquad 206{,}33322 & log\,D = 2.314\,5691{\cdot}6 \\ E = \qquad 0{,}38853 & log\,E = 9.589\,4246 \\ F = \qquad 0{,}00070 & log\,F = 6.845\,10 \end{array}\right\} \tag{14}$$

Der letzte Coëfficient F, welcher nur von e^{10} abhängt, wird verschwindend klein, aber in den übrigen Coëfficienten bringen die Glieder mit e^{10} doch noch kleine Beträge, welche die schliessliche Abrundung noch teilweise beeinflussen.

Indem man nun die Funktion (13) integriert, hat man:

$$\int cos\ 2\,\varphi = \frac{1}{2}\,sin\ 2\,\varphi \qquad \int cos\ 4\,\varphi = \frac{1}{4}\,cos\ 4\,\varphi \quad \text{u. s. w.}$$

also mit Zusetzung des Faktors $a\,(1-e^2)$ von (1) und (2) wird der Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ ausgedrückt durch die Reihe:

$$B = a(1-e^2)\left(\frac{A\,\varphi}{\varrho} - \frac{B}{2}\,sin\,2\,\varphi + \frac{C}{4}\,sin\,4\,\varphi - \frac{D}{6}\,sin\,6\,\varphi + \frac{E}{8}\,sin\,8\,\varphi - \frac{F}{10}\,sin\,10\,\varphi\right) \tag{15}$$

Man hat mit den Coëfficienten (14) auszurechnen:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{A\,a\,(1-e^2)}{\varrho^\circ} = & 111120{,}61962 & log = 5.045\,7946{\cdot}544 \\ \dfrac{B}{2}\,a\,(1-e^2) = & 15988{,}63853 & log = 4.203\,8114{\cdot}841 \\ \dfrac{C}{4}\,a\,(1-e^2) = & 16{,}72995\,380 & log = 1.223\,4947{\cdot}417 \\ \dfrac{D}{6}\,a\,(1-e^2) = & 0{,}02178\,4772 & log = 8.338\,1530{\cdot}1 \\ \dfrac{E}{8}\,a\,(1-e^2) = & 0{,}00003\,07659 & log = 5.488\,0696 \\ \dfrac{F}{10}\,a\,(1-e^2) = & 0{,}00000\,00443{,}44 & log = 2.646\,84 \end{array}\right\} \tag{16}$$

Anmerkung. Dieselbe Reihenentwicklung, in etwas anderer Form und ausgedehnt bis e^{12} findet sich in „Theorie der Projektionsmethode der Hannover schen Landesvermessung von Oscar Schreiber, Hannover 1866", S. 13. Es ist dort zur Vermeidung von Brüchen $e = 4\,\varepsilon$, oder $e^2 = 16\,\varepsilon^2$ gesetzt und der Faktor $(1-e^2)$ in den einzelnen Coëfficienten ausmultipliziert, wodurch die folgende unserer (15) entsprechende Formel entsteht:

$$\text{Meridianbogen } B = a\,(A\,\varphi - A_1\,sin\,2\,\varphi + A_2\,sin\,4\,\varphi - \ldots) \tag{15 a}$$

$$\begin{array}{rlllllll} A = & 1 & -\,4\,\varepsilon^2 & -\,12\,\varepsilon^4 & -\,80\,\varepsilon^6 & -\,700\,\varepsilon^8 & -\,7056\,\varepsilon^{10} & -\,77616\,\varepsilon^{12} \\ A_1 = & & 6\,\varepsilon^2 & +\,24\,\varepsilon^4 & +\,180\,\varepsilon^6 & +\,1680\,\varepsilon^8 & +\,17640\,\varepsilon^{10} & +\,199584\,\varepsilon^{12} \\ A_2 = & & & 15\,.\,. & +\,180\,.\,. & +\,2100\,\varepsilon & +\,25200\,.\,. & +\,311850\,.\,. \\ 3\,A_3 = & & & & +\,160\,.\,. & +\,2800\,.\,. & +\,44100\,.\,. & +\,646800\,.\,. \\ 2\,A_4 = & & & & & +\,315\,.\,. & +\,8820\,.\,. & +\,174636\,.\,. \\ 10\,A_5 = & & & & & & +\,5540\,.\,. & +\,199584\,.\,. \\ A_6 = & & & & & & & +\,2002\,.\,. \end{array}$$

Integration bis e'^{10}.

Wir wollen die Coëfficienten (16) zunächst stehen lassen und die Integration nochmals von neuem beginnen in der zweiten Form mit c und e'^2; es wird dabei nochmals dasselbe herauskommen, wie auf dem ersten Wege, was als Probe erwünscht ist.

Nach der zweiten Form von (1) oder (2) haben wir zu behandeln:

$$\frac{1}{V^3} = (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 \varphi + \frac{3}{2}\frac{5}{4} e'^4 \cos^4 \varphi - \frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6} e'^6 \cos^6 \varphi$$
$$+ \frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{9}{8} e'^8 \cos^8 \varphi - \frac{3}{2}\frac{5}{4}\frac{7}{6}\frac{9}{8}\frac{11}{10} e'^{10} \cos^{10} \varphi$$

$$\frac{1}{V^3} = 1 - \frac{3}{2} e'^2 \cos^2 \varphi + \frac{15}{8} e'^4 \cos^4 \varphi - \frac{35}{16} e'^6 \cos^6 \varphi + \frac{315}{128} e'^8 \cos^8 \varphi - \frac{693}{256} e'^{10} \cos^{10} \varphi \quad (17)$$

Nach § 29. S. 177 hat man:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi$$
$$\cos^4 \varphi = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi$$
$$\cos^6 \varphi = \frac{5}{16} + \frac{15}{32} \cos 2\varphi + \frac{3}{16} \cos 4\varphi + \frac{1}{32} \cos 6\varphi$$
$$\cos^8 \varphi = \frac{35}{128} + \frac{7}{16} \cos 2\varphi + \frac{7}{32} \cos 4\varphi + \frac{1}{16} \cos 6\varphi + \frac{1}{128} \cos 8\varphi$$
$$\cos^{10} \varphi = \frac{63}{256} + \frac{105}{256} \cos 2\varphi + \frac{15}{64} \cos 4\varphi + \frac{45}{512} \cos 6\varphi + \frac{5}{256} \cos 8\varphi + \frac{1}{512} \cos 10\varphi$$

Wenn man diese Ausdrücke in (17) einsetzt, und nach $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$ u. s. w. ordnet, so bekommt man:

$$\frac{1}{V^3} = A' - B' \cos 2\varphi + C' \cos 4\varphi - D' \cos 6\varphi - E' \cos 8\varphi - F' \cos 10\varphi \quad (18)$$

wobei die Coëfficienten A', B' u. s. w. folgende Bedeutungen haben:

$$A' = 1 - \frac{3}{4} e'^2 + \frac{45}{64} e'^4 - \frac{175}{256} e'^6 + \frac{11025}{16384} e'^8 - \frac{43659}{65536} e'^{10} + \ldots$$
$$B' = + \frac{3}{4} e'^2 - \frac{15}{16} e'^4 + \frac{525}{512} e'^6 - \frac{2205}{2048} e'^8 + \frac{72765}{65536} e'^{10} + \ldots$$
$$C' = + \frac{15}{64} e'^4 - \frac{105}{256} e'^6 + \frac{2205}{4096} e'^8 - \frac{10395}{16384} e'^{10} + \ldots$$
$$D' = + \frac{35}{512} e'^6 - \frac{315}{2048} e'^8 + \frac{31185}{131072} e'^{10} + \ldots$$
$$E' = + \frac{315}{16384} e'^8 - \frac{3465}{65536} e'^{10} + \ldots$$
$$F' = + \frac{693}{131072} e'^{10} + \ldots$$

In allen diesen Entwicklungen von (17) bis F' treten dieselben Zahlencoëfficienten auf wie früher in (12) bis F, nur mit anderen Vorzeichen. Man bemerkt auch, dass in der Gruppe der Coëfficienten A' B' $C' \ldots$ jede Vertikalreihe die Summe $=$ Null giebt, so dass im Ganzen entsteht:

$$A' + B' + C' + D' + E' + F' = 1$$

Dieses hat auch einen inneren Sinn, nämlich mit $\varphi = 90°$ wird

$$\cos 2\varphi = -1 \quad , \quad \cos 4\varphi = +1 \quad , \quad \cos 6\varphi = -1 \text{ u. s. w.}$$

und damit wird nach (18):

$$\frac{1}{V3} = A' + B' + C' + D' + E' + F' = 1$$

und allerdings muss mit $\varphi = 0$ der Ausdruck $V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = 1$ werden. Etwas ähnliches findet bei der früheren Entwicklung mit W bei (13) statt, indem mit $\varphi = 0°$ ebenfalls $W = 1$ werden muss. Jedenfalls ist die Beziehung $A' + B' + C' \ldots = 1$ eine angenehme Probe für die Coëfficienten A', $B' \ldots$, womit zugleich auch die früheren Coëfficienten A, $B \ldots$ kontrolliert sind.

Die Ausrechnung der Zahlenwerte von A' B' u. s. w. mit dem Bessel schen $\log e'^2 = 7.827\,3187{\cdot}833$ hat gegeben:

$$\left.\begin{array}{ll} A' = 0{,}99499\,21245{,}07507 & \log A' = 9.997\,8196{\cdot}433 \\ B' = 0{,}00499\,73968{,}22747 & \log B' = 7.698\,7438{\cdot}364 \\ C' = 0{,}00001\,04582{,}03528 & \log C' = 5.019\,4570{\cdot}894 \\ D' = \phantom{0{,}00001\,0}204{,}27152 & \log D' = 2.310\,2078{\cdot}2 \\ E' = \phantom{0{,}00001\,000}0{,}38465 & \log E' = 9.585\,0657 \\ F' = \phantom{0{,}00001\,000}0{,}00072 & \log F' = 6.857\,33 \end{array}\right\} \quad (19)$$

Die Weiterrechnung nach der Integration giebt dann, ganz wie früher bei der Rechnung mit W:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{A'}{\varrho°}c = 111120{,}61962 & \log \frac{A'}{\varrho°}c = 5.045\,7946{\cdot}544 \\ \frac{B'}{2}c = 15988{,}63853 & \log \frac{B'}{2}c = 4.203\,8114{\cdot}842 \\ \frac{C'}{4}c = 16{,}72995\,380 & \log \frac{C'}{4}c = 1.223\,4947{\cdot}417 \\ \frac{D'}{6}c = 0{,}02178\,4832 & \log \frac{D'}{6}c = 8.338\,1542{\cdot}1 \\ \frac{E'}{8}c = 0{,}00003\,07662 & \log \frac{E'}{8}c = 5.488\,0733 \\ \frac{F'}{10}c = 0{,}00000\,00460{,}71 & \log \frac{F'}{10}c = 2.663\,43 \end{array}\right\} \quad (20)$$

Die beiden Ausrechnungen (16) und (20) stimmen so nahe überein, als es bei den unvermeidlichen Abrundungen erwartet werden kann. Die ganze Rechnung ist damit genügend kontrolliert, und wir bilden daraus im Mittel: die Formel für den Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ:

$$\left.\begin{array}{l} B = \alpha\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi + \varepsilon \sin 8\varphi + \zeta \sin 10\varphi \\ B = 11\,1120{,}61962\,\varphi - 15988{,}63853 \sin 2\varphi + 16{,}72995\,38 \sin 4\varphi \\ \qquad - 0{,}02178\,480 \sin 6\varphi + 0{,}00003\,0766 \sin 8\varphi \\ \qquad - 0{,}00000\,00452 \sin 10\varphi \end{array}\right\} \quad (21)$$

Das letzte Glied mit $\sin 10\varphi$ ist für alle im folgenden beabsichtigten Berechnungen nicht mehr von Bedeutung, wir wollen es deshalb ganz weglassen in der nachstehenden Formel, welche statt der Coëfficienten selbst deren Logarithmen giebt:

$$\left.\begin{array}{l} B = [5.045\,7946{\cdot}544]\,\varphi - [4.203\,8114{\cdot}842] \sin 2\varphi + [1.223\,4947{\cdot}4] \sin 4\varphi \\ \qquad - [8.338\,1536] \sin 6\varphi + [5.48807] \sin 8\varphi \end{array}\right\} \quad (22)$$

Im ersten Glied von (21) oder (22) ist φ in Graden zu nehmen; wenn man in Minuten oder in Sekunden rechnen will, so wird das erste Glied:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } 1' & 1852{,}01032\,72^m & log = 3.267\,6434{\cdot}040 \\ \;\;\text{"}\;\; 1'' & 30{,}86683\,879 & log = 1.489\,4921{\cdot}536 \end{array}\right\} \quad (23)$$

Die Formel (21) giebt sofort eine wichtige Anwendung; mit $\varphi = 90°$ werden $sin\,2\,\varphi$, $sin\,4\,\varphi$ u. s. w. alle = Null, und man bekommt den Meridianquadranten:

$$Q = 10\,000\,855{,}7658 \text{ Meter} \quad (24)$$

Man drückt das häufig auch so aus, dass man sagt, es sei $\frac{Q}{90} = 11\,1120{,}61962$ Meter der mittlere Meridiangrad.

Wenn man die Bedeutung des ersten Coëfficienten α in (21) nochmals aus (16) und (13) einsetzt, so erhält man:

$$Q = \frac{A\,a\,(1-e^2)}{\varrho°}\,90° = a\,(1-e^2)\,\frac{\pi}{2}\,A$$

$$Q = a\,(1-e^2)\,\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3}{4}\,e^2+\frac{45}{64}\,e^4+\ldots\right)$$

$$Q = a\,\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}\,e^2-\frac{3}{64}\,e^4-\ldots\right) \quad (24\text{a})$$

Wir wollen bei dieser Näherung stehen bleiben und nach (7) § 31. S. 189 die Abplattung α einführen, nämlich mit:

$$e^2 = 2\,\alpha - \alpha^2$$

Setzt man dieses in (24a) und ordnet nach Potenzen von α, so erhält man:

$$Q = a\,\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right) \quad (24\text{b})$$

Von dem Klammerfaktor kann man auch den Logarithmus entwickeln, wodurch man findet:

$$log\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right) = \mu\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right) - \frac{\mu}{2}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 = -\mu\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right)$$

Die Formel (24b) haben wir schon in unserer Einleitung S. 8 bei Gelegenheit der älteren Gradmessungen erwähnt, und um für solche Fälle leicht den Quadranten aus der grossen Axe und der Abplattung α oder umgekehrt berechnen zu können, haben wir dazu folgendes Hilfstäfelchen gebildet:

$\frac{a-b}{a} = \alpha$	$log\,\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right)$	+	$\frac{a-b}{a} = \alpha$	$log\,\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{16}\right)$	+
1 : 280	0.195 3440		1 : 300	0.195 3957	
		137			119
1 : 285	0.195 3577		1 : 305	0.195 4076	
		131			115
1 : 290	0.195 3708		1 : 310	0.195 4191	
		127			112
1 : 295	0.195 3835		1 : 315	0.195 4303	
		122			107
1 : 300	0.195 3957		1 : 320	0.195 4410	

Eine zweite naheliegende Anwendung von (21) oder (22) bekommt man mit $\varphi = 45°$, damit wird $2\,\varphi = 90°$, $4\,\varphi = 180°$, $6\,\varphi = 270°$, also:

$$B_0^{45} = 5\,000\,427{,}882900 - 15988{,}638530 + 0{,}021785 = 4\,984\,439{,}266155^m \quad (25)$$

Dieses ist der Meridianbogen vom Äquator bis zur Mittelbreite = 45°, der andere Teil von 45° bis zum Pol ist erheblich grösser, nämlich:

$$B_{45}^{90} = 50\,15416{,}4996^{m} \tag{26}$$

Nach der Formel (21) oder (22) haben wir die 30 Werte von $\varphi = 30°$ bis $\varphi = 60°$ berechnet:

Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ. (27)

φ	B	φ	B	φ	B
30°	3 319 786,510^{m}	40°	4 429 084,790^{m}	50°	5 540 279,543^{m}
31	3 430 636,950	41	4 540 116,998	51	5 651 505,565
32	3 541 502,523	42	4 651 168,472	52	5 762 750,675
33	3 652 386,539	43	4 762 239,302	53	5 874 014,723
34	3 763 288,290	44	4 873 329,553	54	5 985 297,540
35°	3 874 208,046	45	4 984 439,266	55	6 096 598,931
36	3 985 146,054	46	5 095 568,459	56	6 207 918,679
37	4 096 102,540	47	5 206 717,124	57	6 319 256,544
38	4 207 077,708	48	5 317 885,233	58	6 430 612,266
39	4 318 071,739	49	5 429 073,732	59	6 541 985,560
40°	4 429 084,790	50	5 540 279,543	60	6 654 376,122

Zur Vergleichung wollen wir auch einige Zahlen aus fremden Tabellen zuziehen, nämlich: 1) Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch 1852, Tafeln für die Gestalt der Erde S. 374—381, giebt diese Meridianbögen B in Toisen, welche in der nachfolgenden Vergleichung in Meter verwandelt sind. 2) F. G. Gauss, Die trigonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, zweite Auflage 1893, II. Teil, S. 4—27. 3) Hartl, Tafeln, enthaltend die Ausmasse der Meridian- und Parallelbögen 1895 („Zeitschr. f. Verm." 1896, S. 28—30).

Vergleichung verschiedener Berechnungen von B. (28)

φ	Jordan	Encke	F. G. Gauss	Hartl
30°	3 319 786,510^{m}	,511^{m}		,510^{m}
35	3 874 208,046	,047		,046
40	4 429 084,790	,791		,790
45	4 984 439,266	,270	,265^{m}	,266
50	5 540 279,543	,544	,542	,543
55	6 096 598,931	,932	,929	,931
60	6 654 376,122	,121		,121

Die kleinen Differenzen von Millimetern, welche sich hier zeigen, scheinen ihren Grund in den verschiedenen Annahmen der letzten Stellen der Bessel schen Erddimensionen zu haben, von welchen wir in § 31. S. 190—192 gehandelt haben.

Die Hilfstafel auf S. [38] unseres Anhangs, welche die in den vorstehenden Formeln mit B bezeichneten Meridianbögen vom Äquator bis zur Breite φ giebt, ist nur in ihrem ersten Teil, von 40° bis 44° von uns berechnet und zwar mit etwas anderen Konstanten als in vorstehender Formel (21) oder (22). Der übrige Teil von 44° bis 56° ist ein Auszug aus F. G. Gauss, Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen der Feldmesskunst, 2. Aufl. 1893, II. Teil, S. 4—27.

Meridianbogen zwischen den Breiten φ_1 und φ_2.

Wenn man die Länge eines begrenzten Bogens m, zwischen φ_1 und φ_2, haben will, so kann man diesen sofort aus (21) haben, nämlich:

$$m = \alpha(\varphi_2 - \varphi_1) + \beta \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) + \gamma \sin 4(\varphi_2 - \varphi_1) + \delta \sin 6(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots \quad (29)$$

Dieses wollen wir goniometrisch umformen, und dabei setzen:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varDelta\varphi \qquad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi_0$$

Damit wird (28):

$$m = \alpha \varDelta\varphi + 2\beta \sin \varDelta\varphi \cos\varphi_0 + 2\gamma \sin 2\varDelta\varphi \cos 2\varphi_0 + 2\delta \sin 3\varDelta\varphi \cos 3\varphi_0 + \ldots \quad (30)$$

Da die ausgerechneten Coëfficienten α, β, γ u. s. w. in (21) und (22) gegeben sind, kann man hiernach sofort für jede Mittelbreite φ_0 den Bogen m ausrechnen. Wir wollen $\varDelta\varphi = 1^0$ setzen, und bekommen damit den Meridianbogen m_1 von 1° Weite mit der Mittelbreite φ mit ausgerechneten Coëfficienten:

$$\left.\begin{aligned} m_1 = 111120{,}61962 - 558{,}080436 \cos 2\varphi + 1{,}167734 \cos 4\varphi \\ - 0{,}002280 \cos 6\varphi + 0{,}0000043 \cos 8\varphi \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

oder mit Logarithmen:

$$\left.\begin{aligned} m_1 = 111\,120{,}61962 - [2.746\,6967{\cdot}983] \cos 2\varphi + [0.0673439{\cdot}0] \cos 4\varphi \\ - [7.357\,984] \cos 6\varphi - [4.63268] \cos 8\varphi \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Nach diesen Formeln (30)—(32) kann man jedes Meridianbogenstück ausrechnen, wenn es sich aber um Bögen von nur 1° oder von wenigen Grad handelt, und wenn man eine Tafel der Meridian-Krümmungs-Halbmesser bereits hat, so kann man eine viel bessere Reihe auf folgende Weise finden:

Wir betrachten einen Meridianbogen m, welcher zwischen den Breiten φ und $\varphi + \varDelta\varphi$ liegt, dann wird man nach dem Maclaurinschen Satze entwickeln können:

$$m = \frac{dm}{d\varphi}\varDelta\varphi + \frac{\varDelta\varphi^2}{2}\frac{d^2m}{d\varphi^2} + \frac{\varDelta\varphi^3}{6}\frac{d^3m}{d\varphi^3} \quad (33)$$

Nun wissen wir von (1) und (2) S. 209:

$$\frac{dm}{d\varphi} = M = \frac{c}{V^3} \quad (34)$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \varphi^2 \cos^2\varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \quad , \quad \frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2 t}{V}$$

$$\frac{d^2m}{d\varphi^2} = -\frac{3c}{V^4}\frac{dV}{d\varphi} = +\frac{3c\eta^2 t}{V^5} = +\frac{3M}{V^2}\eta^2 t \quad (35)$$

Wenn man in diesen Formen weiter differentiiert, so erhält man:

$$\frac{d^3m}{d\varphi^3} = \frac{3c}{V^7}\eta^2(1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2) = \frac{3M}{V^4}\eta^2(1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2) \quad (36)$$

Nach diesen (34)—(36) kann man die Formel (33) zusammensetzen:

$$m = M \varDelta \varphi + \frac{3}{2} \frac{M}{V^2} \eta^2 t \varDelta \varphi^2 + \frac{M}{2 V^4} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \varDelta \varphi^3 \tag{37}$$

Zur Sicherung der Vorzeichen wollen wir dieses auch noch schreiben mit $\varDelta \varphi = \varphi' - \varphi$ und $m = B' - B$, wo B und B' die Meridianbögen vom Äquator bis φ und φ' sind, also (37) in zweiter Form:

$$m = B' - B = M(\varphi' - \varphi) + \frac{3}{2} \frac{M}{V^2} \eta^2 t (\varphi' - \varphi)^2 + (\varphi' - \varphi)^3 + \ldots \tag{38}$$

dabei gehört M, η^2, t zu φ.

Im Anschluss hieran kann man nun noch eine viel bessere Formel nach dem Prinzip der Mittelbreite (vgl. § 29. S. 178—179) herstellen:

Wir betrachten einen Meridianbogen m, welcher zwischen den Breiten $\varphi - \frac{\varDelta \varphi}{2}$ und $\varphi + \frac{\varDelta \varphi}{2}$ liegt, wo also φ die Mittelbreite und $\varDelta \varphi$ die Weite ist. Der Bogen m wird dadurch ebenfalls in zwei Teile m_1 und m_2 zerlegt, für deren nördlichen m_1 nach dem Maclaurin schen Satze eine Reihe gelten wird:

$$m_1 = \left(\frac{d\,m}{d\,\varphi}\right) \frac{\varDelta \varphi}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 m}{d\,\varphi^2}\right) \left(\frac{\varDelta \varphi}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 m}{d\,\varphi^3}\right) \left(\frac{\varDelta \varphi}{2}\right)^3 + \ldots$$

eine entsprechende Reihe gilt für den südlichen Teil m_2, nämlich:

$$-m_2 = -\left(\frac{d\,m}{d\,\varphi}\right) \frac{\varDelta \varphi}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 m}{d\,\varphi^2}\right) \left(\frac{\varDelta \varphi}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 m}{d\,\varphi^3}\right) \left(\frac{\varDelta \varphi}{2}\right)^3 + \ldots$$

durch Subtraktion findet man hieraus:

$$m_1 + m_2 = m = \left(\frac{d\,m}{d\,\varphi}\right) \varDelta \varphi + \left(\frac{d^3 m}{d\,\varphi^3}\right) \frac{\varDelta \varphi^3}{24} \tag{39}$$

Die hiezu nötigen Ableitungen sind im Vorstehenden (34) und (36) entwickelt, man kann daher alsbald die Formel (39) zusammensetzen, zugleich mit Zufügung der nötigen ϱ:

$$m = M \frac{\varDelta \varphi}{\varrho} + \frac{M}{8 V^4} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \frac{\varDelta \varphi^3}{\varrho^3} \tag{40}$$

und mit Einführung einer Abkürzung g und γ haben wir:

$$m = M \frac{\varDelta \varphi}{\varrho} + g \varDelta \varphi^3 \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wobei} \quad g &= \frac{M \eta^2}{8 V^2 \varrho^3} (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \\ \gamma = \frac{g}{M} \varrho &= \frac{\eta^2}{8 V^2 \varrho^2} (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\varDelta \varphi = \frac{m}{M} \varrho - \gamma \left(\frac{m}{M} \varrho\right)^3 \tag{43}$$

Die hiernach berechneten Werte g und γ sind in nachfolgender Tabelle mitgeteilt. Dieselbe enthält für $\varDelta \varphi = 1°$ die Korrektions-Glieder g und γ für Meridian-Bogen-Rektifizierung mit dem Krümmungs-Halbmesser der Mittelbreite φ.

φ	g	γ	φ	g	γ	φ	g	γ
	+	—					—	+
0°	0,0281^m	0,00091″	45°	+ 0,00024^m	— 0,000008″	55°	0,0095^m	0,00031″
5°	0,0277	0,00090	46°	— 0,00075	+ 0,000024	60°	0,0140	0,00045
10°	0,0264	0,00086	47°	— 0,00174	+ 0,000056	65°	0,0182	0,00059
15°	0,0244	0,00079	48°	— 0,00273	+ 0,000088	70°	0,0217	0,00070
20°	0,0217	0,00070	49°	— 0,00372	+ 0,000120	75°	0,0247	0,00080
25°	0,0183	0,00059	50°	— 0,00470	+ 0,000152	80°	0,0268	0,00086
30°	0,0143	0,00046	51°	— 0,00567	+ 0,000184	85°	0,0281	0,00091
35°	0,0099	0,00032	52°	— 0,00664	+ 0,000215	90°	0,0286	0,00092
40°	0,0051	0,00017	53°	— 0,00761	+ 0,000246			
45°	0,0002	0,00001	54°	— 0,00856	+ 0,000277			
			55°	— 0,00951	+ 0,000308			

Diese Werte g sind im wesentlichen dasselbe, was die früher bei (11) S. 210 bis 211 angegebenen Beträge $m - m'$, d. h. die negativen Fehler.

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir den Meridianbogen zwischen den Breiten 47° und 53°, also 6° Weite mit der Mittelbreite $\varphi = 50°$ berechnen, man hat zuerst nach der Tafel des Anhangs, S. [20] und [21] $log\, M = 6.804\,2916{\cdot}0$ oder sofort $log \frac{\varrho}{M} = log\,[1] = 8.510\,1335{\cdot}3$. Oder wenn wir noch schärfer rechnen wollen, so nehmen wir von S. [5] des Anhangs für $\varphi = 50°$, $log\, V = 0.000\,6020{\cdot}131$ also $log\, V^3 = 0.001\,8060{\cdot}393$, dazu von § 31. S. 193 $log\, \varrho - log\, c = 8.508\,3274{\cdot}897$, so dass man zusammen hat $log\,[1] = 8.510\,1335{\cdot}290$, was mit $6° = 21\,600''$ das Hauptglied der Formel (41) giebt:

$$m' = \frac{21600}{[1]} = 667\,298{,}613^m$$

und dazu kommt noch nach dem vorstehenden Korrektionstäfelchen für $\varphi = 50°$ und $\Delta\varphi = 6°$ der Betrag:

$$-0{,}00470 \times 6^3 = -1{,}015^m.$$

Dieses zum vorigen hinzugefügt giebt:

$$m = 667\,298{,}613^m - 1{,}015^m = 667\,297{,}598^m.$$

Zur Vergleichung hat man von der Tabelle (27) S. 216:

für $\varphi = 47°$	$B = 5\,206717{,}124^m$	
„ $\varphi = 53°$	$B = 5\,874014{,}723$	
Differenz	$m =$	$667297{,}599^m$

Dieses stimmt mit dem vorhergehenden auf 1^{mm}, was genügend ist.

Die Genauigkeit der Berechnung nach der Formel (41) ist sehr gross, denn das nächste vernachlässigte Glied ist nur von der Ordnung $\frac{M}{160}\,\Delta\varphi^5\, e'^2 \cos 2\varphi$, was für einen Breitenunterschied von 10° zwischen 45° und 55° nur 7^{mm} ausmacht, jedoch wegen des Faktors $\cos 2\varphi$ erheblicher wird, wenn die Mittelbreite φ weit von 45° abliegt.

Wenn man etwa die von 1° zu 1° berechneten Meridianbogen B der Tabelle (27) S. 216 weiter interpolieren will, so rechnet man am besten die Differenzen nach der Formel (41), wobei das Glied mit g fast gar nichts ausmacht, z. B. für $\varphi = 50°$ und $\Delta\varphi = 10'$ wird $\gamma\Delta\varphi^3$ nur $= \frac{0{,}00470^{m}}{216} = 0{,}00002^{m}$.

Um daher den Meridianbogen von 50° 0′ bis 50° 10′ zu berechnen, nimmt man einfach von Seite [32] des Anhangs für $\varphi = 50° 5'$ den Wert $log\,[1] = 8.510\,1272{\cdot}8$ und rechnet damit

$$\Delta B = 600 : [1] = 18536{,}339^{m}$$

Ein zweites Beispiel soll die Benützung der Tafel Seite [38] und der Coëfficienten [1] zeigen:

Es sei gegeben die Breite des Punktes Celle (welcher einer der 40 Preussischen Kataster-Coordinaten-Nullpunkte ist) nämlich:

$$\varphi_0 = 52° 37' \quad 32{,}6709''$$

und es soll dazu der Meridianbogen B vom Äquator bis zu dem Punkte Celle aus der Tafel Seite [38] des Anhangs gefunden werden. Man hat zunächst

für $\varphi = 52° 30'$: $B_1 = 5818\,380{,}341^{m}$ und $\Delta\varphi = 7'\,32{,}6709'' = 452{,}6709''$

Die Mittelbreite für den Überschuss ist 52° 33′ 46,3″ und damit entnimmt man von Seite [33] den Wert $log\,[1] = 8.509\,9429{\cdot}9$, womit man logarithmisch weiterrechnet $\Delta B = \Delta\varphi : [1] = 13990{,}705$, was zu dem obigen B_1 zugefügt giebt $B_0 = 5\,83271{,}046^{m}$, und dieses ist der gesuchte zu φ_0 gehörige Meridianbogenwert, den man durch Benützung der zweiten Differenzen auf Seite [38] ebenso finden muss (in der 3. Aufl. dieses Bandes, 1890, S. 208, mit zweiten Differenzen berechnet $= 583271{,}045^{m}$).

§ 36. Parallelkreisbögen.

Nachdem wir die Meridianbögen gründlich behandelt haben, sind auch noch die damit verwandten Parallelkreisbögen zu erledigen, wozu keine weiteren Entwicklungen nötig sind, denn nach Fig. 1. S. 188 und Fig. 1 S. 194 ist der Parallelkreishalbmesser für die Breite φ:

$$x = N \cos\varphi \tag{1}$$

wobei wir $N = \frac{c}{V}$ als bereits berechnet voraussetzen. Damit hat man auch den Parallelbogen für die Länge λ:

$$L = x\frac{\lambda}{\varrho} = N\cos\varphi\,\frac{\lambda}{\varrho} = \frac{\lambda}{[1]}\cos\varphi \tag{2}$$

Die zweite oder die dritte dieser Formen wird man nehmen, wenn man N oder $[2] = \frac{\varrho}{N}$ aus unseren Anhangstafeln Seite [8]—[35] benützen will. Um noch genauer, etwa 10stellig zu rechnen, hat man $log\,V$ aus der besonderen Tafel dafür S. [2]—[7] des Anhangs zu entnehmen, und dann ist:

$$L = \frac{c}{\varrho}\,\frac{\cos\varphi\,\lambda}{V} \tag{3}$$

wobei für λ in Graden, Minuten oder Sekunden gilt:

	für Grade	für Minuten	für Sekunden
$log\,\frac{c}{\varrho}$	$= 5.047\,9750{\cdot}111$	$3.269\,8237{\cdot}607$	$1.491\,6725{\cdot}103$