Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 37. Oberfäche des Erd-Ellipsoids, Gradabteilungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Hiernach sind folgende Werte berechnet, zu etwaigen Weiterbenützungen mit mehr Stellen als für gewöhnlich nötig.

Parallelkreisbögen.

φ	$\lambda = 1^\circ$	$\lambda = 1'$	$\lambda = 1''$
45°	78837,29341ᵐ	1313,954890ᵐ	21,88924817ᵐ
46	77453,91115	1290,898519	21,51497532
47	76046,76765	1267,446128	21,12410212
48	74616,28344	1243,604724	20,72674540
49	73162,88715	1219,381452	20,32302421
50°	71687,01462	1194,783577	19,91305962
51	70189,10917	1169,818486	19,49697477
52	68669,62128	1144,493688	19,07489480
53	67129,00870	1118,816812	18,64694685
54	65567,73593	1092,795599	18,21325998
55	63986,27472	1066,437912	17,77396520

Verschiedene Tafelwerte von berechneten Parallelkreisbögen giebt unser Anhang auf Seite [36]—[37] , [40] und [41].

Die Parallelbögen werden ausser auf Grade, Minuten und Sekunden, auch auf Zeitmass, Stunden, Minuten und Sekunden reduziert, was astronomischen Zwecken entspricht. Es ist deswegen auf Seite [43] auch eine Tafel für Verwandlung von Bogen in Zeit und umgekehrt gegeben, und auf Seite [40] sind die Parallelbögen für 1′ und 1″ in Bogen, dazu aber auch für 1 Minute und 1 Sekunde in Zeit gegeben, als Näherungswerte, die z. B. zu astronomischen Ortsbestimmungen auf Reisen nützlich sind.

§ 37. Oberfläche des Erd-Ellipsoids.

Zur Oberflächenbestimmung denkt man sich das Ellipsoid durch Meridiane und Parallelkreise in Trapeze zerlegt, deren Differentialformel sich leicht angeben lässt.

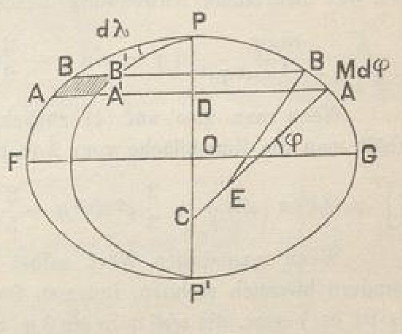
$A\,C = N \quad , \quad A\,E = M$

$D\,A = N \cos\varphi \qquad A\,B = M\,d\,\varphi$

$A\,A' = D\,A\,d\,\lambda$

$A\,A' = N \cos\varphi\,d\,\lambda$

Fig. 1.



Als Differential betrachtet hat das Trapez $A\,B\,B'\,A'$ die Fläche $d\,T = A\,B \times A\,A'$,

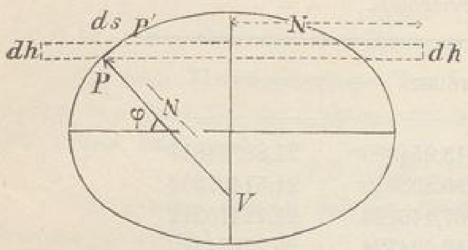
also: $$d\,T = M\,N \cos\varphi\,d\,\lambda\,d\,\varphi \qquad (1)$$

und die ganze Zone $A\,A\,B\,B$ mit $\lambda = 2\,\pi$ zwischen den Breiten φ und $d\,\varphi$ wird:

$$d\,Z = 2\,M\,N\,\pi \cos\varphi\,d\,\varphi \qquad (2)$$

Es mag auch daran erinnert werden, dass man ein solches Zonenelement $d\,Z$ zwischen zwei unendlich nahen Parallelkreisen auch als Kegelfläche auffassen kann, welche nach einem elementar-stereometrischen Satze erhalten wird als krumme Oberfläche eines Cylinders, dessen Höhe gleich der Höhe der genannten Zone ist, und dessen Halbmesser gleich der Länge der Flächennormalen N ist.

Fig. 2.



Mit Bezug auf Fig. 2. hat man daher:

Zonen-Flächen-Element $d\,Z = 2\,N\pi \times d\,h$.

Es ist aber:

$d\,h = d\,s \cos\varphi$ und $d\,s = M\,d\,\varphi$

also $d\,Z = 2\,M\,N\,\pi \cos\varphi\,d\,\varphi$, ebenso wie oben (2).

Da $M\,N = r^2$ ist, kann man die Formel (1) auch so schreiben:

$$d\,Z = 2\,r^2\,\pi \cos\varphi\,d\,\varphi \tag{3}$$

Setzt man für r^2 nach (24) § 32. S. 197 seinen Wert und zugleich $a^2\,(1 - e^2) = b^2$, so wird:

$$d\,Z = 2\,b^2\,\pi \frac{\cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2}\,d\,\varphi \tag{4}$$

Dieses ist das Flächen-Differential einer Zone des Ellipsoids zwischen den Breiten φ und $\varphi + d\,\varphi$, also die Zonenfläche selbst, allgemein:

$$Z = 2\,b^2\,\pi \int \frac{\cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2}\,d\,\varphi \tag{5}$$

Hier kann man entwickeln:

$$\frac{1}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2} = (1 - e^2 \sin^2\varphi)^{-2} = 1 + \left(\frac{-2}{1}\right) e^2 \sin^2\varphi + \left(\frac{-2}{1}\,\frac{-3}{2}\right) e^4 \sin^4\varphi + \ldots$$

$$= 1 + 2\,e^2 \sin^2\varphi + 3\,e^4 \sin^4\varphi + 4\,e^6 \sin^6 + 5\,e^8 \sin^8\varphi + \ldots$$

Die zu integrierende Funktion ist also nach (5):

$$\frac{\cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2} = \cos\varphi + 2\,e^2 \cos\varphi \sin^2\varphi + 3\,e^4 \cos\varphi \sin^4\varphi + 4\,e^6 \cos\varphi \sin^6\varphi + \ldots$$

Diese Glieder lassen sich einzeln unmittelbar integrieren, denn es ist allgemein:

$$\int \cos\varphi \sin^n\varphi\,d\,\varphi = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1}\varphi$$

also, mit mehrfacher Anwendung dieses Integrals:

$$\int \frac{\cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2}\,d\,\varphi = \sin\varphi + \frac{2}{3}\,e^2 \sin^3\varphi + \frac{3}{5}\,e^4 \sin^5\varphi + \frac{4}{7}\,e^6 \sin^7\varphi + \ldots$$

Wenn man also auf (4) zurückgreift, und die Grenzen 0 und φ einführt, so erhält man die Zonenfläche vom Äquator bis zur Breite φ:

$$Z\Big]_0^{\varphi} = 2\,b^2\,\pi \left(\sin\varphi + \frac{2}{3}\,e^2 \sin^3\varphi + \frac{3}{5}\,e^4 \sin^5\varphi + \frac{4}{7}\,e^6 \sin^7\varphi + \frac{5}{9}\,e^8 \sin^9\varphi + \ldots\right) \tag{6}$$

Wenn man diesen Wert selbst haben will für verschiedene φ, so kann man geradezu hiernach rechnen, indessen für Zonenflächen zwischen je zwei Breiten φ_1 und φ_2 ist es besser, die $\sin^3\varphi$ in $\sin 3\,\varphi$ u. s. w. umzuformen, nämlich nach § 29. S. 116:

$$\sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi$$

$$\sin^5 \varphi = \frac{5}{8} \sin \varphi - \frac{5}{16} \sin 3\varphi + \frac{1}{16} \sin 5\varphi$$

$$\sin^7 \varphi = \frac{35}{64} \sin \varphi - \frac{21}{64} \sin 3\varphi + \frac{7}{64} \sin 5\varphi - \frac{1}{64} \sin 7\varphi$$

$$\sin^9 \varphi = \frac{63}{128} \sin \varphi - \frac{21}{64} \sin 3\varphi + \frac{9}{64} \sin 5\varphi - \frac{9}{256} \sin 7\varphi + \frac{1}{256} \sin 9\varphi$$

$$\sin^{11} \varphi = \frac{231}{512} \sin \varphi - \frac{165}{512} \sin 3\varphi + \frac{165}{1024} \sin 5\varphi - \frac{55}{1024} \sin 7\varphi + \frac{11}{1024} \sin 9\varphi - \frac{\sin 11\varphi}{1024}$$

Damit wird (5) werden:

$$Z\Big]_0^{\varphi} = 2 b^2 \pi \left(A \sin \varphi - B \sin 3\varphi + C \sin 5\varphi - D \sin 7\varphi + E \sin 9\varphi - F \sin 11\varphi\right) \quad (7)$$

wobei die Coëfficienten A, B u. s. w. diese sind:

$$\left.\begin{aligned}
A &= 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6 + \frac{35}{128} e^8 + \frac{63}{256} e^{10} = 1{,}00335\;39847{,}9231 \\
B &= \frac{1}{6} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{16} e^6 + \frac{35}{192} e^8 + \frac{45}{256} e^{10} = 0{,}00112\;08040{,}9276 \\
C &= \frac{3}{80} e^4 + \frac{1}{16} e^6 + \frac{5}{64} e^8 + \frac{45}{612} e^{10} = 16892{,}6070 \\
D &= \frac{1}{112} e^6 + \frac{5}{256} e^8 + \frac{15}{512} e^{10} = 26{,}9384 \\
E &= \frac{5}{2304} e^8 + \frac{3}{512} e^{10} = {,}0438 \\
F &= \frac{3}{5632} e^{10} = {,}0001
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Ausrechnung geschah mit dem Bessel schen Werte $\log e^2 = 7.824\,4104 \cdot 237$.

Wenn man nun die Zone zwischen zwei Breiten φ_1 und φ_2 haben will, so hat man in (7) die Differenzen:

$$A (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = 2 A \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \text{ u. s. w.}$$

Dabei soll zur Abkürzung geschrieben werden:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi \quad , \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi$$

Damit wird nach (7) die Zonenfläche von der Weite $\Delta \varphi$ und mit der Mittelbreite φ:

$$\left.\begin{aligned}
Z = 4 b^2 \pi \Big\{ & A \cos \varphi \sin \frac{\Delta \varphi}{2} - B \cos 3\varphi \sin 3 \frac{\Delta \varphi}{2} \\
& + C \cos 5\varphi \sin 5 \frac{\Delta \varphi}{2} - D \cos 7\varphi \sin 7 \frac{\Delta \varphi}{2} \\
& + E \cos 9\varphi \sin 9 \frac{\Delta \varphi}{2} - \ldots\ldots \quad \ldots \Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Fläche einer Grad-Abteilung.

Die Formel (8) mit dem Coëfficienten (7) giebt mit $\varDelta\varphi = 1°$ die Fläche eines Ringes von 1° Breite, der um die ganze Erde herumgeht, d. h. 360° Länge hat. Häufiger als die Fläche dieses ganzen Ringes braucht man den 360sten Teil derselben, d. h. eine „Grad-Abteilung", oder ein Trapez, welches durch zwei Meridiane und durch zwei Parallelkreise, beide im Abstande von je 1°, begrenzt ist.

Die krumme Oberfläche einer solchen Grad-Abteilung mit der Mittelbreite φ ist also:

$$G = \frac{b^2\pi}{90}\Big\{A \sin 30' \cos\varphi - B \sin 1°30' \cos 3\varphi + C \sin 2°30' \cos 5\varphi - D \sin 3°30' \cos 7\varphi + E \sin 4°30' \cos 9\varphi - \ldots\Big\} \quad (10)$$

Wenn man hier alles Konstante ausrechnet, so findet man für Quadratkilometer

$$\left.\begin{array}{llll} G = & 12347{,}58347 & \cos\varphi & (\log \text{Coëff.} = 4.091\,5819{\cdot}705) \\ - & 41{,}37468 & \cos 3\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"}\quad = 1.616\,7346{\cdot}5\;) \\ + & 0{,}103911 & \cos 5\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"}\quad = 9.016\,662 - 10) \\ - & 0{,}000232 & \cos 7\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"}\quad = 6.365\,28 \;- 10) \\ + & 0,\ldots & \cos 9\varphi & (\;\text{"}\quad\text{"}\quad = 3.678 \quad - 10) \end{array}\right\} \quad (11)$$

Die Messtischblätter der Preussischen Topographie im Massstab 1 : 25 000 haben in der Breite $\varDelta\varphi = 6'$ und in der Länge 10′, und hiefür wird:

$$G' = \frac{b^2\pi}{540}\Big\{A \sin 3' \cos\varphi - B \sin 9' \cos 3\varphi + C \sin 15' \cos 5\varphi - D \sin 21' \cos 7\varphi\Big\} \quad (12)$$

oder mit ausgerechneten Coëfficienten, für Quadratkilometer:

$$G' = 205{,}79564 \cos\varphi - 0{,}689656 \cos 3\varphi + 0{,}001732 \cos 5\varphi - 0{,}0000039 \cos 7\varphi \quad (13)$$

Die Logarithmen dieser Coëfficienten sind:

2.313 4361·8 9.838 6325 7.238 647 4.5874

Die hiernach berechneten Werte giebt unsere Tafel des Anhangs Seite [41].

Eine andere Reihenentwicklung, bei welcher die Coëfficienten A, B u. s. w. in endlicher geschlossener Form auftreten, wurde gegeben von *E. Roedel*, Oberpostassistent, in „Schlömilchs Zeitschr. f. Math. u. Physik", 38. Jahrgang 1893, S. 56—60.

Integration in geschlossener Form.

Wir haben in der vorstehenden Entwicklung die Integration (4) sofort in einer Reihe behandelt, weil wir dadurch am kürzesten zu den Formeln (6) und (8) geführt worden sind, welche zum praktischen Rechnen die bequemsten sind.

Indessen kann man die Integration von (4) auch in geschlossener Form, streng ausführen, wodurch man zwar eine mathematisch elegantere Formel erhält, welche aber für die numerische Anwendung unbequemer ist als die entwickelten Reihen. Die Integration (deren Einzelheiten in der früheren 3. Auflage 1890, S. 227—228 ausgeführt waren) giebt:

$$Z\Big]_0^{\varphi} = 2\,b^2\pi\left\{\frac{\sin\varphi}{W^2} + \frac{1}{e}\,l\left(\frac{1+e\sin\varphi}{W}\right)\right\} \quad (14)$$

Setzt man hier $\varphi = 90^\circ$, so wird $W^2 = 1 - e^2$ also:

$$Z\Big]_0^{90} = 2\,b^2\,\pi \left\{ \frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{e}\, l \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} \right\} \quad , \quad \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$2Z\Big]_0^{90} = E = 4\,a^2\,\pi \left\{ 1 + \frac{1-e^2}{2\,e} \frac{1}{\mu} \log \frac{1+e}{1-e} \right\}$$

Dieses muss übereinstimmen mit der Formel (6), wenn man daselbst $\varphi = 90^\circ$ setzt, wodurch man erhält:

$$E = 4\,b^2\,\pi \left(1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \frac{5}{9} e^8 + \ldots \right) \tag{15}$$

Die Ausrechnung giebt nach beiden Formeln übereinstimmend:

$$E = 509\,950\,714{,}2 \text{ Quadrat-Kilometer} \tag{16}$$

Denkt man sich nun eine Kugel vom Halbmesser f, welche gleiche Oberfläche E haben soll, so bestimmt sich f dadurch:

$$f = \sqrt{\frac{E}{4\,\pi}} = 6\,370\,289{,}511^m \tag{17}$$

§. 38. Mittlerer Halbmesser der Erde als Kugel.

Die letzte Betrachtung leitet uns noch über zu der Frage, welchen Halbmesser man einer Kugel zuteilen soll, welche zu manchen Näherungsberechnungen u. s. w. dem Erd-Ellipsoid substituiert werden kann?

Der nächste Gedanke ist, das arithmetische Mittel der drei Halbaxen des Ellipsoids zu diesem Zwecke zu benützen, d. h. zu setzen:

$$\frac{a+a+b}{3} = r \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 6\,377\,397{,}155^m \\ a = 6\,377\,397{,}155 \\ b = 6\,356\,078{,}963 \end{array}\right\} \frac{a+a+b}{3} = 6\,370\,291{,}091^m \tag{2}$$

Man kann diesen Wert r nach (1) auch in eine Reihe entwickeln, nämlich:

$$r = \frac{2\,a + a\sqrt{1-e^2}}{3} = \frac{a}{3}\left(2 + 1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{8} e^4 - \frac{1}{16} e^6 - \ldots \right)$$

$$r = a\left(1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{1}{24} e^4 - \frac{1}{48} e^6 - \ldots \right) \tag{3}$$

Nach diesem kann man die am Schlusse des vorigen § 37. (s. oben) eingeführte Kugel betrachten, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleiche Oberfläche E hat. Aus der Reihe für E in (15) § 37. (s. oben) folgt, dass der Halbmesser f der fraglichen Kugel sein muss:

$$f = a\sqrt{1-e^2}\sqrt{1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \ldots}$$

$$f = a\left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16}\right)\left(1 + \frac{1}{3} e^2 + \frac{11}{45} e^4 + \frac{193}{945} e^6\right)$$

$$f = a\left(1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{17}{360} e^4 - \frac{67}{3024} e^6\right) \tag{4}$$