Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 38. Mittlerer Halbmesser der Erde als Kugel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Setzt man hier $\varphi = 90°$, so wird $W^2 = 1 - e^2$ also:

$$Z\Big]_0^{90} = 2\,b^2\,\pi\left\{\frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{e}\,l\,\frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}}\right\} \quad , \quad \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$2Z\Big]_0^{90} = E = 4\,a^2\,\pi\left\{1 + \frac{1-e^2}{2\,e}\,\frac{1}{\mu}\,log\,\frac{1+e}{1-e}\right\}$$

Dieses muss übereinstimmen mit der Formel (6), wenn man daselbst $\varphi = 90°$ setzt, wodurch man erhält:

$$E = 4\,b^2\,\pi\left(1 + \frac{2}{3}\,e^2 + \frac{3}{5}\,e^4 + \frac{4}{7}\,e^6 + \frac{5}{9}\,e^8 + \ldots\right) \tag{15}$$

Die Ausrechnung giebt nach beiden Formeln übereinstimmend:

$$E = 509\,950\,714{,}2 \text{ Quadrat-Kilometer} \tag{16}$$

Denkt man sich nun eine Kugel vom Halbmesser f, welche gleiche Oberfläche E haben soll, so bestimmt sich f dadurch:

$$f = \sqrt{\frac{E}{4\,\pi}} = 6\,370\,289{,}511^m \tag{17}$$

§. 38. Mittlerer Halbmesser der Erde als Kugel.

Die letzte Betrachtung leitet uns noch über zu der Frage, welchen Halbmesser man einer Kugel zuteilen soll, welche zu manchen Näherungsberechnungen u. s. w. dem Erd-Ellipsoid substituiert werden kann?

Der nächste Gedanke ist, das arithmetische Mittel der drei Halbaxen des Ellipsoids zu diesem Zwecke zu benützen, d. h. zu setzen:

$$\frac{a+a+b}{3} = r \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 6\,377\,397{,}155^m \\ a = 6\,377\,397{,}155 \\ b = 6\,356\,078{,}963 \end{array}\right\} \frac{a+a+b}{3} = 6\,370\,291{,}091^m \tag{2}$$

Man kann diesen Wert r nach (1) auch in eine Reihe entwickeln, nämlich:

$$r = \frac{2\,a + a\sqrt{1-e^2}}{3} = \frac{a}{3}\left(2 + 1 - \frac{1}{2}\,e^2 - \frac{1}{8}\,e^4 - \frac{1}{16}\,e^6 - \ldots\right)$$

$$r = a\left(1 - \frac{1}{6}\,e^2 - \frac{1}{24}\,e^4 - \frac{1}{48}\,e^6 - \ldots\right) \tag{3}$$

Nach diesem kann man die am Schlusse des vorigen § 37. (s. oben) eingeführte Kugel betrachten, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleiche Oberfläche E hat. Aus der Reihe für E in (15) § 37. (s. oben) folgt, dass der Halbmesser f der fraglichen Kugel sein muss:

$$f = a\sqrt{1-e^2}\sqrt{1 + \frac{2}{3}\,e^2 + \frac{3}{5}\,e^4 + \frac{4}{7}\,e^6 + \ldots}$$

$$f = a\left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{16}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\,e^2 + \frac{11}{45}\,e^4 + \frac{193}{945}\,e^6\right)$$

$$f = a\left(1 - \frac{1}{6}\,e^2 - \frac{17}{360}\,e^4 - \frac{67}{3024}\,e^6\right) \tag{4}$$

Die Vergleichung mit (3) giebt:

$$f = r\left(1 - \frac{1}{180}e^4 - \frac{17}{7560}r^6\right) \tag{5}$$

Die Ausrechnung hiernach giebt:

$$f = 6\,370\,291{,}091^m - 1{,}577^m - 0{,}004^m = 6\,370\,289{,}510^m \tag{6}$$

Dieses stimmt genügend mit dem früher auf zwei anderen Wegen berechneten Werte (16) § 37. S. 225.

Als dritter Mittelwert bietet sich der Halbmesser k derjenigen Kugel, welche mit dem Erd-Ellipsoid gleichen körperlichen Inhalt hat.

Der Inhalt des Umdrehungs-Ellipsoids wird bekanntlich dadurch gefunden, dass man eine Kugel mit dem Äquator-Halbmesser a, also mit dem Inhalt $\frac{4}{3}\pi a^3$, in der Richtung der Umdrehungsaxe im Verhältnis $b : a$ zusammengedrückt denkt, d. h. es ist:

$$\text{Körperinhalt des Erd-Ellipsoids} = \frac{b}{a}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Wenn eine Kugel vom Halbmesser k denselben Inhalt haben soll, so muss sein:

$$k^3 = a^2 b \quad \text{oder} \quad k = \sqrt[3]{a^2 b} = a\sqrt[6]{1 - e^2} \tag{7}$$

Dieses kann man entwickeln:

$$k = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{5}{72}e^4 - \frac{55}{1296}e^6\right) \tag{8}$$

Nimmt man wieder das arithmetische Mittel r der 3 Halbaxen nach (3) zur Vergleichung, und entwickelt, so erhält man:

$$k = r\left(1 - \frac{1}{36}e^4 - \frac{17}{648}e^6\right) \tag{9}$$

Die Ausrechnung giebt:

$$k = 6\,370\,291{,}091^m - 7{,}8828^m - 0{,}0497^m = 6\,370\,283{,}158^m \tag{10}$$

Dieses ist auch in Übereinstimmung mit einer unmittelbaren Ausrechnung nach (7).

Zur Übersicht stellen wir nochmals die drei gefundenen Werte zusammen:

1) Arithmetisches Mittel $\frac{a + a + b}{3} = r = 6\,370\,291{,}091^m$

2) Halbmesser für gleiche Oberfläche $f = 6\,370\,289{,}510^m$

3) Halbmesser für gleichen Inhalt $\sqrt[3]{a^2 b} = \quad k = 6\,370\,283{,}158^m$

Wie man sieht, sind diese Werte nahezu gleich, und für viele Zwecke auch gleich geeignet.

Für alle Krümmungs-Halbmesser der ganzen Erde hat Dienger in der Schrift „Abbildung krummer Oberflächen, Braunschweig 1858“, S. 41 den Satz gefunden, dass das arithmetische Mittel aller Krümmungs-Halbmesser gleich der grossen Halbaxe a ist.

Hiebei ist die ganze Erde in Betracht genommen; wenn man dagegen nur einem begrenzten Teile eine Kugel substituieren will, etwa nur der Nachbarschaft eines Punktes in der Breite φ, so handelt es sich um einen Mittelwert der Krümmungs-Halbmesser in allen Azimuten von einem Punkte aus, und dafür haben wir schon in (23) § 32. S. 197 den „mittleren“ Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{MN}$ eingeführt ohne besondere Theorie.

Obgleich ohne Theorie der geodätischen Linie es nicht möglich ist, diese Wahl von r besser zu begründen, soll doch hier auch ein Satz von Grunert angeführt werden (vgl. die Litteraturangaben am Schlusse), dass der mittlere Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{M\,N}$ zugleich das arithmetische Mittel aller Normalschnitts-Krümmungs-Halbmesser R in einem Punkte ist. Dieses wird so bewiesen:

Man hat die Summe aller Werte R nach (1) § 33. S. 199:

$$[R] = \int_0^{2\pi} \frac{M\,N}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha}\, d\,\alpha$$

und die Anzahl derselben ist entsprechend $n = 2\pi$. also der Mittelwert:

$$\frac{[R]}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M\,N}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha}\, d\,\alpha$$

Zur Integration führt man eine neue Veränderliche ein:

$$\sqrt{\frac{M}{N}}\, tang\, \alpha = v, \qquad \text{also} \qquad \sqrt{\frac{M}{N}}\, \frac{d\,\alpha}{\cos^2 \alpha} = d\,v$$

wodurch die Integration sich reduziert auf:

$$\int \frac{d\,v}{1 + v^2}\, arc\; tang\, v$$

Und setzt man noch die Grenzen ein, so findet man:

$$\frac{[R]}{n} = \sqrt{M\,N} = r \tag{11}$$

Ein zweiter Satz von Grunert heisst:

Das arithmetische Mittel der reciproken Krümmungs-Halbmesser aller Normalschnitte in einem beliebigen Punkte eines jeden Ellipsoids ist das arithmetische Mittel zwischen dem reciproken kleinsten und grössten Krümmungs-Halbmesser in diesem Punkte.

Wenn man den Krümmungs-Halbmesser für das Mittelazimut $\alpha = 45°$ von § 33. S. 200 zuzieht, so hat man hiernach, mit $n = 2\pi$ für Integralsummierung:

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{R_{45}}$$

Diese Grunert schen Sätze sind entwickelt in „Grunerts Archiv der Mathematik u. Physik“, 40. Teil 1863, S. 259—354, insbesondere S. 312 und 41. Teil 1864, S. 241—296, insbesondere S. 292.

Hiezu gehört ferner: Helmert, „Die mathem. u. physikal. Theorieen der höheren Geodäsie I.“ Leipzig 1880, S. 63—68. Czuber, „Mittelwerte, die Krümmung ebener Kurven und Krümmungsflächen“ betreffend. Grunert-Hoppes, „Archiv der Math. u. Ph.“ Zweite Reihe. 6. Teil 1888, S. 294—304.

§ 39. Hilfstafeln zu geodätischen Berechnungen mit den Bessel schen Erddimensionen.

Auf die Bessel schen Angaben für die Erddimensionen sind schon zahlreiche Tabellen-Berechnungen gegründet worden, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

Encke. Über die Dimensionen des Erdkörpers nebst Tafeln nach Bessels Bestimmung. Berl. astr. Jahrb. für 1852 S. 318—381 und Separatabdruck: Enckes