Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 39. Hilfstafeln zu geodätischen Berechnungen mit den Besselschen Erddimensionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Obgleich ohne Theorie der geodätischen Linie es nicht möglich ist, diese Wahl von r besser zu begründen, soll doch hier auch ein Satz von Grunert angeführt werden (vgl. die Litteraturangaben am Schlusse), dass der mittlere Krümmungs-Halbmesser $r = \sqrt{M N}$ zugleich das arithmetische Mittel aller Normalschnitts-Krümmungs-Halbmesser R in einem Punkte ist. Dieses wird so bewiesen:

Man hat die Summe aller Werte R nach (1) § 33. S. 199:

$$[R] = \int_0^{2\pi} \frac{M N}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha} d\alpha$$

und die Anzahl derselben ist entsprechend $n = 2\pi$, also der Mittelwert:

$$\frac{[R]}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M N}{M \sin^2 \alpha + N \cos^2 \alpha} d\alpha$$

Zur Integration führt man eine neue Veränderliche ein:

$$\sqrt{\frac{M}{N}} \tan g\, \alpha = v, \quad \text{also} \quad \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = d v$$

wodurch die Integration sich reduziert auf:

$$\int \frac{d v}{1 + v^2} \operatorname{arc} \tan g\, v$$

Und setzt man noch die Grenzen ein, so findet man:

$$\frac{[R]}{n} = \sqrt{M N} = r \tag{11}$$

Ein zweiter Satz von Grunert heisst:

Das arithmetische Mittel der reciproken Krümmungs-Halbmesser aller Normalschnitte in einem beliebigen Punkte eines jeden Ellipsoids ist das arithmetische Mittel zwischen dem reciproken kleinsten und grössten Krümmungs-Halbmesser in diesem Punkte.

Wenn man den Krümmungs-Halbmesser für das Mittelazimut $\alpha = 45°$ von § 33. S. 200 zuzieht, so hat man hiernach, mit $n = 2\pi$ für Integralsummierung:

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{R_{45}}$$

Diese Grunert schen Sätze sind entwickelt in „Grunerts Archiv der Mathematik u. Physik", 40. Teil 1863, S. 259—354, insbesondere S. 312 und 41. Teil 1864, S. 241—296, insbesondere S. 292.

Hiezu gehört ferner: Helmert, „Die mathem. u. physikal. Theorieen der höheren Geodäsie I." Leipzig 1880, S. 63—68. Czuber, „Mittelwerte, die Krümmung ebener Kurven und Krümmungsflächen" betreffend. Grunert-Hoppes, „Archiv der Math. u. Ph." Zweite Reihe. 6. Teil 1888, S. 294—304.

§ 39. Hilfstafeln zu geodätischen Berechnungen mit den Bessel schen Erddimensionen.

Auf die Bessel schen Angaben für die Erddimensionen sind schon zahlreiche Tabellen-Berechnungen gegründet worden, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

Encke. Über die Dimensionen des Erdkörpers nebst Tafeln nach Bessels Bestimmung. Berl. astr. Jahrb. für 1852 S. 318—381 und Separatabdruck: Enckes astr. Abhandlungen 2. Band, Berlin 1866. Diese Encke schen Tafeln geben zuerst die geocentrische Breite und den geocentrischen Halbmesser, dann *log* $(N:a)$, Meridiangrade und Parallelgrade und Grade senkrecht auf dem Meridian, in Toisen. Ausserdem Tafel II, Meridianbogen vom Äquator bis zur Breite φ in Toisen auf 0,001 Toise.

Steinhauser. Neue Berechnung der Dimensionen des Erdsphäroids. Petermann s geogr. Mitteilungen 1858 S. 465—468.

Bremiker. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 6 Dezimalstellen 1881, S. 520 bis 524. Gradabteilungen.

Bremiker. Studien über höhere Geodäsie. Berlin 1869. S. 70—81. Krümmungs-Halbmesser für verschiedene Breiten und Azimute.

Projektion tables for the use of the United States navy, Bureau of navigation. Washington, Government printing office, 1869. Polyconische Projection.

Wagner. Die Dimensionen des Erdsphäroids nach Bessel s Elementen. Geographisches Jahrbuch, herausgegeben von Behm. III. Band. Gotha 1870. S. I—LXI. Gradabteilungen u. s. w.

F. G. Gauss. Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. Berlin 1876 und 2. Aufl. 1893, II. Teil S. 4—25, von $\varphi = 44°$ bis $\varphi = 54°$ Meridianbogen, *log* ***M***, *log* N etc.

Schreiber. Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878. Im Selbstverlage; zu beziehen durch die Königliche Hofbuchhandlung von E. S. Mittler & Sohn, Kochstrasse 69. 70.

Von $\varphi = 47°$ bis $\varphi = 57°$ mit Intervall von 1' geben diese Tafeln 8 stellig *log* (1) ... *log* (8), wobei die (1), (2) ... mit Umsetzung in unsere Bezeichnungen

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi \quad \text{u. s. w.}$$

folgende Bedeutungen haben:

$$(1) = \frac{\varrho}{M}\ ,\quad (2) = \frac{\varrho}{N}\ ,\quad (3) = \frac{V^2}{2\,\varrho}\ ,\quad (4) = \frac{3}{2}\,\frac{\mu}{N}\,\eta^2 t\ ,\quad (5) = \frac{\mu}{3\,r^2}$$

$$(6) = \frac{\mu\,\eta^2}{2\,c^2}(t^2 - 1)\ ,\quad (7) = \frac{\mu\,\eta^2}{6\,\varrho^2}(3 + 2\,t^2)\ ,\quad (8) = \frac{\mu\,\eta^2}{12\,\varrho^2}(13 + 3\,t^2)$$

Dieselben Werte *log* (1) bis *log* (4) 7 stellig sind herausgegeben als Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Aufnahme der Reichs-Schutzgebiete, Berlin 1891, für die Breiten $\varphi = 0°$ bis $\varphi = 13°$.

Entsprechende Tafeln für $\varphi = 47°$ bis $57°$ für zweite Ordnung 7 stellig und für dritte Ordnung 6 stellig.

Albrecht. Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, nebst kurzer Anleitung zur Ausführung derselben, von Prof. Dr. Th. Albrecht, Sektionschef im Königl. Preuss. Geodätischen Institut. 3. Auflage. Berlin 1894. Tafeln über die Gestalt der Erde S. 261—289. (Vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1895“, S. 544—547.)

Helmert. Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie. I. Teil. Leipzig 1880. Anhang S. 621—631 giebt *log* W von $\varphi = 47°\ 0'$

bis 57° 0′ mit Intervall 5′ auf 0·0001, ferner *log W′* 8 stellig auf 0·1 genau, durch den ganzen Quadranten mit $\Delta\,\varphi = 10'$.

Biek-Tillo. Russische Übersetzung von Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 2. Auflage, übersetzt von A. Biek, Oberlehrer der Geodäsie am Messinstitut des Grossfürsten Constantin. Moskau 1881. Buchhändler N. J. Mamontowa. Diese Übersetzung giebt, an Stelle der Tafel S. 424—427 des Originals, ihrerseits auf S. 652—665 eine von dem Obersten des Russischen Generalstabs A. A. Tillo berechnete Tafel der Coëfficienten für die Gauss schen Mittelbreiten-Formeln; insbesondere *log* [1] und *log* [2] für $\varphi = 34°\ 0'$ bis $\varphi = 70°\ 0'$ mit Intervall 10′ auf 0·1 genau. Es ist jedoch hiebei eine andere Längeneinheit als die Besselsche zu Grunde gelegt, denn die russischen *log* [1] und *log* [2] haben gegen unsere mit Bessel schen Erddimensionen berechneten *log* [1] und *log* [2] eine konstante Differenz von 371·6.

Rehm. Mitteilungen des K. K. militär-geographischen Instituts, herausgegeben auf Befehl des K. K. Reichs-Kriegs-Ministeriums. III. Band, 1883. Wien 1883. Im Selbstverlage des K. K. milit.-geogr. Instituts. S. 137—177. Tafeln der Krümmungs-Halbmesser des Bessel schen Erdsphäroids für die Breiten von $\varphi = 40'\ 0'$ bis 51° 30′ mit Intervall 1′ auf 0·0001 (vgl. nachfolgend Hartl).

Schols. Geodetische Formules en Tafels, ten gebruike bij de Triangulatie van het eiland Sumatra. Utrecht, J. van Boekhoven, 1884. Diese Tafeln geben von $\varphi = 0°\ 0'$ bis 6° 0′ die Krümmungs-Halbmesser auf 0·1, nebst weiteren Zahlenwerten.

Hermann Wagners Tafeln der Dimensionen des Erdsphäroids, auf Minuten-Dekaden erweitert von A. Steinhauser, K. K. Regierungsrat. Wien 1885. Eduard Hölzel.

Helmert. Veröffentlichung des Kgl. Preuss. Geodätischen Instituts. Lotabweichungen. Heft 1. Formeln und Tafeln u. s. w. Berlin, Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei. 1886. Tafeln im Anhang S. 6—26; hievon giebt S. 18—24 für $\varphi = 30°$ bis 71° 8 stellige Werte *log* [1] und *log* [2], welche bzw. die dekadischen Ergänzungen unserer *log* [2] und *log* [1] sind.

Hartl. Tafeln enthaltend die Ausmasse der Meridian- und Parallelkreis-Bögen, dann die Logarithmen der Krümmungs-Radien des Bessel schen Erdellipsoids, berechnet unter der Leitung von Oberstlieutenant H. Hartl in der geodätischen Abteilung des K. und K. militär.-geographischen Instituts. Separatabdruck aus den Mitteilungen des K. K. militär-geographischen Instituts. XIV. Band. Wien 1895 (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1896“, S. 28—30).

Im Anhange unseres Buches, Seite [2] und folgende, sind zahlreiche Hilfstafeln mitgeteilt, welche für diesen Zweck von uns neu und unabhängig berechnet, oder wenigstens vor der teilweisen Entlehnung gründlich revidiert worden sind.

Die geodätische Grundfunktion V bzw. *log* V auf Seite [2]—[7] ist mit den Konstanten der Landesaufnahme (§ 31. S. 191) neu und unabhängig berechnet worden nach den am Schlusse Seite [7] angegebenen Formeln, wie in § 34. ausführlich gezeigt ist; die Rechnung ist 12—13 stellig geführt und dann auf 10 Stellen abgerundet.

Die Tafel Seite [8]—[29] ist von 1° zu 1° ebenfalls neu und unabhängig berechnet, bei der Interpolation sind aber an den Stellen 0°—6° und 47°—57° die Tafeln von Schols und Helmert mitbenützt.

Die besondere Tafel für *log* [1] und *log* [2] auf Seite [30]—[35] ist nur von

45°—46° neu berechnet, und von 47°—56° ein revidierter Abdruck aus Schreibers „Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme“.

Die Tafel Seite [36]—[37] für die Längen- und Breitengrade und für die Grad-Abteilungsflächen ist zunächst nach Bremiker und Wagner angesetzt, dann aber eingehend nachgerechnet; die hiebei von uns gefundenen wenigen Fehler sind in dem geographischen Jahrbuch von Behm, VI. Band, 1876, S. 703 mitgeteilt.

Die Meridianbogen-Tafel Seite [38] ist von 44°—56° ein Auszug aus der grösseren Tafel von F. G. Gauss. Der Teil 40°—44° ist dazu berechnet.

Die Trapez-Tafel Seite [42] ist nach den betreffenden Formeln von § 35.—37. berechnet und soweit möglich mit vorhandenen verglichen.

Über die nach diesem folgenden Tafeln Seite [43] und folgende wird an den zugehörigen Stellen des Textes Auskunft gegeben.

Übersicht der Haupt-Bezeichnungen in den Hilfstafeln des Anhangs.

φ = Geographische Breite

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \quad , \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi$$

$M = \dfrac{a(1-e^2)}{W^3}$ oder $= \dfrac{c}{V^3}$ Meridian-Krümmungs-Halbmesser

$N = \dfrac{a}{W}$ oder $= \dfrac{c}{V}$ Querkrümmungs-Halbmesser , $\dfrac{N}{M} = V^2$

$r = \sqrt{MN} = \dfrac{c}{V^2}$ mittlerer Krümmungs-Halbmesser

$[1] = \dfrac{\varrho''}{M}$ Meridian-Krümmungs-Coëfficient

$[2] = \dfrac{\varrho''}{N}$ Querkrümmungs-Coëfficient

Kapitel IV.

Sphärische Dreiecksberechnung.

§ 40. Der sphärische Excess.

Bei der sphärischen Dreiecksberechnung nimmt man den Kugelhalbmesser nach der schon in (23) § 32. S. 197 und nochmals am Schlusse des § 38. S. 226 angegebenen Erklärung an, nämlich:

$$r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2} \tag{1}$$

Damit werden zuerst die sphärischen Excesse der Dreiecke berechnet.

Die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ist stets grösser als 180°; der Überschuss der Winkelsumme über 180° heisst der sphärische Excess.