Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 40. Der sphärische Excess

45°—46° neu berechnet, und von 47°—56° ein revidierter Abdruck aus Schreibers „Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme".

Die Tafel Seite [36]—[37] für die Längen- und Breitengrade und für die Grad-Abteilungsflächen ist zunächst nach Bremiker und Wagner angesetzt, dann aber eingehend nachgerechnet; die hiebei von uns gefundenen wenigen Fehler sind in dem geographischen Jahrbuch von Behm, VI. Band, 1876, S. 703 mitgeteilt.

Die Meridianbogen-Tafel Seite [38] ist von 44°—56° ein Auszug aus der grösseren Tafel von F. G. Gauss. Der Teil 40°—44° ist dazu berechnet.

Die Trapez-Tafel Seite [42] ist nach den betreffenden Formeln von § 35.—37. berechnet und soweit möglich mit vorhandenen verglichen.

Über die nach diesem folgenden Tafeln Seite [43] und folgende wird an den zugehörigen Stellen des Textes Auskunft gegeben.

Übersicht der Haupt-Bezeichnungen in den Hilfstafeln des Anhangs.

φ = Geographische Breite

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 + \eta^2} \quad , \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi$$

$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$ oder $= \frac{c}{V^3}$ Meridian-Krümmungs-Halbmesser

$N = \frac{a}{W}$ oder $= \frac{c}{V}$ Querkrümmungs-Halbmesser , $\frac{N}{M} = V^2$

$r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2}$ mittlerer Krümmungs-Halbmesser

$[1] = \frac{\varrho''}{M}$ Meridian-Krümmungs-Coëfficient

$[2] = \frac{\varrho''}{N}$ Querkrümmungs-Coëfficient

Kapitel IV.

Sphärische Dreiecksberechnung.

§ 40. Der sphärische Excess.

Bei der sphärischen Dreiecksberechnung nimmt man den Kugelhalbmesser nach der schon in (23) § 32. S. 197 und nochmals am Schlusse des § 38. S. 226 angegebenen Erklärung an, nämlich:

$$r = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2} \tag{1}$$

Damit werden zuerst die sphärischen Excesse der Dreiecke berechnet.

Die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks ist stets grösser als 180°; der Überschuss der Winkelsumme über 180° heisst der sphärische Excess.

Bezeichnen wir die Winkel mit α, β, γ und den sphärischen Excess mit ε, so haben wir also die Gleichung:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180° \tag{2}$$

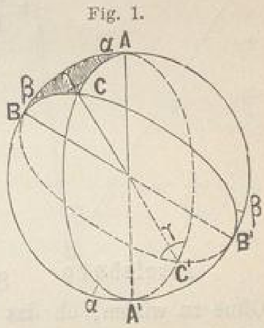
Wenn die drei Winkel α, β, γ gemessen sind, so findet man hiernach auch den Excess ε, jedoch mit den Messungsfehlern der α, β, γ behaftet; es ist deswegen erwünscht, eine unabhängige scharfe Bestimmung von ε zu haben, welche von den kleinen Messungsfehlern der Winkel α, β, γ unabhängig ist, und im Gegenteil dazu dienen soll, diese Winkel α, β, γ in ihrer Summe zu kontrollieren.

Eine solche unabhängige Bestimmung des Excesses ε erhält man durch den Satz, dass der Excess der sphärischen Dreiecksfläche F proportional ist, nämlich:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2}\varrho \tag{2a}$$

Man kann diesen Satz mit Hilfe der sphärischen Zweiecke beweisen, und wegen der Wichtigkeit desselben setzen wir den bekannten elementaren Beweis des Satzes hier her:

Fig. 1.



Unter Zwei-Eck versteht man die Fläche zwischen zwei grössten Kreisen, z. B. in Fig. 1. die Fläche:

$$\text{Zwei-Eck } A\,C\,A'\,B\,A = (\alpha, \alpha)$$

da nun die Gesamt-Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$ ist, so ist die Fläche:

$$\text{Zwei-Eck } (\alpha, \alpha) = \frac{\alpha}{360}(4\pi r^2)$$

Wenden wir dieses auch auf die beiden anderen in dem Dreieck $A\,B\,C$ zusammenstossenden Zwei-Ecke an, so haben wir:

$$\text{Zwei-Eck } (\beta, \beta) = \frac{\beta}{360}(4\pi r^2)$$

$$\text{Zwei-Eck } (\gamma, \gamma) = \frac{\gamma}{360}(4\pi r^2)$$

folglich die Summe:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360} 4\pi r^2 \tag{a}$$

Indem man nun die Fläche F des sphärischen Dreiecks $A\,B\,C$ einführt, hat man nach dem Anblick von Fig. 1. (noch anschaulicher durch Aufzeichnung auf einem Kugel-Modell):

$$\begin{aligned}(\alpha, \alpha) &= F + A'\,B\,C\\(\beta, \beta) &= F + B'\,A\,C\\(\gamma, \gamma) &= F + C'\,A\,B\end{aligned}$$

$$\overline{(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 3F + A'\,B\,C + B'\,A\,C + C'\,A\,B}$$

Nun ist aber das auf der jenseitigen Kugelfläche von Fig. 1. liegende Dreieck $C'\,A\,B$ flächengleich mit seinem diesseits liegenden Scheiteldreieck $C\,A'\,B'$; man hat also, indem man zugleich $3F = 2F + F$ schreibt:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 2F + F + A'\,B\,C + B'\,A\,C + C\,A'\,B'$$

Die 4 letzten Glieder dieser Gleichung geben zusammen die halbe Kugelfläche $= 2\pi r^2$, also:

$$(\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) = 2F + 2\pi r^2 \tag{b}$$

Nun geben die Gleichungen (a) und (b) zusammen:

$$F = (\alpha + \beta + \gamma - 180°)\frac{\pi}{180°} r^2 \tag{c}$$

Wenn man also die Bezeichnung ε nach (1) anwendet, und wenn man zugleich $\frac{180°}{\pi} = \varrho$ schreibt, so findet man aus (c) dieselbe Gleichung wie (2), nämlich, was zu beweisen war:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180° = \varepsilon = \frac{F}{r^2}\varrho \tag{d}$$

Unter F ist streng genommen die krumme (kugelförmige) Oberfläche des Dreiecks zu verstehen, indessen kann man statt dessen mit genügender Annäherung auch die Fläche $\triangle$ eines ebenen Dreiecks benützen, das aus den Seiten des sphärischen Dreiecks berechnet wird, d. h. man hat:

$$\text{Näherung } \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}\,\varrho \qquad (3)$$

(Dasselbe findet man auch durch genäherte Anwendung der sphärisch-trigonometrischen Formel für $tang\ \frac{\varepsilon}{2}$, welche in § 27. S. 166 citiert wurde.)

Fig. 2.
(Massstab 1 : 2 000 000.)

Zu einem Zahlenbeispiele wollen wir das hannover sche Dreieck benützen, welches in den klassischen Abhandlungen von Gauss mehrfach als Beispiel dient, nämlich das in Fig. 2. dargestellte Dreieck:

Inselsberg—Hohehagen—Brocken.

Es sei gegeben:

die Seite Inselsberg—Brocken $b = 105\,972{,}85^{\text{m}}$ (4)

ferner die Dreieckswinkel, genähert, und die geographischen Breiten φ der Eckpunkte, ebenfalls genähert:

Punkt	Dreiecks-Winkel		Geogr. Breite
Inselsberg .	$\alpha = 40°\ 39'\ 30''$	$(25'')$	$50°\ 51'\ 9''$
Hohehagen	$\beta = 86\ \ 13\ \ 59$	$(54'')$	$51\ \ 28\ \ 31$
Brocken . .	$\gamma = 53\ \ \ 6\ \ 46$	$(41'')$	$51\ \ 48\ \ \ 2$
Summe	$180°\ \ 0'\ 15''$	$(0'')$	$\varphi = 51°\ 22'\ 34''$ Mittel (5)

Die auf 1″ angegebenen Dreieckswinkel geben die Summe 180° 0′ 15″, d. h. einen Überschuss von 15″ über 180°. Ohne zu wissen, ob das der sphärische Excess ist, oder von Messungs-Fehlern herrührt, verteilen wir, um wenigstens vorläufig eine in sich übereinstimmende ebene Dreiecks-Berechnung zu haben, diese 15″ auf die drei Winkel und erhalten dadurch die oben bei (5) in Klammern beigesetzten Sekundenwerte (25″), (54″), (41″) für die drei Winkel.

Mit diesen Winkeln und der schon bei (4) angegebenen Basisseite b macht man eine genäherte vorläufige Dreiecks-Berechnung nach dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie:

$$a = \frac{b}{\sin\beta}\sin\alpha \quad , \quad c = \frac{b}{\sin\beta}\sin\gamma$$

Dabei rechnet man nur etwa mit 5- oder 6-stelligen Logarithmen:

$\log b$	5.025 195
$Erg. \log\sin\beta$	0.000 940
$\log\sin\alpha$	9.813 933
$\log a$	4.840 068

$\log b$	5.025 195
$Erg. \log\sin\beta$	0.000 940
$\log\sin\gamma$	9.902 983
$\log c$	4.929 118

Man hat also nun zusammen:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = 40°\ 39'\ 25'' & \log a = 4.840\ 068 \\ \beta = 86°\ 13'\ 54'' & \log b = 5.025\ 195 \\ \gamma = 53°\ \ 6'\ 41'' & \log c = 4.929\ 118 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Damit kann man die Dreiecksfläche dreifach berechnen, denn es ist bekanntlich:

$$\text{Dreiecksfläche } \triangle = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma = \frac{1}{2}\, a\, c \sin\beta = \frac{1}{2}\, b\, c \sin\alpha$$

$\log a$	4.840 068	oder	$\log a$	4.840 068
$\log b$	5.025 195		$\log c$	4.929 118
$\log \sin\gamma$	9.902 983 — 10		$\log \sin\beta$	9.999 060 — 10
$\log 0{,}5$	9.698 970 — 10		$\log 0{,}5$	9.698 970 — 10
$\log \triangle$	9.467 216		$\log \triangle$	9.467 216 (7)

Nach diesem braucht man den mittleren Krümmungs-Halbmesser für die Mittelbreite des Dreiecks. Diese Mittelbreite wurde schon unter (5) angegeben $\varphi = 51^\circ\, 22'\, 34''$, und damit entnimmt man aus der Tafel Seite [20] des Anhangs durch Interpolation den Wert $\log r$ oder auch sofort:

$\log \frac{1}{r^2}$	6.390 076 — 20	
hiezu $\log \varrho$	5.314 425	
und von (7) $\log \triangle$	9.467 216	
$\log \varepsilon$	1.171 717	$\varepsilon = 14{,}850''$ (8)

Damit sind die oben unter (5) gegebenen Winkel, insofern sie nur auf 1″ genau angesetzt sind, in ihrer Summe bestätigt. Die genaueren Winkel und die genauere Berechnung der Dreiecksseiten werden wir in § 41.—§ 42. kennen lernen.

Zu der einfachen Excess-Berechnung, welche im vorstehenden Beispiele in aller Ausführlichkeit gegeben ist, kann man noch einige Bemerkungen machen. Für ein Dreieck mit den Seiten a, b und dem eingeschlossenen Winkel γ ist der Excess:

$$\varepsilon = \frac{\varrho}{2\, r^2}\, a\, b \sin\gamma \tag{9}$$

und deswegen schreibt man für häufigeren Gebrauch die Logarithmen von $\frac{\varrho}{2\, r^2}$ tabellarisch heraus; zur Übersicht stellen wir zusammen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = 45^\circ \quad \log \frac{\varrho}{2\, r^2} &= 1.40411 - 10 \\ 50^\circ \quad \log \frac{\varrho}{2\, r^2} &= 1.40361 - 10 \\ 55^\circ \quad \log \frac{\varrho}{2\, r^2} &= 1.40312 - 10 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Zur weiteren Übersicht der Verhältnisse kann man auch berechnen:

Fläche des Dreiecks	Sphärischer Excess
1 Quadrat-Kilometer	$\varepsilon = 0{,}00507''$
1 Quadrat-Meile	$\varepsilon = 0{,}279$
gleichseitiges Dreieck mit Seiten von $1^\circ = 15$ geogr. Meilen $= 111^{km}$	$\varepsilon = 27''$

Die letzte Annahme eines Dreiecks von 111^{km} Seite ist wohl das äusserste für Landes-Vermessungen; schon das Gauss sche Dreieck Inselsberg-Hohehagen-Brocken, das wir bei (8) als Beispiel benützten, mit rund $\varepsilon = 15''$, ist eines der grössten deutschen Dreiecke, das wir deswegen auch schon in der Zusammenstellung Seite 22 erwähnt haben.

Die grössten Dreiecke, welche die Geodäsie kennt, nämlich die auf Seite 23 dargestellten Verbindungsdreiecke zwischen Spanien und Algier über das mittelländische Meer hinweg, haben geodätische Excesse von bzw. rund: $54''$, $1'\ 11''$, $44''$, $1'\ 0''$.

Bei so grossen Dreiecken darf man aber nicht mehr bloss sphärisch rechnen; wir werden in einem späteren Kapitel darauf zurückkommen.

§ 41. Der Legendre sche Satz.

Wir betrachten ein geodätisches Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ, wie in Fig. 1. dargestellt ist.

Fig. 1.
Sphärisches Dreieck.

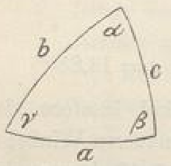
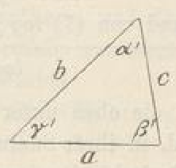


Fig. 2.
Ebenes Dreieck.



Wenn das sphärische Dreieck auf einer Kugel vom Halbmesser r liegt, so entsprechen den Seiten a b c gewisse Erd-Centriwinkel, wie aus folgender Übersicht zu ersehen ist:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Seiten-Längen (in Metermass)} \;\ldots\ldots & a, & b, & c \\ \text{Erd-Centriwinkel in analytischem Mass} \;\ldots & \dfrac{a}{r}, & \dfrac{b}{r}, & \dfrac{c}{r} \\ \text{„ \quad „ \quad „ geometrischem Mass} \;. & \dfrac{a}{r}\varrho, & \dfrac{b}{r}\varrho, & \dfrac{c}{r}\varrho \end{array}\right\} \quad (1)$$

Man könnte nun mit diesen Erd-Centriwinkeln und den Winkeln α, β, γ, welche die Bögen a, b, c auf der Kugelfläche unter sich bilden, das sphärische Dreieck nach den bekannten strengen Formeln der sphärischen Trigonometrie auflösen; man thut das aber für geodätische Zwecke nicht, weil die Erd-Centriwinkel sehr klein sind, und deswegen sich viel bequemer in Reihen-Entwicklungen und Näherungs-Formeln behandeln lassen.

Die älteste und beliebteste dieser Verfahrungsarten ist der von Legendre in Paris im Jahre 1787 gefundene und nach ihm benannte Satz, welcher heisst:

> Ein kleines sphärisches Dreieck kann näherungsweise wie ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten berechnet werden, wenn man als Winkel des ebenen Dreiecks die um je ein Drittel des sphärischen Excesses verminderten Winkel des sphärischen Dreiecks nimmt.

Diesem Satze entspricht das oben in Fig. 2. gezeichnete ebene Dreieck, das dieselben Seiten a, b, c wie das sphärische Dreieck Fig. 1. hat, und dessen Winkel α', β', γ' zunächst noch unbestimmt gelassen sind.