Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 41. Der Legendresche Satz

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

deutschen Dreiecke, das wir deswegen auch schon in der Zusammenstellung Seite 22 erwähnt haben.

Die grössten Dreiecke, welche die Geodäsie kennt, nämlich die auf Seite 23 dargestellten Verbindungsdreiecke zwischen Spanien und Algier über das mittelländische Meer hinweg, haben geodätische Excesse von bzw. rund: 54″ , 1′ 11″ , 44″ , 1′ 0″.

Bei so grossen Dreiecken darf man aber nicht mehr bloss sphärisch rechnen; wir werden in einem späteren Kapitel darauf zurückkommen.

§ 41. Der Legendre sche Satz.

Wir betrachten ein geodätisches Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ, wie in Fig. 1. dargestellt ist.

Fig. 1.
Sphärisches Dreieck.

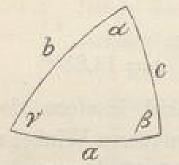
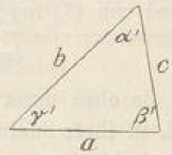


Fig. 2.
Ebenes Dreieck.



Wenn das sphärische Dreieck auf einer Kugel vom Halbmesser r liegt, so entsprechen den Seiten $a\ b\ c$ gewisse Erd-Centriwinkel, wie aus folgender Übersicht zu ersehen ist:

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{Seiten-Längen (in Metermass)} \;\ldots\ldots & a, & b, & c \\
\text{Erd-Centriwinkel in analytischem Mass} \;\ldots & \dfrac{a}{r}, & \dfrac{b}{r}, & \dfrac{c}{r} \\
\text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃 geometrischem Mass} \;. & \dfrac{a}{r}\varrho, & \dfrac{b}{r}\varrho, & \dfrac{c}{r}\varrho
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Man könnte nun mit diesen Erd-Centriwinkeln und den Winkeln α, β, γ, welche die Bögen a, b, c auf der Kugelfläche unter sich bilden, das sphärische Dreieck nach den bekannten strengen Formeln der sphärischen Trigonometrie auflösen; man thut das aber für geodätische Zwecke nicht, weil die Erd-Centriwinkel sehr klein sind, und deswegen sich viel bequemer in Reihen-Entwicklungen und Näherungs-Formeln behandeln lassen.

Die älteste und beliebteste dieser Verfahrungsarten ist der von Legendre in Paris im Jahre 1787 gefundene und nach ihm benannte Satz, welcher heisst:

> Ein kleines sphärisches Dreieck kann näherungsweise wie ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten berechnet werden, wenn man als Winkel des ebenen Dreiecks die um je ein Drittel des sphärischen Excesses verminderten Winkel des sphärischen Dreiecks nimmt.

Diesem Satze entspricht das oben in Fig. 2. gezeichnete ebene Dreieck, das dieselben Seiten a, b, c wie das sphärische Dreieck Fig. 1. hat, und dessen Winkel α', β', γ' zunächst noch unbestimmt gelassen sind.

Um den genannten Satz zu beweisen, schreiben wir für das sphärische Dreieck die Cosinus-Gleichung an:

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha$$

$$\text{oder}\quad \cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

Nun werden alle kleinen Winkel nach Potenzen entwickelt (vgl. die Reihen-Formeln für $\sin x$ und $\cos x$ § 28. S. 172), nämlich bis zur 4. Potenz einschliesslich:

$$\cos\alpha = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)}$$

Wenn man die hier vorkommenden Klammern ausmultipliziert, dabei immer die Glieder von höherer als der 4. Ordnung vernachlässigt, so hat man:

$$\left(1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\right) = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4} - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{b^2c^2}{4r^4} + \frac{c^4}{24r^4}$$

$$= 1 - \frac{b^2+c^2}{2r^2} + \frac{b^4+c^4}{24r^4} + \frac{b^2c^2}{4r^4}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)}$$

Der Nenner $\left(1 - \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$ wird hinreichend genähert dadurch berücksichtigt, dass man statt dessen in dem Zähler einen Faktor $\left(1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$ zusetzt, und wenn man zugleich überall einen Faktor r^2 als gemeinsam weglässt, hat man:

$$\cos\alpha = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc}\right)\left(1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$$

die beiden Klammern multipliziert, mit Weglassung alles dessen, was über r^2 geht, führen auf die Gleichung:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\,\frac{b^2+c^2}{6r^2} \qquad (2)$$

Nun giebt das ebene Dreieck Fig. 2. nach dem Cosinus-Satz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha' \quad \text{oder} \quad \cos\alpha' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad (3)$$

Dieses mit (2) zusammen giebt:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' + \frac{a^4-b^4-c^4-6b^2c^2}{24r^2bc} + \frac{b^4+c^4+2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}{12r^2bc}$$

Die beiden Teile zusammen gefasst geben:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24r^2bc} \qquad (4)$$

Wir lassen diese Gleichung zunächst stehen und betrachten den Zähler des Bruches; dieser Zähler steht in naher Verwandtschaft zu dem Inhalte $\triangle$ des ebenen Dreiecks. Es ist bekanntlich nach dem Heron schen Satze:

$$\triangle = \sqrt{\frac{s}{2}\,\frac{(s-a)}{2}\,\frac{(s-b)}{2}\,\frac{(s-c)}{2}}$$

wobei $s = a + b + c$, $s - a = -a + b + c$ u. s. w. folglich:

$$\triangle^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

Hiebei ist: $(a+b+c)(-a+b+c) = -a^2+b^2+c^2+2bc$

und $(a-b+c)(+a+b-c) = a^2-b^2-c^2+2bc$

Folglich: $16\triangle^2 = (-a^2+b^2+c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2+2bc)$

und indem man auch diese zwei Klammern ausmultipliziert und ordnet, (wobei alles mit ungeraden Potenzen sich hebt) so findet man:

$$16\triangle^2 = -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 \tag{5}$$

Man hat also aus (4) und (5):

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -\frac{16\triangle^2}{24\,r^2\,b\,c} \tag{6}$$

Nun ist aber in erster Näherung:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -(\alpha-\alpha')\sin\alpha' + \ldots \tag{7}$$

was man entweder geradezu als Differential-Formel nach § 29. S. 179 einsehen, oder etwa auch goniometrisch so begründen kann:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -2\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}$$

d. h. wenn α und α' sehr nahe gleich sind:

$$\cos\alpha - \cos\alpha' = -(\alpha-\alpha')\sin\alpha' \tag{7a}$$

Setzt man dieses (7) bzw. (7a) in (6), so erhält man:

$$\alpha - \alpha' = \frac{2}{3}\,\frac{\triangle^2}{r^2\,b\,c\sin\alpha'} \tag{8}$$

Es ist aber auch andererseits im ebenen Dreieck:

$$b\,c\sin\alpha' = 2\triangle \tag{9}$$

und damit wird (8): $\alpha - \alpha' = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\triangle}{r^2}$ bzw. $\alpha - \alpha' = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\triangle}{r^2}\,\varrho$ (10)

Die erste hier in (10) geschriebene Form gilt für analytisches Mass, die zweite für geometrisches Mass.

Oder wenn man nach (3) § 40. S. 232 den sphärischen Excess ε einführt, so hat man:

$$\alpha - \alpha' = \frac{1}{3}\,\varepsilon \tag{11a}$$

und entsprechend:

$$\beta - \beta' - \frac{1}{3}\,\varepsilon \tag{11b}$$

$$\gamma - \gamma' = \frac{1}{3}\,\varepsilon \tag{11c}$$

Summe: $\alpha + \beta + \gamma - 180° = \varepsilon$ (12)

Damit ist der oben S. 234 in Worten ausgesprochene Satz bewiesen.

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir wieder das klassische Dreieck, das wir schon im vorigen § 40. S. 232 benützt haben, nämlich nun mit scharfen Winkel-Werten:

	sphärisch	eben (Leg.-Satz.)	
Inselsberg	$\alpha = 40° \, 39' \, 30{,}380''$	$\alpha' = 40° \, 39' \, 25{,}430''$	
Hohehagen	$\beta = 86 \;\; 13 \;\; 58{,}840$	$\beta' = 86 \;\; 13 \;\; 53{,}890$	(13)
Brocken	$\gamma = 53 \;\; 6 \;\; 45{,}630$	$\gamma' = 53 \;\; 6 \;\; 40{,}680$	
Summe:	$180° \; 0' \, 14{,}850''$	$180° \; 0' \; 0{,}000''$	

$$\varepsilon = 14{,}850''$$

$$\frac{\varepsilon}{3} = 4{,}950''$$

Die eine gegebene Seite sei $b = 105\,972{,}850^{m}$. (14)

Damit macht man eine Berechnung, wie wenn das Dreieck eben wäre, nach dem Sinus-Satze der ebenen Trigonometrie scharf mit 7—8stelligen Logarithmen, weshalb wir die ganze Rechnung hersetzen wollen:

$\log b$	5.025 1946·1	oder	$\log b$	5.025 1946·1
$\log \sin \beta'$	9.999 0600·0		$Erg. \log \sin \beta'$	0.000 9400·0
$\log (b : \sin \beta')$	5.026 1346·1		$\log (b : \sin \beta')$	5.026 1346·1
$\log \sin \alpha'$	9.813 9344·8		$\log \sin \gamma'$	9.902 9830·6
$\log a$	4.840 0690·9		$\log c$	4.929 1176·7

$a = 69194{,}105^{m}$ $\qquad$ $c = 84941{,}060^{m}$ (15)

Bemerkung über die Schärfe der Rechnung.

Das vorstehende Beispiel ist mit 3 Dezimalen der Sekunde, d. h. auf 0,001″ genau gerechnet. Es geschieht dieses häufig, wenn auch die Messungen selbst viel weniger sicher sind. Hiebei soll die letzte Dezimale keine selbständige Bedeutung haben, sondern nur die vorletzte Dezimale vor Abrundungs-Fehlern schützen. Es ist keine Frage, dass oft mit solchen 0,001″ Überfluss an Ziffern geschrieben und gedruckt wird, aber bei langen Ausgleichungs-Rechnungen kann man genötigt sein, von vorn herein auf 0,001″ genau und vielleicht noch schärfer zu rechnen, wenn man am Schlusse 0,01″ noch sicher haben will, bei kürzeren trigonometrischen Berechnungen genügt 0,01″ als letzte Rechenstelle.

Entsprechende Genauigkeit ist bei der logarithmischen Rechnung anzuwenden. Unsere Zahlen-Beispiele sind meist 8stellig, d. h. mit 0.000 0000·1 als letzter logarithmischer Rechenstelle geführt; die letzte Stelle 0·1 ist teils mit Hilfe des 10stelligen „Thesaurus logarithmorum", teils auch nur durch Benützung der Abrundungs-Merkmale in der Schrön schen 7stelligen Logarithmen-Tafel erhalten, und dient dann (ebenso wie 0,001″ bei den Winkeln) nur als Sicherung für die vorhergehende 7. Stelle.

§ 42. Die Additamenten-Methode.

Ein zweites Näherungs-Verfahren zur Berechnung sphärischer Dreiecke, deren Seiten im Vergleich zu dem Kugel-Halbmesser klein sind, ist am Anfang dieses Jahrhunderts zuerst in Bayern eingeführt, und dann auch bei den übrigen süddeutschen Landes-Vermessungen allgemein angewendet worden. Das Verfahren wurde mit dem Namen „Additamenten-Methode" bezeichnet, weil kleine Korrektions-Grössen häufig zu den Logarithmen addiert (allerdings umgekehrt auch subtrahiert) werden.

Während beim Legendre schen Satz ein ebenes Hilfsdreieck benützt wurde, dessen Seiten denen des sphärischen Dreiecks gleich sind, und dessen Winkel ver-