Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 42. Die Additamenten-Methode

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Zu einem Zahlen-Beispiele nehmen wir wieder das klassische Dreieck, das wir schon im vorigen § 40. S. 232 benützt haben, nämlich nun mit scharfen Winkel-Werten:

	sphärisch	eben (Leg.-Satz.)	
Inselsberg	$\alpha = 40° \, 39' \, 30{,}380''$	$\alpha' = 40° \, 39' \, 25{,}430''$	
Hohehagen	$\beta = 86 \;\; 13 \;\; 58{,}840$	$\beta' = 86 \;\; 13 \;\; 53{,}890$	(13)
Brocken	$\gamma = 53 \;\; 6 \;\; 45{,}630$	$\gamma' = 53 \;\; 6 \;\; 40{,}680$	
Summe:	$180° \; 0' \, 14{,}850''$	$180° \; 0' \; 0{,}000''$	

$$\varepsilon = 14{,}850''$$

$$\frac{\varepsilon}{3} = 4{,}950''$$

Die eine gegebene Seite sei $b = 105\,972{,}850^m$. (14)

Damit macht man eine Berechnung, wie wenn das Dreieck eben wäre, nach dem Sinus-Satze der ebenen Trigonometrie scharf mit 7—8stelligen Logarithmen, weshalb wir die ganze Rechnung hersetzen wollen:

$\log b$	5.025 1946·1	oder	$\log b$	5.025 1946·1
$\log \sin \beta'$	9.999 0600·0		$Erg. \log \sin \beta'$	0.000 9400·0
$\log (b : \sin \beta')$	5.026 1346·1		$\log (b : \sin \beta')$	5.026 1346·1
$\log \sin \alpha'$	9.813 9344·8		$\log \sin \gamma'$	9.902 9830·6
$\log a$	4.840 0690·9		$\log c$	4.929 1176·7

$a = 69194{,}105^m$ $\qquad c = 84941{,}060^m$ (15)

Bemerkung über die Schärfe der Rechnung.

Das vorstehende Beispiel ist mit 3 Dezimalen der Sekunde, d. h. auf 0,001″ genau gerechnet. Es geschieht dieses häufig, wenn auch die Messungen selbst viel weniger sicher sind. Hiebei soll die letzte Dezimale keine selbständige Bedeutung haben, sondern nur die vorletzte Dezimale vor Abrundungs-Fehlern schützen. Es ist keine Frage, dass oft mit solchen 0,001″ Überfluss an Ziffern geschrieben und gedruckt wird, aber bei langen Ausgleichungs-Rechnungen kann man genötigt sein, von vorn herein auf 0,001″ genau und vielleicht noch schärfer zu rechnen, wenn man am Schlusse 0,01″ noch sicher haben will, bei kürzeren trigonometrischen Berechnungen genügt 0,01″ als letzte Rechenstelle.

Entsprechende Genauigkeit ist bei der logarithmischen Rechnung anzuwenden. Unsere Zahlen-Beispiele sind meist 8stellig, d. h. mit 0.000 0000·1 als letzter logarithmischer Rechenstelle geführt; die letzte Stelle 0·1 ist teils mit Hilfe des 10stelligen „Thesaurus logarithmorum", teils auch nur durch Benützung der Abrundungs-Merkmale in der Schrön schen 7stelligen Logarithmen-Tafel erhalten, und dient dann (ebenso wie 0,001″ bei den Winkeln) nur als Sicherung für die vorhergehende 7. Stelle.

§ 42. Die Additamenten-Methode.

Ein zweites Näherungs-Verfahren zur Berechnung sphärischer Dreiecke, deren Seiten im Vergleich zu dem Kugel-Halbmesser klein sind, ist am Anfang dieses Jahrhunderts zuerst in Bayern eingeführt, und dann auch bei den übrigen süddeutschen Landes-Vermessungen allgemein angewendet worden. Das Verfahren wurde mit dem Namen „Additamenten-Methode" bezeichnet, weil kleine Korrektions-Grössen häufig zu den Logarithmen addiert (allerdings umgekehrt auch subtrahiert) werden.

Während beim Legendre schen Satz ein ebenes Hilfsdreieck benützt wurde, dessen Seiten denen des sphärischen Dreiecks gleich sind, und dessen Winkel verschieden von den Winkeln des sphärischen Dreiecks angenommen werden mussten gehen wir nun umgekehrt darauf aus, ein ebenes Hilfsdreieck zu suchen, welches zwei Winkel mit dem sphärischen Dreieck gemein, dafür aber andere Seiten hat. Mit Beziehung auf Fig. 1. und Fig. 2. denken wir uns ein sphärisches Dreieck, gegeben mit den Seiten a und b und den Gegenwinkeln α und β, und konstruieren hiezu ein ebenes Hilfsdreieck, welches dieselben Winkel α und β hat wie das sphärische Dreieck, aber damit notwendig andere Seiten a', b' haben muss.

Fig. 1.
Sphärisch.

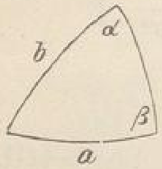
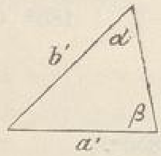


Fig. 2.
Eben.



Nach dem Sinus-Satze für das sphärische Dreieck und nach dem Sinus-Satze für das ebene Dreieck haben wir die zwei Gleichungen:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\dfrac{a}{r}}{\sin\dfrac{b}{r}} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a'}{b'} \tag{1}$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin\dfrac{a}{r}}{\sin\dfrac{b}{r}} = \frac{\dfrac{a}{r} - \dfrac{a^3}{6\,r^3} + \dots}{b - \dfrac{b^3}{6\,r^3} + \dots} \tag{2}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a - \dfrac{a^3}{6\,r^2} + \dots}{b - \dfrac{b^3}{6\,r^2} + \dots} \tag{3}$$

Diese Gleichung ist befriedigt, wenn man setzt:

$$a' = a - \frac{a^3}{6\,r^2} \quad \text{und} \quad b' = b - \frac{b^3}{6\,r^2}$$

oder allgemein für irgend eine Dreiecks-Seite s hat man:

$$s' = s - \frac{s^3}{6\,r^2} \tag{4}$$

Der so bestimmte Wert $\frac{s^3}{6\,r^2}$ ist das lineare Additament für die Seite s, und wenn man den Halbmesser r kennt, kann man eine Tafel der Werte $\frac{s^3}{6\,r^2}$ berechnen, z. B. für die Mittelbreite $\varphi = 50°$ hat man:

$$\log r = 6.804\,894 \qquad \log\frac{1}{6\,r^2} = 5.612\,062$$

Damit ist zur Übersicht folgendes berechnet:

s =	10 000ᵐ	20 000ᵐ	30 000ᵐ	40 000ᵐ	50 000ᵐ	60 000ᵐ	80 000ᵐ	100 000ᵐ	(5)
$\frac{s^3}{6\,r^2}$ =	0,004ᵐ	0,033ᵐ	0,111ᵐ	0,262ᵐ	0,512ᵐ	0,884ᵐ	2,096ᵐ	4,093ᵐ	

Wenn also z. B. eine Dreiecksseite $s = 40\,000^m$ vorliegt, so wird das zugehörige $s' = 40\,000 - 0{,}262 = 39\,999{,}738^m$, und darauf könnte man eine Dreiecks-Berechnung mit sphärischen Winkeln gründen, welche nun ganz die Form einer ebenen Rechnung hat.

Indessen thut man dieses in dieser Form gewöhnlich nicht geradezu, sondern da man doch logarithmisch rechnet, bringt man auch die Additamente in logarithmische Form, und dazu gehen wir nochmals auf (1) und (3) zurück und finden als allgemeine Beziehung zwischen einer Dreiecks-Seite s und der reduzierten Seite s' folgendes:

$$s' = r \sin \frac{s}{r}, \text{ oder } \frac{s'}{r} = \sin \frac{s}{r} \tag{6}$$

also logarithmisch:

$$\log \frac{s'}{r} = \log \sin \frac{s}{r} = \log \left(\frac{s}{r} - \frac{s^3}{6\,r^3} + \frac{s^5}{120\,r^5} - \ldots \right) \tag{7}$$

Dabei haben wir noch die 5. Ordnung in der Reihe beibehalten, um nachher beurteilen zu können, ob das Glied 5. Ordnung noch von Einfluss ist.

Entwickelt man den letzten Ausdruck nach der logarithmischen Reihe, so erhält man:

$$\log \sin \frac{s}{r} = \log \frac{s}{r} + \log \left(1 - \frac{s^2}{6\,r^2} + \frac{s^4}{120\,r^4} \right)$$

$$\log \sin \frac{s}{r} = \log \frac{s}{r} + \mu \left(- \frac{s^2}{6\,r^2} + \frac{s^4}{120\,r^4} \right) - \frac{\mu}{2} \left(- \frac{s^2}{6\,r^2} + \ldots \right)^2$$

$$\log \sin \frac{s}{r} = \log \frac{s}{r} - \frac{\mu\,s^2}{6\,r^2} - \frac{\mu}{180} \frac{s^4}{r^4}$$

Oder wenn man wieder s' nach (6) benützt:

$$\log s - \log s' = \frac{\mu\,s^2}{6\,r^2} + \frac{\mu}{180} \frac{s^4}{r^4} \tag{8}$$

Für die Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$ hat man hiefür, nach Seite [20] des Anhangs:

$$\log \frac{\mu}{6\,r^2} = 5.24985 - 20 \qquad \log \frac{\mu}{180\,r^4} = 0.16294 - 40$$

oder für Einheiten der 7. Logarithmen-Dezimale:

$$\log \frac{\mu}{6\,r^2} = 2{\cdot}24985 - 10 \qquad \log \frac{\mu}{180\,r^4} = 7{\cdot}16294 - 30$$

Für $s = 100\,000^m$ oder $\log s = 5.00000$ als Beispiel genommen, giebt dieses:

$$\frac{\mu}{6\,r^2} s^2 = 0.000\,0177{\cdot}8 \qquad \frac{\mu}{180\,r^4} s^4 = 0.000\,0000{\cdot}001$$

Daraus folgt, dass für gewöhnliche Dreiecks-Seiten das zweite Glied der Formel (8) unmerklich ist, und dass man deswegen bei dem ersten Gliede von (8) stehen bleiben kann.

Indem wir das logarithmische Additament mit A bezeichnen, schreiben wir mit Weglassung des zweiten Gliedes, zur Zusammenfassung:

$$A = \log s - \log s'$$

$$\text{oder } A = \log \frac{s}{r} - \log \sin \frac{s}{r} = \frac{\mu}{6\,r^2} s^2 \quad \text{wo } \log \frac{\mu}{6\,r^2} = 2{\cdot}249\,846 - 10 \text{ für } \varphi = 50^\circ \tag{9}$$

Damit ist die Hilfstafel auf Seite [43] des Anhangs berechnet, und zwar in zweifacher Form, I. als Funktion von $\log s$, mit der Annahme $\log r = 6.804\,894$ für $\varphi = 50^\circ$ und II. als Funktion von $\log \frac{s}{r}$.

Die erste Tafel I., d. h. der obere Teil von Seite [43], ist die bequemere für

Dreiecks-Berechnung, weil man geradezu mit *log s* (für *s* in Metern) einzugehen hat, während man im Falle II., d. h. im unteren Teile von Seite [43], zuvor $log \frac{s}{r}$ bilden muss, das man sonst nicht braucht. Die Tafel II. ist aber andererseits allgemeiner brauchbar, weil sie nicht wie I. an eine bestimmte Annahme für den Halbmesser *r* gebunden ist, und weil sie auch noch für anderes Mass als Meter (z. B. Fusse, Toisen, Ruten u. s. w. bei älteren Triangulierungen) anwendbar ist.

Zu einem Zahlen-Beispiel nehmen wir wieder das klassische Dreieck des vorigen § 41. S. 237:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Inselsberg} & \alpha = 40^\circ\ 39'\ 30{,}380'' \\ \text{Hohehagen} & \beta = 86\ \ 13\ \ 58{,}840 \\ \text{Brocken} & \gamma = 53\ \ \ 6\ \ 45{,}630 \\ \hline & \quad 180^\circ\ \ 0'\ 14{,}850'' \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\text{Basis } b = 105\,972{,}850^{m} \qquad log\, b = 5.025\,1946{\cdot}1 \tag{11}$$

Hiezu braucht man das logarithmische Additament, das aus der Hilfstafel I. von Seite [43] des Anhangs für $log\, s = 5.0252$ durch Interpolation $= 199{\cdot}7$ entnommen werden kann. Da jedoch jene Hilfstafel I. Seite [43] für die Mittelbreite $\varphi = 50^\circ$ gilt, während unser Dreieck die Mittelbreite $\varphi = 51^\circ\ 22{,}6'$ hat, mit $log\, r = 6.804962$. und da unsere Dreiecks-Seiten sehr gross sind, so berechnen wir diesesmal das Additament A besonders:

$$\begin{array}{r|l} log\, b^2 & 10.05039 \\ log\,(\mu : 6\, r^2) & 2{\cdot}24971 \\ \hline log\, A_b & 2.30010 \qquad A_b = 199{\cdot}57 \end{array} \tag{12}$$

Dieses ist nur wenig verschieden von dem aus der Tafel entnommenen 199·7.

Nun hat man eine logarithmische Berechnung im wesentlichen wie in der Ebene, nämlich nach (10), (11), (12):

$$\begin{array}{r|l} log\, b & 5.025\,1946{\cdot}1 \\ \text{Logar. Additament} & -199{\cdot}6 \\ \hline log\, b' & 5.025\,1746{\cdot}5 \\ log\, sin\, \beta & 9.999\,0606{\cdot}9 \\ \hline log\,(b' : sin\, \beta) & 5.026\,1139{\cdot}6 \\ log\, sin\, \alpha & 9.813\,9466{\cdot}1 \\ \hline log\, a' & 4.840\,0605{\cdot}7 \\ \text{Logar. Additament} & +85{\cdot}1 \\ \hline log\, a & 4.840\,0690{\cdot}8 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r|l} log\, b' & 5.025\,1746{\cdot}5 \\ Erg.\, log\, sin\, \beta & 0.000\,9393{\cdot}1 \\ \hline & 5.026\,1139{\cdot}6 \\ log\, sin\, \gamma & 9.902\,9908{\cdot}8 \\ \hline log\, b' & 4.929\,1048{\cdot}4 \\ \text{Logar. Add.} & +128{\cdot}2 \\ \hline log\, c & 4.929\,1176{\cdot}6 \end{array} \tag{13}$$

$$a = 69\,194{,}105^{m} \qquad b = 84\,941{,}060^{m} \tag{14}$$

Dieses stimmt hinreichend mit (15) § 41. S. 237.

Die soeben bei (13) gebrauchten Additamente entnimmt man wieder aus der Hilfstafel I. von Seite [43] des Anhangs, oder, wenn man die letzte Stelle ganz scharf haben will, berechnet man dieselben ebenso wie vorher bei (12).

Vergleicht man die Rechnung nach dieser Additamenten-Methode mit der Rechnung nach dem Legendre schen Satze, in Hinsicht auf Bequemlichkeit, Übersichtlichkeit u. dergl., so wird man etwa sagen können:

Der Legendre sche Satz empfiehlt sich bei einem einzelnen Dreieck oder bei seltener Anwendung, durch seine Unabhängigkeit von allen besonderen Hilfen, denn den Excess ε muss man der Winkelprobe wegen bei dem anderen Verfahren doch auch kennen, und der Legendre sche Satz selbst, d. h. die Verteilung $\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ ist immer im Gedächtnis.

Dagegen bei ganzen Dreiecks-Netzen, mit vielen zusammenhängend zu rechnenden Dreiecken, ist die Additamenten-Methode vorteilhafter. Man reduziert zunächst nur den Logarithmus der Basis des Netzes ($log\, b' = log\, b - A_b$), dann rechnet man das ganze Dreiecks-Netz mit den sphärischen Winkeln durch, und erhält dadurch zunächst lauter reduzierte Werte $log\, a'$, $log\, c'$ u. s. w., die man dann aber nachher alle auf einmal mit der Additamenten-Tafel auf $log\, a$, $log\, c$ u. s. w. reduzieren kann.

Ein Vorteil des Additamenten-Verfahrens besteht auch darin, dass man nur eine Tabelle der Dreiecks-Winkel α, β, γ ... führen muss, während für den Legendre schen Satz eine zweite Tabelle der α', β', γ' nötig ist, welche nicht nur die Akten vermehrt, sondern auch Veranlassung zu Irrtümern geben kann, wenn nachher zur Coordinaten-Berechnung u. dergl. wieder die sphärischen Winkel selbst gebraucht werden.

Zusammenhang zwischen dem Legendre schen Satze und der Additamenten-Methode.

Diese beiden Rechnungs-Arten beruhen auf Reihen-Entwicklungen sphärischer Formeln bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, und es muss deshalb möglich sein, beide Rechnungen in ihren Formeln gegenseitig auseinander abzuleiten, was wir nun noch zeigen wollen.

Mit Annahme der bisherigen Bezeichnungen hat man nach dem Legendre schen Satze:

$$\frac{a}{b} = \frac{sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{sin\,\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha}{sin\,\beta - \frac{\varepsilon}{3}\cos\beta} = \frac{sin\,\alpha\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\alpha\right)}{sin\,\beta\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\beta\right)} \tag{15}$$

Nun ist $\varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}$, und wenn man in den Korrektions-Gliedern ebene und sphärische Winkel vertauscht, so hat man:

$$2\,b\,c\,cos\,\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$b\,c\,sin\,\alpha = 2\,\triangle$$

$$\text{also} \qquad cotg\,\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\,\triangle}\,, \quad \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\triangle}{3\,r^2} \tag{16}$$

$$\frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\,r^2} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{3}\,cotg\,\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\,r^2}$$

Damit giebt (15):

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{a}{b}\,\frac{\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\,r^2}\right)}{\left(1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\,r^2}\right)} = \frac{a}{b}\left(1 + \frac{1}{12\,r^2}(2\,b^2 - 2\,a^2)\right)$$

Dieses kann man auch so schreiben:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{a^2}{6\,r^2}\right)\left(1 + \frac{b^2}{6\,r^2}\right) = \frac{a}{b}\,\frac{1 - \dfrac{a^2}{6\,r^2}}{1 - \dfrac{b^2}{6\,r^2}}$$

Dieses stimmt nach (1), (3) § 42. S. 238 mit der Additamenten-Methode überein; es ist also der oben angegebene Zusammenhang bewiesen.

Die „Additamenten-Methode" wurde in Bayern eingeführt durch Soldner. Weiteres hierüber findet man in dem amtlichen Werke: „Die Bayerische Landes-Vermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage. München 1873, S. 263 u. ff. (auf S. 262 u. ff. Abdruck einer Abhandlung Soldner, vom 5. Mai 1810). Vgl. auch: Bohnenberger, „De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis". Tubingae 1826, § 11.

Ausführlichere Additamenten-Tafeln als unsere Tafel Seite [43] finden sich in manchen geodätischen Werken, z. B. in:

Bremiker, Studien über höhere Geodäsie, Berlin 1869. Anhang Tafel III., Reduktion von Bogen auf Sehne, d. h. 0,25 A, wenn A der Wert unserer Tafel II. Seite [43].

Bremiker, Tafel zur Verwandlung von Log. Bogen in Log. Tangente. Wissenschaftliche Begründung der Rechnungs-Methoden des Centralbureaus der Europäischen Gradmessung. Beilage zum Generalbericht d. Europ. Gr. für 1870 (giebt $T = 2\,A$).

Auch die Zahlen S, welche in der Bremikerschen und Schrönschen 7-stelligen Logarithmentafel und auch in anderen Tafeln am Fuss jeder Seite der Logarithmen der natürlichen Zahlen angegeben sind, stehen in einfacher Beziehung zu unseren Additamenten. Es ist nämlich dieses S:

$$S = \log \frac{1}{\varrho''} - A = \log \sin 1'' - A$$

z. B. in Schrön S. 29 findet man für $0^\circ\ 36'\ 0''$ $S = 4.685\ 5669{\cdot}3$. Dabei ist $\log\,(1:\varrho) = 4.685\ 5748{\cdot}7$ und unsere Tafel II. auf Seite [43] giebt für den Centriwinkel $0^\circ\ 36'\ 0''$ den Wert $A = 79{\cdot}4$, was die Differenz der beiden soeben geschriebenen Zahlen ist. Für die Zahlen T der Logarithmentafeln gilt die entsprechende Gleichung:

$$T = \log \frac{1}{\varrho''} + 2\,A = \log \sin 1'' + 2\,A$$

§ 43. Verschiedene sphärische Aufgaben.

Nachdem wir die Reduktion eines sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Hilfsdreieck in zweifacher Weise kennen gelernt haben, können wir auch andere Aufgaben als die zuerst behandelte Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite und allen Winkeln lösen. Wir wollen hier noch die Bestimmung eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel und dann die sphärische Aufgabe des Rückwärts-Einschneidens vornehmen:

I. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach dem Legendreschen Satz.

Wenn zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α gegeben sind, so kann man daraus sofort den Excess ε berechnen:

$$\varepsilon = b\,c \sin \alpha \frac{\varrho}{2\,r^2} \tag{1}$$

Damit hat man auch die Summe der beiden andern Winkel β und γ:

$$\beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon - \alpha \tag{2}$$