UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 43. Verschiedene sphärische Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Visual Library

Dieses kann man auch so schreiben:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{a^2}{6\,r^2}\right)\left(1 + \frac{b^2}{6\,r^2}\right) = \frac{a}{b}\,\frac{1 - \dfrac{a^2}{6\,r^2}}{1 - \dfrac{b^2}{6\,r^2}}$$

Dieses stimmt nach (1), (3) § 42. S. 238 mit der Additamenten-Methode überein; es ist also der oben angegebene Zusammenhang bewiesen.

Die „Additamenten-Methode" wurde in Bayern eingeführt durch Soldner. Weiteres hierüber findet man in dem amtlichen Werke: „Die Bayerische Landes-Vermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage. München 1873, S. 263 u. ff. (auf S. 262 u. ff. Abdruck einer Abhandlung Soldner, vom 5. Mai 1810). Vgl. auch: Bohnenberger, „De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis". Tubingae 1826, § 11.

Ausführlichere Additamenten-Tafeln als unsere Tafel Seite [43] finden sich in manchen geodätischen Werken, z. B. in:

Bremiker, Studien über höhere Geodäsie, Berlin 1869. Anhang Tafel III., Reduktion von Bogen auf Sehne, d. h. 0,25 A, wenn A der Wert unserer Tafel II. Seite [43].

Bremiker, Tafel zur Verwandlung von Log. Bogen in Log. Tangente. Wissenschaftliche Begründung der Rechnungs-Methoden des Centralbureaus der Europäischen Gradmessung. Beilage zum Generalbericht d. Europ. Gr. für 1870 (giebt $T = 2\,A$).

Auch die Zahlen S, welche in der Bremikerschen und Schrönschen 7-stelligen Logarithmentafel und auch in anderen Tafeln am Fuss jeder Seite der Logarithmen der natürlichen Zahlen angegeben sind, stehen in einfacher Beziehung zu unseren Additamenten. Es ist nämlich dieses S:

$$S = \log\frac{1}{\varrho''} - A = \log\sin 1'' - A$$

z. B. in Schrön S. 29 findet man für 0° 36′ 0″ $S = 4.685\,5669{\cdot}3$. Dabei ist $\log\,(1:\varrho) = 4.685\,5748{\cdot}7$ und unsere Tafel II. auf Seite [43] giebt für den Centriwinkel 0° 36′ 0″ den Wert $A = 79{\cdot}4$, was die Differenz der beiden soeben geschriebenen Zahlen ist. Für die Zahlen T der Logarithmentafeln gilt die entsprechende Gleichung:

$$T = \log\frac{1}{\varrho''} + 2\,A = \log\sin 1'' + 2\,A$$

§ 43. Verschiedene sphärische Aufgaben.

Nachdem wir die Reduktion eines sphärischen Dreiecks auf ein ebenes Hilfsdreieck in zweifacher Weise kennen gelernt haben, können wir auch andere Aufgaben als die zuerst behandelte Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite und allen Winkeln lösen. Wir wollen hier noch die Bestimmung eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel und dann die sphärische Aufgabe des Rückwärts-Einschneidens vornehmen:

I. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach dem Legendreschen Satz.

Wenn zwei Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α gegeben sind, so kann man daraus sofort den Excess ε berechnen:

$$\varepsilon = b\,c\sin\alpha\,\frac{\varrho}{2\,r^2} \tag{1}$$

Damit hat man auch die Summe der beiden andern Winkel β und γ:

$$\beta + \gamma = 180° + \varepsilon - \alpha \tag{2}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Betrachtet man nun das Legendre sche ebene Hilfsdreieck und berücksichtigt, dass:

$$\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(\gamma - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \beta - \gamma$$

so findet man nach den Gauss schen Gleichungen der ebenen Trigonometrie:

$$tang \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(b - c) \cos \frac{\alpha - 1/3\,\varepsilon}{2}}{(b + c) \sin \frac{\alpha - 1/3\,\varepsilon}{2}} = \frac{Z}{N} \tag{3}$$

$$a = \frac{Z}{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{N}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \tag{4}$$

Aus (2) und (4) hat man also $\beta + \gamma$ und $\beta - \gamma$, folglich auch β und γ und mit Probe a aus (4), womit die Aufgabe gelöst ist.

II. Bestimmung eines sphärischen Dreiecks b, c, α nach der Additamenten-Methode.

Wenn b und c logarithmisch gegeben sind, so ist folgende Rechnung bequemer als die vorige:

Für ein ebenes Dreieck mit den Seiten b' und c' und den Winkeln β und γ hat man, mit Einführung eines Hilfswinkels λ folgendes:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b'}{c'} = \frac{1}{tang\,\lambda}$$

$$\frac{\sin \beta - \sin \gamma}{\sin \beta + \sin \gamma} = \frac{1 - tang\,\lambda}{1 + tang\,\lambda}$$

$$tang \frac{\beta - \gamma}{2} = tang \frac{\beta + \gamma}{2} \, cotg\,(\lambda + 45^\circ)$$

Für das sphärische Dreieck setzen wir entsprechend:

$$\log b' = \log b - A_b \quad , \quad \log c' = \log c - A_c$$

wobei A_b und A_c die Additamente von b und c sind. Man rechnet nun den Hilfswinkel λ nach der Formel:

$$cotg\,\lambda = \frac{b'}{c'} \tag{5}$$

dann bestimmt man den sphärischen Excess ε durch eine vorläufige Dreiecks-Berechnung, und hat dann:

$$\beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon - \alpha$$

$$tang \frac{\beta - \gamma}{2} = tang \frac{\beta + \gamma}{2} \, cotg\,(\lambda + 45^\circ) \tag{6}$$

Aus $\frac{\beta + \gamma}{2}$ und $\frac{\beta - \gamma}{2}$ erhält man β und γ.

Die dritte Seite a kann man sodann sowohl nach dem Legendre schen Satz als auch nach der Additamenten-Methode bestimmen.

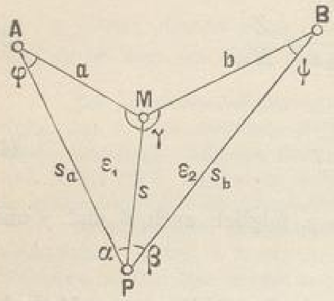
III. Rückwärts-Einschneiden.

Wir nehmen in Fig. 1. S. 244 dieselben Berechnungen wie früher für die ebenes Rückwärts-Einschneiden in Band II, 4. Aufl. 1893, § 89. und wir haben auch nur wenig an der früheren Rechnung zu ändern.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Drei Punkte A, M, B sind gegenseitig festgelegt durch die Seiten $AM = a$, $MB = b$ und den Winkel $BMA = \gamma$; ein Punkt P soll durch Messung der Winkel α und β gegen A, M, B festgelegt werden.

Fig. 1.



Man löst diese Aufgabe zunächst vorläufig genähert auf, indem man die Figur als eben behandelt (d. h. man rechnet zuerst nach Band II, 4. Aufl. 1893, § 89). Dann hat man so viel Anhalt, um die sphärischen Excesse ε_1 und ε_2 der beiden Dreiecke PAM und PMB zu berechnen, und damit ist auch die Summe $\varphi + \varphi$ bestimmt, nämlich:

$$\varphi + \psi = 360° + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (7)$$

Mit den logarithmischen Additamenten A_a und A_b wird reduziert:

$$\log a - A_a = \log a' \quad \text{und} \quad \log b - A_b = \log b'$$

dann lässt sich die Rechnung wie für ein ebenes Viereck weiterführen; man setzt:

$$\frac{a'}{\sin\alpha} : \frac{b'}{\sin\beta} = \tang\lambda$$

und findet:

$$\tang\frac{\varphi - \psi}{2} = \tang\frac{\varphi + \psi}{2}\, \cotg(\lambda + 45°) \qquad (8)$$

Nachdem somit durch (7) und (8) die beiden Winkel φ und ψ bestimmt sind, können alle Dreiecks-Seiten nach dem Legendre schen Satze oder nach der Additamenten-Methode weiter berechnet werden.

Diese 3 Aufgaben mögen genügen, um zu zeigen, dass man mit dem Legendre schen Satz und mit der Additamenten-Methode nahezu alles berechnen kann, was in der ebenen Trigonometrie berechnet zu werden pflegt. Die sphärischen Rechnungen dieser Art spielen aber keine wichtige Rolle.

§ 44. Sphärisch-trigonometrische Reihen-Entwicklungen bis zur Ordnung $\frac{1}{r^4}$ einschliesslich.

Der Legendre sche Satz und die Additamenten-Methode beruhen auf sphärisch-trigonometrischen Reihen-Entwicklungen, die wir beim Legendre schen Satze nur bis auf Glieder von der Ordnung $1 : r^2$ einschliesslich genau im Schluss-Ergebnis behandelt haben. Bei der Additamenten-Methode haben wir in (8) § 42. S. 239 noch ein Glied von der Ordnung $1 : r^4$ hinzugenommen, weil sich das ohne besondere Mühe nebenbei ergab; und es hat sich gezeigt, dass dieses höhere Glied bei den praktischen Berechnungen mit Dreiecks-Seiten bis 100 000^m und darüber unmerklich ist.

Obgleich dadurch die Wahrscheinlichkeit nahe gelegt wird, dass auch in den übrigen verwandten Entwicklungen die Glieder von der Ordnung $1 : r^2$ genügen, müssen wir doch, um ein sicheres Urteil zu haben, die höheren Glieder kennen lernen.

Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, dass eine sehr weit und fein geführte *sphärische* Berechnung für die Geodäsie zunächst wenig Wert hat, solange die sphärische Berechnungs-Art überhaupt nicht strenger begründet wird als dieses in unserem § 38.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN