UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

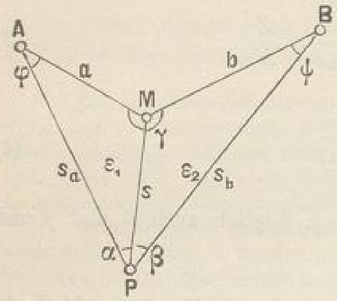
§. 44. Sphärisch-trigonometrische Reihen-Entwicklungen bis zur $1/r^4$ Ordnung einschliesslich

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

Visual Library

Drei Punkte A, M, B sind gegenseitig festgelegt durch die Seiten $AM = a$, $MB = b$ und den Winkel $BMA = \gamma$; ein Punkt P soll durch Messung der Winkel α und β gegen A, M, B festgelegt werden.

Fig. 1.



Man löst diese Aufgabe zunächst vorläufig genähert auf, indem man die Figur als eben behandelt (d. h. man rechnet zuerst nach Band II, 4. Aufl. 1893, § 89). Dann hat man so viel Anhalt, um die sphärischen Excesse ε_1 und ε_2 der beiden Dreiecke PAM und PMB zu berechnen, und damit ist auch die Summe $\varphi + \varphi$ bestimmt, nämlich:

$$\varphi + \psi = 360^\circ + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad (7)$$

Mit den logarithmischen Additamenten A_a und A_b wird reduziert:

$$log\, a - A_a = log\, a' \quad \text{und} \quad log\, b - A_b = log\, b'$$

dann lässt sich die Rechnung wie für ein ebenes Viereck weiterführen; man setzt:

$$\frac{a'}{sin\, \alpha} : \frac{b'}{sin\, \beta} = tang\, \lambda$$

und findet:

$$tang\, \frac{\varphi - \psi}{2} = tang\, \frac{\varphi + \psi}{2}\, cotg\, (\lambda + 45^\circ) \qquad (8)$$

Nachdem somit durch (7) und (8) die beiden Winkel φ und ψ bestimmt sind, können alle Dreiecks-Seiten nach dem Legendre schen Satze oder nach der Additamenten-Methode weiter berechnet werden.

Diese 3 Aufgaben mögen genügen, um zu zeigen, dass man mit dem Legendre schen Satz und mit der Additamenten-Methode nahezu alles berechnen kann, was in der ebenen Trigonometrie berechnet zu werden pflegt. Die sphärischen Rechnungen dieser Art spielen aber keine wichtige Rolle.

§ 44. Sphärisch-trigonometrische Reihen-Entwicklungen bis zur Ordnung $\frac{1}{r^4}$ einschliesslich.

Der Legendre sche Satz und die Additamenten-Methode beruhen auf sphärisch-trigonometrischen Reihen-Entwicklungen, die wir beim Legendre schen Satze nur bis auf Glieder von der Ordnung $1 : r^2$ einschliesslich genau im Schluss-Ergebnis behandelt haben. Bei der Additamenten-Methode haben wir in (8) § 42. S. 239 noch ein Glied von der Ordnung $1 : r^4$ hinzugenommen, weil sich das ohne besondere Mühe nebenbei ergab; und es hat sich gezeigt, dass dieses höhere Glied bei den praktischen Berechnungen mit Dreiecks-Seiten bis $100\,000^m$ und darüber unmerklich ist.

Obgleich dadurch die Wahrscheinlichkeit nahe gelegt wird, dass auch in den übrigen verwandten Entwicklungen die Glieder von der Ordnung $1 : r^2$ genügen, müssen wir doch, um ein sicheres Urteil zu haben, die höheren Glieder kennen lernen.

Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, dass eine sehr weit und fein geführte *sphärische* Berechnung für die Geodäsie zunächst wenig Wert hat, solange die sphärische Berechnungs-Art überhaupt nicht strenger begründet wird als dieses in unserem § 38.

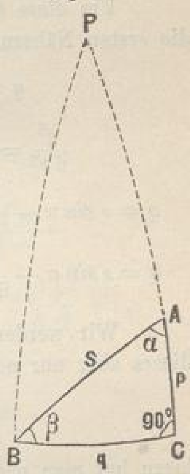
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

S. 226—227 geschehen ist; denn ausser den höheren Gliedern von der Ordnung $1 : r^4$ sollte man auch den Einfluss der Ungleichheit der Krümmungen nach verschiedenen Richtungen und die von der geographischen Breite abhängigen Änderungen der Krümmungen untersuchen.

Dieses können wir erst später thun, und wenn wir jetzt die höheren Glieder von der Ordnung $1 : r^4$ untersuchen, so hat das zunächst den Sinn, dass wir uns überzeugen, ob die Entwicklungen bis $1 : r^2$ einschliesslich, hinreichend sind, um die *geschlossenen* sphärischen Formeln, welche man ja auch anwenden könnte, zu ersetzen, und zweitens sollen durch die nachfolgenden Entwicklungen unsere späteren Entwicklungen mit der geodätischen Linie zweckmässig vorbereitet werden.

Beim ersten Studium der höheren Geodäsie im Sinne des Verständnisses unserer heutigen Landes-Vermessungen wird man den hier folgenden § 44. zunächst ganz übergehen und erst viel später nach Bedürfnis nachholen.

Fig. 1.



I. Der sphärische Excess.

Wir betrachten in Fig. 1. das rechtwinklige sphärische Dreieck ABC mit der Hypotenuse s, mit den Katheten p und q und mit den Winkeln $90°$, β und α. Da einer der Winkel $= 90°$ ist, ist der sphärische Excess:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + 90° - 180°$$

oder

$$\varepsilon = \alpha + \beta - 90° \qquad (1)$$

Dieses rechtwinklige Dreieck Fig. 1. giebt:

$$cotg\,\alpha\; cotg\,\beta = cos\,\frac{s}{r}$$

$$\text{oder} \quad = 1 - 2\,sin^2\frac{s}{2r}$$

$$\text{also} \quad 2\,sin^2\frac{s}{2r} = 1 - cotg\,\alpha\; cotg\,\beta = \frac{sin\,\alpha\; sin\,\beta - cos\,\alpha\; cos\,\beta}{sin\,\alpha\; sin\,\beta}$$

$$2\,sin^2\frac{s}{2r} = -\frac{cos\,(\alpha+\beta)}{sin\,\alpha\; sin\,\beta} = \frac{sin\,\varepsilon}{sin\,\alpha\; sin\,\beta} = \frac{sin\,\varepsilon\; sin^2\frac{s}{r}}{sin\frac{p}{r}\; sin\frac{q}{r}}$$

$$sin\,\varepsilon = \frac{sin\frac{p}{r}\; sin\frac{q}{r}}{2\,cos^2\frac{s}{2}} \qquad (2)$$

Dieses bis $\frac{1}{r^4}$ entwickelt giebt:

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{p}{r} - \frac{p^3}{6\,r^3}\right)\left(\frac{q}{r} - \frac{q^3}{6\,r^3}\right)}{2\left(1 - \frac{s^2}{8\,r^2}\right)^2} = \left(\frac{p\,q}{2\,r^2} - \frac{p\,q\,(p^2+q^2)}{12\,r^4}\right)\left(1 + \frac{s^2}{4\,r^2}\right)$$

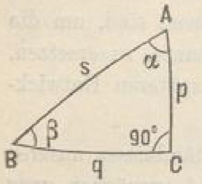
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Da man aber in den höheren Gliedern $s^2 = p^2 + q^2$ setzen darf, so giebt dieses alsbald:

$$\varepsilon = \frac{p\,q}{2\,r^2} + \frac{p\,q}{24\,r^4}(p^2 + q^2) \tag{3}$$

II. *Die Katheten-Formeln.*

Fig. 2.



Das rechtwinklige sphärische Dreieck Fig. 2. giebt nach § 27. S. 163:

$$\sin\frac{q}{r} = \sin\frac{s}{r}\sin\alpha \quad , \quad \tang\frac{p}{r} = \tang\frac{s}{r}\cos\alpha \tag{4}$$

oder entwickelt:

$$q - \frac{q^3}{6\,r^2} = \left(s - \frac{s^3}{6\,r^2}\right)\sin\alpha \quad , \quad p + \frac{p^3}{3\,r^2} = \left(s + \frac{s^3}{3\,r^2}\right)\cos\alpha \tag{5}$$

Um diese Gleichungen nach q bzw. nach p aufzulösen, benützt man zunächst die ersten Näherungen:

$$q = s\sin\alpha + \frac{1}{r^2}\cdots \qquad p = s\cos\alpha + \frac{1}{r^2}\cdots$$

$$\frac{q^3}{6\,r^2} = \frac{s^3\sin^3\alpha}{6\,r^2} + \frac{1}{r^4}\cdots \qquad \frac{p^3}{3\,r^2} = \frac{s^3\cos^3\alpha}{3\,r^2} + \frac{1}{r^4}\cdots$$

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6\,r^2}\sin\alpha + \frac{s^3}{6\,r^2}\sin^3\alpha \qquad p = s\cos\alpha + \frac{s^3}{3\,r^2}\cos\alpha - \frac{s^3}{3\,r^2}\cos^3\alpha$$

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6\,r^2}\sin\alpha\cos^2\alpha \qquad p = s\cos\alpha + \frac{s^3}{3\,r^2}\sin^2\alpha\cos\alpha \tag{6}$$

Wir werden diese Entwicklungen noch um ein Glied weiter treiben, wollen dieses aber nur noch an der Formel für q ausführlich zeigen. Statt (5) hat man dann:

$$q - \frac{q^3}{6\,r^2} + \frac{q^5}{120\,r^4} = \left(s - \frac{s^3}{6\,r^2} + \frac{s^5}{120\,r^4}\right)\sin\alpha \tag{7}$$

hiezu hat man nach (6):

$$q^3 = s^3\sin^3\alpha - \frac{3}{6}\frac{s^5}{r^2}\sin^3\alpha\cos^2\alpha + \ldots$$

$$q^5 = s^5\sin^5\alpha + \ldots$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke für q^3 und q^5 in (7) einsetzt, so bekommt man:

$$\begin{aligned} q = s\sin\alpha &- \frac{s^3}{6\,r^2}\sin\alpha + \frac{s^5}{120\,r^4}\sin\alpha \\ &+ \frac{s^3}{6\,r^2}\sin^3\alpha - \frac{s^5}{12\,r^4}\sin^3\alpha\cos^2\alpha \\ &- \frac{s^5}{120\,r^4}\sin^5\alpha \end{aligned}$$

Wenn man dieses ordnet und berücksichtigt, dass:

$$s^4 = s^4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2$$

so findet man:

$$q = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6\,r^2}\sin\alpha\cos^2\alpha - \frac{s^5}{120\,r^4}\sin\alpha\cos^2\alpha\,(8\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \tag{8}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses ist die Weiterentwicklung der ersten Formel der Gruppe (6); die Weiterentwicklung der zweiten Formel der Gruppe (6) wird ebenso gemacht und giebt:

$$p = s\cos\alpha + \frac{s^3}{3r^2}\sin^2\alpha\cos\alpha + \frac{s^5}{15r^4}\sin^2\alpha\cos\alpha\,(2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \tag{9}$$

Umkehrung der Reihen (8) und (9).

Man kann die Reihen (8) und (9) auch umkehren, d. h. man kann $s\sin\alpha$ und $s\cos\alpha$ in Potenzen von q und p ausdrücken. (Man könnte hiezu das allgemeine Verfahren anwenden, das wir in § 29. S. 180—181 angedeutet haben; wir ziehen es aber hier vor, ohne alle Vorbereitungs-Hilfsmittel zu verfahren.)

Jedenfalls hat man in erster Näherung aus (8) und (9):

$$s\sin\alpha = q + \ldots \qquad s\cos\alpha = p + \ldots$$

folglich sofort in zweiter Näherung aus (8) und (9):

$$s\sin\alpha = q + \frac{q\,p^2}{6r^2} + \ldots \qquad s\cos\alpha = p - \frac{q^2\,p}{3r^2} + \ldots$$

folglich zum Einsetzen in die höheren Glieder von (8) und (9):

$$s^2\sin^2\alpha = q^2 + \frac{q^2p^2}{3r^2} + \ldots \qquad s^2\cos^2\alpha = p^2 - 2\frac{q^2p^2}{3r^2} + \ldots$$

$$s^3\sin^2\alpha\cos\alpha = \left(q^2 + \frac{q^2p^2}{3r^2}\right)\left(p - \frac{q^2p}{3r^2}\right) = q^2p + \frac{q^2p^3}{3r^2} - \frac{q^4p}{3r^2} + \ldots$$

$$s^3\sin\alpha\cos^2\alpha = \left(q + \frac{q\,p^2}{6r^2}\right)\left(p^2 - 2\frac{q^2p^2}{3r^2}\right) = q\,p^2 + \frac{q\,p^4}{6r^2} - 2\frac{q^3p^2}{3r^2} + \ldots$$

Setzt man dieses in (8), so bekommt man:

$$s\sin\alpha = q + \frac{q\,p^2}{6r^2} + \frac{q\,p^4}{36r^4} - \frac{q^3p^2}{9r^4} - \frac{1}{120r^4}(q\,p^4 - 8\,q^3p^2) + \ldots$$

Dieses giebt geordnet:

$$s\sin\alpha = q + \frac{q\,p^2}{6r^2} - \frac{q\,p^2}{360r^4}(16\,q^2 - 7\,p^2) \tag{10}$$

und auf gleiche Weise bekommt man aus (9):

$$s\cos\alpha = p - \frac{q^2p}{3r^2} - \frac{q^2p}{45r^4}(q^2 + 2\,p^2) \tag{11}$$

III. Die Hypotenusen-Formel.

Aus den soeben gewonnenen Formeln (10) und (11) kann man auch eine Formel für s^2 herstellen, indem man $s\sin\alpha$ und $s\cos\alpha$ quadriert und addiert. Wenn man dabei die höheren Glieder wie bisher vernachlässigt, so bekommt man:

$$s^2\sin^2\alpha = q^2 + \frac{q^2p^4}{36r^4} + \frac{q^2p^2}{3r^2} + \frac{q^2p^2}{180r^4}(-16\,q^2 + 7\,p^2)$$

$$s^2\cos^2\alpha = p^2 + \frac{q^4p^2}{9r^4} - 2\frac{q^2p^2}{3r^2} - 2\frac{q^2p^2}{45r^4}(q^2 + 2\,p^2)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn man dieses zusammennimmt und ordnet, so findet man:

$$s^2 = q^2 + p^2 - \frac{q^2\,p^2}{3\,r^2} - \frac{q^2\,p^2\,(q^2+p^2)}{45\,r^4} \tag{12}$$

Man kann diese Formel auch unmittelbar finden durch Entwicklung von

$$\cos\frac{s}{r} = \cos\frac{q}{r}\cos\frac{p}{r}.$$

IV. *Der erweiterte Legendre sche Satz.*

Nach Andeutung von Fig. 4. verbinden wir zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke zu einem allgemeinen sphärischen Dreieck $A\,B\,C$, indem die beiden Katheten q und q' nun die Seite $C\,B = a$ bilden, zu welcher die gemeinschaftliche Kathete p als Höhe gehört.

Fig. 4.

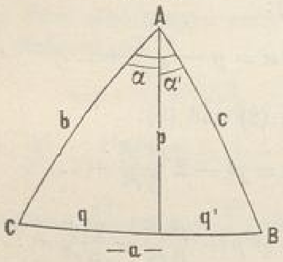
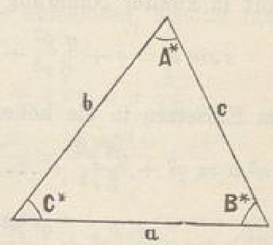


Fig. 5.



Die Winkel A^*, B^*, C^* des ebenen Dreiecks, Fig. 5., deren Summe $A^*+B^*+C^* = 180°$ ist, entsprechen den Winkeln α', β', γ' in der früheren Fig. 2. § 41. S. 234.

Der Dreiecks-Winkel A setzt sich nun aus den beiden Winkeln α und α' der beiden rechtwinkligen Dreiecke so zusammen:

$$A = \alpha + \alpha', \quad \text{also} \quad \cos A = \cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' \tag{13}$$

Nun hat man nach (11):

$$b\cos\alpha = p - \frac{p\,q^2}{3\,r^2} - \frac{p\,q^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q^2) \tag{14}$$

$$c\cos\alpha' = p - \frac{p\,q'^2}{3\,r^2} - \frac{p\,q'^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q'^2) \tag{15}$$

$$b\sin\alpha = q + \frac{p^2\,q}{6\,r^2} + \frac{p^2\,q}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q^2) \tag{16}$$

$$c\sin\alpha' = q' + \frac{p^2\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^2\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q'^2) \tag{17}$$

Wenn man (14) und (15) multipliziert, dabei die höheren Glieder vernachlässigt, und dann nach gleichen Potenzen ordnet, so bekommt man:

$$\begin{aligned} b\,c\cos\alpha\cos\alpha' = p^2 &- \frac{p^2\,q^2}{3\,r^2} - \frac{p^2\,q^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q^2) \\ &- \frac{p^2\,q'^2}{3\,r^2} + \frac{p^2\,q^2\,q'^2}{9\,r^4} \\ &- \frac{p^2\,q'^2}{360\,r^4}(16\,p^2 + 8\,q'^2) \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise findet man auch aus (16) und (17):

$$b\,c\,sin\,\alpha\,sin\,\alpha' = q\,q' + \frac{p^2\,q\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^2\,q\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q^2)$$
$$+ \frac{p^2\,q\,q'}{6\,r^2} + \frac{p^4\,q\,q'}{36\,r^4}$$
$$+ \frac{p^2\,q\,q'}{360\,r^4}(7\,p^2 - 16\,q'^2)$$

Diese beiden Ausdrücke zusammen geben:

$$b\,c(cos\,\alpha\,cos\,\alpha' - sin\,\alpha\,sin\,\alpha') = b\,c\,cos\,(\alpha + \alpha') = b\,c\,cos\,A = p^2 - q\,q' - \frac{p^2}{3\,r^2}(q^2 + q'^2 + q\,q')$$
$$- \frac{p^2}{360\,r^4}(16\,p^2 q^2 + 16\,p^2 q'^2 + 24\,p^2 q\,q' + 8\,q^4 + 8\,q'^4 - 40\,q^2 q'^2 - 16\,q^3 q' - 16\,q'^3 q) \quad (18)$$

Nun hat man nach der Hypotenusen-Formel (12):

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= p^2 + q^2 - \frac{p^2\,q^2}{3\,r^2} - \frac{p^2\,q^2}{45\,r^4}(p^2 + q^2) \\ c^2 &= p^2 + q'^2 - \frac{p^2\,q'^2}{3\,r^2} - \frac{p^2\,q'^2}{45\,r^4}(p^2 + q'^2) \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

und unmittelbar $\quad a^2 = (q + q')^2 = q^2 + 2\,q\,q' + q'^2 \quad$ (20)

Zugleich wird in Fig. 5. ein *ebenes* Dreieck eingeführt, dessen Seiten a, b, c gleich sind den Seiten des sphärischen Dreiecks, und dessen Winkel A^*, B^*, C^* bestimmt werden sollen. Für das ebene Dreieck hat man bekanntlich die Gleichung:

$$2\,b\,c\,cos\,A^* = b^2 + c^2 - a^2$$

und wenn man hier die Werte (19) und (20) einsetzt, so bekommt man:

$$b\,c\,cos\,A^* = p^2 - q\,q' - \frac{p^2}{6\,r^2}(q^2 + q'^2) - \frac{p^2}{90\,r^4}(p^2 q^2 + p^2 q'^2 + q^4 + q'^4) \quad (21)$$

Dieses (21) wird mit dem früheren (18) verglichen, wodurch man nach einiger algebraischer Umformung finden wird:

$$b\,c\,(cos\,A^* - cos\,A) = \frac{p^2}{6\,r^2}(q + q')^2 + \frac{p^2\,(q + q')^2}{90\,r^4}(3\,p^2 + (q + q')^2 - 8\,q\,q') \quad (22)$$

Das hier vorkommende Produkt $p\,(q + q')$ steht in naher Beziehung zu $b\,c\,sin\,A$, denn wir haben aus (16) und (15) mit Weglassung der letzten Glieder:

$$b\,c\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha' = p\,q + \frac{p^3\,q}{3\,r^2} - \frac{p\,q\,q'^2}{3\,r^2}$$

Entsprechend geben auch (14) und (17):

$$b\,c\,cos\,\alpha\,sin\,\alpha' = p\,q' + \frac{p^3\,q'}{6\,r^2} - \frac{p\,q^2\,q'}{3\,r^2}$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen giebt:

$$b\,c\,(sin\,\alpha\,cos\,\alpha' + cos\,\alpha\,sin\,\alpha') = b\,c\,sin\,A = p\,(q + q') + \frac{p\,(q + q')}{6\,r^2}(p^2 - 2\,q\,q')$$

also: $$p\,(q + q') = b\,c\,sin\,A\left(1 - \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - 2\,q\,q')\right) \quad (23)$$

Das Ziel dieser Entwicklung ist die kleine Winkel-Differenz zwischen A und A^*, und wir wollen deshalb setzen:

$$A - A^* = x \quad (24)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

folglich in erster Näherung:

$$\cos A = \cos (A^* + x) = \cos A^* - x \sin A^* + \ldots \tag{25}$$

Setzt man dem entsprechend $\cos A^* - \cos A = x \sin A^*$ in (22), und berücksichtigt (23) genähert, mit $A = A^*$, so erhält man:

$$x = \frac{p}{6\,r^2}(q + q') \tag{26}$$

Damit entwickelt man eine zweite Annäherung:

$$A = A^* + \frac{p}{6\,r^2}(q + q') \quad , \quad \sin A = \sin A^* + \frac{p}{6\,r^2}(q + q') \cos A^* + \ldots$$

$$\sin A = \sin A^* \left(1 + \frac{p}{6\,r^2}(q + q') \operatorname{cotg} A^*\right) \tag{26a}$$

oder mit Ersetzung von $\operatorname{cotg} A^*$ aus (21) und (23) genähert:

$$\operatorname{cotg} A^* = \frac{p^2 - q\,q'}{p\,(q + q')}$$

Dieses in (26a) gesetzt giebt:

$$\sin A = \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - q\,q')\right) \tag{27}$$

Damit kann man in (23) die Funktion $\sin A$ durch $\sin A^*$ ersetzen, und dadurch bekommt man:

$$p\,(q + q') = b\,c \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - q\,q') - \frac{1}{6\,r^2}(p^2 - 2\,q\,q')\right)$$

$$p\,(q + q') = b\,c \sin A^* \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}q\,q'\right) = 2 \triangle \left(1 + \frac{1}{6\,r^2}q\,q'\right) \tag{28}$$

Hier haben wir die Fläche $\triangle$ des ebenen Dreiecks eingeführt, nämlich:

$$\frac{b\,c \sin A^*}{2} = \triangle \tag{29}$$

Nun gehen wir zum zweiten Male auf (22) zurück, und bilden durch Einsetzung von (28):

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{2}{3}\frac{\triangle^2}{r^2}\left(1 + \frac{q\,q'}{3\,r^2}\right) + \frac{4}{90}\frac{\triangle^2}{r^2}\left(\frac{3\,p^2 + (q + q')^2 - 8\,q\,q'}{r^2}\right)$$

Hier ist nach Fig. 4. zu berücksichtigen:

$$p^2 + q^2 = b^2 \quad , \quad p^2 + q'^2 = c^2 \quad \text{und} \quad (q + q')^2 = a^2$$

womit man finden wird:

$$b\,c\,(\cos A^* - \cos A) = \frac{2}{3}\frac{\triangle^2}{r^2} + \frac{2}{90}\frac{\triangle^2}{r^2}\left(\frac{3\,b^2 + 3\,c^2 - a^2}{r^2}\right) \tag{30}$$

Nun wird die frühere Entwicklung (25) noch um ein Glied weiter geführt, nämlich mit $A - A^* = x$:

$$\cos A = \cos (A^* + x) = \cos A^* - x \sin A^* - \frac{x^2}{2} \cos A^*$$

$$\cos A - \cos A^* = -\sin A^* \left(x + \frac{x^2}{2} \operatorname{cotg} A^*\right)$$

Dieses in (30) gesetzt, zugleich mit Rücksicht auf (29) giebt:

$$x + \frac{x^2}{2} \operatorname{cotg} A^* = \frac{\triangle}{3\, r^2} + \frac{1}{90} \frac{\triangle}{r^4} (3\, b^2 + 3\, c^2 - a^2) \tag{30 a}$$

Die erste Näherung für x ist:

$$x = \frac{\triangle}{3\, r^2} + \frac{1}{r^4} \ldots$$

Dazu hat man aus dem ebenen Dreieck:

$$\cos A^* = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\, b\, c} \qquad \sin A^* = \frac{2 \triangle}{b\, c}$$

also von (30 a):

$$\frac{x^2}{2} \operatorname{cotg} A^* = \frac{\triangle^2}{9\, r^4} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \triangle} = \frac{\triangle}{72\, r^4} (b^2 + c^2 - a^2)$$

Dieses in (30 a) gesetzt giebt:

$$x = \frac{\triangle}{3\, r^2} + \frac{\triangle}{360\, r^4} (7\, b^2 + 7\, c^2 + a^2) \tag{31}$$

Hiebei ist die Winkelreduktion $A - A^* = x$ in analytischem Masse dargestellt; um auf Sekunden überzugehen, muss man den Faktor ϱ zusetzen. Thut man dieses und schreibt zugleich auch die zwei anderen entsprechenden Formeln für $B - B^*$ und $C - C^*$, so hat man:

$$x = A - A^* = \frac{\triangle}{3\, r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360\, r^4} \varrho\, (a^2 + 7\, b^2 + 7\, c^2) \tag{31 a}$$

$$y = B - B^* = \frac{\triangle}{3\, r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360\, r^4} \varrho\, (7\, a^2 + b^2 + 7\, c^2) \tag{32 a}$$

$$z = C - C^* = \frac{\triangle}{3\, r^2} \varrho + \frac{\triangle}{360\, r^4} \varrho\, (7\, a^2 + 7\, b^2 + c^2) \tag{33 a}$$

$$\text{Summe} \quad \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2} \varrho + \frac{\triangle}{24\, r^4} \varrho\, (a^2 + b^2 + c^2) \tag{34}$$

Unter $\triangle$ ist hier die Fläche des *ebenen* Dreiecks verstanden, das aus den drei Seiten a, b, c konstruiert werden kann, und die vorstehenden Formeln sind immer nur Näherungs-Formeln, weil noch höhere Glieder vernachlässigt sind. Wenn man dagegen die kugelförmige Oberfläche F des *sphärischen* Dreiecks benützt, so hat man die schon früher in (2 a) § 40. S. 231 aufgestellte strenge Formel:

$$\varepsilon = \frac{F}{r^2} \varrho \tag{35}$$

Durch Vergleichung von (35) und (34) hat man auch eine Vergleichung zwischen F und $\triangle$, nämlich:

$$F = \triangle \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24\, r^2}\right) \tag{36}$$

Hiefür kann man auch noch eine andere Form finden, indem man nach (31 a) schreibt:

$$\sin A = \sin A^* + \frac{\triangle}{3\, r^2} \cos A^* = \sin A^* \left(1 + \frac{\triangle}{3\, r^2} \operatorname{cotg} A^*\right)$$

Nimmt man hiezu die einfachen Beziehungen, $2\,b\,c\cos A^* = b^2 + c^2 - a^2$ und $2\triangle = b\,c\sin A^*$, so findet man:

$$\frac{\sin A}{\sin A^*} = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\,r^2}$$

dieses auch auf die beiden andern Winkel angewendet giebt für (36):

$$F = \triangle \sqrt{\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A^* \sin B^* \sin C^*}} \tag{37}$$

Von ähnlicher Bedeutung wie (36) ist auch die aus (34) folgende Gleichung:

$$\frac{\triangle}{r^2} = \varepsilon\left(1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24\,r^2}\right) \tag{38}$$

Setzt man dieses noch in (31 a), (31 b), (31 c), so wird überall $\triangle$ durch ε ersetzt und man hat:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{-2\,a^2 + b^2 + c^2}{r^2}\right) \tag{39 a}$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{a^2 - 2\,b^2 + c^2}{r^2}\right) \tag{39 b}$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{180}\left(\frac{a^2 + b^2 - 2\,c^2}{r^2}\right) \tag{39 c}$$

Summe $\qquad \varepsilon = \varepsilon$ (Probe) $\qquad$ (40)

Endlich kann man hier noch eine kleine Form-Veränderung vornehmen dadurch, dass man den Mittelwert m^2 von a^2, b^2 und c^2 einführt, nämlich:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = m^2 \tag{41}$$

Damit werden die vorstehenden Formeln:

$$A - A^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\,\frac{m^2 - a^2}{r^2} \tag{42 a}$$

$$B - B^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\,\frac{m^2 - b^2}{r^2} \tag{42 b}$$

$$C - C^* = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{60}\,\frac{m^2 - c^2}{r^2} \tag{42 c}$$

Für ein gleichseitiges Dreieck verschwinden die zweiten Glieder, was auch an sich klar ist.

Nimmt man ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit den Katheten a und a, also $c^2 = 2\,a^2$, so wird:

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2\,r^2} \quad , \quad 3\,m^2 = a^2 + a^2 + 2\,a^2 \quad , \quad m^2 = \frac{4}{3}\,a^2.$$

Setzt man $a = 100\,000^{\mathrm{m}}$, so werden die zweiten Glieder in (42 a), (42 b) und (42 c) bzw.:

$$+\frac{a^4}{40\,r^4}\,\varrho = +\,0{,}0003''$$

$$+\frac{a^4}{40\,r^4}\,\varrho = +\,0{,}0003''$$

$$-\frac{a^4}{20\,r^4}\,\varrho = -\,0{,}0006''$$

Zu einer Anwendung der vorstehenden Formeln auf ein Zahlen-Beispiel nehmen wir wieder das klassische Dreieck Inselsberg, Hohehagen, Brocken, das wir schon mehrfach, in § 40.—42. benützt haben.

Mit Zugrundlegung der hier als vorläufig zu betrachtenden Berechnungen § 40. S. 233 und § 41. S. 237 erhalten wir:

$$\log r = 6.804\,9621 \quad , \quad \log \triangle = 9.467\,2168 \quad , \quad \log F = 9.467\,2271$$

und dann nach (31 a), (31 b), (31 c):

$$\begin{aligned}
A - A^* &= 4{,}949\,900'' + 0{,}000\,136'' = 4{,}950\,036'' \\
B - B^* &= 4{,}949\,900 \;\; + 0{,}000\,096 \;\; = 4{,}949\,996 \\
C - C^* &= 4{,}949\,900 \;\; + 0{,}000\,121 \;\; = 4{,}950\,021 \\
\hline
\varepsilon &= 14{,}849\,700'' + 0{,}000\,353'' = 14{,}850\,053''
\end{aligned}$$

Dasselbe bekommt man auch nach den Formeln (42 a), (42 b), (42 c), nämlich:

$$\begin{aligned}
A - A^* &= 4{,}950\,018'' + 0{,}000\,018'' = 4{,}950\,036'' \\
B - B^* &= 4{,}950\,018 \;\; - 0{,}000\,021 \;\; = 4{,}949\,997 \\
C - C^* &= 4{,}950\,018 \;\; + 0{,}000\,003 \;\; = 4{,}950\,021 \\
\hline
\varepsilon &= 14{,}850\,054'' + 0{,}000\,000'' = 14{,}850\,054''
\end{aligned}$$

Damit hat man folgende sphärische und ebene Winkel:

Inselsberg	$A =$	40° 39′ 30,380 000″	$A^* =$	40° 39′ 25,429 964″
Hohehagen	$B =$	86 13 58,840 000	$B^* =$	86 13 53,890 004
Brocken	$C =$	53 6 45,630 053	$C^* =$	53 6 40,680 032
Summe		180° 0′ 14,850 053″		180° 0′ 0,000 000″

Wenn man mit diesen Winkeln die frühere Berechnung (13)—(15) S. 237 wiederholt, so muss man mindestens 10 stellig rechnen, um den Unterschied noch wahrnehmbar zu machen; indessen auch in den 10 stelligen Logarithmen ist der Unterschied höchstens eine letzte Stelle, d. h. = 0·001, und z. B. an der Dreiecks-Seite $a = 69194{,}105^{m}$ bringt die neue schärfere Rechnung nur einen Unterschied von $0{,}00002^{m}$ oder $0{,}02^{mm}$.

Da das benützte Dreieck eines der grössten in der deutschen Geodäsie ist, können wir hiernach mit Ruhe die höheren Glieder vernachlässigen.

Zum Schlusse dieser Entwicklungen wollen wir noch eine Übersichts-Tabelle berechnen für die Werte des Korrektions-Gliedes 4. Ordnung zum Legendre schen Satze, d. h. nach (42 a) für das Glied:

$$\varDelta A_4 = \frac{\varepsilon}{60\, r^2}(m^2 - a^2) \quad , \quad \text{wo } m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Die beiden Faktoren ε und $(m^2 - a^2)$ desselben sind von einander unabhängig; der Excess ε misst die Fläche des Dreiecks und der Faktor $(m^2 - a^2)$ ist ein Mass für die Unsymmetrie und Ungleichseitigkeit des Dreiecks. Wenn ein Dreieck sehr lang aber schmal ist, so kann ε klein und $(m^2 - a^2)$ gross sein; wenn ein Dreieck sehr gross und nahezu gleichseitig ist, so wird ε gross und $(m^2 - a^2)$ klein; man kann also alle denkbaren Fälle am besten umfassen durch eine Tabelle für $\varDelta A_4$ mit zwei unabhängigen Eingängen ε und $m^2 - a^2$, wie im folgenden gegeben wird:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Winkel-Korrektion 4. Ordnung, $\varDelta A_4$, zum Legendre schen Satz.

Unsymmetrie des Dreiecks		Sphärischer Excess ε des Dreiecks					
$\sqrt{m^2 - a^2}$	$m^2 - a^2$	$\varepsilon = 10''$	$\varepsilon = 20''$	$\varepsilon = 50''$	$\varepsilon = 100''$	$\varepsilon = 200''$	$\varepsilon = 300''$
10^km^	100^qkm^	0,00000″	0,00000″	0,00000″	0,00000″	0,00001	0,00001″
20	400	0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00003	0,00005
50	2 500	0,00001	0,00002	0,00005	0,00010	0,00021	0,00031
100	10 000	0,00004	0,00008	0,00021	0,00041	0,00082	0,00123
200	40 000	0,00016	0,00033	0,00081	0,00164	0,00329	0,00493
400	160 000	0,00066	0,00131	0,00325	0,00657	0,01314	0,01972

Indem wir noch eine allgemeinere Betrachtung über das Fehler-Glied des Legendre schen Satzes anstellen, schreiben wir nach (39 a) mit Zuziehung des Ausdrucks $\triangle$ nach (5) § 41. S. 236:

$$\varDelta A_4 = \frac{b^2 + c^2 - 2\,a^2}{720\,r^4}\sqrt{a^2\,(2\,b^2 + 2\,c^2 - a^2) - (b - c)^2}$$

Wenn hier $b = c$, also das Dreieck gleichschenklig genommen wird, so fällt $(b - c)^2$ fort, und der Ausdruck wird ein Maximum in Hinsicht auf das Verhältnis zwischen b und c. Indem man den an der Seite a anliegenden Winkel β einführt, kann man, mit $c = b$, das Fehler-Glied zweifach ausdrücken:

$$\varDelta A_4 = \frac{a^4}{1440\,r^4}\,\frac{1 - 4\cos^2\beta}{\cos^2\beta}\,\tang\beta \tag{a}$$

oder

$$\varDelta' A_4 = \frac{b^4}{180\,r^4}\,(1 - 4\cos^2\beta)\sin 2\,\beta \tag{b}$$

Im Falle (a) entsteht ein Maximum mit $\beta = 45°$ und im Falle (b) entstehen Maxima mit $\beta = 26°\,49'$ und $\beta = 73°\,44'$ und daraus folgt:

$$(\beta = 45°),\qquad (\varDelta A_4)\,max = 0{,}001\,389\,\frac{a^4}{r^4}$$

$$(\beta = 73°\,44'),\qquad (\varDelta' A_4)\,max = 0{,}002\,050\,\frac{b^4}{r^4}$$

Setzt man hier bzw. a oder $b = 100\,000$ Meter, so wird das betreffende Fehler-Glied $= 0{,}000\,017''$ oder $0{,}000\,026''$.

Man sieht hieraus, dass bei messbaren Dreiecken die Korrektion 4. Ordnung immer zu vernachlässigen ist.

Der einfache Legendre sche Satz mit Entwicklung bis $\frac{1}{r^2}$ einschliesslich, erschien in den Pariser „Mémoires de l'académie des sciences“, Jahrgang 1787, und hat inzwischen zahlreiche Beweisformen gefunden.

Die Entwicklung bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^4}$ ist zuerst von Buzengeiger gegeben in der „Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger, 6. Band, S. 264—270, Tübingen 1818“. Dieses wird auch von Bessel citiert in „Astr. Nachr. 19. Band, 1841, S. 103“.

Unsere neue Behandlungsweise (im vorstehenden § 44.) ist hervorgerufen durch die ent-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

sprechenden Entwicklungen für Dreiecke mit geodätischen Linien in der klassischen Abhandlung von Gauss „Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. 24—28". Wir betrachten unseren § 44. als Vorbereitung für unsere späteren analogen Entwicklungen für Dreiecke auf dem Ellipsoid.

Über den Maximal-Einfluss der sphärischen Glieder von der Ordnung $1:r^4$ giebt schon Baeyer (Messen auf d. sphär. Oberfl. S. 73—74) eine Erörterung.

In unserer zweiten Auflage, 1878, S. 131, hatten wir eine solche Untersuchung mit der Nebenbedingung konstanter Dreiecks-Fläche. Helmert untersucht in math. u. phys. Theorieen der höheren Geodäsie I. § 16. den Maximal-Einfluss der höheren Glieder mit der Nebenbedingung, dass die Quadratsumme der Seiten, d. h. $a^2 + b^2 + c^2 = 3\,m^2$ konstant sei.

Kapitel V.

Sphärische Coordinaten.

§ 45. Übersicht der Coordinaten-Systeme.

Wir betrachten in der Folge die Erde als Kugel von gegebenem Halbmesser.

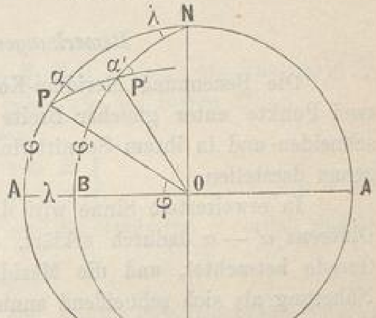
Bei dieser Betrachtungsweise werden manche Formeln und Rechen-Verfahren gefunden werden (mit kleinen Gliedern von der Ordnung $1:r^2$), welche man sofort auch auf das Ellipsoid, bzw. auf Messungen an der Erd-Oberfläche anwenden kann, wenn man nur den Kugel-Halbmesser r der Erd-Krümmung an der betreffenden Stelle einigermassen anpasst.

Andere der in diesem Kapitel zu entwickelnden Formeln (mit Gliedern von der Ordnung $1:r$) werden keine so unmittelbare Übertragung auf das Ellipsoid zulassen, und daher nur als Vorbereitungs-Formeln in irgend welchem Sinne zu betrachten sein.

Indem wir nähere Untersuchungen dieser Art auf die besonderen Fälle verschieben, betrachten wir jetzt die einzelnen Arten der Punkt-Bestimmung auf der Kugel.

I. Geographische Coordinaten.

Fig. 1.
Sphärische Coordinaten.



In Fig. 1. ist O der Mittelpunkt einer Kugel, welche, als Darstellung der Erde, den Nordpol N, Südpol S, also die Axe $N\,S$ und den Äquator $A\,A'$ hat.

$N\,A\,S$ und $N\,B\,S$ sind zwei Meridiane mit darauf liegenden Punkten P und P'; die gegenseitige Lage zweier Meridiane wird durch den Längen-Unterschied λ bestimmt, welcher entweder als Winkel λ am Pol N oder als Bogen $A\,B$ auf dem Äquator dargestellt werden kann.

Auf einem Meridian $N\,A$ wird ein Punkt P bestimmt durch seine geographische Breite φ; welche entweder als Erd-Centriwinkel $A\,O\,P = \varphi$ oder als Meridian-Bogen $A\,P$ (für den Halbmesser $= 1$) dargestellt werden kann.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN