Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 45. Übersicht der Coordinaten-Systeme

urn:nbn:de:hbz:466:1-83087

sprechenden Entwicklungen für Dreiecke mit geodätischen Linien in der klassischen Abhandlung von Gauss „Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. 24—28". Wir betrachten unseren § 44. als Vorbereitung für unsere späteren analogen Entwicklungen für Dreiecke auf dem Ellipsoid.

Über den Maximal-Einfluss der sphärischen Glieder von der Ordnung $1:r^4$ giebt schon Baeyer (Messen auf d. sphär. Oberfl. S. 73—74) eine Erörterung.

In unserer zweiten Auflage, 1878, S. 131, hatten wir eine solche Untersuchung mit der Nebenbedingung konstanter Dreiecks-Fläche. Helmert untersucht in math. u. phys. Theorieen der höheren Geodäsie I. § 16. den Maximal-Einfluss der höheren Glieder mit der Nebenbedingung, dass die Quadratsumme der Seiten, d. h. $a^2+b^2+c^2=3\,m^2$ konstant sei.

Kapitel V.

Sphärische Coordinaten.

§ 45. Übersicht der Coordinaten-Systeme.

Wir betrachten in der Folge die Erde als Kugel von gegebenem Halbmesser.

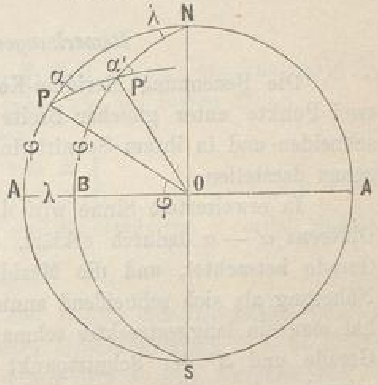
Bei dieser Betrachtungsweise werden manche Formeln und Rechen-Verfahren gefunden werden (mit kleinen Gliedern von der Ordnung $1:r^2$), welche man sofort auch auf das Ellipsoid, bzw. auf Messungen an der Erd-Oberfläche anwenden kann, wenn man nur den Kugel-Halbmesser r der Erd-Krümmung an der betreffenden Stelle einigermassen anpasst.

Andere der in diesem Kapitel zu entwickelnden Formeln (mit Gliedern von der Ordnung $1:r$) werden keine so unmittelbare Übertragung auf das Ellipsoid zulassen, und daher nur als Vorbereitungs-Formeln in irgend welchem Sinne zu betrachten sein.

Indem wir nähere Untersuchungen dieser Art auf die besonderen Fälle verschieben, betrachten wir jetzt die einzelnen Arten der Punkt-Bestimmung auf der Kugel.

I. Geographische Coordinaten.

Fig. 1.
Sphärische Coordinaten.



In Fig. 1. ist O der Mittelpunkt einer Kugel, welche, als Darstellung der Erde, den Nordpol N, Südpol S, also die Axe NS und den Äquator AA' hat.

NAS und NBS sind zwei Meridiane mit darauf liegenden Punkten P und P'; die gegenseitige Lage zweier Meridiane wird durch den Längen-Unterschied λ bestimmt, welcher entweder als Winkel λ am Pol N oder als Bogen AB auf dem Äquator dargestellt werden kann.

Auf einem Meridian NA wird ein Punkt P bestimmt durch seine geographische Breite φ; welche entweder als Erd-Centriwinkel $AOP=\varphi$ oder als Meridian-Bogen AP (für den Halbmesser $=1$) dargestellt werden kann.

II. Polar-Coordinaten.

Wenn P als fester Punkt gilt, so kann man einen zweiten Punkt P' dagegen festlegen durch Angabe des Entfernungs-Bogens PP' und des Azimutes $NPP' = \alpha$. Die Azimute werden meist von Norden über Osten gezählt, wie in Fig. 1. mit α bei P eingeschrieben ist.

Ein zweites Azimut α' hat der Bogen PP' im Punkte P' und zwar erscheint in Fig. 1. der Winkel α' entweder als nordöstliches Azimut von PP' in der Verlängerung über P', oder als südwestliches Azimut von $P'P$.

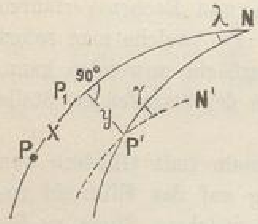
Die Differenz der beiden Azimute α und α' führt den Namen „Meridian-Konvergenz“, d. h.

$$\text{Meridian-Konvergenz} = \alpha' - \alpha \tag{1}$$

Dabei ist der dem Äquator zugewendete Winkel α' der grössere, also die Meridian-Konvergenz in dem Sinne der Gleichung (1) gezählt, positiv.

III. Rechtwinklige Coordinaten.

Fig. 2.
Rechtwinklige Coordinaten
x, y.



In Fig. 2., welche einen besonderen Fall von Fig. 1. darstellt, ist $P'P_1$, ein Grosskreisbogen, rechtwinklig zu PN, und der Punkt P' wird in Bezug auf P bestimmt, durch die Abscisse $PP_1 = x$, auf dem Meridian NP gemessen, und durch die Ordinate $P_1 P' = y$, rechtwinklig zum Meridian gemessen.

Als Meridian-Konvergenz bei rechtwinkligen Coordinaten gilt der Winkel γ, welcher in P' liegt zwischen dem Meridiane $P'N$ und dem Bogen $P'N'$, welcher eine Parallele zu $P_1 N$ ist.

Dieses ist nur eine andere Ausdrucksweise für die schon bei *II.* gegebene allgemeinere Erklärung der Meridian-Konvergenz, denn wenn das Azimut bei P_1 den besonderen Wert 90° annimmt, so ist die Meridian-Konvergenz für die Punkte P_1 und P' die Differenz:

$$PP_1P' - P_1P'N = 90° - (90° - \gamma) = \gamma \tag{2}$$

Dabei kommt der Ursprungs-Punkt P und die Abscisse x gar nicht in Betracht, sondern nur der Fusspunkt P_1.

Bemerkungen zur Meridian-Konvergenz.

Die Benennung Meridian-Konvergenz rührt ursprünglich davon her, dass für zwei Punkte unter gleicher Breite die Meridiane sich in einem Punkte der Erdaxe schneiden und in ihrem Schnittwinkel daselbst die Konvergenz der Meridian-*Tangenten* genau darstellen.

In erweitertem Sinne wird die Benennung Meridian-Konvergenz für die Azimut-Differenz $\alpha' - \alpha$ dadurch erklärt, dass man den Bogen PP' als unendlich kleine Gerade betrachtet, und die Meridian-Tangenten in P und P' mit entsprechender Näherung als sich schneidend annimmt; denkt man sich den Schnittpunkt T, dann hat man ein langgestrecktes schmales Dreieck $PP'T$, wo PP' die unendlich kleine Gerade und T der Schnittpunkt der beiden Meridian-Tangenten ist. In diesem schmalen ebenen Dreieck ist nun der Winkel bei T gleich $\alpha' - \alpha$.

Es ist auch leicht einzusehen, dass die Meridian-Konvergenz in erster Näherung durch $\lambda \sin \varphi$ ausgedrückt ist, denn wenn die zwei Punkte P und P' in Fig. 1. unter sich unendlich nahe, in der Mittelbreite φ liegen, so ist für den Kugel-Halbmesser r der Parallelkreis-Halbmesser daselbst $= r \cos \varphi$, also der Parallelkreisbogen $= r \cos \varphi \lambda$, aber die Tangentenlänge $PT = P'T = r \cot g \lambda$, also der Winkel bei T gleich $r \cos \varphi \lambda : r \cot g \varphi = \lambda \sin \varphi$.

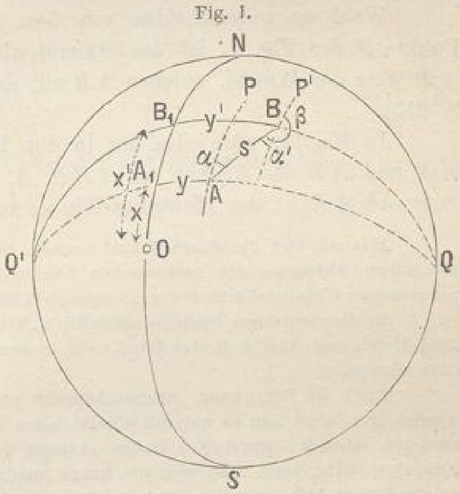
So viel genügt hier zur Wort-Erklärung und zur ersten geometrischen Betrachtung der Meridian-Konvergenz, von welcher später noch weiter gehandelt werden wird.

(Vgl. hiezu Fig. 1. § 61. und die Schlussbemerkungen von § 60.)

§ 46. Rechtwinklige sphärische (Soldner sche) Coordinaten.

Der einfache Grundgedanke der rechtwinkligen sphärischen Coordinaten ist etwa um 1809 von Soldner zur Vermessung des Königreichs Bayern und unabhängig von Bohnenberger in Württemberg angewendet worden, und da diese Vorgänge Nachahmung bei vielen anderen deutschen Vermessungen gefunden haben, werden diese Coordinaten häufig nach Soldner benannt.

Fig. 1.



Wir denken uns in Fig. 1. einen Meridian NOS der kugelförmigen Erde als Anfangsmeridian des Systems angenommen, und darauf einen Punkt O als Ursprung oder Nullpunkt.

Um einen Punkt A durch Coordinaten zu bestimmen, legen wir einen Grosskreisbogen $Q' A_1 A Q$ durch den Punkt A, rechtwinklig zu dem Meridian ON, wobei A_1 auf ON der Fusspunkt der Senkrechten $A A_1$ ist und Q' sowie Q die sogenannten Pole des Meridians SON sind.

Durch den Fusspunkt A_1 wird bestimmt:

$$\left.\begin{array}{l} O A_1 = x, \text{ die Abscisse von } A \\ A_1 A = y, \text{ die Ordinate von } A \end{array}\right\} \quad (1)$$

Wenn noch ein zweiter Punkt B durch Coordinaten bestimmt werden soll, so legt man durch ihn wieder einen Grosskreis $Q' B_1 B Q$, welcher den Fusspunkt B_1 liefert, und durch dieselben Polpunkte Q' und Q geht, wie der Bogen für A.

Durch den Fusspunkt B_1 wird dann bestimmt:

$$\left.\begin{array}{l} O B_1 = x' \text{ die Abscisse von } B \\ B_1 B = y' \text{ die Ordinate von } B \end{array}\right\} \quad (2)$$

Wir zählen die Abscissen x nördlich positiv und die Ordinaten y östlich positiv.

Richtungswinkel.

Ausser den Coordinaten selbst haben wir den Begriff des Richtungs-Winkels festzustellen. Der Richtungs-Winkel α, welcher dem Grosskreisbogen AB in A zukommt, ist der Winkel, welchen dieser Bogen AB mit dem zu dem Meridian von O parallel gezogenen Bogen AP im Punkte A bildet.