Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1896

§. 48. Bestimmung von Entfernung und Richtungswinkeln aus Soldnerschen Coordinaten

Punkt	y	x	
1. Mannheim . .	$0{,}000^m$	$0{,}000^m$	Rechtwinklige sphärische Soldnersche Coordinaten aller Punkte des Netzes Fig. 1. S. 264. Nullpunkt Mannheim mit $+x$ nach Norden, und $+y$ nach Osten. (10)
2. Speyer	$-$ 1 208,142	$-$ 18 816,676	
3. Oggersheim . .	$-$ 6 001,777	$+$ 388,767	
4. Calmit	$-$ 27 414,066	$-$ 18 550,134	
5. Donnersberg . .	$-$ 38 145,688	$+$ 15 278,872	
6. Klobberg . . .	$-$ 18 104,628	$+$ 28 049,296	
7. Melibocus . . .	$+$ 12 727,470	$+$ 26 509,100	
8. Königsstuhl . .	$+$ 19 525,476	$-$ 9 223,075	
9. St. Michael . .	$+$ 7 407,498	$-$ 44 332,386	
10. Langenkandel .	$-$ 19 467,721	$-$ 44 893,918	

Vergleichungen dieser Coordinaten mit den amtlichen Coordinaten von Baden, Bayern Hessen, und Bemerkungen dazu, wurden gegeben in Band I, Aufl. 3. 1888, S. 203—204, II. Band Aufl. 2, 1878, S. 272 und astr. Nachr., 75. Band, 1870, Nr. 1795—1796, S. 289—306 und S. 367.

Der grosse Abriss von S. 265 wäre für die Zwecke der Soldnerschen Coordinaten-Behandlung genügend, wenn er die sphärischen Richtungs-Winkel α und die sphärischen Entfernungen $log\ s$ enthielte. Wir haben aber auch noch die ebenen Richtungs-Winkel α_0 und die ebenen Entfernungen s_0 dazu berechnet, nach den einfachen Formeln:

$$tang\ \alpha_0 = \frac{y'-y}{x'-x}$$

$$s_0 = \frac{y'-y}{sin\ \alpha_0} = \frac{x'-x}{cos\ \alpha}$$

wobei die Coordinaten $x\,y$, $x'\,y'$ selbst die sphärischen in der vorstehenden Tabelle (10) enthaltenen sind. Die Differenzen $\delta\,\alpha$ und $\delta\,log\,s$ sind dann einfach aus $\alpha_0 - \alpha$ und $log\,s_0 - log\,s$ erhalten. Wie man diese $\delta\,\alpha$ und $\delta\,log\,s$ selbständig berechnet, wird im folgenden § 48. gezeigt werden.

Wir haben diese $\delta\,\alpha$ und $\delta\,log\,s$ auf S. 265 mit aufgenommen, auch wegen der späteren Vergleichung mit den konformen Coordinaten.

§ 48. Bestimmung von Entfernung und Richtungs-Winkeln aus Soldnerschen Coordinaten.

Es handelt sich um Umkehrung der bisherigen in § 46.—47. behandelten Aufgabe, und um die Übersicht zu gewinnen, wollen wir an die entsprechenden einfachen Aufgaben der Ebene erinnern. Man hat bekanntlich in der Ebene:

$$y'-y = s\,sin\,\alpha \qquad x'-x = s\,cos\,\alpha \tag{a}$$

$$tang\ \alpha = \frac{y'-y}{x'-x} \quad \text{und} \quad s = \frac{y'-y}{sin\ \alpha} = \frac{x'-x}{cos\ \alpha} \tag{b}$$

$$\text{oder} \quad s = \sqrt{(y'-y)^2 + (x'-x)^2} \tag{c}$$

Während in § 46. die sphärischen Analogieen zu den ebenen Formeln (a) behandelt worden sind, handelt es sich jetzt darum, auch zu den umgekehrten Formeln (b) und (c) das zu finden, was entsprechend auf der Kugel gilt, d. h. wir stellen die Aufgabe: Gegeben sind die sphärischen Coordinaten zweier Punkte P und P', nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ und } y \text{ Coordinaten von } P \\ x' \text{ und } y' \quad \text{"} \qquad \text{"} \ P' \end{array}\right\} \tag{1}$$

Gesucht ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{die Entfernung} & PP' = s \\ \text{der Richtungs-Winkel} & (PP') = \alpha \\ \quad \text{"} \qquad\qquad \text{"} & (P'P) = \beta = \alpha' \pm 180^\circ \end{array}\right\} \tag{2}$$

I. Gemeinsame Formeln für s und α.

Man kann diese Aufgabe lösen durch Umkehrung von (14), (15) § 46. S. 261, wobei in den Korrektions-Gliedern $u = x' - x$ und $v = y' - y$ gesetzt wird. Auf diese Weise erhält man:

$$s \sin \alpha = (y' - y) + \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2} = (y' - y) + \delta y \tag{3}$$

$$s \cos \alpha = (x' - x) - \frac{(x' - x) y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x)(y' - y)^2}{6 r^2} = (x' - x) + \delta x \tag{4}$$

Die hier geschriebenen Zeichen δy und δx sollen nur die Zusammenfassung der Korrektions-Glieder ausdrücken, denn man hat nun weiter:

$$tang\, \alpha = \frac{(y' - y) + \delta y}{(x' - x) + \delta x} \tag{5}$$

$$s = \frac{(y' - y) + \delta y}{\sin \alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{(x' - x) + \delta x}{\cos \alpha} \tag{6}$$

Um auch den Gegenrichtungs-Winkel β zu finden, braucht man nur die Bezeichnungen für die Punkte P und P' umzukehren, was wir nicht durch besondere Formeln von der Form (5) und (6) anzuzeigen für nötig halten (vgl. das nachfolgende Zahlen-Beispiel).

Statt dessen kann man aber auch die Formel (16) § 46. S. 261 anwenden:

$$\alpha' = \alpha - (x' - x)(y' + y) \frac{\varrho}{2 r^2} \tag{7}$$

oder

$$\alpha' = \alpha - (x' - x)\, y \frac{\varrho}{r^2} - (x' - x)(y' - y) \frac{\varrho}{2 r^2} \tag{7a}$$

und dann:

$$\beta = \alpha' \pm 180^\circ \tag{7b}$$

Damit sind alle Bedürfnisse befriedigt; es ist jedoch aus vielen Gründen erwünscht, die Entfernung s auch ohne die Richtungs-Winkel oder andererseits einen oder beide Richtungs-Winkel ohne die Entfernung zu bestimmen.

II. Einzelformel für s.

Um die Entfernung s allein aus den Coordinaten abzuleiten, kann man sofort die Gleichungen (3) und (4) benützen, denn wenn man diese quadriert und addiert, so erhält man:

$$s^2 = \left((y' - y) + \frac{(x' - x)^2 y}{2 r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6 r^2}\right)^2 + \left((x' - x) - \frac{(x' - x) y'^2}{2 r^2} + \frac{(x' - x)(y' - y)^2}{6 r^2}\right)^2$$

Wenn man die Quadrierungen ausführt und dabei alle Glieder von der Ordnung $1 : r^2$ vernachlässigt, so erhält man:

$$s^2 = (y' - y)^2 + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)\, y}{r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)^2}{3\, r^2}$$

$$+ (x' - x)^2 - \frac{(x' - x)^2\, y'^2}{r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)^2}{3\, r^2}$$

Zusammengefasst und geordnet giebt dieses:

$$s^2 = (y' - y)^2 + (x' - x)^2 + \frac{(x' - x)^2}{3\, r^2} \left(3\, y\, (y' - y) + 2\, (y' - y)^2 - 3\, y'^2\right)$$

$$s^2 = (y' - y)^2 + (x' - x)^2 - \frac{(x' - x)^2}{3\, r^2} \left(y^2 + y\, y' + y'^2\right) \tag{8}$$

Hier bezeichnen wir die ersten Glieder, welche der Rechnung mit ebenen Coordinaten entsprechen mit s_0^2, d. h.:

$$(y' - y)^2 + (x' - x)^2 = s_0^2 \tag{9}$$

und da man in den Korrektions-Gliedern s_0 mit s verwechseln kann, wird (8) geben:

$$s^2 = s_0^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{3\, r^2} (y^2 + y\, y' + y'^2)\right)$$

$$s = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6\, r^2} (y^2 + y\, y' + y'^2)\right) \text{ oder } = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6\, r^2} \, \frac{y'^3 - y^3}{y' - y}\right) \tag{10}$$

oder logarithmisch:

$$\log s = \log s_0 - \frac{\mu}{6\, r^2} \cos^2 \alpha \, (y^2 + y\, y' + y'^2) \tag{11}$$

III. Einzelformel für α.

Um auch für α eine unmittelbare Formel zu bekommen, denken wir uns die Formeln (3) und (4) so zerlegt:

$$\left.\begin{aligned} s \sin \alpha &= (y' - y) + d\, y \\ s \cos \alpha &= (x' - x) + d\, x \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wo die Bedeutung von $d\, y$ und $d\, x$ sich durch Vergleichung mit (3) und (4) giebt, d. h. es sind $d\, y$ und $d\, x$ die negativen Werte der oben mit $\delta\, y$ und $\delta\, x$ bezeichneten Zusammenfassungen, oder ausführlich:

$$\left.\begin{aligned} d\, y &= \frac{(x' - x)^2\, y}{2\, r^2} + \frac{(x' - x)^2 (y' - y)}{6\, r^2} \\ d\, x &= -\frac{(x' - x)\, y'^2}{2\, r^2} + \frac{(x' - x)\, (y' - y)^2}{6\, r^2} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wir wollen auch α selbst entsprechend zerlegt denken in $\alpha_0 + d\, \alpha$ und haben dann:

$$\alpha = \alpha_0 + d\, \alpha = \operatorname{arc\,tang} \frac{(y' - y) + d\, y}{(x' - x) + d\, x} \tag{14}$$

Nach dem Taylorschen Satze giebt dieses:

$$\alpha_0 = arc\ tang \frac{y' - y}{x' - x} \tag{15}$$

und

$$d\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'-y}{x'-x}\right)^2} \frac{dy}{x' - x} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y'-y}{x'-x}\right)^2} \frac{y' - y}{(x' - x)^2} dx$$

$$d\alpha = \frac{x' - x}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} dy - \frac{y' - y}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} dx \tag{16}$$

Setzt man die oben bei (13) erklärten Bedeutungen von dy und dx ein, so erhält man aus (16):

$$d\alpha = \frac{(x' - x)y}{2r^2} \cos^2\alpha + \frac{(x' - x)(y' - y)}{6r^2} \cos^2\alpha + \frac{y'^2}{2r^2} \cos\alpha \sin\alpha - \frac{(x' - x)(y' - y)}{6r^2} \sin^2\alpha \tag{17}$$

Dieses kann auch so geschrieben werden:

$$d\alpha = \frac{(x' - x)y}{2r^2} \cos^2\alpha + \frac{y'^2}{4r^2} \sin 2\alpha + \frac{(x' - x)(y' - y)}{6r^2} \cos 2\alpha \tag{18}$$

Nützlicher ist noch eine andere Umformung von (17), welche im dritten Gliede von (17) den Faktor $sin^2\alpha$ erzeugt, nämlich:

$$d\alpha = \frac{x' - x}{6r^2} \cos^2\alpha\,(2y + y') + \frac{x' - x}{6r^2} \sin^2\alpha \left(\frac{3y'^2}{y' - y} - (y' - y)\right)$$

hier ist

$$\frac{3y'^2}{y' - y} - (y' - y) = 2y + y' + \frac{y^2 + yy' + y'^2}{y' - y}$$

und setzt man dieses in das vorhergehende ein, so bekommt man:

$$d\alpha = \frac{x' - x}{6r^2}(2y + y') + \frac{x' - x}{6r^2 s^2}(y'^3 - y^3) \tag{19}$$

Dieses $d\alpha$ ist die Verbesserung, welche an dem Näherungswert α_0 von (15) noch anzubringen ist; man kann also im Zusammenhang für den Richtungs-Winkel von einem Punkte P (mit x, y) nach P' (mit x', y') schreiben, zugleich mit Zusetzung der nötigen ϱ:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\varrho}{6r^2}(x' - x)(2y + y') + \frac{\varrho}{6r^2} \frac{x' - x}{s^2}(y'^3 - y^3) \tag{20}$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\varrho}{6r^2}(x' - x)(2y + y') + \frac{\varrho}{6r^2}(y^2 + yy' + y'^2) \sin\alpha \cos\alpha \tag{20a}$$

Auf den jenseitigen Punkt angewendet giebt diese Formel:

$$\alpha' = \alpha_0 + \frac{\varrho}{6r^2}(x - x')(y + 2y') + \text{zweites Glied von oben.}$$

Diese beiden Formeln geben subtrahiert:

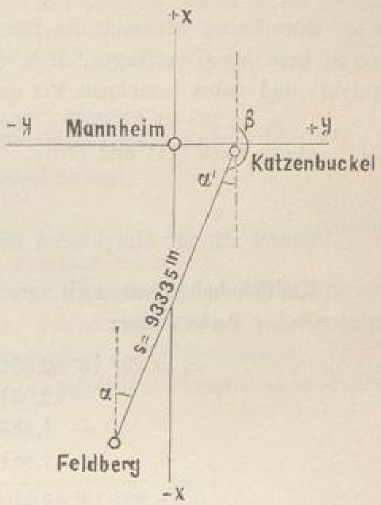
$$\alpha' - \alpha = \frac{\varrho}{2r^2}(x' - x)(y + y') \tag{21}$$

Dieses ist wieder die Formel für die Ordinaten-Konvergenz nach (11) § 46. S. 261, was auch unmittelbar eingesehen werden kann.

IV. Zahlenbeispiele.

Um die vorstehenden Formeln anzuwenden, kann man in den Zahlenangaben von § 47. reiche Gelegenheit finden, indem aus den Coordinaten von (10) S. 269 sich die Richtungs-Winkel und die Entfernungen des grossen Abrisses S. 265 wieder rückwärts finden lassen müssen. Dieses als Übung anheimgebend, wollen wir ein grösseres Zahlenbeispiel hier durchrechnen, bei welchem die Korrektions-Glieder mehr ausmachen.

Fig. 1.
Massstab 1 : 5 000 000.



Nach nebenstehender Fig. 1. nehmen wir die zwei Punkte Katzenbuckel und Feldberg in dem badischen Coordinatensystem (1870—1871 von uns festgelegte und ins badische System eingerechnete Gradmessungspunkte). Die mittlere Breite ist rund $= 49°$ und dazu

$$log \frac{1}{r^2} = 6.39031.$$

Die nachfolgenden Rechnungen sind nicht bloss 7stellig sondern mit dem 10stelligen Thesaurus gemacht, um die Proben formell jedenfalls bis auf 0,001″ zum Stimmen zu bringen, was bei diesem Schulbeispiel formell erwünscht ist.

K, Katzenbuckel	$y' = +\,42\,176{,}169^m$	$x' = -\quad 1\,575{,}546^m$
F, Feldberg	$y = -\,34\,075{,}071$	$x = -\,179\,239{,}479$
	$y' - y = +\,76\,251{,}240$	$x' - x = +\,177\,663{,}933$
Hiezu werden die Korrektions-glieder nach (3) u. (4) berechnet:	$\delta y \begin{cases} -13{,}210 \\ +\;\;9{,}854 \end{cases}$	$\delta x \begin{cases} -3{,}881 \\ +4{,}229 \end{cases}$
	$(y' - y) + \delta y = +\,76247{,}884$	$(x' - x) + \delta x = +\,177\,664{,}281$

damit geben die Formeln (5) und (6):

$$(F\,,\,K) = \alpha = 23°\,13'\,38{,}920'' \quad log\, s = 5.286\,3099{\cdot}9 \quad s = 193\,334{,}779^m \qquad (21)$$

Die Umkehrung der Bezeichnungen giebt:

F, Feldberg	$y' = -\,34\,075{,}071^m$	$x' = -\,179\,239{,}479^m$
K, Katzenbuckel	$y = +\,42\,176{,}169$	$x = -\quad 1\,575{,}546$
	$y' - y = -\,76\,251{,}240$	$x' - x = -\,177\,663{,}933$
Korrektionsglieder nach (3) und (4)	$\delta y \begin{cases} +16{,}350 \\ -\;\;9{,}854 \end{cases}$	$\delta x \begin{cases} +2{,}534 \\ -4{,}229 \end{cases}$
	Zähler $= -\,76\,244{,}744$	Nenner $= -\,177\,665{,}628$

damit wieder nach (5) und (6):

$$(K\,,\,F) = \beta = 203°\,13'\,35{,}275'' \quad log\, s = 5.286\,3099{\cdot}8 \quad s = 193\,334{,}778^m \quad (22)$$

Durch (21) und (22) ist also bereits die Entfernung s auf $0{,}001^m$ sicher gestellt.

Um auch die Richtungs-Winkel α und β zu versichern, hat man nach (7) und (7 a) die Differenz beider Richtungs-Winkel und zwar bei (7 a) abermals doppelt, je nachdem man die Bezeichnungen P und P' entsprechend F und K, oder umgekehrt, wählt; man bekommt für unser Beispiel:

$$\text{aus (7):}\quad \alpha' - \alpha = -\ 3{,}646'' \tag{23}$$
$$\text{aus (7a):}\quad \alpha' - \alpha = +30{,}674'' - 34{,}320'' = -3{,}646'' \tag{23a}$$
$$\text{oder ,, ,, :}\quad \beta' - \beta = +37{,}966 - 34{,}320 = +3{,}646'' \tag{23b}$$

Diese 3 Werte stimmen unter sich, und mit der Differenz von (21) und (22), welche 3,645″ beträgt, auf 0,001″.

Nun haben wir noch die Formeln (10) und (11), welche zuerst eine Berechnung von s_0 bzw. $log\, s_0$ verlangen, d. h. eine Berechnung, welche ebenen Coordinaten entspricht; und dabei berechnen wir auch zugleich einen ebenen Wert α_0:

$$\alpha_0 = 23^\circ\, 13'\, 42{,}356'' \qquad log\, s_0 = 0.286\,3122{\cdot}4 \qquad s_0 = 193\,335{,}782^{m} \tag{24}$$

Hiezu nach (11) und (10): $\qquad -22{\cdot}6 \qquad -1{,}004$

$$log\, s = 5.286\,3099{\cdot}8 \qquad s = 193\,334{,}778 \tag{25}$$

Dieses stimmt hinreichend mit (21) und (22).

Endlich haben wir noch verschiedene Formeln für $d\,\alpha$. Die Formel (18) giebt in zweifacher Anwendung:

$$\begin{array}{rl} \alpha_0 = & 23^\circ\, 13'\, 42{,}356'' \\ & -12{,}951 \\ & +\ \ 1{,}633 \\ & +\ \ 7{,}881 \\ \hline \alpha = & 23^\circ\, 13'\, 38{,}919'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \beta_0 = & 203^\circ\, 13'\, 42{,}356'' \\ & -16{,}030 \\ & +\ \ 1{,}066 \\ & +\ \ 7{,}881 \\ \hline \beta = & 203^\circ\, 13'\, 35{,}273'' \end{array} \tag{26}$$

Endlich giebt die Formel (20) ebenfalls zweifach:

$$\begin{array}{rl} \alpha_0 = & 23^\circ\, 13'\, 42{,}356'' \\ & -3{,}897 \\ & +0{,}460 \\ \hline \alpha = & 23^\circ\, 13'\, 38{,}919'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \beta_0 = & 203^\circ\, 13'\, 42{,}356'' \\ & -7{,}543 \\ & +0{,}460 \\ \hline \beta = & 203^\circ\, 13'\, 35{,}273'' \end{array} \tag{27}$$

Damit ist alles mit zahlreichen Proben berechnet, man sieht, dass man mit solchen sphärischen Coordinaten alles rechnen kann, was auch in der Ebene vorkommt, allein die neben der Hauptrechnung herlaufenden Korrektions-Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ machen doch ziemlich viele Mühe und wir wollen gleich hier bemerken, dass bei den konformen Coordinaten, welche wir später (§ 50.) kennen lernen werden, die Nebenrechnungen mit $1 : r^2$ erheblich einfacher und zugleich viel übersichtlicher werden.

Ein weiteres Zahlenbeispiel mit Soldner schen Coordinaten, nämlich sphärisches Rückwärts-Einschneiden bei gegebenen Coordinaten dreier Zielpunkte hatten wir in 2. Aufl., II. Band 1878, S. 278—279 ausführlichst und in 3. Aufl., III. Band 1890, S. 276—277 noch im Auszug gebracht, welches nun übergangen werden mag.

Die „Soldner schen“ Coordinaten, welche in den vorstehenden § 46.—48. behandelt wurden, sind zuerst öffentlich mitgeteilt von Bohnenberger in der Abhandlung „De computandis dimensionibus trigonometricis etc.“ Tübingen 1826, § 15—16, und Bohnenberger sagt dazu in § 16: „formulae (entsprechend unseren (14), (15), (16) § 46. S. 261) conveniunt cum iis, quibus usus est cel. Soldner in computandis dimensionibus bavaricis.“ In Württemberg sind diese Coordinaten zur Landesvermessnng eingeführt und Bohnenbergers Entwicklungen stets hochgehalten worden, wie namentlich zu ersehen ist aus „Pross, Lehrbuch der praktischen Geometrie“, Stuttgart 1838, S. 314 und aus dem amtlichen Werke von Kohler, „die Landesvermessung des Königreichs Württemberg u. s. w. 1858“, S. 125—146.

Von Württemberg aus gelangten diese Coordinaten auch in die Bayerische geodätische Litteratur, nämlich in Bauernfeinds „Elemente der Vermessungskunde, 1. Auflage, II. Band 1858", S. 201—206, wo (ohne Quellenangabe) ein Auszug aus Bohnenberger „De computandis etc." § 15—17 mit drei Zahlenbeispielen Bohnenbergers gegeben sind als „Berechnung einiger Dreiecke der württembergischen Vermessung."

Soldners Entwicklungen, von 1810 stammend, wurden erst 1873 veröffentlicht in „Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage", München 1873, S. 263—281.

Alle diese Schriften geben die Grundformeln (14)—(16) § 46. S. 261 und in Betreff der Umkehrung nur die Formeln (3)—(7) S. 270. Die weiteren Formeln (10)—(20) S. 271—272 sind zuerst aufgestellt in unserer 1. Auflage, „Taschenbuch der praktischen Geometrie 1873", S. 326.

§ 49. Karten-Zeichnung nach rechtwinkligen sphärischen (Soldnerschen) Coordinaten.

Man benützt die rechtwinkligen sphärischen Coordinaten zur Karten-Zeichnung, indem man dieselben wie rechtwinklige *ebene* Coordinaten behandelt.

Dadurch erhält man ein verzerrtes Bild der krummen Erdoberfläche in der Ebene, und es ist unsere Aufgabe, die Verzerrungen, welche hier, wie bei allen anderen ebenen Abbildungen der Erdoberfläche unvermeidlich sind, zu untersuchen.

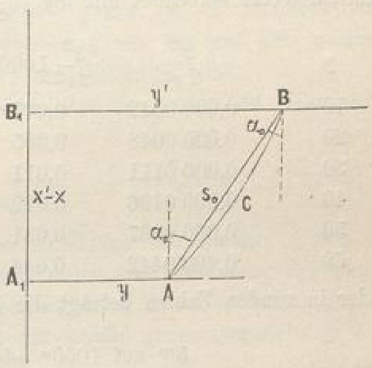
Hiezu brauchen wir nur die bereits in § 48. entwickelten Formeln anzuwenden.

Wir haben von (10) und (9) § 48. S. 271.

$$s = s_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{6\,r^2} (y^2 + y\,y' + y'^2)\right) \qquad (1)$$

$$s_0 = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2} \qquad (2)$$

Fig. 1.
Soldnersche Coordinaten in ebener Darstellung.



Indem wir in Fig. 1. die Punkte A und B mit ihren Coordinaten x, y und x', y' im ebenen System dargestellt haben, finden wir offenbar die Entfernung s_0 von (2) als *geradlinige* Entfernung $A\,B$, und man benützt das Verhältnis dieser geradlinigen Karten-Entfernung s_0 zu der wahren Entfernung s zur Berechnung des Verzerrungs-Verhältnisses, d. h. man setzt:

$$v = \frac{s_0}{s} = 1 + \frac{y^2 + y\,y' + y'^2}{6\,r^2} \cos^2 \alpha \qquad (3)$$

Für eine sehr kurze Linie s ist $y' = y$ zu setzen, und dann hat man:

$$v = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \cos^2 \alpha \qquad (4)$$

Dieses ist der allgemeine Ausdruck für die Vergrösserung einer kurzen Linie in irgend einem Punkte mit der Ordinate y, in der Richtung α. Die Vergrösserung v ist nicht abhängig von der Abscisse x, sondern nur von der Ordinate y und von der Richtung α. In Bezug auf α erreicht v seine äussersten Werte mit $\alpha = 0°$ oder $180°$ einerseits und mit $\alpha = 90°$ oder $270°$ andererseits, nämlich:

$$\alpha = \;\; 0° \text{ giebt } v_{max} = 1 + \frac{y^2}{2\,r^2} \text{ (Meridian, } x\text{-Axe)} \qquad (5)$$

$$\alpha = 90° \;\; „ \;\; v_{min} = 1 \qquad \text{(West-Ost, } y\text{-Axe)} \qquad (6)$$